



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Modellering av Covid-19 m.h.a Ordinära Differentialekvationer

av

Karin Nordin

2023 - K18

Modellering av Covid-19 m.h.a Ordinära Differentialekvationer

Karin Nordin

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Pavel Kurasov

2023

Abstract

This paper presents and analyses mathematical models based on ordinary differential equations (ODE) to study infectious diseases, in particular the Covid-19 pandemic in Sweden. The aim of the models are to capture the relations between the different stages in the model. The main focus in this paper is to study analytical solutions to the two models; Susceptible-Infected-Recovered (SIR) and Susceptible-Exposed-Infected-Recovered (SEIR) and compare these solutions to numerical solutions. Using available data from the Covid-19 pandemic in Sweden the two models and their parameters will be calibrated to fit said data to show how important mathematical modeling can be to forecast the spread of infectious diseases.

Sammanfattning

Denna uppsats presenterar och analyserar matematiska modeller baserade på ordinära differentialekvationer (ODE) för att studera infektionssjukdomar, särskilt Covid-19-pandemin i Sverige. Målet med modellerna är att fånga relationerna mellan de olika stadierna i modellen. Huvudfokus i denna artikel är att studera analytiska lösningar på de två modellerna; Susceptible-Infected-Recovered (SIR) och Susceptible-Exposed-Infected-Recovered (SEIR) och jämföra dessa lösningar med numeriska lösningar. Med hjälp av tillgängliga data från Covid-19-pandemin i Sverige kommer de två modellerna och deras parametrar att kalibreras för att passa data och visa hur viktig matematisk modellering kan vara för att förutsäga spridningen av infektionssjukdomar.

Tack till...

...min handledare Pavel Kurasov för inspiration till att skriva detta arbete och givande diskussioner. Tack till Tom Britton för konsultation i början av arbetet. Tack till kurskamrater som lyssnat och gett tips. Tack till familj och vänner för uppmuntrande ord, stöd och peppning när det behövts.

INNEHÅLL

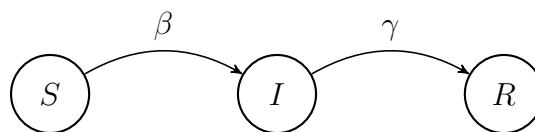
1	Introduktion	7
1.1	Bakgrund	7
1.2	Koefficienter	8
1.3	Antaganden	8
2	SIR-modellen	9
2.1	Definitioner och generella satser	9
2.2	Analytisk lösning	10
2.3	Verifiering av analytisk lösning	14
3	SEIR-modellen	15
3.1	Analytisk lösning	15
4	Simuleringar av Covid-19	20
4.1	SIR	20
4.2	SEIR	22
4.3	Olika värden på β	24
5	Analys och Resultat	25
	Referenser	26
A	APPENDIX	27

INTRODUKTION

1.1 BAKGRUND

Smittspridningsmodellen SIR togs fram av Ronald Ross, William Hamer med flera under början på 1900-talet. Modellen bygger på att dela in befolkningen (N) i tre kategorier; mottaglig (S), infekterad (I) och återhämtad (R) där det antas att personer kan röra sig från mottaglig till infekterad och sen till återhämtad.

SIR



Systemet av ordinära differentialekvationer ser ut som följande

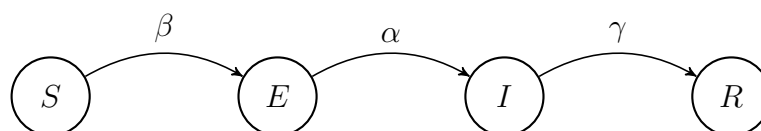
$$\dot{S} = -\beta SI \quad (1)$$

$$\dot{I} = \beta SI - \gamma I \quad (2)$$

$$\dot{R} = \gamma I. \quad (3)$$

Det finns många variationer på SIR-modellen, bland annat SIS, SIRV, SIRD och SEIR med flera, förutom SIR-modellen kommer denna uppsats även fokusera på SEIR-modellen. Där har kategorin exponerad (E) lagts till.

SEIR



Motsvarande system av differentialekvationer för SEIR-modellen är

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\beta SI \\ \dot{E} &= \beta SI - \alpha E \\ \dot{I} &= \alpha E - \gamma I \\ \dot{R} &= \gamma I\end{aligned}$$

där kategorin (E) kan ses som inkubationstid.

1.2 KOEFFICIENTER

Koefficienterna i systemen motsvarar övergångstakter (*transition rates*) där β är infektionsfrekvensen, där βSI är antalet nya infekterade personer per tidsenhet. Koefficienten γ är tillfrisknadsfrekvensen (*recovery rate*). Den sista koefficienten α i SEIR-modellen är andelen tid som tillbringas i kategorin (E). För Covid-19 är tiden då en person smittsam cirka 5.1 dagar, det vill säga $\gamma \approx 0.2$.

1.3 ANTAGANDEN

Följande antaganden är gjorda för modellerna;

- Det finns en homogen blandning mellan individerna i de olika kategorierna.
- Den totala populationen N är konstant (inga naturliga födslar eller dödsfall) och stor.
- Efter genomgången infektion har individen livslång immunitet, det är även det enda sättet att uppnå immunitet.
- För SIR-modeller gäller även att det inte finns någon inkubationstid och en individ går från smittad till smittsam omedelbart.

2

SIR-MODELLEN

2.1 DEFINITIONER OCH GENERELLA SATSER

Definition 2.1. Det effektiva reproduktionstalet R_e definieras som $R_e = \frac{S(0)\beta}{\gamma}$. Det basala reproduktionstalet (även kallat reproduktionstalet) R_0 definieras som $R_0 = \frac{\beta N}{\gamma}$, så det effektiva reproduktionstalet kan skrivas som $R_e = \frac{S(0)}{N} R_0$.

Sats 2.2. *Sjukdomen dör alltid ut, det vill säga $I(\infty) = 0$.*

Bevis. Antag motsatsen, att $I(\infty) \neq 0$, det innebär att för stora t gäller $\dot{R} > \gamma I(\infty)/2 > 0$, vilket implicerar att $R(\infty) = \infty$. Vi har en motsägelse [6].

□

Sats 2.3.

- Om $R_e \leq 1$, så avtar $I(t)$ monotont till 0 då $t \rightarrow \infty$.
- Om $R_e > 1$, så kommer $I(t)$ växa till dess maximum för att sen avta till 0 då $t \rightarrow \infty$.

Bevis. Från (2) får vi

$$\begin{aligned}\dot{I} &= \beta SI - \gamma I \\ &= (\beta S - \gamma)I \\ &\leq (\beta S(0) - \gamma)I \\ &= \gamma \left(\frac{\beta S(0)}{\gamma} - 1 \right) I \\ &= \gamma(R_e - 1)I \leq 0, \text{ då } R_e \leq 1.\end{aligned}$$

Det tillsammans med Sats 2.2 ger det första påståendet.

För det andra påståendet gäller

$$\dot{I}(0) = \gamma(R_e - 1)I(0) > 0, \text{ då } R_e > 1.$$

Så $I(t)$ är växande då $t = 0$ och för alla små t sådana att $\beta S(t) - \gamma > 0$. Enligt Sats 2.2 så gäller $I(\infty) = 0$. Alltså finns en extrempunkt t_0 då $I'(t_0) = 0$, det vill säga då $\beta S(t) - \gamma = 0$. Efter detta blir derivatan negativ och $I(t)$ avtar mot 0 då t går mot ∞ . Det bör även påpekas att denna sats endast gäller SIR-modellen och inte SEIR-modellen. \square

Sats 2.4. *Givet att v_1, \dots, v_n är en bas av egenvektorer för en matris A och $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ är motsvarande egenvärden, så kan den generella lösningen till ekvationssystemet $x' = Ax$ skrivas på formen*

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} v_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} v_2 + \dots + C_n e^{\lambda_n t} v_n.$$

där C_1, C_2, \dots, C_n är konstanter.

Bevis. Se [1] \square

2.2 ANALYTISK LÖSNING

En Analytisk lösning för SIR-modellen, lösningen starkt inspirerad av den gjord av T. Harko, F. Lobo och M. Mak från [3]. Vi har ekvationssystemet

$$\dot{S} = -\beta SI \tag{4}$$

$$\dot{I} = \beta SI - \gamma I \tag{5}$$

$$\dot{R} = \gamma I \tag{6}$$

med begynnelsevillkor

$$S(0) = N_1, \tag{7}$$

$$I(0) = N_2, \tag{8}$$

$$R(0) = N_3, \tag{9}$$

$$N = N_1 + N_2 + N_3 \tag{10}$$

där N är den totala populationen. Vi deriverar först (4)

$$S'' = -\beta S' I - \beta S I' \quad (11)$$

$$\Rightarrow S I' = -\frac{1}{\beta} S'' - S' I. \quad (12)$$

Från (4) löser vi ut

$$I = -\frac{S'}{S\beta} \quad (13)$$

insättning av (13) i (12) ger

$$I' = -\frac{1}{\beta} \left(\frac{S''}{S} - \left(\frac{S'}{S} \right)^2 \right). \quad (14)$$

Insättning av (13) i (5) tillsammans med (14)

$$-\frac{1}{\beta} \left(\frac{S''}{S} - \left(\frac{S'}{S} \right)^2 \right) = \beta S \left(-\frac{S'}{\beta S} \right) - \gamma \left(-\frac{S'}{\beta S} \right) \quad (15)$$

$$\Rightarrow \frac{S''}{S} - \left(\frac{S'}{S} \right)^2 = \beta S' - \gamma \frac{S'}{S}. \quad (16)$$

Insättning av (13) i (6) ger

$$R' = -\frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{S'}{S} \right) \quad (17)$$

$$\Rightarrow R = -\frac{\gamma}{\beta} \int \frac{1}{S} dS \quad (18)$$

$$\Rightarrow R = -\frac{\gamma}{\beta} \ln S + C_1 \quad (19)$$

$$\Rightarrow S = C_2 e^{-\frac{\beta}{\gamma} R}. \quad (20)$$

Vid $t = 0$ får vi integrationskonstanten C_2 till

$$C_2 = N_1 e^{\frac{\beta}{\gamma} N_3}. \quad (21)$$

Derivering av (20) ger

$$S' = -\frac{\beta}{\gamma}C_2e^{-\frac{\beta}{\gamma}R}R'. \quad (22)$$

Derivering av (17) ger

$$R'' = -\frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{S''}{S} - \left(\frac{S'}{S} \right)^2 \right). \quad (23)$$

Insättning av (17), (22) och (23) i (16) ger

$$R'' = \beta C_2 e^{-\frac{\beta}{\gamma}R} R' - \gamma R', \quad (24)$$

vilket är ekvivalent med ekvationsystemet (4)-(6). Nu löser vi den icke-lineära differentialekvationen (24). Definera

$$u(t) = e^{-\frac{\beta}{\gamma}R(t)} \quad (25)$$

$$u(0) = e^{-\frac{\beta}{\gamma}N_3}, \quad (26)$$

vilket innebär att

$$R = -\frac{\gamma}{\beta} \ln u \quad (27)$$

$$R' = -\frac{\gamma}{\beta} \frac{1}{u} u' \quad (28)$$

$$R'' = -\frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{u''}{u} - \left(\frac{u'}{u} \right)^2 \right). \quad (29)$$

Substituering av (27)-(29) i (24) ger då

$$-\frac{\gamma}{\beta} \left(\frac{u''}{u} - \left(\frac{u'}{u} \right)^2 \right) = \beta C_2 u \left(-\frac{\gamma}{\beta} \frac{u'}{u} \right) - \gamma \left(-\frac{\gamma}{\beta} \frac{u'}{u} \right), \quad (30)$$

$$(31)$$

multiplikering av båda sidor med $\frac{bu^2}{\gamma}$ och förenkling ger då

$$u''u - (u')^2 + u'u(\gamma - C_2\beta u) = 0 \quad (32)$$

Definiera nu

$$\phi = \frac{dt}{du}, \quad (33)$$

$$(34)$$

då fås

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\phi} \quad (35)$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\frac{\phi'}{\phi^2}. \quad (36)$$

Substituering av (35),(36) i (32) ger då

$$-u \frac{\phi'}{\phi^2} - \frac{1}{\phi^2} + u(\gamma - C_2\beta u) \frac{1}{\phi} = 0 \quad (37)$$

efter multiplicering av $\frac{\phi^3}{u}$ och iakttagelse av att $\phi\phi' = \frac{d\phi}{dt} \frac{dt}{du} = \frac{d\phi}{du}$ erhålles

$$\frac{d\phi}{du} + \frac{1}{u}\phi = (\gamma - C_2\beta u)\phi^2. \quad (38)$$

Detta är en differentialekvation av Bernoulli-typ. Låt $v = \phi^{-1}$, då fås

$$v' = -\frac{1}{\phi^2}\phi', \quad (39)$$

$$(40)$$

Då transformeras (38) till den lineära differentialekvationen

$$v' - \frac{1}{u}v = C_2\beta u - \gamma \quad (41)$$

som har integrerande faktor u^{-1} .

$$\frac{1}{u}v' - \frac{1}{u^2}v = C_2\beta - \frac{\gamma}{u} \quad (42)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{du} \left[\frac{1}{u}v \right] = C_2\beta - \frac{\gamma}{u} \quad (43)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u}v = \int \left(C_2\beta - \frac{\gamma}{u} \right) du \quad (44)$$

$$\Rightarrow v = u(\beta C_2 u - \gamma \ln u + C_3) \quad (45)$$

$$\Rightarrow \phi = \frac{1}{u(\beta C_2 u - \gamma \ln u + C_3)} \quad (46)$$

där C_3 är en godtycklig integrationskonstant och $C_2 = N_1 e^{\frac{\beta}{\gamma} N_3}$.

Vidare gäller då att

$$t = \int_{u_0}^u \frac{1}{\xi(\beta C_2 \xi - \gamma \ln \xi + C_3)} d\xi$$

2.3 VERIFIERING AV ANALYTISK LÖSNING

För SIR-modellen fick vi lösningen

$$\begin{aligned} t &= \int_{u_0}^u \frac{1}{\xi(\beta C_2 \xi - \gamma \ln \xi + C_3)} d\xi \\ &= \int_{x_0}^x \frac{1}{\xi(\beta \xi - \gamma \ln \left(\frac{\xi}{C_2} \right) + C_3)} \end{aligned}$$

ty $u = \frac{x}{C_2}$. Derivering av båda sidor ger

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{dx}{dt} \frac{1}{x(\beta x - \gamma \ln \left(\frac{x}{C_2} \right) + C_3)} \\ \Rightarrow \frac{dx}{dt} &= x(\beta x - \gamma \ln \left(\frac{x}{C_2} \right) + C_3). \end{aligned}$$

Från (27) får vi då att

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(\beta x + \beta z - \beta N) \\ &= -\beta xy. \end{aligned}$$

SEIR-MODELLEN

3.1 ANALYTISK LÖSNING

Första delen av lösningen, fram till och med beräkning av $I(t), E(t)$ då $r \neq 1$ är inspirerad av N. Piovella från [5]. Vid kontrollräkning av lösningarna i den publicerade artikeln av N. Piovella upptäcktes fel i lösningen då $r = 1$ ¹, lösningen som presenteras i denna uppsats är min egen. Vi har ekvationssystemet

$$\dot{S} = -\beta SI \quad (47)$$

$$\dot{E} = \beta SI - \alpha E \quad (48)$$

$$\dot{I} = \alpha E - \gamma I \quad (49)$$

$$\dot{R} = \gamma I \quad (50)$$

$$(51)$$

Låt $R_0 = r$ vara definierad som i Definition 2.1. Vi får då

$$\dot{S} = -r\gamma \frac{S}{N} I \quad (52)$$

$$\dot{E} = r\gamma \frac{S}{N} I - \alpha E \quad (53)$$

$$\dot{I} = \alpha E - \gamma I \quad (54)$$

$$\dot{R} = \gamma I \quad (55)$$

$$(56)$$

där $S + E + I + R = N$. Summering av ekvationerna ger $\dot{S} + \dot{E} + \dot{I} + \dot{R} = 0$, det vill säga N är konstant och $N(t) = N(0)$. Om $E(t), I(t), R(t) \ll N(t)$ så kan $N(t)$

¹Nicola Piovella erkände misstaget och tackade mig för korrigerig.

approximeras med $N \sim S$ vilket ger oss det lineära systemet

$$\begin{aligned}\dot{S} &= r\gamma I \\ \dot{E} &= r\gamma I - \alpha E \\ \dot{I} &= \alpha E - \gamma I \\ \dot{R} &= \gamma I.\end{aligned}$$

Genom Laplace-transformation, som kommer noteras $\mathcal{L}\{f\}(s) = \tilde{f}$ fås

$$\tilde{E}(\lambda) = \int_0^\infty E(t)e^{-\lambda t} dt \quad (57)$$

$$\tilde{I}(\lambda) = \int_0^\infty I(t)e^{-\lambda t} dt. \quad (58)$$

Ekvationsystemet blir då

$$\begin{cases} \dot{\tilde{E}} &= r\gamma\tilde{I} - \alpha\tilde{E} \\ \dot{\tilde{I}} &= \alpha\tilde{E} - \gamma\tilde{I} \end{cases} \quad (59)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda\tilde{E} + \alpha\tilde{E} - r\gamma\tilde{I} = E_0 \\ \lambda\tilde{I} + \gamma\tilde{I} - \alpha\tilde{E} = I_0 \end{cases} \quad (60)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} \lambda + \alpha & -r\gamma \\ -\alpha & \lambda + \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{E} \\ \tilde{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_0 \\ I_0 \end{pmatrix} \quad (61)$$

Egenvärdena fås genom att beräkna

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} \lambda + \alpha & -r\gamma \\ -\alpha & \lambda + \gamma \end{vmatrix} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^2 + (\alpha + \gamma)\lambda + \alpha\gamma(1 - r) &= 0 \\ \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2} \left(-4\alpha\gamma(1 - r) + (\alpha + \gamma)^2 \right) - \frac{\alpha + \gamma}{2}.\end{aligned}$$

Låt $\Delta = (\alpha + \gamma)^2 + 4\alpha\gamma(r - 1)$, beroende på värdet på r , vi får de tre olika resultaten

- $r > 1$:
 $\sqrt{\Delta} = \sqrt{(\alpha + \gamma)^2 + 4\alpha\gamma(r - 1)} > \alpha + \gamma$
 $\lambda_+ = -\frac{\alpha + \gamma}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} > -\frac{\alpha + \gamma}{2} + \frac{1}{2}(\alpha + \gamma) = 0$
 $\lambda_- = -\frac{\alpha + \gamma}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{\Delta} = -\frac{1}{2}(\alpha + \gamma + \sqrt{\Delta}) < 0.$

- $r = 1$:
 $\sqrt{\Delta} = \alpha + \gamma$
 $\lambda_+ = 0$
 $\lambda_- = -(\alpha + \gamma)$.

- $r < 1$:
 $\sqrt{\Delta} < \alpha + \gamma$
 $\lambda_+ < 0$
 $\lambda_- < 0$.

Då $r \neq 1$, genom att lösa ut \tilde{E} från (60) fås

$$\tilde{E} = \frac{r\gamma I_0 + \gamma E_0 + \lambda E_0}{-r\gamma\lambda + \gamma\lambda + \alpha\gamma + \lambda^2 + \alpha\lambda},$$

kvadratkomplettering av nämnaren och faktorisering av täljaren ger

$$\tilde{E} = \frac{\lambda E_0 + \gamma(rI_0 + E_0)}{\left(\lambda + \left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{1}{4}((\alpha + \gamma)^2 + 4\alpha\gamma(r - 1))\right)}$$

där den högra termen i nämnaren identifieras som $\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2$. Vidare utveckling av uttrycket ger

$$\tilde{E} = \frac{E_0\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} \frac{\lambda + \left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{\left(\lambda + \left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2} \quad (62)$$

$$+ \frac{E_0(\gamma - \alpha) + 2\gamma r I_0}{\sqrt{\Delta}} \frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}}{\left(\lambda + \left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2} \quad (63)$$

$$\Rightarrow E(t) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left(\sqrt{\Delta} E_0 \cosh \frac{\sqrt{\Delta} t}{2} + (E_0(\gamma - \alpha) + 2\gamma r I_0) \sinh \frac{\sqrt{\Delta} t}{2} \right) e^{-(\alpha+\gamma)\frac{t}{2}}. \quad (64)$$

Vi löser ut \tilde{I} från (60) och får

$$\tilde{I} = \frac{\lambda I_0 + \alpha(E_0 + I_0)}{\lambda^2 + (\alpha + \gamma)\lambda - \alpha\gamma(r - 1)}$$

På liknande sätt som ovan ger utveckling av uttrycket

$$\begin{aligned}\tilde{I} &= \frac{I_0\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Delta}} \frac{\lambda + \left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)}{\left(\lambda + \left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2} \\ &+ \frac{I_0(\alpha - \gamma) + 2\alpha E_0}{\sqrt{\Delta}} \frac{\frac{\sqrt{\Delta}}{2}}{\left(\lambda + \left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^2} \\ \Rightarrow I(t) &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left(\sqrt{\Delta} I_0 \cosh\left(\frac{\sqrt{\Delta}t}{2}\right) + (I_0(\alpha - \gamma) + 2\alpha I_0) \sinh\left(\frac{\sqrt{\Delta}t}{2}\right) \right) e^{-(\alpha+\gamma)\frac{t}{2}}\end{aligned}$$

Då $r = 1$ och $\lambda_{\pm} = 0, -(\alpha + \gamma)$ kan, enligt sats 2.4 lösningen skrivas på formen

$$C_1 e^{\lambda-t} v_1 + C_2 e^{\lambda+t} v_2$$

med motsvarande egenvektorer

$$v_1 = \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Konstanterna C_1 och C_2 fås genom att lösa systemet

$$\begin{cases} C_1\gamma + C_2 = E_0 \\ C_1\alpha - C_2 = I_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{E_0 + I_0}{\alpha + \gamma} \\ C_2 = \frac{\alpha E_0 - \gamma I_0}{\alpha + \gamma} \end{cases}.$$

Alltså blir lösningen

$$\begin{pmatrix} E(t) \\ I(t) \end{pmatrix} = \frac{E_0 + I_0}{\alpha + \gamma} \begin{pmatrix} \gamma \\ \alpha \end{pmatrix} + \frac{\alpha E_0 - \gamma I_0}{\alpha + \gamma} e^{-(\alpha+\gamma)t} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

För \dot{R} fås

$$\begin{aligned}\dot{R} &= \gamma I \\ \Rightarrow \dot{R} &= \gamma\alpha \frac{E_0 + I_0}{\alpha + \gamma} - \gamma \frac{\alpha E_0 - \gamma I_0}{\alpha + \gamma} e^{-(\alpha+\gamma)t} \\ \Rightarrow R &= \int \gamma\alpha \frac{E_0 + I_0}{\alpha + \gamma} - \gamma \frac{\alpha E_0 - \gamma I_0}{\alpha + \gamma} e^{-(\alpha+\gamma)t} dt \\ \Rightarrow R &= \gamma\alpha \frac{E_0 + I_0}{\alpha + \gamma} t + \gamma \frac{\alpha E_0 - \gamma I_0}{(\alpha + \gamma)^2} e^{-(\alpha+\gamma)t} + C_3\end{aligned}$$

Vid $t = 0$ fås konstanten C_3 till

$$R_0 = \frac{\gamma(\alpha E_0 - \gamma I_0)}{(\alpha + \gamma)^2} + C_3$$

$$\Rightarrow C_3 = R_0 - \frac{\gamma(\alpha E_0 - \gamma I_0)}{(\alpha + \gamma)^2}$$

så

$$R = \gamma\alpha \frac{E_0 + I_0}{\alpha + \gamma} t + \gamma \frac{\alpha E_0 - \gamma I_0}{(\alpha + \gamma)^2} e^{-(\alpha + \gamma)t} + R_0 - \gamma \frac{(\alpha E_0 - \gamma I_0)}{(\alpha + \gamma)^2}$$

$$\Rightarrow R = \gamma\alpha \frac{E_0 + I_0}{\alpha + \gamma} t + \gamma \frac{\alpha E_0 - \gamma I_0}{(\alpha + \gamma)^2} (e^{-(\alpha + \gamma)t} - 1) + R_0.$$

För \dot{S} fås, på liknande sätt som för R ,

$$\dot{S} = -r\gamma I$$

$$\Rightarrow S = (-r) \left(\gamma\alpha \frac{E_0 + I_0}{\alpha + \gamma} t + \gamma \frac{\alpha E_0 - \gamma I_0}{(\alpha + \gamma)^2} e^{-(\alpha + \gamma)t} + C_4 \right)$$

där integrationskonstanten blir

$$S_0 = (-r) \left(\gamma \frac{\alpha E_0 - \gamma I_0}{(\alpha + \gamma)^2} + C_4 \right)$$

$$\Rightarrow C_4 = -\frac{S_0}{r} - \gamma \frac{\alpha E_0 - \gamma I_0}{(\alpha + \gamma)^2}$$

så

$$S = (-r) \left(\gamma\alpha \frac{E_0 + I_0}{\alpha + \gamma} t + \gamma \frac{\alpha E_0 - \gamma I_0}{(\alpha + \gamma)^2} e^{-(\alpha + \gamma)t} - \frac{S_0}{r} - \gamma \frac{\alpha E_0 - \gamma I_0}{(\alpha + \gamma)^2} \right)$$

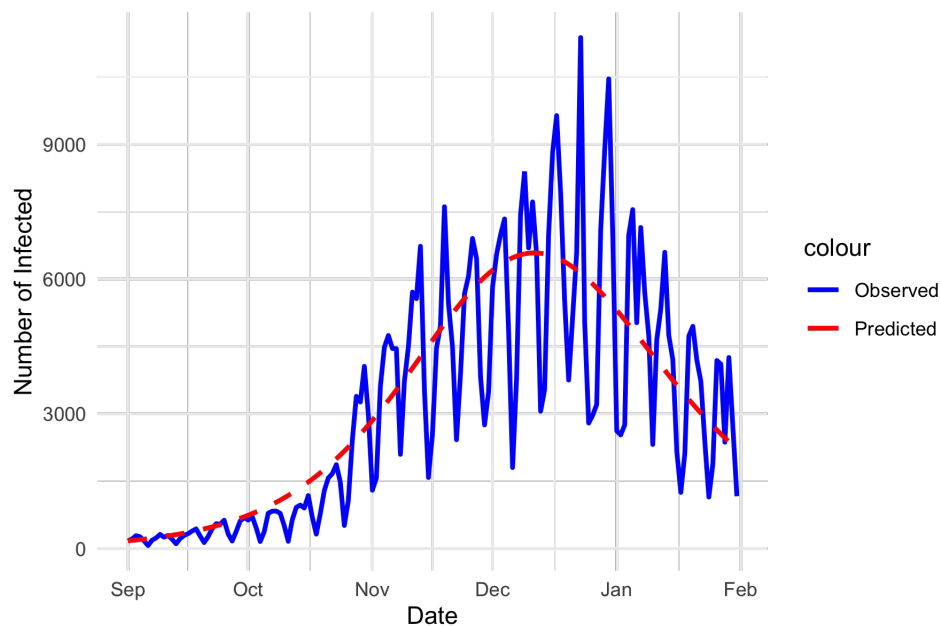
$$\Rightarrow S = \beta N \left(\frac{\alpha E_0 - \gamma I_0}{(\alpha + \gamma)^2} \right) (1 - e^{-(\alpha + \gamma)t}) + S_0 - \gamma\beta N \left(\frac{E_0 + I_0}{\alpha + \gamma} \right) t.$$

Det bör påpekas igen att dessa lösningar endast gäller för små t och inte då $t \rightarrow \infty$.

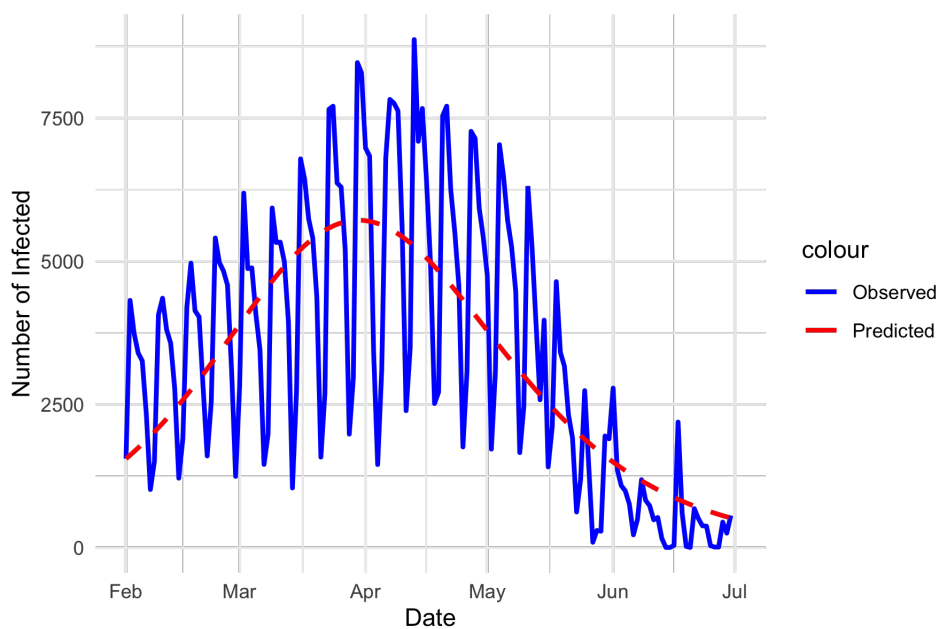
SIMULERINGAR AV COVID-19

Följande simuleringar är gjorda med hjälp av data från [2]. Parametern β är skattad med hjälp av *trial and error* för att passa data, parametern γ sätts till 0.2. Vi har medvetet valt att inte ta med veckorna under sommaren då rapporteringen av antal smittade inte var kontinuerlig. Källkod finns i Appendix A.

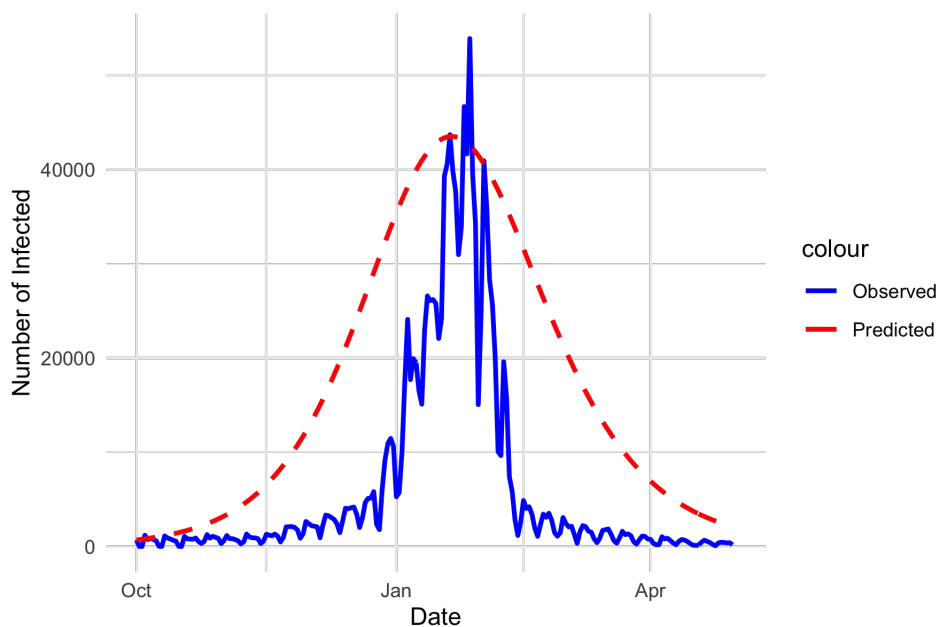
4.1 SIR



Figur 1: Covid-19, 2020-09-01 till 2021-02-01



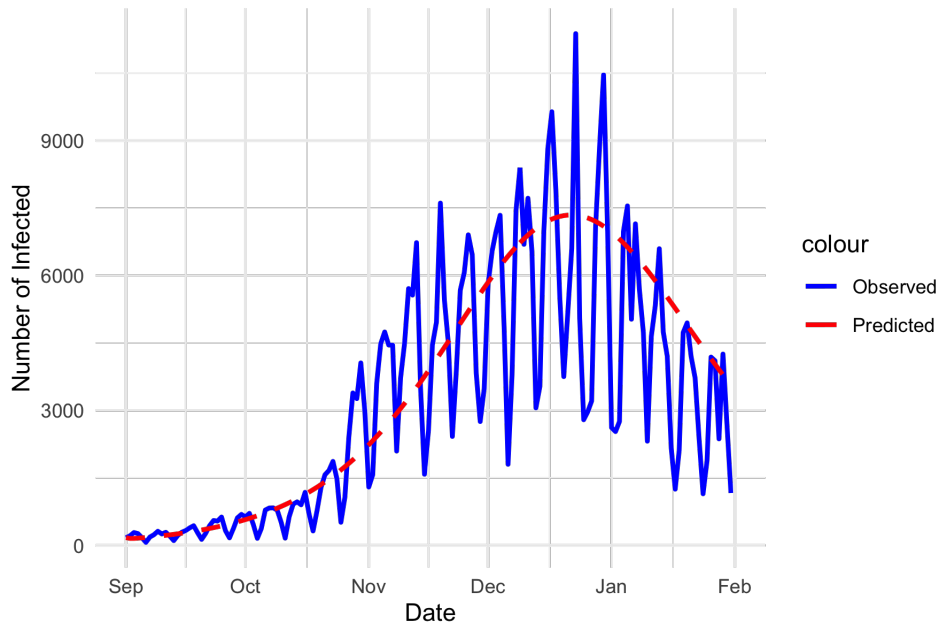
Figur 2: Covid-19, 2021-02-01 till 2021-07-01



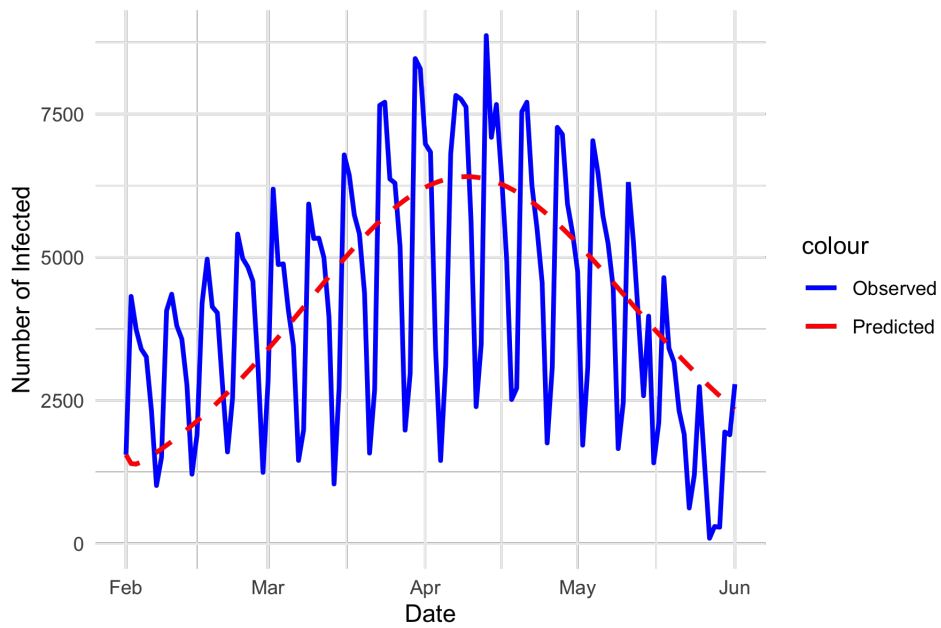
Figur 3: Covid-19, 2021-10-01 till 2022-05-01

I figur 1 och 2 följer de förutspådda antalet smittade (röd prickad) de rapporterade fallen bra. I figur 3 ser vi en mycket brantare top än förutspått. Detta skulle kunna förklaras med att maximum nås strax efter jul, då många personer som normalt sett inte träffas, träffades då.

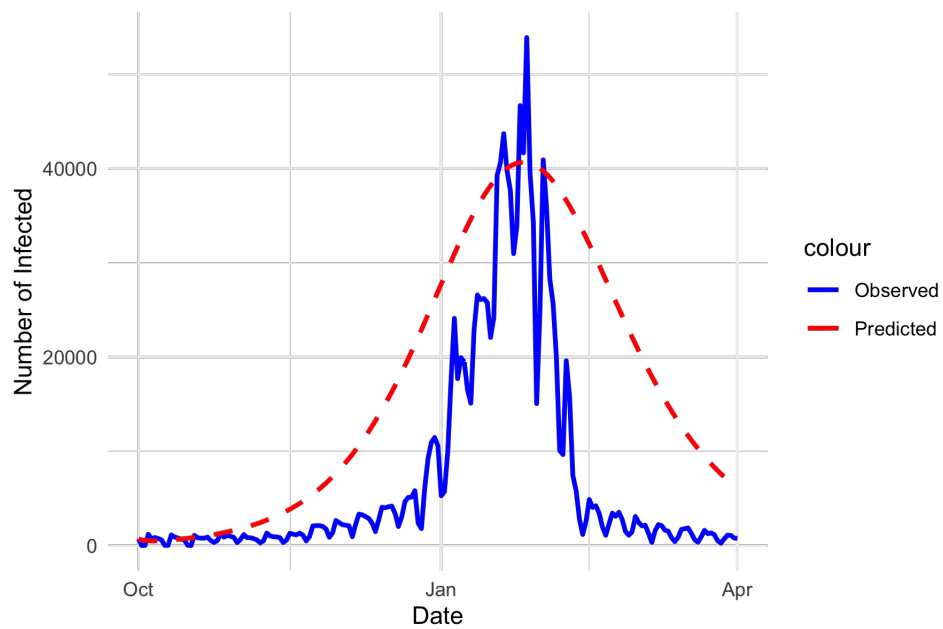
4.2 SEIR



Figur 4: Covid-19, 2020-09-01 till 2021-02-01



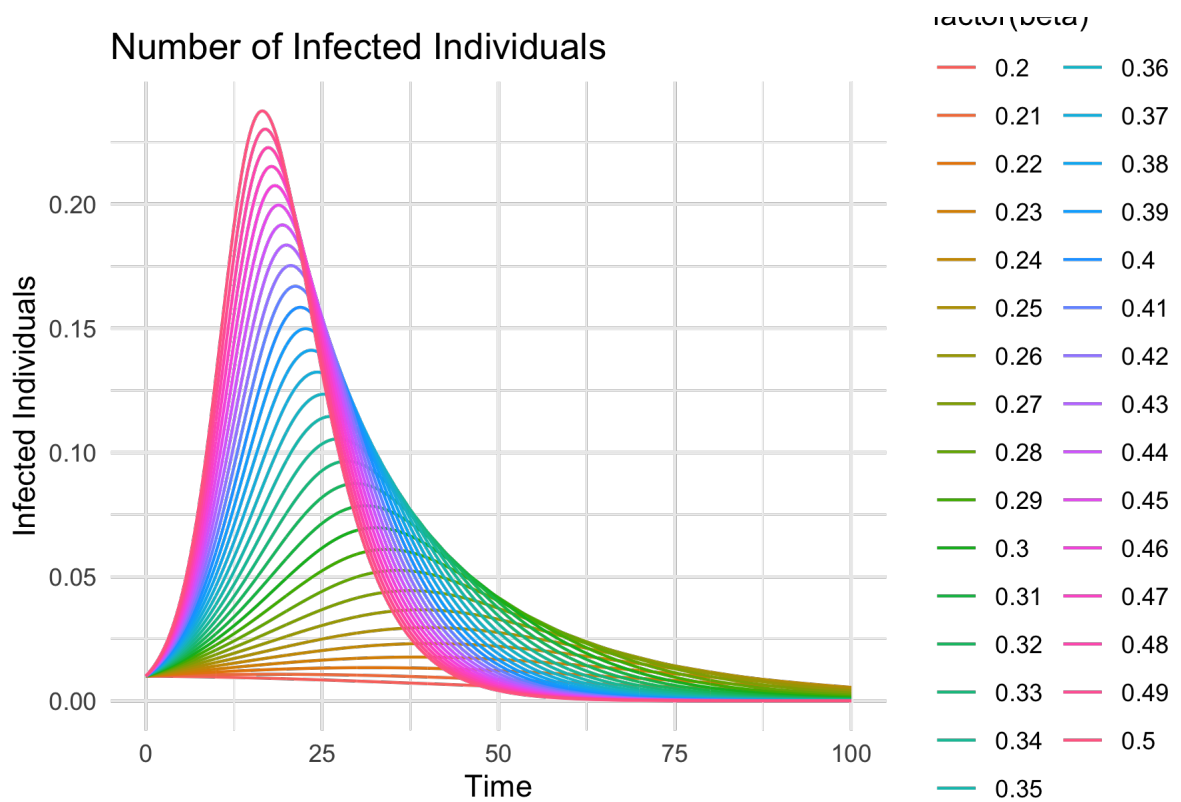
Figur 5: Covid-19, 2021-02-01 till 2021-07-01



Figur 6: Covid-19, 2021-10-01 till 2022-05-01

I figur 4-6 illustreras samma data som i figur 1-3 men mot SEIR-modellen. Vi får nästan identiskt resultat för SEIR-modellen som för SIR-modellen med marginellt bättre passning för figur 6.

4.3 OLIKA VÄRDEN PÅ β



Figur 7: Simulering av SIR modellen mot olika värden på parametern β

I figur 7 illustreras hur antalet smittade vid tid t påverkas av förändring av β , vi låter β variera mellan $[0.2, 0.5]$ och därmed r -talet mellan $[1, 2.5]$, $\gamma = 0.2$.

5

ANALYS OCH RESULTAT

Denna uppsats presenterar och gör beräkningar för två olika modeller för smittspridning baserade på ordinära differentialekvationer. Några viktiga satser och definitioner tas upp, däribland 2.3 även kallad *Epidemic threshold theorem* som först bevisades av A.G. McKendrick och W.O. Kermack. Vi har visat olika metoder för att lösa komplexa system av differentialekvationer, Laplace-transformation, variabelsubstitution och användning av sats 2.4. Vi visar hur matematiska modeller kan användas för modellering av smittspridning och hur restriktioner, det vill säga förändring av β kan påverka smittspridning och “platta ner“ kurvan.

REFERENSER

- [1] K.G. Andersson och L-E. Böiers. *Ordinary Differential Equations*. Studentlitteratur AB, 2019
- [2] Folkhälsomyndigheten www.folkhalsomyndigheten.se
- [3] T. Harko, F. Lobo och M. Mak. Exact analytical solutions of the Susceptible-Infected-Recovered (SIR) epidemic model and of the SIR model with equal death and birth rates. In *Applied Mathematics and Computation*, volume 236, page 184–194. 2014
- [4] Y. Okabe och A. Shudo. A Mathematical Model of Epidemics—A Tutorial for Students Department of Physics, Tokyo Metropolitan University, Hachioji, Tokyo 192-0397, Japan. 2020.
- [5] N. Piovella. Analytical solution of SEIR model describing the free spread of the COVID-19 pandemic. In *Chaos, Solutions and Fractals*, volume 140. 2020
- [6] H. Weiss. The SIR model and the Foundations of Public Health. In *MAT²*, volume 3, 2013



APPENDIX

Laplace-tabell

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}$

R-kod

```
data_1 <- read_excel(data_path_1)

# Extract the relevant columns from the data
observed_dates_1 <- as.Date(data_1$Date, format = "%Y-%m-%d")
# Convert date column to proper date format
observed_cases_1 <- data_1$ConfirmedCases

N <- 300000
initial_infected_1 <- observed_cases_1[1]
# Initial number of infected individuals (first observed case)

initial_state_1 <- c(S = N - initial_infected_1,
I = initial_infected_1, R = 0)
# Initial number of individuals in each compartment

times <- seq(0, length(observed_dates_1) - 1, by = 1)

# Function to define the SIR model
sir_model <- function(time, state, parameters) {
  with(as.list(c(state, parameters)), {
    dS <- -beta * S * I / N
```

```

    dI <- beta * S * I / N - gamma * I
    dR <- gamma * I

    return(list(c(dS, dI, dR)))
  })
}

# Set the initial values and parameters
parameters_1 <- c(beta = 0.25, gamma = 0.2)
# Infection and recovery rates

# Solve the model
solution_1 <- ode(y = initial_state_1, times = times, func =
sir_model, parms = parameters_1)

# Extract the infected compartment from the model's solution
predicted_infected_1 <- solution_1[, "I"]

# Create a data frame for visualization
data_plot_1 <- data.frame(
  date_1 = observed_dates_1,
  observed_1 = observed_cases_1,
  predicted_1 = predicted_infected_1
)

# Plot observed and predicted data
plot_1 <- ggplot(data_plot_1, aes(x = date_1)) +
  geom_line(aes(y = observed_1, color = "Observed"), size = 1) +
  geom_line(aes(y = predicted_1, color = "Predicted"), size = 1,
linetype = "dashed") +
  labs(x = "Date", y = "Number of Infected") +
  scale_color_manual(values = c("Observed" = "blue", "Predicted" =
"red")) +
  theme_minimal()

```

```

library(deSolve)
N <- 10000

# Function to define the SIR model
sir_model <- function(time, state, parameters) {
  with(as.list(c(state, parameters)), {
    dS <- -beta * S * I / N
    dI <- beta * S * I / N - gamma * I
    dR <- gamma * I

    return(list(c(dS, dI, dR)))
  })
}

# Set the initial values and parameters
initial_state <- c(S = 10000, I = 1, R = 0)
# Initial number of individuals in each compartment
beta_values <- c(0.3, 0.4, 0.5) # Multiple values of beta
gamma <- 0.2 # Recovery rate

# Set the time points for which to solve the model
times <- seq(0, 100, by = 1)

# Increase plot size based on maximum values
par(pty = "s", mar = c(5, 5, 4, 2) + 0.1)

# Initialize an empty plot
plot(times, type = "n", ylim = c(0, max(I)),
      ylab = "Number of Infected Individuals", main = "SIR Model")

# Plot the results for each beta value
plot_legend <- FALSE # Flag to control legend display

for (i in seq_along(beta_values)) {
  parameters <- c(beta = beta_values[i], gamma = gamma)

```

```

solution <- ode(y = initial_state, times = times,
func = sir_model, parms = parameters)

# Extract the solution for each compartment
S <- solution[, "S"]
I <- solution[, "I"]
R <- solution[, "R"]

# Add lines to the plot
lines(times, I, col = i, lwd = 2)

# Add legend
if (!plot_legend) {
  legend("topright", legend = paste("Beta□=", beta_values),
col = seq_along(beta_values), lty = 1, lwd = 2)
  plot_legend <- TRUE
}
}

```