SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Paradoxer inom matematiken

av

Ella Ekelin

2023 - K22

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Paradoxer inom matematiken

Ella Ekelin

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Paul Vaderlind

2023

August 3, 2023

Abstract

This paper covers and discusses intriguing paradoxes concerning several different mathematical disciplines. The aim of this essay is to present these paradoxes as well as provide relevant mathematical information. Furthermore possible solutions are presented. We start with motion in ancient Greece with The Flying Arrow Paradox by Zenon. We move on to set theory and Russell's Paradox, only to be stumped by Gödel's Incompleteness Theorems. We visit the infinite in Grandi's Series with a cross over to geometry in Gabriel's Horn and The Banach-Tarski Paradox. Finally we end up in statistics and probability when we tackle Berkson's Paradox.

Contents

1

Introduktion

1.1 Vad är en paradox?

Det finns flera olika definitioner av vad en paradox är. Eftersom uppsatsen till stor del baseras på boken *Paradoxes - Guiding Forces in Mathematical Exploration* av Hamza E. Alsamraee använder vi oss för enkelhetens skull av varianten som presenteras där, med ursprung i Lexico:

> Paradox: Ett tillsynes absurt eller självmotsägande påstående eller proposition som, när det undersöks eller förklaras, kan visa sig vara välgrundat eller sant.

1.2 Vikten av att studera paradoxer

Varför är vi då intresserade av att studera paradoxer? Utöver att de är underhållande och kan verka nästan magiska i sin absurditet kan de också ge oss insikter kring hur matematiken är uppbyggd, och på så sätt föra matematikens utveckling framåt.

Paradoxer kan uppmuntra oss att ifrågasätta resonemangssystem som antas vara välgrundade men som är, eller verkar vara, ömsesidigt oförenliga. Genom att undersöka och utmana grundläggande idéer inom matematiken kan vi granska dessa resonemangssystem på nytt och således uppdatera matematiken där det behövs.

Så låt oss dyka in i några paradoxer som utmanar olika matematiska fält..

2

Den flygande pilen

2.1 Formulering av paradoxen

Är rörelse blott en illusion?

Frågar vi filosofen Zenon från antikens Grekland är svaret ja. Men hur kunde han möjligtvis påstå något så befängt? Rörelse kan ju tyckas vara något av det mest grundläggande och uppenbara i våra liv, både till vardags såväl som inom fysiken. Så hur motiverade Zenon detta absurda påstående? Bland annat genom paradoxen om den flygande pilen.

Vi föreställer oss en pil flygandes genom luften. Vid varje ögonblick befinner sig pilen på en specifik plats luften, och i just det ögonblicket är pilen stilla. Eftersom tid utgörs av ögonblick likt dessa, och ett objekt måste ändra position för att rörelse ska inträffa är rörelse således omöjligt.

Paradoxens resultat ter sig uppenbarligen absurt. Om jag vid ett ögonblick håller en pil i min hand, för att i nästa se pilen ligga på marken en meter ifrån mig efter ett kast, har jag inte då visat att rörelse faktiskt är möjligt? Pilen har ju ändrat position! Men inom matematiken nöjer vi oss inte med att blott fysiskt bevisa våra teorier, så låt oss undersöka Zenons resonemang på ett djupare plan.

2.2 Historia/matematisk bakgrund

Utöver position och tid, är hastighet högst relevant vid diskussioner kring rörelse. Som bekant beräknar vi (den konstanta) hastigheten/farten genom att dividera förändringen i position med förändringen i tid. För en varierande hastighet studerar vi istället derivatan:

Definition 2.1. Antag att funktionen f är definierad i en omgivning av punkten x_0. Om gränsvärdet

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existerar säges f vara deriverbar i punkten x_0. Gränsvärdet kallas derivatan av f i x_0.

2.3 Lösning/förklaring

Idag har vi starkare verktyg inom analysen för att hantera Zenons paradox, t.ex. med koncept som derivator. Det ska visa sig att premissen som argumentet bygger på är felaktig, det stämmer inte att pilen är helt stilla vid ett givet ögonblick!

Så hur relaterar derivatan till paradoxen om pilen? Låt oss se på gränsvärdet i derivatans definition. Om h, som representerar tiden, går mot 0 kan vi tolka h som ett ögonblick. Förutsatt att derivatan är skild från noll så har objektet en hastighet och vi inser att rörelse sker även under ett ögonblick.

Paradoxens argument baseras på att tid definieras som enskilda "punkter" snarare än kontinuerliga segment. (Jämför med ett bildspel av flera snabbt tagna fotografier och ett videoklipp). Även om tid kan definieras som en mängd infinitesimala ögonblick, så existerar infinitesimala rörelser inom dessa ögonblick. Vi måste alltså ändra definitionen av rörelse som paradoxen bygger på, och se på rörelse som en relation mellan tid och position.

3

Russells paradox

3.1 Formulering av paradoxen

Vi föreställer oss en by i vilken det finns en enda barberare som rakar alla personer som inte rakar sig själva, och endast dessa personer. Rakar denna barberare sig själv?

Ovan nämna scenario är en omformulering av Russells paradox. Om barberaren inte rakar sig själv finns det en person i byn som varken rakar sig själv, eller rakas av barberaren. Om han å andra sidan rakar sig själv, bryts regeln igen eftersom han endast är tillåten att raka personer som inte rakar sig själva. En motsägelse minst sagt!

Vidare till den faktiska formuleringen av Russells paradox:

Vi låter M vara en mängd som innehåller alla mängder som inte är element i sig själva. Är M ett element i M? Om så är fallet innehåller M en mängd som innehåller sig själv, vilket motsäger definitionen av M. Om M inte innehåller sig själv, saknar M en av de mängder som inte är element i sig själva, vilket återigen motsäger definitionen. Symboliskt har vi alltså:

$$\textit{Låt } M = \{x|x \notin x\} \textit{ då gäller } M \in M \iff M \notin M$$

3.2 Historia/matematisk bakgrund

Russells paradox formulerades i ett försök att demonstrera den naiva mängdlärans brister. Den naiva mängdläran var länge en kandidat till en grundläggande teori inom matematiken, ett försök att förena olika discipliner inom matematik. En av

principerna inom den naiva mängdläran var abstraktionsprincipen (även axiom of specification/separation) som tillåter oss att, givet en egenskap, bilda mängden av alla element som besitter denna egenskap. Med andra ord:
Till varje mängd A och till varje villkor S(x) motsvarar en mängd B vars element är exakt de element x i A för vilka S(x) är sann.

Dock saknade naiv mängdlära en konkret axiomatisk grund och var istället flexibelt definierad i ett informellt språk. Det var denna flexibilitet som Russell avsåg att visa olämplig för matematikens grundläggande teori. Han ville alltså visa att det går att definiera en samling objekt som inte kan existera som en mängd.

3.3 Lösning/förklaring

Dessvärre finns det ingen lösning för Russells paradox inom den naiva mängdlärans system. För att undvika den måste vi helt enkelt ge up naiv mängdlära och låta matematiken vila på en mindre flexibel grund.

Ett alternativ till en sådan grund var Zermelo-Fraenkels mängdlära (ZF). ZF innehåller bland annat följande axiom:

> Axiomet om par: För två mängder, x och y, kan mängden z bildas så att z innehåller precis x och y.
>
> $$\forall x \forall y \exists z : z = \{x, y\}$$
>
> Axiomet om regularitet (även axiom of foundation): Varje icke-tom mängd x har "∈-minimalt" element (d.v.s. ett element y som är disjunkt från x).
>
> $$\forall x (\exists y : y \in x \Rightarrow \exists y (y \in x \wedge \neg \exists z (z \in y \wedge z \in x)))$$

Regularitetsaxiomet tillsammans med paraxiomet resulterar i att det inte kan existera en mängd x sådan att x innehåller x. Antag att $x \in x$, då är x det enda elementet i mängden {x}, som vi skapar genom paraxiomet. Enligt regularitetsaxiomet måste vår icke-tomma mängd {x} innehålla ett element som är disjunkt från vår mängd. Men $x \cap \{x\} \neq \emptyset$ eftersom $x \in x \cap \{x\}$ så x och {x} har inga disjunkta element.

Utgår vi från ZF undviker vi alltså frågan huruvida en mängd av alla mängder som inte innehåller sig själva är ett element i sig själv.

4

Gödel

4.1 Formulering av paradoxen

Vi föreställer oss en värld där allt är svart eller vitt på så sätt att det inte finns några gråzoner vad gäller sanning, antingen är man en lögnare eller en sanningssägare. Vad ska ni då tro om jag utbrister:

> "Jag ljuger nu!"

Är påståendet sant, det jag säger är faktiskt en lögn, skulle uttalandets innebörd vara det motsatta - "Jag talar sanning nu". Är påståendet istället falskt, jag ljuger inte, bevaras uttalandets innebörd och förblir "Jag ljuger nu".

Hur är då ovan nämnda paradox relevant i ett avsnitt om Gödel? Han formulerade nämligen följande:

> ”Detta påstående går inte att bevisa genom att använda språket och grammatiken inom detta formella system."

Om påståendet är sant, det går faktiskt inte att bevisa, är systemet inte fullständigt. Men är påståendet falskt, det går att bevisa, innebär det att vi inom systemet kan bevisa falska påståenden - ett inkonsistent system!

4.2 Historia/matematisk bakgrund

Logicism är drömmen om att reducera matematiska bevis och sanningar till logik. Något som Russell och Whitehead förespråkade i *Principia Mathematica*. En vanlig tolkning av en logisk sanning är att den förblir sann oavsett under vilka omständigheter den tolkas i. En logisk sanning grundar sig i påståendets struktur och logikens regler. Detta medför att samtliga påståenden som delar förutsättningar med en logisk sanning också är sanna.

Förhoppningen med logicism är att en matematik som vilar tryggt på logiken kan utnyttja samma säkerhet och noggrannhet. Något som förhoppningsvis inte lämnar utrymme för förödande paradoxer...

4.3 Lösning/förklaring

Gödel insåg alltså att det var möjligt att formulera ett påstående som inte går att bevisa med hjälp av reglerna i *Principia Mathematica*. Detta resulterade i att han formulerade följande, de så kallade ofullständighetsteoremen:

> Ofullständighetsteorem 1: Ett konsistent, formellt system F, inom vilket en viss mängd grundläggande aritmetik kan utföras, är ofullständigt. D.v.s. det finns påståenden formulerade inom F som varken kan bevisas eller motbevisas inom F.
>
> Ofullständighetsteorem 2: Antag att F är ett konsistent, formaliserat system som innehåller grundläggande aritmetik. Då kan F inte bevisa sin egen konsistens.

Så hur kom Gödel fram till dessa teorem? Genom att översätta de logiska systemen i *Principia Mathematica* till tal. Han insåg att systemets påståenden kan representeras som naturliga tal vilka motsvarar särskilda egenskaper. Det är då möjligt att konstruera ett tal så att dess motsvarighet i *Principia Mathematica* är självrefererande genom att påstå sin egen obevisbarhet.

5

Grandis serie

5.1 Formulering av paradoxen

Om jag har ett äpple och Grandi tar äpplet ifrån mig, jag tar tillbaka det, Grandi tar det ifrån mig, jag tar tillbaka det igen och Grandi.... Om vi fortsätter så i oändligheten, kan vi någonsin säga vem som har äpplet i sin ägo? Eller får vi acceptera att vi äger hälften var? (Eller kanske gemensamt komma överens om att slänga det i komposten...)

Om vi representerar mitt innehav av äpplet som en positiv etta och Grandis tjuvaktighet med en negativ etta, kan vi (med lite fantasi) beskriva situationen med följande serie:

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ... = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n$$

Denna serie kallas för Grandis serie efter Guido Grandi som först studerade den under början av 1700-talet. Grandi konstaterade att denna serie kan ge olika resultat, beroende på vilken metod som används för att förlänga den. Mer specifikt kom han fram till att serien kan anta 0, 1 såväl som 1/2 som värde. (Även om han själv påstod att seriens värde är 1/2).

Men hur kan en och samma serie möjligtvis vara lika med 0, 1 och $\frac{1}{2}$? Menade Grandi att $0 = 1 = \frac{1}{2}$?

5.2 Historia/matematisk bakgrund

Det finns ett flertal olika metoder för att tilldela divergenta serier specifika ändliga värden. Ett alternativ är s.k. Cesàro-summation.

Vi låter s_n vara den n:te partialsumman av serien $\sum a_n$, och låter $\{\sigma_n\}$ vara sekvensen av aritmetiska medelvärden definierade av:

$$\sigma_n = \frac{s_1 + \ldots + s_n}{n}, \text{ där } n = 1, 2, \ldots$$

Serien $\sum a_n$ sägs vara "Cesàro-summerbar" om $\{\sigma_n\}$ konvergerar. Om $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = S$, så kallas S för Cesàro-summan av $\sum a_n$ och vi skriver:

$$\sum a_n = S$$

5.3 Lösning/förklaring

Eftersom serien divergerar finns inget entydigt svar. Seriens ”värde” beror på vilken metod eller definition som används för att beräkna den.

Vi börjar med att undersöka hur Grandi kom fram till värdena 0 och 1. Dessa metoder är tämligen rättframma, det går nämligen att ordna parenteserna i serien på olika sätt och på så sätt få olika resultat. Adderar vi termerna parvis från början får vi:

$$(1-1) + (1-1) + (1-1) + \ldots = 0$$

Förskjuter vi parentesbildningen ett steg får vi istället:

$$1 + (-1+1) + (-1+1) + \ldots = 1$$

Så hur kom Grandi fram till värdet $\frac{1}{2}$? Genom att sätta $x = 1$ för serieutvecklingen

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

nådde han värdet $\frac{1}{2}$. Men serieutvecklingen ovan gäller endast för $|x| < 1$ och Grandi ignorerade alltså konvergensintervallet.

För att komma fram till värdet $\frac{1}{2}$, utan att som Grandi använda serieutvecklingen ovan och ignorera konvergensintervallet, beräknar vi seriens Cesàro-summa:

Vi har $a_n = (-1)^n$, där $n \leq 0$. Om vi låter s_n vara den n:te partialsumman av vår serie får vi att vår sekvens $\{\sigma_n\}$ är:

$$\sigma_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} s_n,$$

där

$$(\sigma_n) = (\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, ...).$$

Vi får alltså att

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \frac{1}{2}.$$

Vi har således visat att Cesàro-summan av Grandis serie är $\frac{1}{2}$.

Det är värt att komma ihåg att även om Cesàro-summation ger serien värdet $\frac{1}{2}$, finns det inte ett entydigt rätt svar och andra metoder kan tilldela serien ett annat värde. Många metoder som används för att tilldela divergenta serier specifika värden, så som Abel och Borel, når dock värdet $\frac{1}{2}$.

6

Gabriels horn

6.1 Formulering av paradoxen

Är det möjligt att fylla ett kärl med färg, men aldrig ha tillräckligt med färg för att måla kärlets utsida?

Vi tänker oss ofta att en ändlig volym medför en ändlig ytarea, likväl kan vi föreställa oss oändliga kroppar där volym såväl som ytarea är oändlig. Men vad gäller när det ändliga möter det oändliga? Paradoxen om Gabriels horn bemöter just det.

Vi låter Gabriels horn vara kroppen som bildas av att rotera grafen av $y = \frac{1}{x}$ runt x-axeln. För att undvika att y sticker iväg mot oändligheten låter vi x gå från 1 till ∞. Det ska visa sig att denna kropp har en ändlig volym, men paradoxalt nog, en oändlig ytarea.

6.2 Historia/matematisk bakgrund

Som bekant kan vi beräkna volymer med hjälp av skivformeln. Vi låter kroppen vars volym vi ska beräkna ligga parallellt med x-axeln s.a. centrum av samtliga tvärsnitt ligger på x-axeln. Låter vi tvärsnittet vid punkt $(x, 0)$ bilda en skiva med bredd dx (parallell med x-axeln) kan vi approximera skivans volym genom:

$$A(x)dx$$

Om vår kropp har gränserna $a \leq x \leq b$ kan vi summera samtliga skivor mellan x=a och x=b (m.h.a. integration) för att få kroppens totala volym:

$$V = \int_{x=a}^{x=b} A(x)dx$$

Om vi låter $y = f(x)$ (där $a < x < b$) rotera kring x-axeln, bildar ytan mellan grafen och x-axeln en rotationssymmetrisk kropp för vilken det gäller att tvärsnittet är cirkulärt med radie f(x) vid punkt (x,0). Tvärsnittsarean är således $\pi f(x)^2$ och volymen kan beräknas enligt:

$$V = \int_{x=a}^{x=b} \pi f(x)^2 dx$$

Men vad gäller för arean av rotationsytan? Vi roterar $y = f(x)$ runt x-axeln och låter $a < x < b$. Delen av rotationsytan som ligger mellan x och $x + dx$ kan approximeras med en kapad cirkulär kon vilken har en area som approximativt är lika med:

$$2\pi y ds = 2\pi y \sqrt{1 + f'(x)^2} dx,$$

där ds är bågelementet. Rimligen bör vi alltså kunna beräkna rotationsarean enligt:

$$A = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

6.3 Lösning/förklaring

Låt oss börja med att försäkra oss om att volymen av Gabriels horn faktiskt är ändlig. Från tidigare avsnitt vet vi att vi kan beräkna rotationsvolymen med hjälp av skivformeln:

$$V = \int_{x=a}^{x=b} \pi f(x)^2 dx.$$

Eftersom $f(x) = \frac{1}{x}$ och $x \geq 1$ har vi:

$$V = \pi \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \pi \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \pi \left(1 - \frac{1}{b}\right).$$

Vidare har vi:

$$V = \lim_{b \to \infty} \pi \left(1 - \frac{1}{b}\right) = \pi(1 - 0) = \pi.$$

Vi vet således att volymen av Gabriels horn närmar sig ett ändligt värde, π kubikenheter!

För rotationsarean har vi istället:

$$A = 2\pi \int_{x=a}^{x=b} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} dx.$$

Vilket ger oss:

$$A = 2\pi \int_1^b \frac{1}{x}\sqrt{1 + (-\frac{1}{x^2})^2} dx$$
$$= 2\pi \int_1^b \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx.$$

Eftersom $x \geq 1$ vet vi att rotuttrycket åtminstone är större än 1 vilket ger oss att:

$$2\pi \int_1^b \frac{1}{x}\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx > 2\pi \int_1^b \frac{1}{x} dx.$$

För att förenkla studerar vi istället den högra integralen:

$$A > 2\pi \int_1^b \frac{1}{x} dx = 2\pi \left[\ln x\right]_1^b.$$

Vi får alltså:

$$A > \lim_{b \to \infty} 2\pi \ln b \to \infty.$$

Vi har således visat att arean går mot oändligheten.

7

Banach-Tarski

7.1 Formulering av paradoxen

Är det möjligt att klona ett tredimensionellt klot och sluta upp med två klot identiska i storlek med originalklotet? Vi föreställer oss att vi delar upp ett klot i ett ändligt antal mängder, vilka innehåller punkterna som utgör klotet. Det ska visa sig att det är möjligt att ordna dessa punktmängder på ett sätt som ger oss två klot! Vilket Stefan Banach and Alfred Tarski visade på 1900-talet.

Ett till synes befängt och kontraintuitivt påstående. Men det är värt att komma ihåg att vi inte har samma konservationslagar i matematik som vi har i fysiken. Det extra klotet vi har skapat handlar alltså inte om fysisk materia som uppstått ur tomma intet (utan snarare ett abstrakt matematiskt objekt).

7.2 Historia/matematisk bakgrund

En välkänd paradox som illustrerar hur märkligt oändligheten kan bete sig är den om Hilberts hotell. Kort sammanfattat går den ut på att ett hotell med oändligt många rum, vilka alla är ockuperade, har kapaciteten att välkomna en ny gäst. Faktum är att hotellet kan välkomna oändligt många nya gäster (hotellet har till och med plats för oändligt många bussar med oändligt många gäster, men det går vi inte in på i denna uppsats).

Detta är möjligt genom att flytta gästen som bor i rum 1 till rum 2, gästen som bor i rum 2 till rum 3, gästen som bor i rum 3 till rum 4 o.s.v. Gästen som bor i rum n flyttar alltså till rum n+1. Eftersom hotellet har oändligt många rum tar de aldrig slut, och alla ursprungliga gäster är ackommoderade vilket lämnar rum 1 ledigt till den nya gästen. I fallet med oändligt många nya gäster flyttar vi gästen som bor i rum 1 till rum 2, gästen som bor i rum 2 till rum 4, gästen som bor i rum 3 till rum 6, o.s.v. Likt fallet med en ny gäst flyttar vi gästen i rum n till rum 2n vilket lämnar samtliga rum med udda numrering lediga för de oändligt många nya gästerna.

7.3 Lösning/förklaring

Så hur kan det vara möjligt att ett blir två?

Ett klot kan definieras som ett ouppräkneligt oändligt antal punkter, som var och en motsvarar en position på sfärens yta. För att ordna punkterna delar vi upp klotet i s.k. "punktgrupper". Vi väljer en startpunkt, "S", och namnger punkterna på sfärens yta baserat på hur de kan nås från startpunkten. Om vi låter U stå för upp, N för ned, H för höger och V för vänster kan vi exempelvis benämna punkten som ligger ett steg upp och ett steg till vänster från startpunkten som "VU". Vidare kategoriserar vi dessa punkter utifrån den första bokstaven i sekvensen (d.v.s. det sista steget) i grupperna "U", "N", "H" och "V".

Vi har nu kategoriserat ett uppräkneligt oändligt antal punkter och har således missat punkter på vårt klot. För att lösa detta kategoriserar vi alla dessa punkter som startpunkter. (För att lösa detta väljer vi en ny, okategoriserad startpunkt och utför samma kategorisering igen. Vi utför denna process ett ouppräkneligt oändligt antal gånger, tills vi har kategoriserat samtliga punkter på klotets yta.) En del punkter namnges och kategoriseras dock flera gånger, vi kallar dessa punkter för "poles" och skapar en ny grupp, "P".

Nu saknas bara en kategori, klotets mittpunkt. Vi föreställer oss att vi förlänger samtliga punkter på klotets yta till linjer som slutar i klotets centrum. Vår tidigare ihåliga sfär är nu ett solitt klot. Vi kategoriserar klotets centrum i en ny grupp, "C". Vi har nu delat upp vårt klot i totalt sju grupper: "S", "U", "N", "H", "V", "P" samt "C".

Vi kan kancellera det sista steget i vår vänstergrupp, "V", genom att rotera gruppen åt höger.

$$"V, VV, \ldots, VU, VUU, \ldots, VN, VNN, \ldots, VUV, VUVV, \ldots"$$

blir till

$$", V, \ldots, U, UU, \ldots, N, NN, \ldots, UV, UVV, \ldots "$$

Detta ger oss grupperna "V", "U", "N" samt "S". En grupp har alltså blivit till fyra! Vi lägger till "H" och "P" och har därmed ett komplett klot. Utöver detta har vi tre grupper över: "U", "N" och "S". Låt oss se om vi kan använda oss av rotation igen.

Vi roterar punkterna i "U" som inte är rena U-sekvenser. Detta ger oss att:

$$"U, UU, UUU, \ldots, UV, UVV, \ldots, UH, UHH, \ldots, UVU, UVUU, \ldots "$$

blir till

$$"U, UU, UUU, \ldots, V, VV, \ldots, H, HH, \ldots, VU, VUU, \ldots "$$

(s.165) Vi har alltså utökat vårt "U" med "V" och "H". Tillsammans med "N" och "S" som blev över från vårt första klot har vi skapat ett nytt klot, så när som på "P" och "C". Antalet saknade punkter som utgörs av ”P” och ”C” är uppräkneligt oändligt och vi kan fylla igen dessa likt gäster och hotellrum i paradoxen om Hilberts hotell.

8

Berksons paradox

8.1 Formulering av paradoxen

Varför är filmen aldrig lika bra som boken?

Detta är endast en av många uppfattningar i samhället som vi snart ska se baseras på att vi drar falska slutledningar. Varför tror vi att attraktiva människor i regel är otrevligare? Det ska visa sig att Berksons paradox ligger bakom vår missuppfattning.

Berksons paradox är ett resultat inom betingad sannolikhet och statistik som uppstår då vi hittar ett samband mellan två till synes oberoende egenskaper som ter sig motsägelsefullt. En bra bok bör ju rimligen ha större chans att resultera i en bra film?

8.2 Historia/matematisk bakgrund

Betingad sannolikhet berör sannolikheten för att en händelse A inträffar, förutsatt att en händelse B redan inträffat.

Om A och B är händelser sådana att sannolikheten för B är större än noll ($P(B) > 0$), så betecknas den betingade sannolikheten för A givet B med $P(A|B)$ och definieras enligt följande:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B),}$$

Där $P(A|B)$ är sannolikheten för A givet B, $P(A \cap B)$ är sannolikheten för att både A och B inträffar samtidigt, och $P(B)$ är sannolikheten för B.

8.3 Lösning/förklaring

En förklaring till varför Berksons paradox uppstår är att det studerade urvalet inte är representativt för den totala populationen. Tar vi filmadaptioner av böcker som exempel kan vi tänka oss följande grupper:

1. Bra böcker med bra filmadaptioner
2. Bra böcker med dåliga filmadaptioner
3. Dåliga böcker med dåliga filmadaptioner
4. Dåliga böcker med bra filmadaptioner

För exemplets skull tänker vi oss att bokens kvalité och filmens kvalité är oberoende av varandra och att det finns lika många bra böcker som dåliga böcker, samt lika många bra filmer som dåliga filmer. Då kan vi anta att dessa grupper är jämnt fördelade och att varje grupp utgör 25% av den totala mängden av böcker med filmadaptioner.

D.v.s. har vi 100 böcker antar vi att 50 av dessa är bra, och 50 av dessa är dåliga. Av de 50 bra böckerna har hälften bra filmadaptioner, och andra hälften dåliga. På samma sätt har vi att av de 50 dåliga böckerna har hälften bra filmadaptioner, och den andra hälften i dåliga.

De enda grupperna vi har hört om är ”bra böcker” och ”bra filmer”. (Vi lägger knappast en historia på minnet som var dålig både som bok och film). Istället för att vi baserar vår uppfattning på den jämna fördelningen vi nämnde ovan ser vårt urval ut på följande sätt:
P(Bra bok) $= \frac{50}{75}$
P(Dålig bok) $= \frac{25}{75}$
P(Dålig film) $= \frac{25}{75}$
P(Bra film) $= \frac{50}{75}$

Beräknar vi sannolikheten för en bra bok givet en dålig film får vi alltså:

$$P(Bra\ bok|Dålig\ film) = P(Bra\ bok \cap Dålig\ film)/P(Dålig\ film) = \frac{50}{75}/\frac{50}{75} = 1$$

På liknande sätt får vi sannolikheten för en bra bok givet en bra film till:

$$P(Bra\ bok|Bra\ film) = P(Bra\ bok\ \cap\ Bra\ film)/P(Bra\ film) = \frac{25}{75}/\frac{50}{75} = 1/2$$

Det verkar alltså som att det är mer troligt att boken var bra givet en dålig filmadaption än att boken var bra givet en bra filmadaption. Detta resulterar i en allmän uppfattning att dåliga filmer i högre grad korrelerar med bra böcker än vad bra filmer korrelerar med bra böcker.

Tar vi dock hänsyn till den bortglömda gruppen, dåliga böcker med dåliga filmadaptioner, får vi ett resultat som stämmer överens med vår ursprungliga fördelning:
P(Bra bok) = $\frac{50}{100}$
P(Dålig bok) = $\frac{50}{100}$
P(Dålig film) = $\frac{50}{100}$
P(Bra film) = $\frac{50}{100}$.

Detta ger oss:

$$P(Bra\,bok|Dålig\,film) = P(Bra\,bok \cap Dålig\,film)/P(Dålig\,film) = \frac{25}{100}/\frac{50}{100} = 1/2,$$

samt:

$$P(Bra\ bok|Bra\ film) = P(Bra\ bok \cap\ Bra\ film)/P(Bra\ film) = \frac{25}{100}/\frac{50}{100} = 1/2.$$

Vi ser alltså att sannolikheten är jämnt fördelad.

9

Diskussion

9.1 Hur paradoxer berikar matematiken

Vi har redan sett hur paradoxer kan motivera oss att uppdatera matematiken så som Russells paradox tvingade oss att revidera mängdläran. Berksons paradox visar oss i stället att vi måste vara kritiska och tänka till en extra gång innan vi grundar en åsikt på vad vi tror att vi känner till.

Vidare finns det även ett pedagogiskt värde i att studera paradoxer. Eftersom paradoxer uppmuntrar oss att ifrågasätta och undersöka etablerade matematiska sanningar och system får vi ett bredare perspektiv och djupare förståelse för dessa. Genom att undersöka hur begrepp och idéer är relaterade utanför de satser vi får lära oss utantill och istället aktivt fundera över hur de hör samman kan vi vinna en djupare förståelse för ämnet.

References

[1] H. E. Alsamraee. *Paradoxes: Guiding Forces in Mathematical Exploration.*. Curious Math Publications, 2020.

[2] T.M. Apostol. *Mathematical Analysis.* Addison-Wesley, 1974.

[3] A. Persson, L. Böiers. *Analys i en variabel.* Studentlitteratur, 2010.

[4] J.K. Blitzstein, J. Hwang. *Introduction to probability.* Crc Press, 2015.

[5] F. Boccuni, A. Sereni. *Origins and Varieties of Logicism.* Routledge, 2021.

[6] P.R. Halmos. *Naive Set Theory.* Springer, 1974.

[7] R. Schindler. *Set Theory Exploring Independence and Truth.* Cham Springer International Publishing, 2014.