SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

An approach of proving Riemann's mapping theorem via the existence of a solution to the Dirichlet's problem.

av

Sten Ville Wassberg

2023 - No K 26

An approach of proving Riemann's mapping theorem via the existence of a solution to the Dirichlet's problem.

Sten Ville Wassberg

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Annemarie Luger

2023

Abstract

Konforma avbildningar är funktioner som bevarar orienterade vinklar mellan kurvor i det komplexa talplanet. De har många tillämpningar inom komplex analys. Till exempel att lösa differentialekvationer och modellera fysikaliska fenomen. Riemanns teorem säger att varje enkelt sammanhängande område i det komplexa talplanet, som inte är hela planet, kan avbildas konformt på enhetsdisken. I denna text presenterar vi ett bevis av Riemanns teorem som bygger på Perrons metod, Greens funktion, konstruktion av barriärer, samt lösningen till Dirichlet-problemet. Vi försöker ge ett bevis likt hur Riemann själv gjorde det, oberoende av normala familjer, som är ett kraftfullt men tekniskt verktyg. En introduktionen av konforma avbildningar ges med syftet att visa på intressanta tillämpningar och bidra med en klarare bild av beviset av Riemanns teorem. Det visar sig dock att beviset i den här texten inte helt lyckas vara oberoende av normala familjer. I slutändan ges ändå ett bevis.

Acknowledgement

Jag vill tacka min handledare Annemarie Luger för all hjälp och guidning som hon har bidragit med, samt för att hon har stått ut med ett utdraget arbete. Jag vill också tacka Klara Zimmerman för att hon tog sig tid att läsa igenom och komma med synpunkter och vettig feedback. Inte minst vill jag tacka Petra för ett tålamod och stöd som få.

Contents

1 Introduktion **4**

2 Konforma avbildningar **6**

2.1 Relation mellan holomorfa och konforma avbildningar 6
2.2 Konforma avbildningar av öppna områden 11
2.3 Konsten att finna en konform avbildning 15

3 Riemanns teorem **18**

3.1 Greens funktion 19
3.2 Subharmoniska funktioner 26
3.3 Perrons metod 30
3.4 Konstruktion av barriärer till öppna och begränsade enkelt sammanhängande områden 36
3.5 Bevis av Riemanns teorem 37

Referenser **40**

Chapter 1

Introduktion

Beviset av Riemanns teorem för konforma avbildningar kommer att byggas upp stegvis med hjälp av Greens funktion, subharmoniska funktioner och Dirichlets problem. Genom användning av Perrons metod kommer vi visa att Dirichlets problem alltid har en lösning i begränsade och öppna enkelt sammanhängande områden, som i sin tur kommer att leda till ett bevis av Riemanns teorem genom Greens funktion. Utöver Riemanns teorem ges viss introduktion av konforma avbildningar utifrån att varje punkt i $\mathbb{R}^2$ kan representeras som ett komplext tal i $\mathbb{C}$, och vice versa, tillsammans med ett antal exempel, samt hur de kan konstrueras mellan olika områden.

Riemanns teorem presenteras redan här med förhoppningen att läsaren har den med sig genom texten för att se att existensen av konforma avbildningar ofta är garanterad och att läsaren godtar att det är sant även innan ett bevis är givet.

Teorem 1.0.1 (Riemanns teorem för konforma avbildningar)**.** *Givet ett enkelt sammanhängande öppet område U av planet, $U \neq \mathbb{C}$, och en punkt $z_0 \in U$, så existerar det en unik konform avbildning f från U surjektivt till enhetsdisken $\mathbb{D}$, normaliserad med villkoren $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$.*

Som nämnt, ska vi bevisa Riemanns teorem genom dess relation till Dirichlet-problemet. Därför presenteras också Dirichlet-problemet här, vars definition är från Ransford, 1995.

Dirichletproblemet. Låt U vara ett öppet sammanhängande område i $\mathbb{C}$, och $\varphi : \partial U \to \mathbb{R}$ vara en kontinuerlig funktion på randen till U. Dirichletproblemet går ut på att finna en harmonisk funktion h, definierad på U, så att $\lim_{z\to\zeta} h(z) = \varphi(\zeta)$, *för alla* $\zeta \in \partial U$.

Det är hur dessa knyts ihop som vi ska utnyttja och kommer gå igenom mer utförligt i kapitlet Riemanns teorem.

Chapter 2

Konforma avbildningar

Konforma avbildningar är ett kraftfullt verktyg när det gäller att hitta harmoniska funktioner i ett öppet område med specifika randvärdesvillkor; det vill säga för att lösa Dirichlets problem. Deras användbarhet kommer successivt att förtydligas genom textens gång. Riemanns avbildningsteorem visar på hur kraftfulla konforma avbildningar verkligen är.

2.1 Relation mellan holomorfa och konforma avbildningar

Det främsta syftet med den här sektionen är att visa när en differentierbar funktion är konform, men också att förse läsaren med en snabb överblick om konformalitet. Detta med intentionen att öppna för att ge en förståelse för sambandet mellan holomorfa (komplext differentierbara) avbildningar och konforma avbildningar; när en holomorf avbildning uppfyller villkoren för att bevara vinklar och orienteringen utav dem, med andra ord när den är konform.

Eftersom holomorfa funktioner ständigt kommer närvara i det här kapitlet, är det lägligt att en definition av dem kommer här, men låt oss först definiera vad vi menar med att en funktion är komplext differentierbar.

Definition 2.1.1. Låt U vara ett öppet område i det komplexa talplanet, $\mathbb{C}$, f en komplexvärd funktion definierad på U och $a \in U$. Funktionen f sägs vara komplex differentierbar i punkten a om följande gränsvärde existerar

$$\lim_{z \to a,\, z \in U} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a). \tag{2.1}$$

Det komplexa talet $f'(a)$ kallar vi för den komplexa derivatan av f i punkten a.

Definition 2.1.2. Om en funktion f är definierad på ett öppet område U och f är komplext differentierbar i varje punkt i U, då sägs f vara en holomorf funktion på U.

Så när något i fortsättningen sägs gälla för komplext differentierbara funktioner, antas det som underförstått att det också gäller för holomorfa funktioner av området.

Punkter i det komplexa talplanet, $\mathbb{C}$, kan representeras av punkter i $\mathbb{R}^2$, och vice versa. Det kan vi se genom att låta punkten $(x, y)^T$ vara en punkt i $\mathbb{R}^2$, då är dess representation i $\mathbb{C}$ given av $x + iy$. Till exempel blir då $1 = 1 + i * 0 = (1, 0)^T$ och $i = 0 + i * 1 = (0, 1)^T$. Så vi har nu verktyg nog för att representera linjära avbildningar i $\mathbb{R}^2$ som linjära avbildningar i $\mathbb{C}$, vilket vi ska utnyttja. Låt $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ vara en en linjär avbildning så att $T = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, där T tar en vektor $(x, y) \mapsto (ax + by, cx + dy) = (ax + by) + i(cx + dy)$. Då är $T(1) = (a, c) = a + ci$ och $T(i) = (b, d) = b + di$. Så om $z = x + iy = (x, y)$ får vi $T(z) = ax + by + i(cx + dy)$. Om vi nu låter $\alpha = \frac{1}{2}(a + d - ib + ic)$ och $\beta = \frac{1}{2}(a - d + ib + ic)$, ger det att avbildningen kan skrivas som $T(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, vilket kommer göra det lättare att föreställa sig de geometriska aspekterna av avbildningen.

För att komma till de tillräckliga villkoren för att en holomorf funktion ska vara konform, kommer nu först en definition av när en linjär funktion är det. Det ska vi senare utnyttja när vi undersöker tillräckliga villkor för att en komplext differentierbar funktion eller avbildning är konform.

Definition 2.1.3. En $\mathbb{R}^2$-linjär och inverterbar avbildning T från $\mathbb{C}$ till $\mathbb{C}$ kallas konform om den bevarar magnituden och orienteringen av vinklar, alltså, om för något $z, w \in \mathbb{C}$ så är vinkeln mellan z och w densamma som vinkeln mellan Tz och Tw. Med andra ord gäller ekvationen

$$\arg Tz - \arg Tw = \arg z - \arg w, \; z, w \in \mathbb{C}.$$

En omedelbar fråga man kan ställa sig: Vad finns det för egenskaper som vi kan finna hos en linjär avbildning som garanterar att den är konform? Det här ger upphov till följande proposition.

Proposition 2.1.4. *Låt T vara en inverterbar $\mathbb{R}^2$-linjär avbildning från $\mathbb{C}$ till $\mathbb{C}$. Då är följande ekvivalent:*

i) *T är konform.*

ii) *T kan skrivas som $Tz = \alpha z$, där $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$, alltså att T är $\mathbb{C}$-linjär.*

iii) *T består av en rotation med vinkel $Arg\,\alpha$ följt av en skalning med faktor $|\alpha|$, $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \neq 0$.*

Bevis. Låt T vara en linjär och inverterbar konform avbildning. Enligt definition 2.1.3 gäller likheten $\arg Tz - \arg z = \arg Tw - \arg w$, för alla $z, w \in \mathbb{C}$. Med andra ord är funktionen $\arg Tz - \arg z$ konstant, med respekt till z, modulo 2π. Eftersom likheten $\arg \frac{Tz}{z} = \arg Tz - \arg z$ gäller, så ligger också $\frac{Tz}{z}$, $z \neq 0$, i en stråle från origo, i och med att argumentet är konstant. Om nu avbildningen skrivs som tidigare: $Tz = \alpha z + \beta \bar{z}$, $z \neq 0$, då är

$$\frac{Tz}{z} = \alpha + \beta \frac{\bar{z}}{z}$$

vilket är en cirkel centrerad i α med radie $|\beta|$. Därmed måste alltså $|\beta| = 0$ om Tz ska vara en stråle, och ii) är uppfyllt. För att visa implikationen från ii) till iii), låt nu $\alpha = |\alpha|e^{i\theta_1}$ och $z = |z|e^{i\theta_2}$, för θ_1, $\theta_2 \in [0, 2\pi)$, då kan en se att $Tz = \alpha z = |\alpha||z|e^{i\theta_2+\theta_1}$, så iii) är också uppfyllt. För att visa att iii) implicerar i); antag att iii) gäller. Låt z, $w \in \mathbb{C}$ vara givna. Låt $z = |z|e^{i\theta_2}$ och $w = |w|e^{i\theta_3}$. Så $\arg Tz - \arg z = Arg\,\alpha + \arg z - \arg z = Arg\,\alpha = Arg\,\alpha + \arg w - \arg w = \arg Tw - \arg w$, alltså är T konform enligt definition 2.1.3. □

När $\beta = \frac{1}{2}(a-d+ib+ic) = 0$ är $d-a = 0 = i(b+c)$, vilket sker när $a = d$ och $b = -c$. Det ger då att linjära konforma avbildningar i det komplexa planet är av formen:

$$T = \begin{pmatrix} a & -c \\ c & a \end{pmatrix}. \tag{2.2}$$

För att djupare förstå konforma avbildningar ska vi undersöka dess relation med holomorfa avbildningar. Då holomorfa avbildningar är definierade av att de är komplext differentierbara i varje punkt av en öppen definitionsmängd, så är det rimligt att börja med att undersöka vissa geometriska egenskaper hos derivatan av en differentierbar funktion.

Från ekvation 2.1 i definition 2.1.1 får vi att derivatan av f i punkten a, $f'(a)$, uppfyller

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - f'(a)(h)|}{|h|} = 0.$$

Om vi låter $\gamma : I \to U$, där I är ett reellt intervall, vara en differentierbar kurva med a innehållen, låt $a = \gamma(0)$. Då är f sammansatt med kurvan, $f \circ \gamma$ en differentierbar kurva som som passerar genom punkten $f(\gamma(0)) = f(a)$. Dess derivata i punkten $\gamma(0) = a$ blir då:

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (f \circ \gamma)(t) = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \gamma_i'(t)\bigg|_{t=0} = f'(a)(\gamma'(0)).$$

Alltså är $f'(a)$ en avbildning som skapar en relation mellan derivatan till en kurva på en punkt a och derivatan till en kurva i punkten $f(a)$ i bildrummet. Vilket motiverar användningen av följande definition.

Definition 2.1.5. En differentierbar avbildning $f : U \to \mathbb{R}^2$ är konform i punkten $a \in U$ om $f'(a)$ är inverterbar och bevarar orienterade vinklar.

Därför, om f är en konform avbildning i enlighet med definition 2.1.5, så är derivatan $f'(a)$ en linjär konform avbildning enligt definition 2.1.3. Det vill säga, om f är en konform avbildning, samt att γ_1 och γ_2 är två kurvor, som skär varandra i en punkt a och vinkel α, då skär avbildningarna av kurvorna $f \circ \gamma_1$ och $f \circ \gamma_2$ varandra i punkten $f(a)$ med samma vinkel α med orienteringen bevarad, i och med att vinkeln mellan kurvorna γ_1, γ_2 i punkten a är densamma som vinkeln mellan deras tangenter i a.

Som tidigare antytt vill vi veta mer konkret när exakt vi kan säga att en funktion är konform. Därför kommer nu följande proposition som ett avslut på den här sektionen.

Proposition 2.1.6. *Om f är en komplext differentierbar funktion runt en punkt $z_0 \in \mathbb{C}$, så är f konform om och endast om f har en komplex derivata* *i z_0 så att $f'(z_0) \neq 0$. Dessutom, om detta uppfylls, är den linjära tangenten $f'(z_0)$ en rotation med vinkel $Arg f'(z_0)$ följt av en skalning med faktor $|f'(z_0)|$.*

Bevis ($\Rightarrow$). Låt f vara en funktion som är konform i punkten $z_0 \in \mathbb{C}$ som i definition 2.1.5. Det vill säga att $f'(z_0)$ är inverterbar och bevarar orienterade vinklar; att $f'(z_0)$ är konform. Så $f'(z_0)$ är enligt proposition 2.1.4 en skalning med en faktor $|\alpha|$ och en rotation med vinkel $Arg\alpha$, $\alpha \in \mathbb{C}$, mer specifikt är $f'(z_0) = |f'(z_0)|e^{Arg f'(z_0)}$, där $|f'(z_0)| = |\alpha|$ och $Arg\alpha = Arg f'(z_0)$. Eftersom $f'(z_0)$ bevarar orienterade vinklar så är $f'(z_0) \neq 0$. □

Bevis ($\Leftarrow$). För att bevisa implikationen från höger till vänster, låt f vara differentierbar i punkten z_0 där derivatan $f'(z_0) \neq 0$. Anta också att vi har två differentierbara kurvor $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ som går igenom punkten z_0, och $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = z_0$ där $\gamma_1'(0) \neq 0$, $\gamma_2'(0) \neq 0$. Då får vi att vinkeln mellan kurvorna i punkten z_0 är vinkeln mellan tangenterna:

$$Arg\left[\gamma_1'(0) \cdot \overline{\gamma_2'(0)}\right].$$

Vilket man kan se om man tänker på att $\gamma_1'(0) = |\gamma_1'(0)| \cdot e^{i\theta_1}$ och $\gamma_2'(0) = |\gamma_2'(0)| \cdot e^{i\theta_2}$ så

$$Arg\left[\gamma_1'(0) \cdot \overline{\gamma_2'(0)}\right] = Arg\left[|\gamma_1'(0)|e^{i\theta_1} \cdot |\gamma_2'(0)|e^{-i\theta_2}\right] =$$
$$Arg\left[|\gamma_1'(0)||\gamma_2'(0)|e^{i(\theta_1-\theta_2)}\right] = \theta_1 - \theta_2.$$

Därför, om en antar att $\tilde{\gamma_1}(t) = f \circ \gamma_1(t)$, $\tilde{\gamma_2}(t) = f \circ \gamma_2(t)$ då möts $\tilde{\gamma_1}$ och $\tilde{\gamma_2}$ i punkten $f(z_0)$ med en vinkel beskriven av:

$$Arg\left[df(z_0)(\gamma_1'(0)) \cdot \overline{df(z_0)(\gamma_2'(0))}\right].$$

Som tidigare nämnt, så är den komplex-linjära derivatan given av multiplikation med $f'(z_0)$; alltså att

$$\tilde{\gamma_1}'(0) = f'(z_0) \cdot \gamma_1'(0) \text{ } och \text{ } \tilde{\gamma_2}'(0) = f'(z_0) \cdot \gamma_2'(0).$$

Därför är det nu förståeligt att tillämpningen av f på en punkt z_0 av en kurva låter dess tangent rotera med en vinkel $Arg f'(z_0)$ och skalas med faktorn $|f'(z_0)|$. Vinkeln mellan $\tilde{\gamma_1}$ och $\tilde{\gamma_2}$ är

$$Arg\left[|f'(z_0)|^2(\gamma_1'(0)) \cdot \overline{(\gamma_2'(0))}\right] = Arg\left[\gamma_1'(0) \cdot \overline{\gamma_2'(0)}\right].$$

Det vill säga att f är konform i punkten z_0, i samma bemärkning som i definition 2.1.5. □

2.2 Konforma avbildningar av öppna områden

Såhär långt är det förstått att en holomorf funktion på en öppen mängd U av $\mathbb{C}$, där det inte för något z i mängden gäller att $f'(z) = 0$, är konform i varje punkt $z \in U$. Däremot garanterar det inte att f är injektiv. Å andra sidan implicerar injektivitet för en holomorf funktion f på U att $f'(z) \neq 0$, $z \in U$. Alltså, om f är injektiv så är f bijektiv från U till $f(U)$, och f är konform i varje punkt av U, vilket förövrigt kallas för biholomorf; dessutom är f^{-1} konform i varje punkt av $f(U)$, eftersom f^{-1} är holomorf och har en icke-försvinnande derivata i $f(U)$. Mer formellt, beskriver följande definition detta väl.

Definition 2.2.1. Om U är en öppen mängd av $\mathbb{C}$, så kallas en injektiv och holomorf funktion f på U för en konform avbildning från U till den öppna mängden $f(U)$.

Två öppna områden U, $U' \subset \mathbb{C}$ sägs vara konformt ekvivalenta om det existerar en surjektiv konform avbildning från U till U'.

Det här innebär att en konform *avbildning*, f, alltså är en funktion som är konform i varje punkt av sin definitionsmängd, och som dessutom är injektiv. Däremot är enhetsdisken inte är konformt ekvivalent med hela det komplexa planet.

Proposition 2.2.2. *Enhetsdisken $\mathbb{D}$ och det komplexa talplanet $\mathbb{C}$ är inte konformt ekvivalenta.*

Bevis. Låt $f : \mathbb{C} \to \mathbb{D}$ vara en holomorf funktion. Eftersom f är begränsad av enhetsdisken, så är den enligt Liouvilles teorem konstant, vilket alltså inte är en injektiv funktion till enhetsdisken. □

En stor del av konforma avbildningar är homografiska avbildningar, eller Möbius-transformationer som de också kallas. En introduktion till dessa antas redan vara genomgången av läsaren, därför kommer inte alltför stor vikt att läggas på dessa. Trots det är de användbara till lösningar av Dirichlets problem, som det kommer att visas senare. Möbius-transformationer är konforma avbildningar från Riemann-sfären på sig självt. De presenteras av rationella funktioner

$$Tz = T(z) = \frac{az+b}{cz+d} \text{ där } ad - bc \neq 0,\ a,\ b,\ c,\ d \in \mathbb{C}, \tag{2.3}$$

där $T(-d/c) = \infty$ och $T(\infty) = a/c$. Dess invers kan skrivas som

$$T^{-1}(w) = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Vi kan dessutom representera homografiska avbildningar med matriser $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Dessa avbildningar bildar också en grupp som kallas den linjära gruppen av Riemann-sfären. De består av sammansättningar av translationer, skalningar och inversion. Om man skriver om avbildningarna, när $c \neq 0$ så kan en få

$$Tz = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{bc - ad}{c^2(z + d/c)} + \frac{a}{c},$$

och när $c = 0 : Tz = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Om vi återgår till planet, så tar den när $c \neq 0$ $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ på $\mathbb{C} \setminus \{a/c\}$, och när $c = 0$ är den en konform avbildning från planet på sig självt.

Som möjligen är bekant tar möbiustransformationer cirklar och linjer till cirklar eller linjer. Det följer av att vi i Riemann-sfären kan betrakta cirklar och linjer som cirklar, där linjerna är cirklar som skär nordpolen, eller oändligheten. Om vi skriver om den räta linjen $Ax + By + C$, genom att representera de med z och sätta $x = \frac{z+\bar{z}}{2}$ och $y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, så får vi

$$\frac{1}{2}((A - iB)z + (A + iB)\bar{z} + C = \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + m,\ \alpha = \frac{1}{2}(A - iB),\ m \in \mathbb{R}.$$

Om vi också skriver om en cirkel centrerad i α med radie r, $|z - \alpha|^2 = r^2$, får vi $|z|^2 - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + |\alpha|^2 = r^2 \Leftrightarrow |z|^2 + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + m = 0$, för något $m \in \mathbb{R}$ där $|\alpha|^2 - m > 0$.

Proposition 2.2.3. *Alla homografiska transformationer skickar mängden av cirklar och linjer till sig själv.*

Bevis. Att en förflyttning eller skalning avbildar cirklar och linjer som cirklar och linjer, får anses förstått, a priori. Om en betraktar en inversion $1/z$ i fallen $m \neq 0$ respektive $m = 0$, tranformeras cirkeln på $|z|^2 + \frac{\alpha}{m}z + \frac{\bar{\alpha}}{m}\bar{z} + 1/m = 0$ och $\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} + 1 = 0$, respektive; och linjen transporteras till cirkeln $|z|^2 + \frac{\alpha}{m}z + \frac{\bar{\alpha}}{m}\bar{z} = 0$ och $\alpha z + \bar{\alpha}\bar{z} = 0$, för $m \neq 0$, $m = 0$, respektive. □

En naturlig fråga som kan dyka upp som konsekvens av det här, är om det alltid existerar en sådan avbildning, givet att en har två cirklar eller linjer, som skapar en korrespondens de emellan. Följande proposition visar att så faktiskt är fallet.

Proposition 2.2.4. *Låt tre distinkta punkter z_1, z_2, z_3 på Riemannsfären, och tre ytterligare, också distinkta, punkter w_1, w_2, w_3 i sfären, vara givet. Då existerar det en unik homografisk transformation T så att $T(z_i) = w_i$, $i = 1, 2, 3$.*

Bevis. Om vi har en avbildning T som tar de tre distinkta punkterna, z_1, z_2, z_3 till $0, 1$ och ∞ och en annan avbildning S som tar de tre distinkta punkterna, w_1, w_2, w_3 också till $0, 1$ och ∞, då kan vi hitta en avbildning mellan z_i och w_i genom att sammansätta avbildningen $S^{-1} \circ T$. Så vi kan börja med att titta på korsförhållandet (cross ratio)

$$Tz = \frac{z - z_1}{z - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1}$$

om ingen av punkterna är ∞. Om något $z_i = \infty$, säg z_3 kan vi bara ta

$$Tz = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

istället, då får vi $T(z_1) = 0$, $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = \infty$. Gör likadant för w_i, $i = 1, 2, 3$ för en avbildning S, och hitta dess invers och låt den eftersökta avbildningen bli ovan nämnda sammansättning.

För att bevisa entydigheten hos denna avbildning: Anta att vi har två avbildningar T_1 och T_2 som tar z_i till w_i, $i = 1, 2, 3$. Vi vill visa att om avbildningen $T_2^{-1} \circ T_1$ tar tre distinkta punkter till sig själva, så måste den vara identitetsavbildningen. Låt oss se vad det innebär när en homografisk avbildning tar tre distinkta punkter till sig själva. Eftersom att en homografisk avbildning som tar z till z för tre punkter är på formen $\frac{az+b}{cz+d} = z$ kan vi skriva om den så att

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0 \tag{2.4}$$

vilket är en andragradsekvation med två möjliga lösningar. Så om vi har en avbildning som tar 3 distinkta punkter z_1, z_2, z_3 till sig själva, då ska alla tre punkter vara en lösning till 2.4. Men det betyder att minst två av punkterna z_1, z_2, z_3 måste vara lika, vilket motsäger antagandet att de var distinkta. Detta betyder att avbildningen $T_2^{-1} \circ T_1$ som tar z_i till z_i måste vara identiteten, och alltså $T_2 \equiv T_1$. Med andra ord är avbildningen vi hittat unik. □

Det här ger upphov till följande korollarium, där cirklar och linjer anses vara samma sak, som tidigare nämnt, och därför kan även linjer kallas för cirklar.

Korollarium 2.2.4.1. *Låt två cirkler vara givna. Då existerar det alltid en homografisk transformation som skickar den ena cirkeln till den andra.*

Det bör nämnas att denna transformation inte behöver vara unik, då en alltid kan ta tre nya punkter på cirkeln och skicka till tre nya på den andra.

Exempel 2.2.5. Om vi letar efter en homografisk transformation $\frac{az+b}{cz+d}$ som tar punkterna $0, i, \infty$ till $-1, 0, 1$, respektive. Så kan vi deducera från $T(i) = 0$ att $a = 1$ och $b = -i$. Eftersom $T(\infty) = 1$ blir $c = 1$, och $T(0) = -1$ ger att $d = i$. Det ger oss den så kallade Cayley-avbildningen

$$Tz = \frac{z - i}{z + i}.$$

Om man endast tittar på axlarna, så tas den imaginära axeln (som är en cirkel) till den reella axeln (som också är en cirkel), som har bestämts av de tre punkterna vi använde till att bestämma avbildningen. Den reella axeln tas i sin tur till enhetscirkeln, eftersom $T(0) = -1$, $T(\infty) = 1$ och så kan vi se att $T(-1) = i$.

Låt oss nu titta på det övre halvplanet, som har den reella axeln som rand, $\Pi^+ = \{z : \mathrm{Im}\{z\} > 0\}$. Om vi tar Cayley-avbildningen på Π^+, så avbildas den alltså till insidan av enhetscirkeln, enhetsdisken $\mathbb{D}$, i och med att $T(i) = 0$.

Till exempel kan denna avbildning tillämpas på Dirichlets problem i Π^+. Om vi låter $Tz = w$, så kan vi hitta inversen genom lite algebra och få

$$Sw = T^{-1}w = i\frac{1 + w}{1 - w}, \tag{2.5}$$

som är en konform avbildning som tar den öppna enhetsdisken på Π^+.

Anta nu att vi har en kontinuerlig funktion definierad på randen till det övre halvplanet (den reella axeln), $\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \in \mathbb{R} = \partial\Pi^+$. Enhetscirkeln är ju bekväm, som vi vet, därför att den kan parametriseras via $e^{i\theta}$. Denna parametrisering är precis de punkter som T tar från den reella linjen, alltså $T(x) = e^{i\theta}$. Så för att hitta en motsvarande randfunktion ψ på enhetscirkeln, transporterar vi nu randen $\partial\mathbb{D}$ till $\mathbb{R}$ via S, så att vi har avbildat randen från enhetscirkeln konformt till randen till det övre halvplanet. Randvärdena givna av φ blir då givna av vår funktion

$$\psi(\partial\mathbb{D}) = \varphi(S(e^{i\theta})) = \frac{1}{1-\left(\frac{1+e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}}\right)^2} = \frac{(1-e^{i\theta})^2}{(1-e^{i\theta})^2-(1+e^{i\theta})^2} =$$

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-\cos\theta).$$

Nu är vi redo för Dirichlets problem i enhetsdisken istället, med randvärden givna av $\psi(e^{i\theta})$. För att hitta den harmoniska funktionen u i enhetsdisken som är lika med ψ på randen, så kan vi utvidga ψ till att vara definierad i hela $\mathbb{D}$. För $w \in \mathbb{D}$, så att $w = re^{i\theta}$, och för att u dessutom ska uppfylla Laplaces ekvation kan vi definiera u som

$$u(w) = u(re^{i\theta}) = \frac{1}{2}(1-r\cos\theta),\ 0 < r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Nu återstår det bara att transportera u till det övre halvplanet, för att ha löst Dirichlets problem med ϕ som randvärdesvillkor. Därför, låt v vara så att

$$v(z) = u(T(z)) = \frac{1}{2}(1-\operatorname{Re}\{T(z)\}) = \frac{1}{2}\left(1-\operatorname{Re}\left\{\frac{z-i}{z+i}\right\}\right) =$$

$$\frac{y+1}{x^2+y^2+2y+1},\ \textit{där}\ z = x+iy.$$

Alltså är v en harmonisk funktion på Π^+ och $v(x,0) = \frac{1}{1+x^2} = \varphi(x)$.

2.3 Konsten att finna en konform avbildning

Tack vare Riemanns teorem vet vi att det existerar en konform avbildning mellan enkelt sammanhängande öppna områden, distinkta från $\mathbb{C}$. Däremot är det inte alltid helt självklart hur en sådan avbildning kan konstrueras. Ett sätt som kan underlätta sökandet är att man delar upp avbildningen mellan flera enklare områden. Exempelvis, om en hittar en konform avbildning mellan de områden som ska finnas och enhetsdisken, så är det en relativt enkel uppgift att sammansätta dem och finna en avbildning mellan de öppna områdena. Om vi använder oss av de homografiska avbildningar som vi har studerat tillsammans med några elementära funktioner från den komplexa analysen, som exempelvis e^z, $\log z$, z^α och de trigonometriska funktionerna, kan mycket åstadkommas.

Exempel 2.3.1. Om till exempel en sektor av planet är givet, låt oss söka efter en avbildning från den till enhetsdisken $\mathbb{D}$. Rotationer och translationer kan enkelt avbilda sektorn så att den har centrum i origo och så att sektorns första kant går längs med den positiva reella axeln; med andra ord, att den blir avbildad till sektorn med vinkel α: $S_\alpha = \{z = re^{i\theta} : 0 < r < \infty, 0 < \theta < \alpha\}$. Nu kan avbildningen $z^{\pi/\alpha}$ ta denna sektor och skicka den till det övre halvplanet Π^+. Och halvplanet har vi redan sett att Cayley-avbildningen kan ta surjektivt till enhetsdisken. Därför, om vi nu sätter samman dessa funktioner i ordningen: Rotation med vinkel β, så att första kanten går längs med positiva reella axeln, $z^{\pi/\alpha}$, och sammansatt med Cayleys avbildning ger det:

$$f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1 = \frac{(e^{i\beta}z)^{\pi/\alpha} - i}{(e^{i\beta}z)^{\pi/\alpha} + i},\ \beta,\ \alpha \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{C}.$$

[1]

Exempel 2.3.2. Om en är ute efter en avbildning från en cirkelsektor i planet med en fixerad radie r, så kan man förskjuta sektorns spets till origo (likt exemplet innan), multiplicera med $1/r$, för att få den till en cirkelsektor av enhetscirkeln; rotera den som tidigare exempel; utvidga vinkeln så att den är semicirkeln $\{z = re^{i\theta} : 0 < r < 1, 0 < \theta < \pi\} = \{z : |z| < 1, \mathrm{Im}\{z\} > 0\}$. Nu kan det vara frestande att använda avbildningen z^2, men det avbildar endast vår semidisk till disken utan den reella positiva linjen. Därför, igen, kommer Cayleys avbildning $\frac{z-i}{z+i}$ (föregåendes invers) väl till pass, som vi då kan applicera och få semicirkeln till andra kvadranten; rotera nu till första kvadranten med $e^{-i\pi/2}$; nu kan z^2 användas och ta oss till Π^+, från vilken vi kan ta oss till enhetsdisken med Cayleys avbildning $i\frac{1+z}{1-z}$.

Exempel 2.3.3. En annan konform avbildning, som är viktig i tillämpningar för Dirichlets problem är Joukowskys avbildning. Joukowskys avbildning kan användas till att mappa exempelvis flödet av en vätska som åker på ett gupp i form av en cirkelskiva i övre halvplanet, där "plattar" avbildningen till skivan, konformt, så att flödet flyter som om guppet inte var där.

[1]Denna Cayleyavbildnings invers används i Bruna and Cufi, 2013, p. 354, varifrån det här exemplet är influerat av, men som egentligen tar det övre halvplanet till enhetscirkeln.

Låt oss försöka visa hur avbildningen kan konstrueras. Anta att $U = S^2 \setminus [-1, 1]$, där S^2 är Riemannsfären. Om en förskjuter området med -1, skickar det via en inversion i/z, och sedan förskjuter det med 1, får vi avbildningen $\frac{z+1}{z-1}$. Den tar oss från komplementet till linjesegmentet $[-1, 1]$ till $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Om vi från $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ använder avbildningen $\sqrt{z}$, så kommer vi till det högra halvplanet, alltså det öppna området $\{z : \mathrm{Re}\{z\} > 0\}$. En avbildning som tar oss direkt till enhetsdisken härifrån är $\frac{z+1}{z-1}$. Sammansättningen av dessa ger avbildningen

$$f(z) = \frac{\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} - 1}{\sqrt{\frac{z+1}{z-1}} + 1},$$

som med lite omskrivningen ger funktionen $w = f(z) = z - \sqrt{z^2 - 1}$. Dess invers blir då alltså en konform avbildning från $\mathbb{D}$ till U, där z ges av följande ekvation:

$$z = f^{-1}(w) = \frac{1}{2}\left(w + \frac{1}{w}\right). \tag{2.6}$$

Ta nu den öppna mängden $\mathbb{D}^* = \{z \in S^2 : |z| > 1\}$. Eftersom $w \in \mathbb{D}$ om och endast om $1/w \in \mathbb{D}^*$, så tar funktionen (2.6) även $\mathbb{D}^*$ till U.

Chapter 3

Riemanns teorem

Målet med den här sektionen är att bevisa Riemanns avbildningsteorem. Beviset är tänkt att gå via konstruktion av Greens funktion och existensen av en lösning till Dirichlets problem, som ska bevisas genom användandet av subharmoniska avbildningar och Perrons metod, samt konstruktion av barriärer till området. Genom att visa att Dirichlets problem har en lösning i varje begränsat enkelt sammanhängande öppet område ska Riemanns teorem bevisas.

Teorem 3.0.1 (Riemanns teorem för konforma avbildningar)**.** *Givet ett enkelt sammanhängande öppet område av planet U, $U \neq \mathbb{C}$, och en punkt $z_0 \in U$, så existerar det en unik konform avbildning f från U surjektivt till enhetsdisken $\mathbb{D}$, normaliserad med villkoren $f(z_0) = 0$, $f'(z_0) > 0$.*

För att undvika överflöd i beviset av Riemanns teorem kan vi normalisera området U till att vara begränsat. Alla icke-försvinnande holomorfa funktioner i ett enkelt sammanhängande öppet område $U \subset \mathbb{C}$ har egenskapen att ha en gren av kvadratroten på U, vilket en kan låta sig övertygas om i (Bruna and Cufi, 2013, p.224). Så låt $U \subset \mathbb{C}$, $U \neq \mathbb{C}$ och en punkt $z_0 \in U$ vara givet. Då kan vi hitta en punkt $a \notin U$ och låta $g(z) = \sqrt{z-a}$ vara en gren av roten ur $z-a$, $z \in U$, som är nollskilt därför att $z \neq a, \forall z \in U$. Så g är en holomorf och injektiv funktion på U. Eftersom g endast är *en* gren till roten, så antar $g(z)$ inte $-w$ för något $z \in U$ om $g(z_0) = w_0$, för $w_0 \in g(U)$. Så vi kan hitta en disk med radie $r > 0$ $D(w_0, r) \subset g(U)$. Vilket betyder att $D(-w_0, r) \cap U = \varnothing$, med andra ord är $|g(z) - (-w_0)| = |g(z) + w_0| \geq r$, $\forall z \in U$. Om vi nu låter $g_1(z) = c/(g(z) + w_0)$ där c är en tillräckligt liten konstant (exempelvis $|c| < r$), så är g_1 holomorf, injektiv, samt uppfyller att $|g_1(z)| < 1$, för alla

$z \in U$. Vilket betyder att området $g_1(U)$ är begränsat, samt att g_1 är en konform avbildning surjektiv på $g_1(U)$. Så om vi nu låter funktionen $g_0 = \tau \circ g_1$ vara en sammansättning av en automorfism av enhetscirkeln, τ med g_1, så får vi att g_0 tar U till ett begränsat område, samt uppfyller villkoren att $g_0(z_0) = 0$, $g_0'(z_0) > 0$. Detta gör att vi i fortsättningen kan begränsa U, till att istället vara ett *begränsat* enkelt sammanhängande öppet område av det komplexa talplanet.

3.1 Greens funktion

Som tidigare nämnt så ska existensen av en lösning till Dirichletproblemet visa Riemanns teorem. Att Dirichlets problem har en lösning kommer visa sig vara ekvivalent med att Greens funktion existerar.

Säg att vi alltid kan hitta Greens funktion i ett begränsat enkelt sammanhängande öppet område. Om vi då kan visa att existensen av Greens funktion implicerar att två öppna områden är konformt ekvivalenta, så har Riemanns teorem bevisats. Så vi vill ta reda på om Greens funktion alltid existerar och om den implicerar konform ekvivalens. Därför kommer nu en introduktion av just Greens funktion.

Greens funktion definieras med harmoniska funktioner, därför definieras harmoniska funktioner här.

Definition 3.1.1. En två gånger komplext differentierbar funktion $\phi : U \to \mathbb{R}$ på en öppen mängd $U \subset \mathbb{C}$ sägs vara harmonisk om den uppfyller Laplaces ekvation $\Delta\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ på U.

Det bör också nämnas att en holomorf funktion uppfyller villkoren för att vara harmonisk. Det kan vi se om vi låter $f = u + iv$ vara en holomorf funktion på ett öppet område U. Eftersom f är differentierbar i hela U, så uppfyller den Cauchy-Riemanns ekvationer, $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ i hela U. Så om vi tar andra derivatan får vi att $u_{xx} = v_{xy}$, $u_{yy} = -v_{xy}$, och eftersom $v_{xy} = v_{yx}$ för komplext differentierbara funktioner, så är $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Om vi gör samma sak för v får vi att f uppfyller Laplace ekvation.

Nu kan Greens funktion introduceras. Låt U vara ett öppet och begränsat område i $\mathbb{C}$. För att konstruera Greens funktion med en singularitet i en punkt $z_0 \in U$ behöver en finna en harmonisk funktion h på U som är kontinuerlig även på randen, $h \in C(\overline{U}) \cap H(U)$, så att $h(z) = \frac{1}{2\pi} Log|z - z_0|$ när $z \in \partial U$. Då kallas följande funktion för Greens funktion:

$$G_U(z_0, z) = \frac{1}{2\pi} Log|z - z_0| - h(z). \tag{3.1}$$

Greens funktion $G_U(z_0, z)$ kan definieras genom följande tre egenskaper:

i) $G_U(z_0, z)$ är kontinuerlig på $\bar{U} \setminus \{z_0\}$ och harmonisk på $U \setminus \{z_0\}$.

ii) $G_U(z_0, z) - \frac{1}{2\pi} Log|z - z_0|$ är harmonisk på U.

iii) $G_U(z_0, z) = 0$ för $z \in \partial U$.

Så om en vet hur man ska lösa Dirichlets problem med randvärdesvillkoren definierade av en funktion $\varphi(z) = \frac{1}{2\pi} Log|z - z_0|$, $z \in \partial U$ betyder det att lösningen är lika med den harmoniska funktionen $h(z)$, $z \in \partial U$ på randen. Alltså, som ovan antytt, kan Greens funktion konstrueras om en vet hur man kan lösa Dirichlets problem.

En viktig egenskap hos Greens funktion är att om man kan konstruera den i ett öppet område, så kan man transformera den via en konform avbildning till ett annat. Vilket tyder på att om man har en lösning till Dirichlets problem i området så kan man lösa det i det andra om man kan finna en konform avbildning de emellan, för enkelt sammanhängande öppna områden. Vi vill alltså veta om en harmonisk funktion på randen kan transformeras till randen på det andra området via en surjektiv konform avbildning.

Att en harmonisk funktion kan avbildas mellan ränderna på två konformt ekvivalenta områden följer från Caratheodorys teorem, som talar om relationen mellan konforma avbildningar och homeomorfa avbildningar. Homeomorfa avbildningar är avbildningar med egenskapen att vara kontinuerliga, bijektiva och ha en kontinuerlig invers (bikontinuerliga). Caratheodorys teorem har ett bevis på en matematisk nivå bortom den här textens, därför presenteras här teoremet utan bevis. För ett bevis ur ett ringteoretiskt perspektiv, se Wegert, 2012.

Teorem 3.1.2 (Carathéodory)**.** *Om U är ett enkelt sammanhängande öppet område, $U \neq \mathbb{C}$, så att ∂U är en sluten Jordan-kurva, då kan alla surjektiva konforma avbildningar, f, från U till enhetsdisken $\mathbb{D}$ utvidgas till en homeomorfism från $\overline{U}$ till $\overline{\mathbb{D}}$.*

Följande proposition visar att om Dirichlets problem kan lösas i det ena området, så kan det lösas i det andra, med hjälp av en konform avbildning som skapar en korrespondens mellan de öppna områdenas randvillkor.

Proposition 3.1.3. *Låt $f : U \to U'$ vara en homeomorfism, då går $f(z)$ mot randen av U' när z går mot randen av U.*

En egenskap hos konforma avbildningar är att $f(z)$ går mot randen av U' när z går mot randen av U om det för varje kompakt mängd $K' \subset U'$ finns en kompakt delmängd $K \subset U$ så att om $z \notin K$ så är $f(z) \notin K'$, för $f : U \to U'$ kontinuerlig mellan områdena (Bruna and Cufi, 2013, p. 331). Så om vi kan visa att det för varje kompakt mängd $K' \subset U'$ finns en kompakt delmängd $K \subset U$ så att om $z \notin K$ så är $f(z) \notin K'$, så har vi bevisat propositionen.

Bevis av 3.1.3. Låt den kompakta mängden $K' \subset U'$ vara givet. Eftersom f^{-1} är kontinuerlig så är mängden $K = f^{-1}(K')$ kompakt. Då gäller det att om $z \notin K$ så är $f(z) \notin f(K) = f(f^{-1}(K')) = K'$. □

Nu ska vi se att om vi har en Greens funktion i ett öppet och enkelt sammanhängande område U och en konform avbildning från U till ett öppet enkelt sammanhängande område U', så kan vi hitta en Greens funktion för U'.

Proposition 3.1.4. *Låt U, U' vara två begränsade öppna områden av $\mathbb{C}$, $z_0 \in U$, $w_0 \in U'$ och $f : U' \to U$ en surjektiv konform avbildning från U' till U så att $f(w_0) = z_0$. Antag att vi har en Greens funktion $G_U(z_0, z)$ med en singularitet i z_0. Då är funktionen $G_U(z_0, f(w))$ Greens funktion av U' med singularitet i w_0. Alltså:*

$$G_{U'}(w, w_0) = G_U(z_0, f(w)),\ w \in \bar{U}' \setminus \{w_0\}.$$

Bevis. För att visa att det gäller så räcker det att kolla att funktionen $G_U(z_0, f(w))$ uppfyller de tre villkoren i), ii) och iii) i U' och punkten $w_0 \in U'$. Till att börja med, säger proposition 3.1.3 att om w närmar sig randen, $\partial U'$, av U' då närmar sig också $f(w)$ randen av U. Eftersom $G_U(z_0, z)$ är 0 på randen ∂U, för alla $z \in \partial U$, och $f(w)$ närmar sig en punkt på ∂U, så är även $G_U(z_0, f(w)) = 0$ på randen till U, och därmed på randen till U' med tanke på att w närmar sig $\partial U'$. Därför uppfyller den *iii*) för Green's funktion. Eftersom att Greens funktion och den konforma avbildningen är kontinuerliga så är också sammansättningen av dem kontinuerlig upp till randen på U'. Funktionen $G_U(z_0, f(w))$ är dessutom en sammansättning av en holomorf och en harmonisk funktion, så den är även harmonisk på $U' \setminus \{w_0\}$. Så $G_U(z_0, f(w))$ uppfyller även $i)$.

Slutligen, för att visa att $G_U(z_0, f(w))$ uppfyller $ii)$, så existerar det, enligt $ii)$ i definitionen av Green's funktion, en harmonisk funktion på U så att $-h(z) = G_U(z_0, z) - \frac{1}{2\pi} Log|z - z_0|$, $z \in U$. Alltså är, tack vare sammansättningen av harmoniska funktioner, $-h(f(w)) = G_U(z_0, f(w)) - \frac{1}{2\pi} Log|f(w) - z_0|$ harmonisk på U', $w \in U'$. Och så är även

$$G_U(z_0, f(w)) - \frac{1}{2\pi} Log|w - w_0| = -h(f(w)) - \frac{1}{2\pi} Log|w - w_0| + \frac{1}{2\pi} Log|f(w) - z_0|,$$

eftersom följande likhet gäller

$$Log|f(w) - z_0| - Log|w - w_0| = Log \frac{|f(w) - f(w_0)|}{|w - w_0|},$$

och $\frac{|f(w) - f(w_0)|}{|w - w_0|}$ är holomorf och icke-försvinnande vid w_0. Därmed är även $ii)$ uppfylld och $G_U(z_0, f(w))$ är Greens funktion för området U'. □

Exempel 3.1.5. Greens funktion för enhetsdisken, $\mathbb{D}$, med en singularitet i origo är $G_{\mathbb{D}}(0, z) = \frac{1}{2\pi} Log|z|$, vilket kan verifieras via definitionen av Greens funktion. Om vi vill finna Greens funktion i enhetscirkeln för en annan punkt $z_0 \in \mathbb{D}$, säg $z_0 = \frac{1}{2} e^{\frac{i\pi}{3}}$, så kan vi använda den konforma avbildningen

$$\tau(z) = \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z},$$

som sammansatt med Greens funktion för enhetsdisken blir

$$G_{\mathbb{D}}(z_0, \tau(z)) = \frac{1}{2\pi} Log \left| \frac{z - z_0}{1 - \overline{z_0} z} \right|.$$

Så för punkten $z_0 = \frac{1}{2} e^{\frac{i\pi}{3}}$ som singularitet blir Greens funktion:

$$G_{\mathbb{D}} \left(\frac{1}{2} e^{\frac{i\pi}{3}}, z \right) = \frac{1}{2\pi} Log \left| \frac{z - \frac{1}{2} e^{(\frac{i\pi}{3})}}{1 - \frac{1}{2} e^{(\frac{4i\pi}{3})} z} \right|, z \in \mathbb{D} \setminus \{e^{(\frac{4i\pi}{3})}\}.$$

Med en singularitet i $z_0 \in U$ får vi Greens funktion som:

$$G_U(z_0, z) = G_{\mathbb{D}}(f(z_0), f(z)) = \frac{1}{2\pi} Log|f(z)|, \ z \in U \setminus \{z_0\}.$$

Nu ska vi se att det omvända för proposition 3.1.4 faktiskt också gäller; att om vi känner till Greens funktion, så kan den konforma avbildningen konstrueras. Men innan det ska Maximum principle presenteras. Även om den är känd för läsaren, så lär den vara nyttig att repetera.

Teorem 3.1.6 (Maximum principle)**.** *Låt f vara en holomorf och icke-konstant funktion i ett öppet område U. Då kan funktionen $|f|$ inte ha något lokalt maximum i U.*

Bevis. Anta att $|f|$ har ett lokalt maximum i U på en punkt $a \in U$. Det finns då en disk $D(a,R) \subset U$ centrerad i a med radie R så att $|f(z)| \leq |f(a)|$ för alla $z \in D(a,R)$. Eftersom $f(D(a,R))$ är öppen i $\mathbb{C}$ och $f(a) \in f(D(a,R))$, så kan vi välja en omgivning $D(f(a),r)$ runt punkten $f(a)$ så att $D(f(a),r) \subset f(D(a,R))$, för någon radie r. Men eftersom att en öppen mängd i det komplexa talplanet inte har några isolerade punkter så måste det finnas någon punkt $f(z) \in D(f(a),r) \subset f(D(a,R))$ så att $|f(z)| > |f(a)|$, därför att vi kan välja ett $f(z)$ genom att gå i en riktning från origo vilket ökar det absoluta värdet, vilket motsäger antagandet. □

Korollarium 3.1.6.1. *Låt U vara ett begränsat öppet område i $\mathbb{C}$ och f en holomorf funktion i en omgivning av $\overline{U}$ eller, mer generellt, $f \in C(\overline{U}) \cap H(U)$. Låt $M = \max |f|$ på randen, ∂U. Då är*

$$|f(z)| <= M, \textit{ för alla } z \in U.$$

Så maximum antas på randen: $\max_{\overline{U}} |f| = \max_{\partial U} |f|$.

Bevis. Eftersom $\overline{U}$ är en kompakt mängd, antar $|f|$ sitt största värde på någon punkt $a \in \overline{U}$. Om $a \in U$, då är a ett lokalt maximum i U, så, av Maximum principle 3.1.6, måste f vara konstant, och korollariumet gäller. Om $a \in \partial U$ på randen, då är $|f(a)|$ även globalt maxima, och alltså $|f(a)| = M$ och olikheten $|f(z)| \leq M$, $z \in U$, satisfieras. □

Innan propositionen om att existensen av Greens funktion implicerar att vi kan konstuera den konforma avbildningen, så ska vi redogöra vad som menas med ett harmoniskt konjugat till en harmonisk funktion i ett öppet område av det komplexa planet.

Definition 3.1.7. Givet en harmonisk funktion u i ett öppet område $U \subset \mathbb{C}$, en funktion v, differentierbar på U, kallas för det harmoniska konjugatet till u på U om $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$, med andra ord om funktionen $u + iv$ är holomorf på U.

Vi ska också använda oss av att harmoniska funktioner på enkelt sammanhängande områden har ett harmoniskt konjugat på området. Men för att bevisa detta behövs flera nya begrepp, därför hänvisas läsaren till (Wegert, 2012, Ch. 4, p.194) för ett bevis.

Teorem 3.1.8. *En harmonisk funktion $u : U \to \mathbb{R}$ i ett enkelt sammanhängande öppet område U har ett harmoniskt konjugat v i U.*

Nu har vi vad vi behöver för att ge den efterlängtade propositionen.

Proposition 3.1.9. *Låt U vara ett begränsat, enkelt sammanhängande öppet område av det komplexa planet och $z_0 \in U$. Om Greens funktion av U, med singularitet i z_0, existerar, då finns det en konform avbildning, f, från U surjektiv till $\mathbb{D}$ så att $f(z_0) = 0$ och $f'(z_0) > 0$.*

Proof. Om $G_U(z_0, z)$ är Greens funktion med singularitet i z_0, då vet vi att det existerar en harmonisk funktion h, som är kontinuerlig på $\overline{U}$, så att

$$G_U(z_0, z) - \frac{1}{2\pi} Log|z - z_0| = -h(z).$$

Eftersom U är öppet och enkelt sammanhängande, har h ett harmoniskt konjugat på U, $\tilde{h}$. Betrakta funktionen $f(z_0, z)$ som definieras av

$$f(z_0, z) = (z - z_0)e^{-2\pi(h(z)+i\tilde{h}(z))}.$$

Eftersom $f(z_0, z)$ är en sammansättning av holomorfa funktioner är den själv holomorf, är lika med 0 i punkten z_0. Och på randen till U blir $|f(z_0, z)| = |z - z_0|e^{-2\pi h(z)} = |z - z_0|e^{-2\pi(\frac{1}{2\pi}Log|z-z_0|)} = \frac{|z-z_0|}{|z-z_0|} = 1$, $z \in \partial U$, för $z \in \partial U$. Eftersom $|f(z_0, z)|$ är kontinuerlig på $\overline{U}$ ger maximum-principen 3.1.6.1 att $|f(z_0, z)| \leq 1$, $z \in U$; med andra ord, $f(z_0, z)$ mappar U in i enhetsdisken $\mathbb{D}$ och försvinner i punkten z_0. Nu återstår att visa att funktionen $f(z_0, z)$ är bijektiv, eftersom den eftersökta funktionen kan bestämmas genom att sätta $f(z) = f(z_0, z)$ och vi kan göra derivatan positiv genom att multiplicera $f(z)$ med $e^{i\theta}$ för ett passande θ som gör $f'(z) > 0$.

i) Låt oss börja med att visa på injektivitet i U.
Om $z_1 \in U$, låt oss definiera funktionen av z, likt vi gjorde med $\tau(z)$ ovan:

$$\varphi(z_0, z_1, z) = \frac{f(z_0, z) - f(z_0, z_1)}{1 - \overline{f(z_0, z_1)}f(z_0, z)}$$

så φ är holomorf på U, $|\varphi(z_0, z_1, z)| \leq 1$ och $\varphi(z_0, z_1 z_1) = 0$. Eftersom $f(z_1, z)$ är konstruerad likt $f(z_0, z)$ med z_0 ersatt med z_1, så är den 0 i punkten z_1. Det visar sig att om vi låter

$$h(z) = \frac{\varphi(z_0, z_1, z)}{f(z_1, z)}$$

är den holomorf och $|h(z)|$ går mot 1 när z går mot ∂U, så enligt maximum-principen 3.1.6.1 får vi att $|h(z)| \leq 1$, $z \in U$. Alltså är

$$|h(z_0)| = \left| \frac{\frac{f(z_0,z_0)-f(z_0,z_1)}{1-\overline{f(z_0,z_1)}f(z_0,z_0)}}{f(z_1, z_0)} \right| = \left| \frac{f(z_0, z_1)}{f(z_1, z_0)} \right| \leq 1,$$

och av symmetriskäl är $|f(z_0, z_1)| = |f(z_1, z_0)|$, så $|h(z_0)| = 1$. Alltså antar funktionen $|h|$ sitt maximum i en punkt på U, så $|h(z)|$ måste vara konstant av Maximum principle; alltså är $|h(z)| = 1$ för $z \in U$.

Definitionen av h ger därför nu

$$|\varphi(z_0, z_1, z)| = |f(z_1, z)| \neq 0,\ z \neq z_1,$$

och eftersom $|\varphi(z_0, z_1, z)| \neq 0$ är, enligt definitionen av $\varphi(z_0, z_1, z)$, så är $f(z_0, z) \neq f(z_0, z_1)$ om $z \neq z_1$. Vilket visar att $f(z_0, z)$ är injektiv på U.

ii) Låt oss nu visa på surjektiviteten hos $f(z_0, z)$.
Låt $w \in \mathbb{D}$ och antag att $f(z_0, z)$ inte antar värdet w i U. Då är funktionen

$$g(z) = \frac{f(z_0, z) - w}{1 - \overline{w} f(z_0, z)}$$

holomorf från U in i $\mathbb{D}$, där $g(z) \neq 0,\ z \in U$. Däremot går $|g(z)|$ mot 1 när z går mot ∂U, eftersom $|f(z_0, z)| \to 1$ och $g(z)$ då går mot

$$g(z) \to \frac{1 - w}{1 - \overline{w}}.$$

Så funktionen $\frac{1}{g(z)}$ är också holomorf och, likt $g(z)$, så går $\frac{1}{g(z)}$ mot 1 när z går mot ∂U. Vilket betyder, genom maximum-principen, att $|g(z)| \leq 1,\ z \in U$ och $\frac{1}{|g(z)|} \leq 1,\ z \in U$, som implicerar att $|g(z)| = 1,\ z \in U$. Vilket är en kontradiktion med tanke på om vi tar $z = z_0$ ger det $|g(z_0)| = \left|\frac{0-w}{1-\overline{w}*0}\right| = |w| < 1$. Alltså antar funktionen $f(z_0, z)$ värdet $w \in \mathbb{D}$ för ett godtyckligt valt w, vilket visar att $f(z_0, z)$ är surjektiv.

□

Därmed har vi visat att propositionen gäller. Men också att den konforma avbildningen specifikt är:

$$f(z) = f(z_0, z) = (z - z_0)e^{-2\pi(h(z)+i\bar{h}(z))}, \tag{3.2}$$

som vi kan justera genom rotation med $e^{i\theta}$ för att få $f'(z) > 0$, för något $\theta \in [0, 2\pi)$.

3.2 Subharmoniska funktioner

Riemanns teorem säger att givet ett enkelt sammanhängande öppet område U, med en punkt, så existerar den unika konforma avbildningen. Därför är det nu rimligt att visa att varje sådant område U har en Greens funktion. Med andra ord behöver vi visa att Dirichlets problem har en lösning i U. Under 1800-talet när Dirichlet och Riemann ville bevisa att det existerade en lösning, blev bevisen inte helt korrekta (Bruna and Cufi, 2013, p. 402), men som antogs vara rigorösa nog ändå, tack vare Dirichlets princip som kommer här.

Låt U vara ett begränsat öppet område och φ en kontinuerlig funktion på randen ∂U. Då är uppgiften att hitta en funktion u som uppfyller Laplaces ekvation $\Delta u = 0$ på U och på randen till U antar φ, $u\big|_{\partial U} = \varphi$. Då anses den så kallade Dirichlet-integralen vara:

$$I(u) = \int_U |\vec{\nabla} u|^2 dx\, dy.$$

Nu är uppgiften att minimera I bland alla funktioner $u \in C^1(\overline{U})$ som satisfierar $u\big|_{\partial U} = \varphi$. Det visar sig att om u_0 uppfyller detta och är globalt minimum, så är u_0 en harmonisk funktion på U, vilket betyder att u_0 är lösningen till Dirichlets problem i U med randvärdesvillkor φ. Dirichlet själv hade missat att visa på existensen av en funktion som minimerar integralen.

Det här förklarar varför vi behöver visa att Dirichlets problem har en lösning i ett öppet och begränsat enkelt sammanhängande område. Detta kan göras via Perrons metod, som bygger på subharmoniska funktioner. Därför kommer nu en introduktion av subharmoniska funktioner följt av Perrons metod.

För att relatera till den reella analysen, så påminner subharmoniska funktioner i det komplexa talplanet om konvexa funktioner på den reella linjen. Harmoniska funktioner är lösningen till Laplaces ekvation i en variabel, $\frac{d^2u}{dx^2} = 0$, och skrivs $u = ax + b$, där a och b är konstanter. Likt hur en funktion v som är under den linjära funktionen u för alla intervall mellan linjens ändpunkter, men där är lika med u, gör v konvex i intervallet mellan ändpunkterna, så är det likadant i det komplexa planet för subharmoniska funktioner. Alltså att en funktion v, som i en region av $\mathbb{C}$ är under den harmoniska funktion u men är lika med u på randen, kallas subharmonisk. Här kommer en definition av subharmoniska funktioner som är anpassad till lösningen till Dirichlets problem.

Definition 3.2.1. En reell funktion v, kontinuerlig på ett öppet område U i det komplexa talplanet, kallas subharmonisk på U om den uppfyller

$$v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

för alla $z_0 \in U$ och $r > 0$ så att $\overline{D}(z_0, r) \subset U$.

Denna olikhet kallas *medelvärdesolikheten*. Även harmoniska funktioner är subharmoniska. Det kan vi se därför att harmoniska funktioner uppfyller medelvärdesegenskapen. Beviset av detta skulle inte bidra till den här textens syfte, därför kommer nu ett teorem om medelvärdesegenskapen och harmoniska funktioner utan bevis här.

Teorem 3.2.2. *Om u är en harmonisk funktion på ett öppet område $U \subset \mathbb{C}$ uppfyller*

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta,$$

för alla $z_0 \in U$ och $r > 0$ så att $\overline{D}(z_0, r) \subset U$.

Så enligt definitionen av subharmoniska funktioner är alla harmoniska funktioner också subharmoniska. Även om u är en harmonisk funktion så gäller det att $|u|$ är en subharmonisk funktion från triangelolikheten; och alltså för en holomorf funktion, f, är $|f|$ subharmonisk.

Några egenskaper som subharmoniska funktioner har, likt konvexa, är följande.

Proposition 3.2.3. *Om v_1 och v_2 är subharmoniska funktioner på U, då är följande också subharmoniska funktioner:*

i) $v_1 + v_2$,

ii) αv_1, $\alpha > 0$,

iii) $v = \max\{v_1, v_2\}$.

Bevis. i) och ii) är mer eller mindre direkta och överlåts till läsaren att se. För iii) kan vi anta att en sluten disk $\overline{D}(z_0, r) \subset U$. Då har vi

$$v_1(z_0) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_1(z_0 + re^{i\theta})d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta})d\theta, \text{ och}$$

$$v_2(z_0) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v_2(z_0 + re^{i\theta})d\theta \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta})d\theta,$$

alltså är $v(z_0) = \max\{v_1(z_0), v_2(z_0)\} \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta})d\theta$. □

Det finns även en maximum-princip för subharmoniska funktioner.

Proposition 3.2.4 (Maximum principle för subharmoniska funktioner.)**.** *Låt v vara en subharmonisk funktion på ett öppet sammanhängande område U så att $v(z) \le M$, $z \in U$, där M är en konstant. Om det finns en punkt $z_0 \in U$ så att $v(z_0) = M$ då är $v(z) = M$ för alla $z \in U$.*

Bevis. Låt $\overline{D}(z_0, r) \subset U$, då följer det från definition 3.2.1 att

$$v(z_0) \le \frac{1}{r^2\pi}\int_{D(z_0,r)} v(z)dx\,dy.$$

Så vi har nu

$$\frac{1}{r^2\pi}\int_{D(z_0,r)} v(z)dx\,dy - v(z_0) = \frac{1}{r^2\pi}\int_{D(z_0,r)} v(z)dx\,dy - \frac{v(z_0)}{r^2\pi}\int_{D(z_0,r)} dx\,dy =$$

$$\frac{1}{r^2\pi}\int_{D(z_0,r)} [v(z) - v(z_0)]\,dx\,dy \ge 0,$$

men samtidigt är $v(z) \le M = v(z_0)$, så $v(z) - v(z_0) \le 0$. Alltså är $v(z) = v(z_0) = M$ på disken $D(z_0, r)$. □

Korollarium 3.2.4.1. *Låt u vara en harmonisk funktion på det öppna området U, kontinuerlig på $\overline{U}$, och låt v vara en subharmonisk funktion på U så att $\overline{\lim}_{z\to\xi} v(z) \leq u(\xi)$ för alla $\xi \in \partial U$. Då är $v(z) \leq u(z)$ för alla $z \in U$.*

Bevis. Låt u vara en harmonisk funktion och låt v vara en subharmonisk funktion på U så att $\overline{\lim}_{z\to\xi} v(z) \leq u(\xi)$ för alla $\xi \in \partial U$. Då uppfyller $v - u$ medelvärdesolikheten och är alltså subharmonisk, så vi kan anta att $\overline{\lim}_{z\to\xi} v(z) \leq 0$, $\xi \in \partial U$, och visa att $v(z) \leq 0$, $z \in U$. Om vi nu låter $w(z) = \max\{v(z), 0\}$, så är $w(z)$ också subharmonisk och $\overline{\lim}_{z\to\xi} = 0$, $\xi \in \partial U$. Så om vi definierar w genom att låta $w(\xi) = 0$, $\xi \in \partial U$, så är w kontinuerlig på $\overline{U}$, subharmonisk på U och noll på randen, ∂U. Så w har sitt maximum i någon punkt $z_0 \in \overline{U}$. Om $w(z_0) > 0$ så är $z_0 \in U$, vilket, enligt maximum-principen 3.2.4, betyder att w är konstant, vilket är en kontradiktion med tanke på att w är 0 på randen. Så $w(z_0) = 0$, alltså antar inte w några värden större än 0, och därför är $w(z) = 0$, $z \in U$ och $v(z) \leq 0$, $z \in U$. □

Nu vet vi att en subharmonisk funktion är mindre än en harmonisk funktion som har samma randvärden. Det kommer att utnyttjas frekvent genom kommande sektion.

Dirichlets problem kan lösas i en disk via Poissons integral av en kontinuerlig funktion φ på ∂D, som ges av

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{1 - |z|^2}{|z - w|^2} \varphi(w) dw$$

Bruna and Cufi, 2013, ch. 7, p. 270. Låt oss kalla den $P[\varphi]$. Alltså, $P[\varphi]$ är harmonisk på D, och $\lim_{z\to z_0} P[\varphi](z) = \varphi(z_0)$, *för varje* $z_0 \in \partial D$.

Låt nu v vara en subharmonisk funktion på den öppna mängden U, och D en disk så att $\overline{D} \subset U$. Definiera nu funktionen som vi kan kalla $\tilde{v}$ på U via:

$$\begin{cases} \tilde{v}(z) = P[v](z), \ \ om \ z \in D, \\ \tilde{v}(z) = v(z), \ \ om \ z \in U \setminus D. \end{cases} \tag{3.3}$$

Alltså att $\tilde{v}$ är den subharmoniska funktionen v utanför disken, men inne i disken är $\tilde{v}$ den harmoniska funktionen som är lika med v på randen till disken. Den här funktionen har en nyttig egenskap som presenteras av kommande proposition.

Proposition 3.2.5. *Låt v vara en subharmonisk funktion på U, D en disk så att $\overline{D} \subset U$ och $\tilde{v}$ vara funktionen definierad på U enligt 3.3. Då är $\tilde{v}$ subharmonisk på U och $v(z) \leq \tilde{v}(z)$, $z \in U$.*

Bevis. Från korollarium 3.2.4.1 är $v(z) \leq \tilde{v}(z)$, om $z \in D$. Eftersom de är lika utanför D är alltså $v(z) \leq \tilde{v}(z)$, $z \in U$. Eftersom $\tilde{v}$ är harmonisk på D, så har vi att $\tilde{v}(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{v}(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$ om $z_0 \in D$ och r tillräckligt litet. Dessutom, om $z_0 \notin D$ och $\overline{D}(z_0, r) \subset U$ så är

$$\tilde{v}(z_0) = v(z_0) \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \tilde{v}(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Med andra ord är alltså $\tilde{v}$ subharmonisk på U. $\square$

3.3 Perrons metod

Nu, för att kunna visa att Dirichlets problem har en lösning i ett begränsat enkelt sammanhängande öppet område, ska nu Perrons metod presenteras. Perrons metod är mer generell än bara för enkelt sammanhängande öppna områden.

Låt U vara ett begränsat öppet område av $\mathbb{C}$ och φ en reell kontinuerlig funktion på randen av U. Perrons metod går ut på att hitta en harmonisk funktion u på U som är mindre än φ på randen till U. Normaliserad till vissa villkor på randen, är u lösningen till Dirichlets problem i U med randvärden φ.

För att konstruera den harmoniska funktionen u ska vi definiera Perrons klass $\mathcal{P}(\varphi)$ av funktioner v som uppfyller följande villkor:

- i) v är subharmonisk på U.
- ii) $\overline{\lim}_{z\to\xi} v(z) \leq \varphi(\xi)$, för alla $\xi \in \partial U$.

Existensen av en sådan funktion kan vi se på att klassen $\mathcal{P}(\varphi)$ inte är tom. Det kan vi exempelvis se eftersom φ är en kontinuerlig funktion på randen ∂U, som är kompakt, så finns det en konstant $M > 0$ så att $|\varphi| \leq M$, $z \in \partial U$; alltså uppfyller $-M$ villkoren i) och ii), och $-M \in \mathcal{P}(\varphi)$. Dessutom, kan

vi genom att applicera korollarium 3.2.4.1, se att alla funktioner $v \in \mathcal{P}(\varphi)$ faktiskt uppfyller att $v(z) \leq M$, för $z \in U$.
Den funktion som vi ska använda oss av definierar vi såhär:

$$u(z) = \sup\{v(z) : \, v \in \mathcal{P}(\varphi)\}, \; z \in U. \tag{3.4}$$

Som ovan nämnt: Om $|\varphi(z)| \leq M$, $z \in \partial U$ så är $u(z) \leq M$ för $z \in U$.

Proposition 3.3.1. *Funktionen $u(z)$ (3.4) är harmonisk på U.*

Vi ska komma till beviset av denna proposition. Innan vi gör det ska vi presentera ett resultat angående monotona sekvenser av harmoniska funktioner. Ett korollarium som används till beviset av 3.3.1 är en konsekvens av ett teorem som kallas för Harnacks princip (Bruna and Cufi, 2013 p.394). Denna princip bygger dock sitt bevis på normala familjer, specifikt Montels teorem, som ju tanken med vårt bevis av Riemanns teorem är att vi ska kunna undvika. Nu när det vägskälet har nåtts, får tyvärr beviset bli beroende av normala familjer trots allt. Därför framförs nu Harnacks princip utan bevis, samt det korollarium som kommer som en konsekvens av det, vilken ska användas i beviset av fundamentalsatsen för konforma avbildningar, Riemanns teorem.

Teorem 3.3.2 (Harnacks princip.)**.** *Låt $\mathcal{F}$ vara en familj av positiva harmoniska funktioner på ett öppet område U av det komplexa talplanet. Då har varje sekvens av funktioner av $\mathcal{F}$ en delsekvens som konvergerar likformigt på kompakta delmängder av U, till antingen en harmonisk funktion på U eller till oändligheten.*

Korollarium 3.3.2.1. *Låt (u_n) vara en stigande sekvens av harmoniska funktioner på ett öppet område U. Då konvergerar (u_n) likformigt på kompakta delmängder av U, till antingen en harmonisk funktion på U eller till oändligheten.*

Bevis. Låt $(v_n) = u_n(z) - u_1(z)$, för en stigande harmonisk sekvens (u_n) på U. Då är (v_n) en stigande och *positiv* sekvens av harmoniska funktioner på ett öppet område U. Enligt 3.3.2 konvergerar (v_n) likformigt på kompakta delmängder av U, och så gör därför även (u_n). $\square$

Nu har vi tillräckligt för att visa att Perrons funktion 3.4 är harmonisk.

Bevis av 3.3.1. Låt D vara en godtyckligt vald disk så att $\overline{D} \subset U$. Vi ska nu visa att u är harmonisk på D. Låt z_0 vara en fixerad punkt i D. Eftersom u är supremum av de funktioner $v \in \mathcal{P}(\varphi)$ existerar det funktioner $v_n \in \mathcal{P}(\varphi)$, $n = 1, 2, ...$, så att $\lim_{n\to\infty} v_n(z_0) = u(z_0)$. Låt $V_n = \max\{v_1(z), ..., v_n(z)\}$, $z \in U$, och för varje n låt $\tilde{V}_n$ vara den funktion som är lika med V_n på $U \setminus D$ och som är den subharmoniska funktionen på D, som i definitionen av $\tilde{v}$ i (3.3). Eftersom sekvensen (V_n) är stigande mot $u(z_0)$, så är även $\tilde{V}_n$ stigande, enligt maximum-principen. Så från maximum-principen för subharmoniska funktioner 3.2.4 och 3.2.5 tillhör både V_n och $\tilde{V}_n$ till klassen $\mathcal{P}(\varphi)$.

Från olikheten

$$v_n(z_0) \leq V_n(z_0) \leq \tilde{V}_n(z_0) \leq u(z_0)$$

kan vi se att $\lim_{n\to\infty} \tilde{V}_n(z_0) = u(z_0) \leq M$. Enligt 3.3.2.1 konvergerar sekvensen $\tilde{V}_n$ till en harmonisk funktion $\tilde{u}$ på D, som uppfyller att $\tilde{u}(z) \leq u(z)$, $z \in D$ och $\tilde{u}(z_0) = u(z_0)$. Så om vi visar för en godtyckligt vald annan punkt $z_1 \in D$ att likhet gäller, får vi att $\tilde{u}$ och u är identiska, och u är då alltså harmonisk. Så fixera nu en punkt $z_1 \in D$ och ta istället funktioner $w_n \in \mathcal{P}(\varphi)$, $n = 1, 2, ...$, så att $\lim_{n\to\infty} w_n(z_1) = u(z_1)$, och ersätt w_n med $\omega_n = \max\{v_n, w_n\}$ och låt $W_n = \max\{\omega_1, ..., \omega_n\}$. Låt nu $\tilde{W}_n$ vara den funktion som är lika med W_n på $U \setminus D$ och harmonisk på D där den är lika med W_n på randen till D. Eftersom $(\tilde{W}_n)$ är en växande sekvens av funktioner i $\mathcal{P}(\varphi)$ som är harmoniska på D, konvergerar den med ett gränsvärde $\tilde{u}_1(z)$, som är en harmonisk funktion på D som uppfyller att

$$\tilde{u}(z) \leq \tilde{u}_1(z) \leq u(z),\ z \in D \textit{ och } \tilde{u}_1(z_1) = u(z_1).$$

Alltså antar funktionen $\tilde{u} - \tilde{u}_1$ sitt maximum (0) i punkten z_0, och från maximum principle är $\tilde{u}(z) = \tilde{u}_1(z)$, $z \in D$. Så vi har att $\tilde{u}(z_1) = \tilde{u}_1(z_1) = u(z_1)$, så de är med andra ord identiska. □

Det återstår nu endast att kolla att $\lim_{z\to z_0} u(z) = \varphi(z_0)$, för varje $z_0 \in \partial U$ för att lösa Dirichlets problem i U med randvärde bestämt av φ. Till det kommer så kallade reguljära punkter att användas. Det är därför nu dags att presentera en definition av dem.

Definition 3.3.3. En punkt ξ_0 av randen till ett begränsat öppet område U kallas för en reguljär punkt av ∂U om

$$\lim_{z\to\xi_0} u(z) = \varphi(z_0),\ z \in U$$

gäller för varje funktion φ definierad och kontinuerlig på ∂U, där u är den harmoniska funktion definierad i 3.4.

När Dirichlets problem har en lösning, då är den lösningen nödvändigtvis given av Perrons metod, som ges av den harmoniska funktionen u som vi har definierat. Det kan vi se om vi antar att h är en lösning till Dirichlets problem i U, vilket betyder att $h \in \mathcal{P}(\varphi)$, och alltså att $h(z) \leq u(z)$, $z \in U$, då $u(z)$ är supremum av alla funktioner i $\mathcal{P}(\varphi)$, $z \in U$. Men ett av kriterierna för Perrons klass av funktioner är att de uppfyller $\overline{\lim}_{z\to\xi} v(z) \leq \varphi(\xi) = h(\xi)$, för alla $\xi \in \partial U$, så från korollarium 3.2.4.1 är $v(z) \leq h(z)$, $z \in U$, och alltså är även $u(z) \leq h(z)$. Därför är $h(z)$ Perrons lösning, då $h(z) \equiv u(z)$.

Exempel 3.3.4. Om vi betraktar mängden $U = \mathbb{D} \setminus \{0\}$ och punkten $z_0 = 0 \in \partial U$. Låt också φ vara den funktion som antar värdet 0 på enhetscirkeln, samt att $\varphi(z_0) = 1$. Anta att h är en lösning till Dirichlets problem. Då har vi att $\lim_{z\to\xi} h(z) = \varphi(\xi)$, $\xi \in \partial U$. Och vi vet att $h(z)$ går mot 1 när z går mot $z_0 = 0$ av proposition 3.1.3, men det betyder att det finns en punkt $z \in U$ så att $h(z) > 0 = \lim_{z\to\xi} h(z)$, $\xi \in \partial U$. Därför uppfyller inte $h(z)$ Perrons klass-kriterier. Med andra ord kan h inte vara en lösning till Dirichlets problem. Därför existerar heller inte en lösning till Dirichlets problem på U. Så 0 är alltså inte en reguljär punkt av U.

Vi kommer att introducera barriärer som är både tillräckligt och nödvändigt för att hitta en reguljär punkt på randen. Följande är tänkt att motivera dess definition.

För att finna villkoren till att en punkt $\xi_0 \in \partial U$ skall vara reguljär, ska vi lösa Dirichlets problem för några specifika randvärden. Låt $\xi_0 \in \partial U$ vara bestämd och antag att den är reguljär. Låt $\varphi(\xi) = |\xi - \xi_0|$, $\xi \in \partial U$ och u vara Perrons lösning associerad till φ. Vi vet att distansfunktionen $|z - \xi_0| \in \mathcal{P}(\varphi)$ eftersom den uppfyller Perrons villkor, alltså vet vi att lösningen u har egenskapen att $u(z) \geq |z - \xi_0|$, $z \in U$. Så om vi nu låter $h(z) = -u(z)$, så är h harmonisk på U och uppfyller följande

$$\lim_{z\to\xi_0} h(z) = \varphi(\xi_0) = 0, \; \overline{\lim_{z\to\xi}}\, h(z) \leq -|\xi - \xi_0| < 0, \textit{ för } \xi \in \partial U,\, \xi \neq \xi_0,\, z \in U.$$

Så h är en harmonisk funktion på U, försvinner i punkten ξ_0 och är strikt negativ på $\partial U \setminus \{\xi_0\}$. Det här motiverar följande definition.

Definition 3.3.5. Om ξ_0 är en randpunkt till ett begränsat öppet område U, då är en barriär på punkten ξ_0 en harmonisk funktion h på U så att

$$\lim_{z\to\xi_0} h(z) = 0,\ \overline{\lim_{z\to\xi}} h(z) < 0,\ \textit{för}\ \xi \in \partial U,\ \xi \neq \xi_0.$$

Exempel 3.3.6. Vi ska se tre exempel på barriärer, som ska komma till nytta i beviset av Riemanns teorem. Här betecknar $\mathbb{C}^*$ det utökade complexa planet $\mathbb{C} \cup \{-\infty, \infty\}$.

i) Om $U = \mathbb{D}$ och $\xi_0 \in \partial\mathbb{D}$, så är $h(z) = Re(z\overline{\xi_0}) - 1$ en barriär i punkten ξ_0.

ii) Anta att $\xi_0 \in \partial U$ och att det existerar ett segment, L, av en rak linje, med ändpunkt i ξ_0, så att $L \cap U = \varnothing$. Då kan vi skapa en barriär i punkten ξ_0 enligt följande: Om ξ_1 är den andra ändpunkten till L, så försvinner inte funktionen $(z-\xi_0)/(z-\xi_1)$ på det enkelt sammanhängande öppna området $\mathbb{C}^* \setminus L$, vilket betyder att det finns en holomorf gren av $\sqrt{(z-\xi_0)/(z-\xi_1)}$ i $\mathbb{C}^* \setminus L$. Den här funktionen avbildar $\mathbb{C}^* \setminus L$ in i ett halvplan med en rand i form av en rak linje genom origo, vilket vi kan rotera med en vinkel α så att linjen är den imaginära axeln. Detta betyder att den harmoniska funktionen

$$h(z) = Re\left(e^{i\alpha}\sqrt{\frac{z-\xi_0}{z-\xi_1}}\right)$$

är strikt negativ i $\partial U \setminus \{\xi_0\}$ och $h(\xi_0) = 0$.

iii) Ett specifikt fall av *ii)* är när randen ∂U består av en $C^1 - kurva$ runt ξ_0, med icke-försvinnande derivata (reguljär kurva). Då har $\mathbb{C} \setminus U$ i sin interiör ett linjesegment i samma riktning som normalen till ∂U.

Följande proposition visar att existensen av barriärer även är ett tillräckligt villkor för att en punkt ska vara reguljär.

Proposition 3.3.7. *Låt ξ_0 vara en punkt på randen till ett begränsat öppet område U, och anta att det existerar en barriär på punkten ξ_0. Då är punkten ξ_0 en reguljär punkt av randen ∂U.*

Låt oss gå igenom ett användbart iakttagande innan vi bevisar propositionen. Som vi har fått lära oss associerar Perrons metod en harmonisk funktion $u \in U$ till varje kontinuerlig funktion φ på randen ∂U. Den här relationen kallas *superlinjär* enligt följande egenskaper:
Låt φ_1 och φ_2 vara kontinuerliga funktioner på randen, $\varphi_1, \varphi_2 \in C(\partial U)$, och låt de tillhörande harmoniska funktionerna till φ_1, och φ_2 vara u_1 och u_2, respektive. Då är enligt definitionen av u och klassen $\mathcal{P}(\varphi)$, $\varphi_1 + \varphi_2 \geq u_1 + u_2$, eller med andra ord:

$$\sup\{v(z) : v \in \mathcal{P}(\varphi_1+\varphi_2)\} \geq \sup\{v(z) : v \in \mathcal{P}(\varphi_1)\}+\sup\{v(z) : v \in \mathcal{P}(\varphi_2)\}. \tag{3.5}$$

Bevis 3.3.7. Låt φ vara kontinuerlig på randen ∂U och antag att $|\varphi(\xi)| \leq M$, *för en konstant* $M > 0$, *och* $\xi \in \partial U$. Låt $\xi_0 \in \partial U$ vara en bestämd punkt och låt h vara en barriär till ξ_0. Enligt definitionen av en regulär punkt $\xi_0 \in \partial U$, om u är den associerade harmoniska funktionen till φ enligt Perrons metod, så måste följande visas

$$\lim_{z \to \xi_0} u(z) = \varphi(\xi_0). \tag{3.6}$$

Vilket är ekvivalent med att visa att för alla $\varepsilon > 0$, så gäller

$$\overline{\lim_{z \to \xi_0}}\, u(z) \leq \varphi(\xi_0) + \varepsilon, \ \ \underline{\lim_{z \to \xi_0}}\, u(z) \geq \varphi(\xi_0) - \varepsilon. \tag{3.7}$$

Låt nu därför $\varepsilon > 0$ vara givet. Välj nu ett $\delta > 0$ så att om $\xi \in \partial U \cap D(\xi_0, \delta)$ är i en omgivning runt ξ_0 med radie δ så är

$$\varphi(\xi_0) - \varepsilon \leq \varphi(\xi) \leq \varphi(\xi_0) + \varepsilon.$$

Låt nu $m = \sup\{h(z) : z \in U \setminus D(\xi_0, \delta)\}$. Av maximum-principen och definitionen av barriärer är $m < 0$. Låt nu

$$v(z) = \varphi(\xi_0) - \varepsilon - \frac{h(z)}{m}(M + \varphi(\xi_0))$$

så att v är harmonisk på U, och uppfyller både

$$\overline{\lim_{z \to \xi}}\, v(z) \leq \varphi(\xi_0) - \varepsilon \leq \varphi(\xi), \ \ om\ \xi \in \partial U \cap D(\xi_0, \delta)$$

(eftersom $\overline{\lim}_{z \to \xi} h(z) = \lim_{z \to \xi_0} h(z) = 0$ här), och

$$\overline{\lim_{z\to\xi}}\, v(z) = \overline{\lim_{z\to\xi}}\, \varphi(\xi_0) - \varepsilon - \frac{h(z)}{m}(M + \varphi(\xi_0)) \leq$$

$$\varphi(\xi_0) - \varepsilon - (M + \varphi(\xi_0)) = -M - \varepsilon \leq \varphi(\xi), \;\; om\ \xi \in \partial U \setminus D(\xi_0, \delta).$$

Därför är $v \in \mathcal{P}(\varphi)$ och $v(z) \leq u(z)$, $z \in U$, med konsekvensen att

$$\underline{\lim}_{z\to\xi_0} u(z) \geq \underline{\lim}_{z\to\xi_0} v(z) = \varphi(\xi_0) - \varepsilon.$$

Vilket är den ena eftersökta olikheten i 3.7.

Om vi nu tar $-\varphi$ istället för φ och argumenterar likadant och hittar en associerad harmonisk funktion via Peerrons metod till $-\varphi$ som vi kan kalla u_1, får vi

$$\underline{\lim}_{z\to\xi_0} u(z) \geq -\varphi(\xi_0) - \varepsilon.$$

Som det beskrevs innan beviset angående superlinearitet i 3.5 är $u(z) + u_1(z) \leq 0$. Alltså är $u(z) \leq -u_1(z)$ och $\overline{\lim}_{z\to\xi_=} u(z) \leq \overline{\lim}_{z\to\xi_0}(-u_1(z)) = -\underline{\lim}_{z\to\xi_0} u_1(z) \leq \varphi(\xi_0) + \varepsilon$, vilket är den andra olikheten i 3.7. Därmed är proposition 3.3.7 bevisad. ☐

Korollarium 3.3.7.1. *Dirichlets problem kan lösas i alla bundna öppna områden U så att varje punkt $\xi \in \partial U$ är en ändpunkt till ett segment γ, så att för alla andra punkter $\zeta \in \gamma$ så är $\zeta \notin \gamma \cap U$. I synnerhet händer detta när ∂U består av ett ändligt antal reguljära kurvor (derivata aldrig* 0 *och kurvan är C^1).*

Proof. Enligt exempel 3.3.6 *ii)* och *iii)* existerar det en barriär till varje punkt $\xi \in \partial U$. Applicera nu proposition 3.3.7, och vi har att varje punkt är en reguljär punkt; så $\lim_{z\to\xi_0} u(z) = \varphi(z_0), \; z \in U$, för funktionen u definierad i 3.4; som alltså är lösningen till Dirichlets problem i U. ☐

3.4 Konstruktion av barriärer till öppna och begränsade enkelt sammanhängande områden

För att bevisa Riemanns teorem, är det nu tillräckligt att visa att för varje begränsat enkelt sammanhängande öppet område U kan vi konstruera barriärer på varje punkt i randen ∂U, och sedan applicera proposition 3.3.7, likt vi gjorde för korollarium 3.3.7.1. Det följer dock inte som en konsekvens av beviset av 3.3.7.1, eftersom det kan hända att det inte existerar något segment som är delmängd till $\mathbb{C} \setminus U$ samtidigt som den har $\xi_0 \in \partial U$ som ändpunkt. Detta motiverar följande proposition.

Proposition 3.4.1. *Låt U vara ett begränsat och enkelt sammanhängande öppet område av $\mathbb{C}$, då existerar det en barriär till varje punkt av randen ∂U av U.*

Bevis. Låt $\xi_0 \in \partial U$ vara bestämd och låt oss nu konstruera en barriär h på ξ_0. Om en punkt $\xi_1 \notin U$ är tillräckligt långt borta från U så att $e \cdot \max_{z \in U} |\xi_0 - z| < \min_{z \in U} |\xi_1 - z|$, så är mängden $A = \{z : |z - \xi_0| < \frac{1}{e}|z - \xi_1|\}$ en öppen mängd med U som delmängd. Eftersom U är enkelt sammanhängande har funktionen $Log\frac{z-\xi_0}{z-\xi_1}$ en holomorf gren på U, som vi kan kalla f. Om $z \in U \subset A$, så har vi att $\operatorname{Re} f(z) = Log\left|\frac{z-\xi_0}{z-\xi_1}\right| < -1$, alltså att f antar värden i halvplanet $\{w : \operatorname{Re} w < -1\}$. Eftersom den konforma avbildningen $w \mapsto \frac{1}{w}$ tar det här halvplanet in i disken $D(-1/2, 1/2)$, så antar funktionen $\frac{1}{f(z)}$, som är holomorf på U, sina värden inuti denna disk. Funktionen $h(z) = \operatorname{Re} \frac{1}{f(z)}$ är harmonisk på U och om $\xi \in \partial U$, så är $\overline{\lim}_{z \to \xi} h(z) \leq 0$. Men $\overline{\lim}_{z \to \xi} h(z) \leq 0$ sker endast om $\lim_{z \to \xi} \operatorname{Re} f(z) = -\infty$, och det är endast möjligt om $\xi = \xi_0$; alltså är $\lim_{z \to \xi_0} h(z) = 0$, $\overline{\lim}_{z \to \xi} h(z) < 0$, *för* $\xi \in \partial U$, $\xi \neq \xi_0$, och h är en barriär i punkten ξ_0. Därför kan en barriär konstrueras i varje punkt av randen till ett begränsat enkelt sammanhängande öppet område U. □

Korollarium 3.4.1.1. *Dirichlets problem har en lösning i varje begränsat och enkelt sammanhängande öppet område av planet.*

Detta följer av att applicera proposition 3.3.7, likt vi gjorde i följdsatsen 3.3.7.1, på ovan resultat från 3.4.1.

3.5 Bevis av Riemanns teorem

Det är nu dags att knyta ihop alla resultat till ett bevis av Riemanns teorem. Låt oss börja med att visa att avbildningen i teoremet är unik. Till entydighetsbeviset kan Schwarzs lemma vara behjälpligt; därför kommer det här.

Lemma 3.5.1 (Schwarz lemma)**.** *Om funktionen f är analytisk på enhetsdisken $\mathbb{D}$ och uppfyller villkoren att $|f(z)| \leq 1$, för alla $z \in \mathbb{D}$, och $f(0) = 0$, då är $|f(z)| \leq |z|$, för alla $z \in \mathbb{D}$, och $|f'(0)| \leq 1$. Om likheten $|f(z)| = |z|$ gäller för någon punkt $z \in \mathbb{D}$ eller om $|f'(0)| = 1$ så är $f(z) = \alpha z$, där $|\alpha| = 1$.*

Bevis. Antagandet om f gör att funktionen $g(z) = f(z)/z$ är holomorf på $\mathbb{D}$. I cirkeln $\{z : |z| = r\}$ har vi att $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1/r$, och Maximum principle ger då att $|g(z)| \leq 1/r$, för $|z| \leq r$. Så om vi nu låter $r \to 1$ får vi att $|g(z)| \leq 1$, för $|z| \leq 1$ alltså att $|f(z)| \leq |z|$. Dessutom är $f'(z) = g(z) + zg'(z)$, så $f'(0) = g(0) \leq 1$.
Om likheten som nämndes gäller på någon punkt $z \in \mathbb{D}$, så antar funktionen $|g(z)|$ sitt maximum där, vilket implicerar att $g(z)$ är konstant. Alltså är då $g(z) = \alpha$, där $|\alpha| = 1$ och $f(z) = \alpha z$. □

Nu kan beviset av Riemanns teorem ges. Vi börjar med entydighetsbeviset.

Bevis att funktionen f i Riemanns teorem är unik. Anta att det existerar två funktioner f_1, $f_2 : U \to \mathbb{D}$ som är konforma, surjektiva och normaliserade till att $f_1(z_0) = f_2(z_0) = 0$ och $f_1'(z_0), f_2'(z_0) > 0$. Låt $f_3(w) := f_2 \circ f_1^{-1}(w)$. Vilket gör att $f_3 : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ är en bijektiv holomorf avbildning från enhetsdisken till sig själv. Då är $f_3(0) = f_2(f_1(0)) = f_2(z_0) = 0$ och $f_3'(0) = f_2'(f_1^{-1}(0)) \cdot D(f_1^{-1}(0)) = f_2'(z_0) \cdot \frac{1}{f_1'(z_0)} > 0$. Så vi har:

- $|f_3(z)| \leq 1$, $|f_3^{-1}(w)| \leq 1$ för alla $z, w \in \mathbb{D}$.
- $f_3(0) = 0$, $f_3^{-1}(0) = 0$
- $f_3'(0) > 0$, $(f_3^{-1})'(0) > 0$

Så enligt Schwarz's lemma är $|f_3(z)| \leq |z|$ och $|f_3^{-1}(z)| \leq |z|$ för alla $z \in \mathbb{D}$. Med andra ord gäller likheten $|f_3(z)| = |z|$, vilket Schwarz's lemma då implicerar att $f_3(z) = \alpha z$, där $|\alpha| = 1$. Så $f'(z) = \alpha$ för alla z, och eftersom $f'(0) > 0$ är $\alpha = 1$, vilket betyder att funktionen f_3 är identiteten och $f_2 = f_1$. Därför är avbildningen unik. □

Anta nu att U är ett begränsat enkelt sammanhängande öppet område i $\mathbb{C}$. Enligt korollarium 3.4.1.1 har alltså Dirichlets problem en lösning i U, där för varje punkt $z \in \partial U$ antar den eftertraktade funktionen värdet $\frac{1}{2\pi} Log|z - z_0|$. Därför, om den harmoniska funktionen h är en lösning till det här Dirichlet-problemet, så ges Greens funktion på U, med singularitet i z_0, av $G_U(z_0, z) = \frac{1}{2\pi} Log|z - z_0| - h(z)$, $z \in U \setminus \{z_0\}$. Om vi nu applicerar proposition 3.1.9 vet vi att det finns en konform avbildning $f : U \to \mathbb{D}$, som tar U surjektivt till enhetsdisken där $f(z_0) = 0$ och $f'(z_0) > 0$, vilket är den eftersökta unika konforma avbildningen från U till $\mathbb{D}$, som Riemanns teorem framhåller.

Sammanfattningsvis, började vi med att visa att vi kunde normalisera vårt område till att vara begränsat, utan att påverka utkomsten. Sedan konstaterade vi att existensen av Greens funktion i ett enkelt sammanhängande öppet område är ekvivalent med att Dirichlets problem har en lösning; och så visade vi att existensen också implicerar att en konform avbildning från området till enhetsdisken existerar, där $f(z_0) = 0$ och $f'(z_0) > 0$. Det motiverade att visa att Dirichletproblemet har en lösning, givet vilket enkelt sammanhängande och öppet område som helst i $\mathbb{C}$, men skilt från $\mathbb{C}$, för att visa Riemanns teorem. Vi introducerade också subharmoniska funktioner. Specifikt definierade vi Perrons klass av subharmoniska funktioner, där vår eftersökta harmoniska funktion, u, visade sig vara supremum av den klassen i vårt område. Dock var det där som vi inte helt kom undan de normala familjerna; när u bevisades vara harmonisk. För att visa att u antog samma värden som den definierade kontinuerliga funktion på randen till området i Dirichletproblemet, introducerade vi reguljära punkter som är precis de punkter där detta uppfylldes för u. Vi visade att om det existerade en barriär på en punkt på randen, så var den punkten en reguljär punkt, vilket motiverade att visa på existensen av barriärer. Det visade sig att det existerar till varje punkt av randen till ett enkelt sammanhängande och öppet område $U \subset \mathbb{C}$. Vi avslutade med att bevisa att Dirichlets problem har en lösning med hjälp av detta, samt att den konforma avbildningen i Riemanns teorem var unik. Med allt detta fick vi se Riemanns avbildningsteorem bevisat.

Referenser

Bruna, J., & Cufi, J. (2013). *Complex analysis*. European Mathematical Society.

Ransford, T. (1995). *Potential theory in the complex plane*. Cambridge university press.

Wegert, E. (2012). *Visual complex functions: An introduction with phase portraits*. Birkhäuser Basel (Springer Science & Business Media). https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0180-5