SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

MacMahons teorem

av

Klara Zimmerman

2023 - K4

MacMahons teorem

Klara Zimmerman

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Rikard Bögvad

2023

Abstract

In this essay we explore symmetric plane partitions, which can be visualized as three dimensional arrangements of unit cubes that satisfy certain symmetry conditions. I have studied David M. Bressoud's book Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture, and focused on the parts leading up to MacMahon's theorem. Bressoud takes the reader through important combinatorial theorems and their proofs, such as the Vandermonde determinant theorem, the Weyl denominator formula and the Jacobi-Trudi Identity. I will present these theorems step by step, focusing on details and illustrating through basic examples. In order to understand the theorems presented, fundamental combinatorial concepts such as inversion numbers, semi standard Young tableaux and Schur functions are introduced. Finally, I will use these concepts and theorems to prove Percy MacMahon's generating function for symmetric plane partitions.

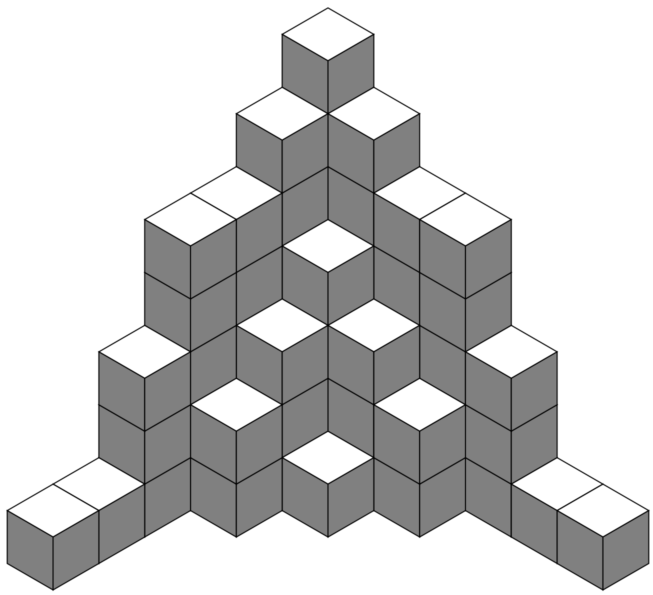
Tack

Jag vill tacka min handledare Rikard som föreslog uppsatsämnet, och som med stort engagemang och tålamod har svarat på mina frågor och väglett mig under arbetets gång. Det har varit till mycket stor hjälp.

Innehåll

1 Introduktion

En planpartition är en partition som i tre dimensioner kan visualiseras som staplade enhetskuber i ett hörn i rummet. Staplarnas höjd är monotont avtagande från hörnet, och antalet staplar är ändligt. En symmetrisk planpartition är sådan att höger och vänster sida är spegelbilder av varandra, med symmetrilinje i planet $x = y$.



Figur 1: exempel på en symmetrisk planpartition

1916 publicerade Percy MacMahon sitt bevis för den genererande funktionen för symmetriska planpartitioner. I denna uppsats presenteras detta bevis, samt viktiga satser och definitioner som krävs för att förstå det. Första delarna handlar om inversionstal och determinantformler. Med hjälp av dessa kan vi titta på Schurfunktioner, en form av symmetriska funktioner, och motivera att dessa är genererande funktioner till så kallade semistandard Youngtableauer. Därefter utforskar vi relationen mellan planpartitioner och semistandard Youngtableauer, vilket slutligen leder fram till den genererande funktionen för en symmetrisk planpartition, som en summa av Schurfunktioner.

2 Inversionstal

2.1 Definitioner och exempel

Notation: Vi låter permutationen σ som är ett element av den symmetriska gruppen S_n skrivas med enradsnotation. Alltså får vi en talföljd $\sigma = \sigma(1)\ldots\sigma(n)$, där talet $i \in \{1, \ldots, n\}$ permuteras till $\sigma(i)$. Eftersom en permutation är en bijektiv avbildning vet vi att $\sigma^{-1}(i)$ är definierat för alla i.

Definition 2.1 (Inversion av en permutation)**.** *En inversion av en permutation* $\sigma \in S_n$ *är ett par* (i, j)*,* $i, j \in \{1, \ldots, n\}$*, sådant att* $i > j$ *och* i *förekommer till vänster om* j *i permutationen, alltså* $\sigma^{-1}(i) < \sigma^{-1}(j)$*.*

Exempel 1. $(3, 1)$ *är en inversion av permutationen* $\sigma = 3142$ *eftersom* $3 > 1$ *och* $\sigma^{-1}(3) = 1 < 2 = \sigma^{-1}(1)$*.*

På samma sätt ser vi att σ *även har inversioner* $(3, 2)$ *och* $(4, 2)$*.*

Definition 2.2 (Inversionstal av en permutation)**.** *Inversionstalet* I *av en permutation* σ *är antalet inversioner som finns i permutationen.*

Exempel 2. *Permutationen* 3142 *har inversionstal 3,*

$$I(3142) = |\{(3, 1), (3, 2), (4, 2)\}| = 3.$$

Inversionstalet av en permutation σ kan alltså ses som ett mått på hur oordnad permutationen är, och kan enligt Bressoud beräknas genom att finna det minsta antalet transpositioner av intilliggande element som krävs för att ta σ till identitetspermutationen [2]. Vi noterar att inversionstalet av identitetspermutationen alltså är 0.

Exempel 3. $I(1324) = 1$ *eftersom transpositionen av intilliggande element* 2 *och* 3*,*

$$1324 \to 1234,$$

tar permutationen till identitetspermutationen.

På samma vis är $I(3142) = 3$ *eftersom vi med tre steg kan ta oss till identiteten:*

$$3142 \to 1342 \to 1324 \to 1234.$$

2.2 Inversionstalet av en transposition

Vi studerar nu generellt vad inversionstalet av en transposition t är. Låt

$$t_{ij} = (1, \ldots, j, \ldots i, \ldots, n),$$

där $i < j$. Mellan talet 1 och talet j kommer vi inte finna några inversioner, då j är det största av dessa tal. Mellan j och i kommer j vara det största talet, men ha positionen längst till vänster. Alltså bildar j en inversion med alla tal mellan j och i, totalt $(j - i)$ inversioner. På samma sätt kommer i vara det minsta talet mellan j och i, men ha positionen längst till höger. Även här hittar vi alltså $(j - i)$ inversioner. Mellan i och n finner vi inga inversioner då dessa är ordnade. Vi adderar inversionerna, och subtraherer 1 eftersom inversionen (j, i) har räknats två gånger. Resultatet ger att en transposition av två tal i, j har inversionstalet

$$2(j - i) - 1, \tag{1}$$

vilket är ett udda tal. Särskilt noterar vi att om i och j är på varandra följande tal, så är $j - i = 1$. Alltså ändras inversionstalet vid en sådan permutation med 1.

2.2.1 Jämna och udda permutationer

Vi vet att en permutation $\sigma \in S_n$ kan uttryckas som en sammansatt produkt av transpositioner.

För följande sats och dess bevis, se [1, s. 138]:

Sats 2.1. *Antag att permutationen $\sigma \in S_n$ kan uttryckas som produkten av r transpositioner, och som produkten av r' transpositioner. Då är r jämnt om och endast om r' är jämnt.*

Vi kallar en permutation för vilken antalet transpositioner man kan skriva om den till är jämnt (udda) för en jämn (udda) permutation.

Definition 2.3. *Låt σ vara en permutation som kan skrivas om till en produkt av r stycken transpositioner. Vi definierar funktionen $sgn : S_n \to \{-1, 1\}$ som:*

$$sgn(\sigma) = (-1)^r. \tag{2}$$

Alltså är $sgn(\sigma) = +1$ om σ är en jämn permutation, och $sgn(\sigma) = -1$ om σ är en udda permutation.

Låt nu τ vara en permutation som kan skrivas som en produkt av s stycken transpositioner, och π en permutation som kan skrivas som en produkt av t stycken transpositioner. Då kan kompositionen $\tau\pi$ skrivas som en produkt av $s + t$ stycken transpositioner (se [1]). Alltså gäller:

$$sgn(\tau\pi) = (-1)^{s+t} = (-1)^s(-1)^t = sgn(\tau)sgn(\pi), \tag{3}$$

Till följd av sats 2.1 vet vi att $sgn : S_n \to \{-1, 1\}$ är en väldefinierad funktion, vilket tillsammans med (3) implicerar att sgn är en grupphomomorfi.

Proposition 2.1. *Låt permutationen σ skrivas som en produkt av r stycken transpositioner. Då är inversionstalet $I(\sigma)$ ett jämnt (udda) tal om och endast om r är ett jämnt (udda) tal.*

Bevis. Vi betraktar σ som en produkt av r' stycken transpositioner sådan att varje faktor är en transposition av på varandra följande tal. Vi vet att för varje sådan transposition ökar inversionstalet med 1, och alltså kommer $I(\sigma)$ vara lika med r'. Enligt sats 2.1 är därför varje tal r som är sådant att σ går att uttrycka som en produkt av r stycken transpositioner jämnt (udda) om och endast om $I(\sigma)$ är jämnt (udda).

□

Därför kan vi skriva om (2):

$$sgn(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}. \tag{4}$$

3 Determinanter

Vi känner till Leibniz klassiska definition av en determinat (se [3]):

Definition 3.1 (Leibniz determinantformel)**.** *Låt A vara en $n \times n$-matris där a_{ij} representerar elementet på rad i, kolumn j. Då gäller:*

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Med hjälp av (4) skriver vi om denna till:

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}. \tag{5}$$

Detta är en mycket viktig definition som kommer återkomma i flera bevis framöver. Definitionen används bland annat för att bevisa Vandermondes determinantsats och Weyls nämnarformel. Innan vi tittar på dessa bevis introducerar vi två olika typer av funktioner.

3.1 Symmetriska och alternerande funktioner

Definition 3.2 (Symmetrisk funktion)**.** *En symmetrisk funktion är en funktion vars värde inte ändras under någon permutation av variablerna. Alltså:*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ...x_{\sigma(n)})$$

för alla permutationer $\sigma \in S_n$.

Definition 3.3 (Alternerande funktion)**.** *En alternerande funktion är en funktion vars värde ändrar tecken vid varje transposition av två variabler. Alltså:*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = (-1)^{I(\sigma)} f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ...x_{\sigma(n)})$$

för alla permutationer $\sigma \in S_n$.

Vi använder dessa begrepp för att visa följande proposition:

Proposition 3.1. *För alla alternerande polynom $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ av grad d så gäller:*

$$g = \frac{f(x_1, x_2, ..., x_n)}{\prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)},$$

där g är ett symmetriskt polynom av grad $d - n(n-1)/2$.

Bevis. $\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)$ är ett alternerande polynom av grad $n(n-1)/2$, vilket vi vet eftersom (x_i,x_j) kan väljas på $\binom{n}{2}=n(n-1)/2$ sätt, och graden av hela polynomet beräknas genom att addera graden av varje faktor, som ju är 1.

Då f är ett alternerande polynom, så vet vi att

$$f(x_1,...,x_i,...,x_j,...,x_n)=-f(x_1,...,x_j,...,x_i,...,x_n).$$

Eftersom permutationen σ på variablernas index är transpositionen (ij), kommer $I(\sigma)$ vara ett udda tal enligt (1).

Om $x_i=x_j$, så är dessa två polynom identiska, men har olika tecken, vilket endast kan inträffa då $f=0$.

Vi vet att om $f(x_1,\ldots,x_n)\big|_{x_1=x_2}\equiv 0$, så gäller $(x_1-x_2)\big|f(x_1,\ldots,x_n)$. Vi vet även att varje polynom kan skrivas som en unik produkt av irreducibla polynom (se [1]).

Detta innebär att (x_i-x_j) är en faktor till polynomet f. På samma sätt finner vi faktorer till polynomet genom varje par av variabler sådana att $1\leq i<j\leq n$. Vi får alltså:

$$f(x_1,...,x_n)=g(x_1,...,x_n)\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$g(x_1,...,x_n)=\frac{f(x_1,...,x_n)}{\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)},$$

där produkten i nämnaren är ett polynom av grad $n(n-1)/2$, och g något polynom i variablerna $x_1,...,x_n$.

Vid division av ett polynom av grad d med ett polynom av grad $n(n-1)/2$ får vi ett polynom av grad $d-n(n-1)/2$. Alltså har vi visat att g är ett polynom av grad $d-n(n-1)/2$.

Vi övertygar oss om att kvoten av två alternerande polynom är ett symmetriskt polynom genom att konstatera att en permutation som ändrar tecknet av nämnaren även kommer att ändra tecknet av täljaren, vilket inte kommer resultera i någon ändring av tecknet i kvoten.

Exempel 4. *Låt f_1 och f_2 vara de två alternerande funktionerna definierade nedan. Vi visar att kvoten av de två är en symmetrisk funktion.*

$$f_1(x_1,x_2)=x_1^2-x_2^2,$$
$$f_2(x_1,x_2)=x_1-x_2,$$
$$f_3(x_1,x_2)=\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}=x_1+x_2.$$

Vi låter $\sigma=(21)$,

$$f_1(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(1)}) = x_2^2 - x_1^2 = -f_1(x_1, x_2),$$

$$f_2(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(1)}) = x_2 - x_1 = -f_2(x_1, x_2),$$

$$f_3(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(1)}) = \frac{x_2^2 - x_1^2}{x_2 - x_1} = x_2 + x_1 = f_3(x_1, x_2).$$

□

3.2 Vandermondes determinantsats

Med hjälp av Leibniz determinantformel och proposition 3.1 kan vi nu bevisa en sats för determinanten av en specifik typ av matris, nämligen Vandermondematrisen.

Sats 3.1. *Vandermondes determinantsats.*
Låt A vara en $n \times n$-matris på formen:

$$A = \begin{pmatrix} x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & ... & x_n^{n-1} \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & ... & x_n^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1 & x_2 & ... & x_n \\ 1 & 1 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

där alltså (x_j^{n-i}) är elementet på rad i, kolumn j. Då gäller:

$$det(A) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

Bevis. Om vi nu låter $f(x_1, x_2, ..., x_n) = det(A)$, där A är en Vandermondematris, så ser vi att f är ett alternerande polynom eftersom tecknet av en determinant ändras om vi byter plats på två rader i en matris. Dessutom vet vi att $det(A)$ är av grad $n(n-1)/2$.

Därför gäller alltså, enligt proposition 3.1:

$$\frac{det(A)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)} = g$$

där g är ett symmetriskt polynom i variablerna $x_1, ..., x_n$ av grad $d - n(n-1)/2$. Eftersom $d = n(n-1)/2$ har g grad 0, och är alltså en konstant, dvs:

$$det(A) = C \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j).$$

För att finna C tittar vi på koefficienten framför termen $x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_{n-1}$ i de två uttrycken.

Vi använder (5) och definierar elementet på position $a_{i,\sigma(i)}$ som $x_i^{n-\sigma(i)}$ för att få:

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} x_i^{n-\sigma(i)}.$$

Vi ser att termen $x_1^{n-1} x_2^{n-2} \dots x_{n-1}$ endast förekommer då σ är identitetspermutationen, i vilket fall $I(\sigma) = 0$ och koefficienten blir $+1$.

I produkten $\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ ser vi att termen $x_1^{n-1} x_2^{n-2} ... x_{n-1}$ förekommer då vi har $n-1$ stycken x_1, vilket innebär att vi väljer ut x_1 exakt $n-1$ gånger från $(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n)$, vilket kan ske på exakt ett sätt då det finns $n-1$ faktorer där x_1 förekommer. Termen x_2 måste på liknande sätt ingå $n-2$ gånger, vilket den endast gör om x_2 väljs ut $n-2$ av $n-2$ gånger från $(x_2 - x_3)(x_2 - x_4) \dots (x_2 - x_n)$. På samma sätt ser vi att resterande faktorer endast kan väljas på ett sätt. Även här förekommer termen $x_1^{n-1} x_2^{n-2} ... x_{n-1}$ en gång, och har alltså koefficient $+1$.

Detta innebär att $C = 1$, och vi har bevisat Vandermondes determinantsats. □

3.3 Weyls nämnarformel

Vi tittar nu på en annan speciell determinantformel, som har sitt ursprung i studerandet av Lie-grupper.

Sats 3.2. *Weyls nämnarformel*
Låt A vara en $n \times n$- matris på formen

$$A = \begin{pmatrix} 1 - x_1^{2n-1} & 1 - x_2^{2n-1} & \dots & 1 - x_n^{2n-1} \\ x_1 - x_1^{2n-2} & x_2 - x_2^{2n-2} & \dots & x_n - x_n^{2n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} - x_1^n & x_2^{n-1} - x_2^n & \dots & x_n^{n-1} - x_n^n \end{pmatrix} = (x_i^{n-j} - x_i^{2n-j})_{i,j=1}^n.$$

Då gäller:

$$det(A) = \left(\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) \right) \left(\prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)(x_i x_j - 1) \right).$$

Denna sats är uppkallad efter Hermann Weyl, som bevisade olika determinantformler uttryckta i termer av olika vektormängder i R^n, så kallade rotsystem. Vandermondes determinantsats är ett specialfall av en Weylformel som uttrycks i termer av ett annat rotsystem än vad formeln definierad i sats 3.2 gör. Bevisen av de två är därför mycket lika.

Bevis. Vi använder även här (5) men låter nu elementet a_{ij} vara $x_i^{n-j} - x_i^{2n-j}$. Vi får ekvationen

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{n} (x_i^{\sigma(i)-1} - x_i^{2n-\sigma(i)}).$$

Vi ser att graden av varje faktor $(x_i^{\sigma(i)-1} - x_i^{2n-\sigma(i)})$ i produkten kommer vara $2n - \sigma(i)$, eftersom $2n - \sigma(i) > \sigma(i) - 1$ då $1 \leq \sigma(i) \leq n$. I varje permutation σ kommer i anta alla värden mellan 1 och n. Alltså kommer graden av polynomet $f(x_1, x_2, ..., x_n) = det(A)$ att vara:

$$\begin{aligned} (2n-1) + (2n-2) + ... + (2n-n) = \\ 2n * n - 1(1 + 2 + ... + n) = \\ 2n^2 - n(n+1)/2 = \\ (3n^2 - n)/2. \end{aligned}$$

Om $x_i = 1$ för något $1 \leq i \leq n$, så kommer $det(A) = 0$, eftersom varje element i kolonn i blir noll. Alltså är $\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i)$ en faktor till polynomet f. Denna produkt kommer ha grad n, eftersom $(1 - x_i)$ har grad 1 och multipliceras med sig själv n gånger.

Vi noterar även att f är ett alternerande polynom. Med samma resonemang som i beviset för Vandermondedeterminanten ser vi att $\prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_i - x_j)$ också måste vara en faktor till f. Vi vet sen tidigare att denna produkt är av grad $n(n-1)/2$. Alltså har vi:

$$g(x_1, ..., x_n) = \frac{f(x_1, ..., x_n)}{\prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_i - x_j)}$$

$$\iff$$

$$f(x_1, ..., x_n) = g(x_1, ..., x_n) \prod_{i=1}^{n}(1 - x_i) \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_i - x_j).$$

Nu återstår alltså att visa att $g = \prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_i x_j - 1)$:
Låt $x_i = x_j^{-1}$. I kolonn i och j av $det(A)$ får vi då:
- kolonn j:

$$(x_j^{k-1} - x_j^{2n-k})_{k=1}^{n}.$$

- kolonn i:

$$\begin{aligned} (x_i^{k-1} - x_i^{2n-k})_{k=1}^{n} = (x_j^{1-k} - x_j^{k-2n})_{k=1}^{n} = \\ - x_j^{1-2n}(x_j^{k-1} - x_j^{2n-k})_{k=1}^{n}. \end{aligned}$$

Vi får alltså kolonn i genom att multiplicera kolonn j med en konstant. Detta innebär att kolonnerna är linjärt beroende, och determinanten är noll.

Eftersom f är ett polynom i både x_i och x_j får vi faktorn $\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_ix_j-1)$ i g. Denna kommer vara av grad $n(n-1)$ eftersom det finns $\binom{n}{2}$ faktorer som vardera är av grad 2.

Alltså har vi visat:

$$f(x_1,...,x_n)=h\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_ix_j-1)\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j). \tag{6}$$

Vi jämför nu graden av vänster- och högerled i (6):

$$grad(VL)=grad(f)=\frac{3n^2-n}{2},$$

$$\begin{aligned}
grad(HL)=grad(h)+grad\Big(\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_ix_j-1)\Big)+&\\
&grad\Big(\prod_{i=1}^{n}(1-x_i)\Big)+grad\Big(\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)\Big)=\\
&grad(h)+n(n-1)+n+\frac{n(n-1)}{2}=\\
&grad(h)+\frac{3n^2-n}{2}.
\end{aligned}$$

För att (6) ska stämma måste polynomet h måste vara av grad 0, alltså en konstant. Genom att jämföra koefficienterna i vänster- och högerled, analogt med beviset för Vandermondedeterminanten, ser vi att $h=1$. Därmed har vi bevisat Weyls nämnarformel.

□

4 Schurfunktioner

Schurfunktioner, döpt efter den tyske matematikern Issai Schur, är symmetriska funktioner som visar sig vara mycket viktiga i studerandet av planpartitioner. I denna uppsats utgår vi från definitionen av Schurfunktioner som genererande funktioner för semistandard Youngtableauer. Den klassiska definitionen är däremot den vi stöter på senare, då vi visar att Schurfunktioner kan skrivas som en kvot av två determinanter. Likhet mellan dessa formler visas i del 4.5.

4.1 Definitioner och exempel

Definition 4.1 (Ferrerdiagram)**.** *Ett Ferrerdiagram är ett sätt att representera partitioner som ett diagram av prickar. Antalet prickar per rad i diagrammet motsvarar storleken av delarna i partitionen. Eftersom en partition med delar* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ *är ordnad efter storlek, alltså* $\lambda_1 \geq \lambda_2, \ldots, \lambda_k \geq 0$*, så är en rad i Ferrerdiagrammet aldrig längre än raden ovan. Vi låter formen av ett Ferrerdiagram representeras av* λ*. Olika partitioner av samma tal ger Ferrerdiagram med samma antal prickar totalt, men olika form.*

Exempel 5. *Vi representerar en partition av 12 i ett Ferrerdiagram:*

·	·	·	·
·	·	·	·
·	·	·	
·			

Figur 2: ett Ferrerdiagram av partitionen $12 = 4 + 4 + 3 + 1$.

Definition 4.2 (Semistandard Youngtableau (SSYT))**.** *En semistandard Youngtableau är ett Ferrerdiagram där prickarna har ersatts av variabler tagna från en mängd* $\{x_1, ..., x_n\}$ *på ett sådant vis att variablernas index är monotont växande inom varje rad, och strängt monotont växande inom varje kolumn.*

Ett annat alternativ är att representera variablerna endast efter dess indexering. Denna variant används fortsättningsvis här.

Exempel 6. $\lambda = 4, 4, 3, 1$*, och* $n = 5$

1	1	2	3
2	3	4	4
4	4	5	
5			

Figur 3: en semistandard Youngtableau av formen $\lambda = 4, 4, 3, 1$ med variabler från mängden $\{1, \ldots, 5\}$.

Definition 4.3 (Schurfunktion)**.** *Schurfunktionen är den genererande funktionen för semistandard Youngtableauer,*

$$s_\lambda(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{T \in T_{\lambda,n}} x^T,$$

där $T_{\lambda,n}$ *är mängden av all semistandardtableauer av form* λ *med element från mängden* $\{1, 2, ..., n\}$*. Vi låter alltså* x^T *vara monomet som är produkten av alla variabler vi fyller vår tableaux med. Detta kallar vi vikten av en SSYT.*

Exempel 7. $s_{4,4,3,1}(x_1, \ldots, x_5)$ *är en Schurfunktion där termen* $7x_1^2x_2^2x_3^3x_4^4x_5^2$ *ingår, alltså finns det 7 unika SSYT av form* $\lambda = 4, 4, 3, 2$ *som är fyllda med de 12 variablerna* x_1, x_1, x_2, x_2, x_3, x_3, x_4, x_4, x_4, x_4, x_5 *och* x_5*. Utöver den tableau visad i exempel 6 finner vi resterande sex:*

$$
\begin{array}{llll} 1&1&2&2\\ 3&3&4&4\\ 4&4&5&\\ 5&&& \end{array}\quad
\begin{array}{llll} 1&1&3&3\\ 2&2&4&4\\ 4&4&5&\\ 5&&& \end{array}\quad
\begin{array}{llll} 1&1&2&4\\ 2&3&3&5\\ 4&4&4&\\ 5&&& \end{array}\quad
\begin{array}{llll} 1&1&2&4\\ 2&3&4&5\\ 3&4&5&\\ 4&&& \end{array}\quad
\begin{array}{llll} 1&1&3&4\\ 2&2&4&5\\ 3&4&5&\\ 4&&& \end{array}\quad
\begin{array}{llll} 1&1&2&3\\ 2&4&4&4\\ 3&5&5&\\ 4&&& \end{array}
$$

Figur 4: sex SSYT:er av formen $\lambda = 4,4,3,1$ med variabler från mängden $\{1,\ldots,5\}$.

Nästa exempel illustrerar en ännu enklare Schurfunktion.

Exempel 8. *Låt $\lambda = 2,1,1$. Vi ritar ut samtliga SSYT med variabler från mängden $\{1,2,3\}$:*

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{array}{ll} 1&1\\ 2&\\ 3& \end{array} &
\begin{array}{ll} 1&2\\ 2&\\ 3& \end{array} &
\begin{array}{ll} 1&3\\ 2&\\ 3& \end{array} \\
x^{T_1} = x_1^2x_2x_3 & x^{T_2} = x_1x_2^2x_3 & x^{T_3} = x_1x_2x_3^3 \\
(a) & (b) & (c)
\end{array}
$$

Figur 5: Tre SSYT av formen $\lambda = 2,1,1$, och dess vikter.

och får alltså Schurfunktionen:

$$s_\lambda(x_1,x_2,x_3) = x_1^2x_2x_3 + x_1x_2^2x_3 + x_1x_2x_3^2$$

Vi noterar att detta är ett symmetriskt polynom. Detta gäller för alla Schurfunktioner, vilket vi kommer se genom att bevisa likheten mellan de olika definitionerna av Schurpolynom nedan.

4.2 Flera ekvivalenta uttryck för Schurfunktioner

Vi vill nu visa att definitionen av Schurfunktioner som given ovan är ekvivalent med två andra formler.

Sats 4.1. *Låt $\lambda = \lambda_1,...,\lambda_n$ vara en partition i högst n delar. Då gäller följande två likheter:*

$$\sum_{T\in T_{\lambda,n}} x^T = det(h_{\lambda_i+j-1})_{i,j=1}^k = \frac{det(x_j^{k-i+\lambda_i})_{i,j=1}^k}{\prod_{1\leq i<j\leq k}(x_i-x_j)}, \tag{7}$$

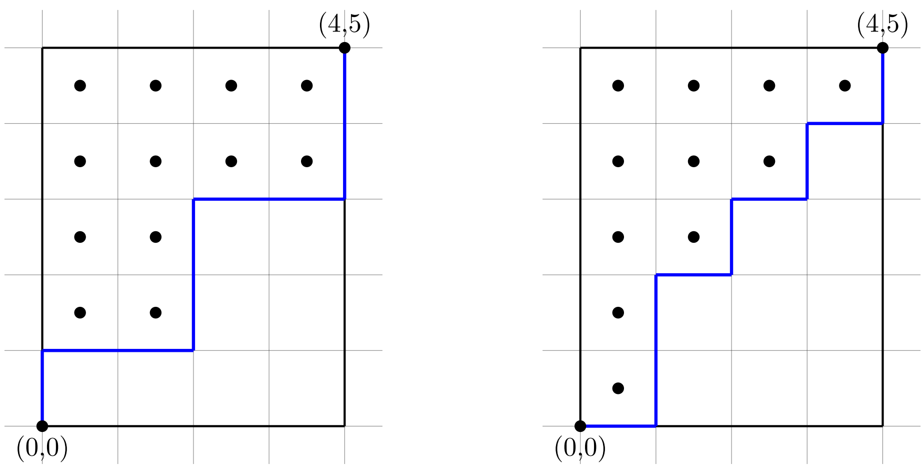
där h_r är en fullständig symmetrisk funktion som vi kommer att definiera i definition 4.6.

För att bevisa likheterna mellan de tre varianterna av Schurfunktioner i sats 4.1 inför vi följande begrepp:

Definition 4.4 (Gitterstig)**.** *En gitterstig är en stig som består utav ett ändligt antal vektorer* $v \in \{(1,0),(0,1)\}$*, sådana att de tillsammans binder samman två punkter i en graf.*

Låt oss studera partitioner med högst m delar, där varje del är mindre än eller lika med n, genom att rita upp ett rektangulärt rutnät indexerat från $(0,0)$ i nedre vänstra hörnet till (n,m) i övre högra, och sedan fylla rutnätet med det Ferrerdiagram som representerar partitionen. Vi får nu en uppdelning av vårt rutnät, där ena delen består av ifyllda rutor, och den andra av tomma rutor. Vi är intresserade av den gitterstig som delar upp dessa två delar.

Exempel 9. *Gitterstigar från punkt* $(0,0)$ *till* $(4,5)$ *representerar partitioner med högst* 5 *delar, där varje del är mindre än eller lika med* 4*. Nedan ser vi två exempel på sådana.*



(a) (b)

Figur 6: (a) är partitionen $\lambda_1 = 4+4+2+2$ och
(b) är partitionen $\lambda_2 = 4+3+2+1+1$.

Om vi representerar ett steg uppåt i grafen med 0, och ett steg till höger med 1, så kan vi beskriva vår gitterstig som en följd av 0:or och 1:or, genom att gå från vänster till höger. Vi kan även finna inversionstalen av dessa följder, med samma metod som när vi finner inversionstalet av en permutation. Vi tittar alltså på antalet par $(1,0)$ sådant att 1 ligger till vänster om 0 i talföljden. Detta motsvarar att för varje 1:a räkna antalet 0:or som ligger till höger om den.

I exempel 9a ger gitterstigen för partitionen $\lambda_1 = 4+4+2+2$ talföljden 011001100, som har inversionstal:

$$I(011001100) = 4+4+2+2 = 12.$$

I exempel 9b ger gitterstigen för partitionen $\lambda_2 = 4+3+2+1+1$ talföljden 100101010, som har inversionstal:

$$I(100101010) = 5+3+2+1 = 11.$$

Kombinatoriskt ser vi att av de $m+n$ steg som totalt måste tas från nedre vänstra hörnet till det övre högra, så måste m av stegen vara uppåt. Därför ser vi att en gitterstig i ett $m \times n$-nät kan ritas ut på $\binom{n+m}{m}$ sätt. Eftersom varje gitterstig motsvarar formen av en unik partition i nätet sluter vi oss till propositionen nedan, en för oss redan känd formel.

Proposition 4.1. *Antalet partitioner i högst m delar som är mindre än eller lika med n är $\binom{m+n}{m}$.*

4.3 Elementära och fullständiga symmetriska funktioner

Vi definierar nu följande symmetriska funktioner och deras genererande funktioner (se [5]):

Definition 4.5 (Elementära symmetriska funktioner)**.** *För varje heltal $r \geq 1$, definierar vi den elementära symmetriska funktionen e_r som summan av alla produkter av r distinkta variabler x_i:*

$$e_r = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}.$$

Den genererande funktionen för de elementärt symmetriska polynomen ges enligt McDonald [3, s. 20] av:

$$\sum_{r=0}^{n} e_r t^r = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i t).$$

Exempel 10.

$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$$
$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$
$$e_3(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$$

Definition 4.6 (Fullständiga symmetriska funktioner)**.** *För varje heltal $r \geq 1$ definierar vi den fullständiga symmetriska funktionen h_r som summan av alla monom av grad r i variablerna x_i, så att:*

$$h_r = \sum_{i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_r} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_r}.$$

Den genererande funktionen för de fullständigt symmetriska polynomen ges enligt McDonald [3, s. 21] av:

$$\sum_{r=0}^{\infty} h_r t^r = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - x_i t},$$

vilket vi ser eftersom $\frac{1}{1-x_i t} = (1 + x_i t + x_i^2 t^2 + \ldots)$.

Exempel 11.

$$h_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$$

$$h_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$$

$$h_3(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_1x_2x_3$$

Vidare låter vi $e_0 = h_0 = 1$, och $e_m = h_m = 0$ för $m < 0$.

För partitionen $\lambda = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n \geq 0$ definierar vi den elementära symmetriska funktionen :

$$e_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} \ldots e_{\lambda_n},$$

och på samma sätt den fullständiga symmetriska funktionen:

$$h_{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} \ldots h_{\lambda_n}.$$

4.4 Determinantdefinitionen av en fullständigt symmetrisk funktion

Vi kan nu visa första likheten i sats 4.1, alltså följande:

För en partition $\lambda = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_k \geq 0$ och ett positivt heltal n sådant att $k \leq n$, gäller:

$$\sum_{T \in T_{\lambda,n}} x^T = det(h_{\lambda_i + j - i})_{i,j=1}^{k},$$

där $T_{\lambda,n}$ är mängden av alla semistandard Youngtableauer av form λ med element från mängden $\{1, ..., n\}$, och h_{λ_i+j-i} är den fullständigt symmetriska funktionen av grad $\lambda_i + j - i$.

Bevis. Detta bevis bygger på den bijektiva avbildningen av en SSYT till en mängd av gitterstigar.

4.4.1 En SSYT som ett nest av gitterstigar

Vi börjar med att representera varje tableau $T \in T_{\lambda,n}$ som en mängd av gitterstigar, som vi kallar nestet av T, på följande vis:

För varje rad i i tableaun T låter vi variablerna som står i rutorna på raden representera en partition. Vi ritar upp partitionen som en gitterstig, som vi låter börja vid $x = 1$. Vi förskjuter sedan start- och ändpunkterna av denna gitterstig i y-led, så att den har startpunkt i $(1, k - i)$ och ändpunkt i $(n, k + \lambda_i - i)$, där λ_i älltså är längden av rad i. Här kommer steg nummer j uppåt på gitterstig i tas vid $x = T_{ij}$. De förskjutna gitterstigarna från varje rad i i T ritas nu upp i samma graf. Exponenten till varje x_j i den totala vikten av monomet som motsvarar denna SSYT, alltså x^T, talar om hur många steg uppåt som totalt tas i grafen vid den vertikala linjen $x = j$. För att omvandla en gitterstig i nestet av T tillbaka till motsvarande rad i tableaun T räknar vi hur många steg som tas uppåt vid varje position x, och låter varje sådant antal steg vara en del i partitionen. Vi har alltså skapat en bijektiv avbildning av T på ett nest med gitterstigar.

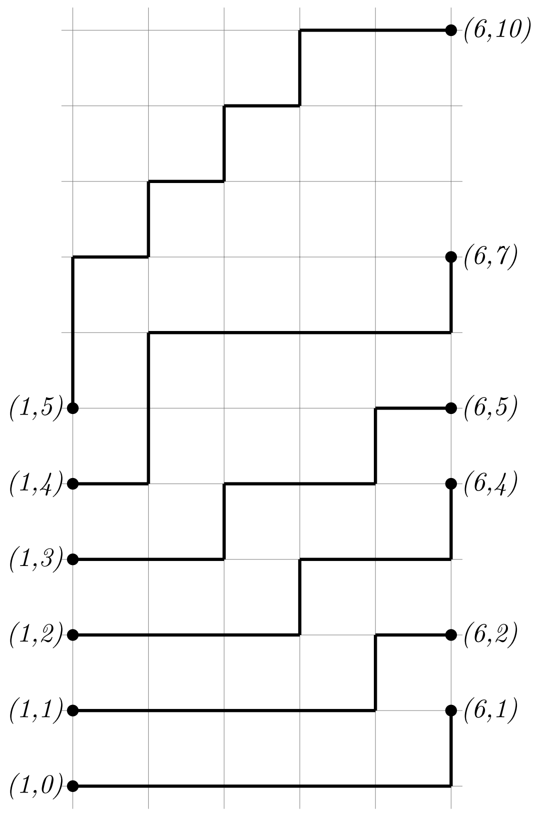
Exempel 12. *Vi ritar upp en SSYT, T, av partitionen $\lambda = 5, 3, 2, 2, 1, 1$ fylld med element från mängden $\{1, \dots, 6\}$ med vikten $x^T = x_1^2 x_2^3 x_3^2 x_4^2 x_5^2 x_6^3$ på följande vis:*

1	1	2	3	4
2	2	6		
3	5			
4	6			
5				
6				

Figur 7: En SSYT med vikten $x^T = x_1^2 x_2^3 x_3^2 x_4^2 x_5^2 x_6^3$.

På rad 1 vill vi alltså ha en gitterstig som har startpunkt i $(1, k - 1) = (1, 5)$ och ändpunkt i $(n, k + \lambda_1 - 1) = (6, 6 + 5 - 1) = (6, 10)$. Rad 1 inleds med två stycken ettor, alltså kommer stigen gå två steg uppåt vid $x = 1$. Sedan kommer stigen röra sig horisontellt till $x = 2$ där den tar ytterligare ett steg uppåt, då det förekommer en tvåa på rad 1. På samma sätt kommer stigen gå ett steg uppåt då $x = 3$ och ett då $x = 4$. Vi finner alltså samma trappform som i exempel 9b då vi tittade på partitionen $4 + 3 + 2 + 1 + 1$, men med andra start- och ändpunkter.

Denna gitterstig, tillsammans med de gitterstigar som på samma sätt bildas från rader 2-6 i tableau T ger alltså följande nest:



Figur 8: Ett nest av gitterstigar som en avbildning av SSYT i figur 7.

Lemma 4.1. *Det är inte möjligt för två gitterstigar i ett nest skapat på detta vis att skära varandra.*

Detta kan vi övertyga oss om genom att utesluta att ett motexempel går att hitta.

Bevis. (Försök till motexempel)

Låt en SSYT T avbildas som ett nest av gitterstigar. Vi vet att det i T gäller att för varje kolumn n och rad m så är $T_{m,n} < T_{m+1,n}$, eftersom elementen i varje kolumn är strikt monotont växande.

Låt nu gitterstigen som bildas från rad i i T ha en startpunkt i $(1, k - i)$, och gitterstigen j som bildas från raden ovanför i, så att $i = j + 1$, ha startpunkt i $(1, k - i - 1)$. För att j ska skära i måste j vid skärningspunkten alltså sammanlagt ha tagit ett vertikalt steg mer än vad i gjort vid samma punkt.

Steg nummer n uppåt i stig j tas då $x = T_{j,n}$. Om steg nummer n uppåt i stig i har tagits vid $x < T_{j,n}$, så kommer i och j inte skära varandra, eftersom stig i då redan befinner sig vid en högre y-koordinat. Alltså måste $T_{j,n} \geq T_{i,n}$.

Då $i = j + 1$ får vi $T_{j,n} \geq T_{j+1,n}$. Alltså har vi härlett en motsägelse, och visat att två gitterstigar skapade från en SSYT inte kan skära varandra.

□

Vi vill, för att ge en alternativ definition av Schurfunktioner s_λ, alltså hitta antalet nest av gitterstigar där stigarna har start- respektive ändpunkter i $(1, k-i)$ och $(n, k+\lambda_i - i)$, och aldrig skär varandra. Genom den bijektiva avbildning beskriven ovan har vi visat att detta motsvarar summan $\sum_{T \in T_{\lambda,n}} x^T$.

Detta gör vi genom att studera det totala antalet nest med gitterstigar med sådana start- och ändpunkter, men där det *är* tillåtet för stigarna att skära varandra. För att stigarna ska skära varandra permuterar vi startpunkterna, och låter den stig som börjar i punkt $(1, k-i)$ och slutar i punkt $(n, k+\lambda_i - i)$ istället ha startpunkt $(1, k-\sigma(i))$, där $\sigma \in S_k$. Vi noterar här att för $\sigma = id$, så får vi det unika nest där inga stigar skär varandra, som i exempel 12.

Vikten av det monom som motsvarar en stig i detta modifierade nest är alltså, på samma sätt som tidigare, produkten av varje variabel vars index motsvarar ett steg uppåt i stigen (där en variabel upprepas för varje steg uppåt som tas). Graden av detta monom kommer vara lika med det totala antal steg som tas uppåt, vilket vi finner genom subtraktion av startpunktens y-koordinat från ändpunktens y-koordnat:

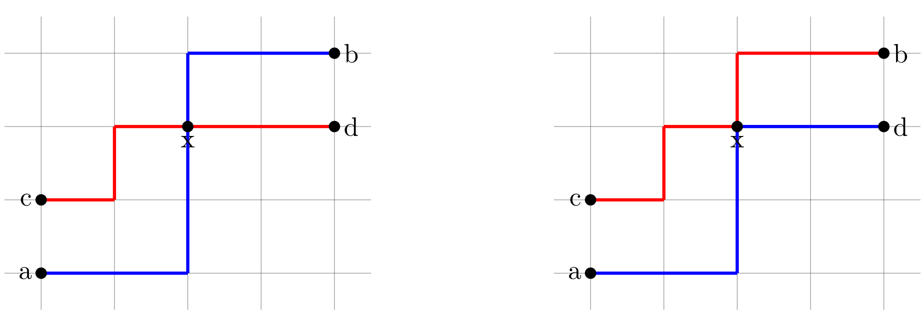
$(k + \lambda_i - i) - (k - \sigma(i)) = \lambda_i + \sigma(i) - i$.

Alltså söker vi summan av alla monom av grad $\lambda_i + \sigma(i) - i$ i variablerna $x_1, ..., x_n$. Detta känner vi igen som definitionen av en fullständigt symmetrisk funktion. Alltså har vi funnit att produkten av det totala antalet nests med gitterstigar mellan $(k - \sigma(i))$ och $(k + \lambda_i - i)$ är lika med $h_{\lambda_i + \sigma(i) - i}$.

Men vi söker endast de nests där dessa stigar inte skär varandra. Detta finner vi genom att para ihop varje stig i ett korsande nest med en annan stig, och låta dessa ta ut varandra vid summering.

Låt stig (a, b) paras ihop med den stig (c, d) som korsar stig (a, b) längst till höger (den översta, om det finns fler). Kalla punken där de korsas för x. Från punkten x, så byter vi plats på ändarna av stigarna. Alltså har vi nu ett nytt nest med två nya stigar (a, d) och (b, c).

Exempel 13. *Vid punkten x byter den blåa stigen (a, b) svans med den röda stigen (c, d).*



Figur 9: Två korsande stigar som byter svansar.

Dessa två nest kommer ha samma vikt, eftersom det sker lika många vertikala steg på samma punkter i båda nest. Däremot kommer de två nesten representeras av olika permutationer, eftersom vi har ändrat vilken startpunkt som hör ihop med vilken ändpunkt. Ändringen i permutationen motsvarar en transposition av två intilliggande element, vilket vi vet ändrar inversionstalet av permutationen med 1.

Parar vi ihop alla möjliga gitterstigar i de olika nesten på detta vis, ser vi att varje nest som motvarar en permutation annan än identitetspermutationen, kommer vara ihopparad med ett annant nest med samma vikt, men där inversionstalen mellan de två skiljer sig med 1. Genom att för varje permutation σ, ta produkten av vikten av alla gitterstigar, alltså $h_{\lambda_i+\sigma(i)-i}$, med $(-1)^{I(\sigma)}$, finner vi att alla termer tar ut varandra, utom de som blir kvar då $\sigma = id$.

Eftersom $I(id) = 0$, ger dessa termer positiva bidrag till vårt uttryck. Vi finner alltså att summan över alla möjliga nest av gitterstigar är lika med summan över alla nest av gitterstigar som inte skär varandra.

Alltså:

$$\sum_{T \in T_{\lambda,n}} x^T = \sum_{\sigma \in S_k} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{k} h_{\lambda_i+\sigma(i)-i}.$$

Vi känner igen uttrycket i högerled ovan som uttrycket för determinanten av en fullständigt symmetrisk funktion, enligt (5). Alltså får vi:

$$\sum_{T \in T_{\lambda,n}} x^T = det(h_{\lambda_i+j-i})_{i,j=1}^{k}.$$

□

4.5 Jacobi-Trudi-identiteten

Med hjälp av de genererande funktionerna för de elementära och fullständiga symmetriska funktionerna vill vi nu visa den andra likheten i sats 4.1, alltså:

$$\frac{det(x_j^{\lambda_i+k-i})}{\prod_{1 \le i < j \le k}(x_i - x_j)} = det(h_{\lambda_i+j-i}).$$

Denna ekvation kallas Jacobi-Trudi-identiteten.

Bevis. Vi börjar med att definiera följande $k \times k$-matriser, där $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_k)$ är en följd av ickenegativa heltal:

$$A_\alpha = (x_j^{\alpha_i}),$$
$$H_\alpha = (h_{\alpha_i-k+j}),$$
$$M = \big((-1)^{k-i} e_{k-i}^{(j)}\big),$$

och $e_{k-i}^{(j)}$ är den elementära symmetriska funktionen som består av summan av alla termer av grad $k-i$ med distinkta variabler, förutom variabeln x_j.

Lemma 4.2. *För varje komposition α så är $A_\alpha = H_\alpha M$.*

Bevis av lemmat. Genom att multiplicera den genererande funktionen för elementära symmetriska funktioner med den för fullständiga symmetriska funktioner får vi:

$$\sum_{m=0}^{\infty} h_m t^m \sum_{n=0}^{k-1} e_n^{(l)} (-t)^n = \prod_{m=1}^{k} \frac{1}{1-x_m t} \prod_{n=1, n\neq l}^{k} (1-x_n t) =$$

$$= \frac{1-x_1 t}{1-x_1 t} . \frac{1-x_2 t}{1-x_2 t} \cdots \frac{1}{1-x_l t} \cdots \frac{1-x_k t}{1-x_k t} = \frac{1}{1-x_l t} =$$

$$= 1 + x_l t + x_l^2 t^2 + x_l^3 t^3 + \ldots$$

Om vi nu tittar på koefficienten framför t^{α_i} ser vi att det i högerled kommer vara $x_l^{\alpha_i}$.

I vänsterled söker vi alla faktorer $h_m t^m$ och $e_n^{(l)}(-1)^n t^n$ så att de vid multiplikation bildar en produkt sådan att $t^{m+n} = t^{\alpha_i}$.

Alltså kommer koefficienten framför t^{α_i} i vänsterled vara summan av termerna:

$$h_{\alpha_i-(k-1)} e_{k-1} (-1)^{k-1} + h_{\alpha_i-(k-2)} e_{k-2} (-1)^{k-2} + \ldots + h_{\alpha_i-(k-k)} e_{k-k} (-1)^{k-k} =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} h_{\alpha_i-(k-j)} e_{k-j}^{(l)} (-1)^{k-j}.$$

Eftersom koefficienterna framför varje t^{α_i} måste vara lika i högerled och vänsterled för att produkten av de två genererande funktionerna ska stämma, så gäller alltså:

$$\sum_{j=1}^{k} h_{\alpha_i-(k-j)} e_{k-j}^{(l)} (-1)^{k-j} = x_l^{\alpha_i},$$

vilket är detsamma som $H_\alpha M = A_\alpha$.

□

Från lemmat följer att:

$$det(H_\alpha) = \frac{det(A_\alpha)}{det(M)}. \tag{8}$$

Vi studerar nu det specifika fall då $\alpha = (k-1, k-2, ..., k-k)$, alltså då $\alpha_i = k-i$. Tittar vi på $k \times k$-matrisen H får vi $H_\alpha = (h_{\alpha_i - k + j}) = (h_{k-i-k+j}) = (h_{j-i}) =$

$$\begin{pmatrix} h_0 & h_1 & \dots & h_{k-1} \\ h_{-1} & h_0 & \dots & h_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{-k+1} & h_{-k+2} & \dots & h_0 \end{pmatrix}.$$

Eftersom $h_0 = 1$ och $h_m = 0$ då $m < 0$ blir denna matris en triangulär matris med ettor på diagonalen:

$$\begin{pmatrix} 1 & h_1 & \dots & h_{k-1} \\ 0 & 1 & \dots & h_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

vilken har determinanten 1.

Enligt (8) gäller för $\alpha_i = k - i$ alltså:

$$\frac{det(x_j^{\alpha_i})}{det(M)} = 1$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$det(M) = det(x_j^{k-i}).$$

Stoppar vi in detta uttryck för $det(M)$ i (8) får vi, för varje komposition α:

$$det(h_{\alpha_i - k + j}) = \frac{det(x_j^{\alpha_i})}{det(x_j^{k-i})}. \tag{9}$$

Med kompositionen $\alpha_i = \lambda_i + k - i$ ger (9):

$$det(h_{(\lambda_i + k - i) - k + j}) = det(h_{\lambda_i + j - i}) = \frac{det(x_j^{\lambda_i + k - i})}{det(x_j^{k-i})} = \frac{det(x_j^{\lambda_i + k - i})}{\prod_{1 \leq i < j \leq n}(x_i - x_j)}.$$

Den sista förenklingen av nämnaren är en direkt applicering av Vandermondes determinantsats.

Därmed är beviset av Jacobi-Trudi-identiteten färdigt.

$\square$

Vi noterar att eftersom Schurfunktioner alltså kan skrivas som en kvot av dessa två alternerande polynom, så är de enligt proposition 3.1 symmetriska funktioner.

5 Planpartitioner

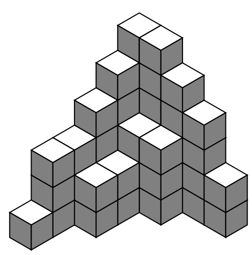
En planpartition kan man tänka sig som ett ändligt antal enhetskuber som är uppskjutna mot ett hörn. Kuberna är ordnade i staplar som står på positioner längs med rader och kolumner. Den hösta stapeln av enhetskuber står längst in i hörnet på position $(1,1)$, varefter staplarnas höjd minskar utefter varje rad och kolumn.

5.1 Definitioner och exempel

Formellt definierar vi planpartitioner genom kubernas positioner.

Definition 5.1 (planpartition)**.** *En planpartition P är en ändlig mängd punkter, $\{(i,j,k)\} \subseteq N^3$, sådan att om $(r,s,t) \in P$ och $1 \leq i \leq r$, $1 \leq j \leq s$ och $1 \leq k \leq t$, så gäller att $(i,j,k) \in P$.*

Exempel 14.



Figur 10: En planpartition av 49.

(Se [4] för Latex-kod använd för att visualisera planpartitioner).

Om vi fyller ett Ferrerdiagram med tal från mängden $\{1,...,n\}$ så att elementen *minskar* monotont med raderna och *minskar* strikt monotont med kolumnerna, så får vi en omvänd semistandard Youngtableau. Låter vi istället minskningen vara svagt monotont avtagande även uppifrån ner, så har vi en tvådimensionell representation av en planpartition, där varje element representerar höjden på motsvarande stapel.

Exempel 15. *Nedan visas en SSYT, en omvänd SSYT (OSSYT) och en planpartition.*

1	1	2	3	4
2	2	6		
3	5			
4	6			
5				
6				

(a)

6	6	5	4	2
5	3	3		
4	2			
3	1			
2				
1				

(b)

6	6	5	4	2
5	3	3		
4	2			
3	2			
3				
1				

(c)

Figur 11: (a) är en SSYT, (b) är en omvänd SSYT, (c) är en planpartition.

5.2 Den genererande funktionen för en planpartition

Sats 5.1. *MacMahons genererande funktion för en planpartition.*

Den genererande funktionen för planpartitioner P som är sådan att de får plats i en låda av storlek $r \times s \times t$, framöver uttryckt som $P \subseteq B(r,s,t)$, är

$$\prod_{i=1}^{r}\prod_{k=1}^{t}\frac{1-q^{i+k+s-1}}{1-q^{i+k-1}}.$$

Bevis. Vi har definierat en Schurfunktion s_λ som den genererande funktionen för de semistandard Youngtableauer som hör till en viss partition λ, och visat att detta kan uttryckas som kvoten av två determinanter, nämligen $s_\lambda(x_1,...,x_n) = \frac{det(x_j^{\lambda_i+k-i})}{\prod_{1\leq i<j\leq n}(x_i-x_j)}$. Med hjälp av denna formel kan vi hitta den genererande funktionen för en planpartition. För att göra detta utnyttjar vi den bijektiva relationen mellan SSYT och planpartitioner.

Vi börjar med en omvänd SSYT, och konstaterar att denna har samma genererande funktion som en vanlig SSYT, då $s_\lambda(x_1,...,x_n) = s_\lambda(x_n,...,x_1)$ på grund av symmetriegenskapen hos Schurfunktioner.

Eftersom en planpartition inte är kolumnsträngt avtagande, så modifierar vi den omvända SSYT enligt metoden som följer nedan.

5.2.1 En bijektiv avbildning mellan SSYT och planpartitioner

För varje rad $i \in \{1,...,r\}$ i en omvänd SSYT, subtraherar vi talet $r-i+1$ från varje element på raden. Alltså subtraherar vi 1 från varje element på rad r, 2 från varje element på rad $r-1$, och så vidare, tills vi kommer till rad 1 där vi subtraherar r från varje element. Tableaun som återstår är nu svagt avtagande från första till sista raden, det vill säga en planpartition.

$$\begin{array}{lllll} 9&9&8&7&7\\ 8&8&6&5&\\ 7&5&&&\\ 5&5&&&\\ 4&&&&\\ 2&&&& \end{array} \quad - \quad \begin{array}{lllll} 6&6&6&6&6\\ 5&5&5&&\\ 4&4&&&\\ 3&3&&&\\ 2&&&&\\ 1&&&& \end{array} \quad = \quad \begin{array}{lllll} 3&3&2&1&1\\ 3&3&2&1&\\ 3&1&&&\\ 2&2&&&\\ 2&&&&\\ 1&&&& \end{array}$$

Figur 12: En omvänd SSYT från vilken $r-i+1$ subtraheras från varje element på rad r bildar en planpartition.

Utför vi motsatta operationen på en planpartition, och adderar $r-i+1$ till varje element på rad i, ser vi att vi finner en unik omvänd SSYT.

Låt nu $\lambda = r^s$ vara partitionen som består av r stycken rader av längd s, och titta på omvända SSYT där varje element är mindre än eller lika med $t+r$. Den genererande funktionen för sådana omvända SSYT är alltså

$$s_{\{r^s\}}(x_{t+r},\ldots,x_1).$$

Vi låter variablerna i ovanstående Schurfunktion evalueras till

$$x_{t+r} = q^{t+r}, x_{t+r-1} = q^{t+r-1}, \dots, x_1 = q,$$

där exponenten till q får representera antalet kuber i motsvarande stapel i tableaun.

Vi utför nu operationen beskriven ovan för att omvandla en omvänd SSYT till en planpartition. Kvar blir då en åt båda håll svagt monotont avtagande tableau med högst r rader med som mest s element i varje rad, där det största elementet är mindre än eller lika med t, alltså en planpartition som får plats i $B(r, s, t)$, vilket var det vi sökte.

Vi har manipulerat den omvända SSYT vi började med genom att från varje rad i ta bort $r - i + 1$ kuber från varje stapel. Eftersom vi har s staplar per rad, blir detta $s(r - i + 1)$ kuber per rad. Totalt på våra r rader tar vi alltså bort $s(r + (r - 1) + \ldots + 2 + 1) = sr(r + 1)/2$ kuber. Eftersom exponenten till q i vår genererande funktion representerar antalet kuber i stapeln på motsvarande position i tableaun, så motsvarar bortfallet av $sr(r + 1)/2$ kuber faktorn $q^{-sr(r+1)/2}$.

Den genererande funktion vi söker är alltså

$$q^{-sr(r+1)/2} s_{\{r^s\}}(q^{t+r}, \dots, q). \tag{10}$$

5.2.2 Omskrivning av den genererande funktionen för planpartitioner

Vi skriver om (10) med hjälp av Schurfunktionens definition som en kvot av två determinanter. Vi substituerar $k = t + r$ och $x_k = q^{t+r-j+1}$, och får:

$$s_\lambda(q^{t+r}, \dots, q) = \frac{det((q^{t+r-j+1})^{t+r-i+\lambda_i})_{i,j=1}^{t+r}}{\prod_{1 \le i < j \le t+r}(q^{t+r-i+1} - q^{t+r-j+1})} = \frac{X}{Y}, \tag{11}$$

där

$$\lambda_i = \begin{cases} s, & om \quad 1 \le i \le r \\ 0, & om \quad r < i \le t + r. \end{cases}$$

Vi förenklar först X genom att faktorisera ut den gemensamma faktorn $q^{t+r-i+\lambda_i}$ från varje rad i:

$$\begin{aligned}
X &= \\
det(q^{(t+r-j+1)(t+r-i+\lambda_i)}) &= \\
det(q^{(t+r-j)(t+r-i+\lambda_i)+(t+r-i+\lambda_i)}) &= \\
det(q^{(t+r-j)(t+r-i+\lambda_i)}) \prod_{i=1}^{t+r} q^{t+r-i+\lambda_i} &= \\
det(q^{(t+r-j)(t+r-i+\lambda_i)}) \prod_{i=1}^{t+r} q^{t+r-i} \prod_{i=1}^{t+r} q^{\lambda_i}. &
\end{aligned}$$

De två produkterna i uttrycket ovan kan förenklas:

$$\prod_{i=1}^{t+r} q^{t+r-i} = q^{\sum_{i=1}^{t+r}(t+r-i)} = q^{(t+r)(t+r-1)/2},$$

$$\prod_{i=1}^{t+r} q^{\lambda_i} = \prod_{i=1}^{r} q^{s} \prod_{i=r+1}^{r+t} q^{0} = q^{sr},$$

och alltså får vi:

$$X = q^{sr+(t+r)(t+r-1)/2} det(q^{(t+r-j)(t+r-i+\lambda_i)}).$$

Vi vet från Vandermondedeterminantformeln att

$$det(x_i^{k-j}) = \prod_{1\leq i<j\leq k} (x_j - x_i).$$

Vi låter $x_i^{k-j} = q^{(t+r-i+\lambda_i)(t+r-j)}$ och ser att vi kan skriva om X

$$X = q^{sr+(t+r)(t+r-1)/2} \prod_{1\leq i<j\leq t+r} (q^{t+r-j+\lambda_j} - q^{t+r-i+\lambda_i}). \tag{12}$$

Vi förenklar nu uttrycket för nämnaren Y genom att faktorisera ut q från produkten:

$$Y = \prod_{1\leq i<j\leq t+r} (q^{t+r-i+1} - q^{t+r-j+1}) = \prod_{1\leq i<j\leq t+r} q \prod_{1\leq i<j\leq t+r} (q^{t+r-i} - q^{t+r-j}).$$

Eftersom i och j kan väljas på $\binom{t+r}{2} = (t+r)(t+r-1)/2$ sätt, får vi:

$$Y = q^{(t+r)(t+r-1)/2} \prod_{1\leq i<j\leq t+r} (q^{t+r-i} - q^{t+r-j}). \tag{13}$$

Den genererande funktionen för planpartitionen som får plats i $B(r,s,t)$ får vi genom att sätta in (12) och (13) i (11):

$$\frac{X}{Y} = (q^{-sr(r+1)/2}) \frac{q^{sr+(t+r)(t+r-1)/2} \prod_{1\leq i<j\leq t+r} (q^{t+r-j+\lambda_j} - q^{t+r-i+\lambda_i})}{q^{(t+r)(t+r-1)/2} \prod_{1\leq i<j\leq t+r} (q^{t+r-i} - q^{t+r-j})} = q^{-sr(r-1)/2} \prod_{1\leq i<j\leq t+r} \frac{q^{t+r-i+\lambda_i} - q^{t+r-j+\lambda_j}}{q^{t+r-i} - q^{t+r-j}}. \tag{14}$$

Så som vi har definierat partitionerna av λ_i ovan, så kan vi undersöka produkten i högerled av (14) på tre olika intervaller:

i) Då $1 \leq i < j \leq r$ är $\lambda_i = \lambda_j = s$ och uttrycket förenklas:

$$\prod_{1\le i<j\le r} \frac{q^{t+r-i+s}-q^{t+r-j+s}}{q^{t+r-i}-q^{t+r-j}} = \prod_{1\le i<j\le r} q^s \frac{q^{t+r-i}-q^{t+r-j}}{q^{t+r-i}-q^{t+r-j}} = \prod_{1\le i<j\le r} q^s = q^{sr(r-1)/2}. \tag{15}$$

ii) Då $r < i < j \le t+r$ så är $\lambda_i = \lambda_j = 0$, och vi får:

$$\prod_{r<i<j\le t+r} \frac{q^{t+r-i}-q^{t+r-j}}{q^{t+r-i}-q^{t+r-j}} = 1. \tag{16}$$

iii) Det sista fallet är det då $1 \le i \le r$ och $r+1 \le j \le t+r$, så $\lambda_i = s$ och $\lambda_j = 0$. Vi får

$$\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=r+1}^{r+t} \frac{q^{t+r-i+s}-q^{t+r-j}}{q^{t+r-i}-q^{t+r-j}}. \tag{17}$$

Alltså kan vi skriva om högerled av (14) med (15), (16) och (17):

$$q^{-sr(r-1)/2} \prod_{1\le i<j\le t+r} \frac{q^{t+r-i+\lambda_i}-q^{t+r-j+\lambda_j}}{q^{t+r-i}-q^{t+r-j}} =$$
$$q^{-sr(r-1)/2} q^{sr(r-1)/2} \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=r+1}^{r+t} \frac{q^{t+r-i+s}-q^{t+r-j}}{q^{t+r-i}-q^{t+r-j}} =$$
$$\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=r+1}^{r+t} \frac{q^{t+r-i+s}-q^{t+r-j}}{q^{t+r-i}-q^{t+r-j}}.$$

Vi multiplicerar sedan nämnare och täljare i produkten med q^{j-t-r} för att få:

$$\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=r+1}^{r+t} \frac{q^{j-i+s}-1}{q^{j-i}-1} = \prod_{i=1}^{r}\prod_{j=r+1}^{r+t} \frac{1-q^{j-i+s}}{1-q^{j-i}}.$$

Sedan indexerar vi om genom att sätta $j = k+r$ och $i = r+1-i$. Till slut har vi alltså:

$$\prod_{i=1}^{r}\prod_{k=1}^{t} \frac{1-q^{k+r-r-1+i+s}}{1-q^{k+r-r-1+i}} = \prod_{i=1}^{r}\prod_{k=1}^{t} \frac{1-q^{k+i+s-1}}{1-q^{k+i-1}}.$$

Därmed har vi bevisat MacMahons genererande funktionen för en planpartition som får plats i $B(r,s,t)$.

$\square$

6 Symmetriska planpartitioner

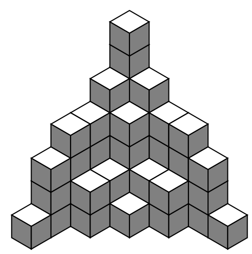
Definition 6.1 (Symmetrisk planpartition)**.** *En symmetrisk planpartition P är en planpartition där punktern (i, j, k) är ett element i P om och endast om punkten (j, i, k) är ett element i P.*

Grafiskt ser vi att en symmetrisk planpartition är likadan åt båda håll från den diagonala mittlinjen av planpartitionen, sett ovanifrån. Denna ska rymmas innuti en låda med mått $r \times r \times t$, alltså i $B(r, r, t)$.

Exempel 16. *En symmetrisk planpartition av 55 som får plats i $B(6, 6, 7)$:*

7	5	4	4	3	1
5	4	2	2		
4	2	1			
4	2				
3					
1					

(a)



(b)

Figur 13: En symmetrisk planpartition visualiserad i (a) två- respektive (b) tre dimensioner.

6.1 MacMahons teorem

Vi kan nu formulera satsen denna rapport ämnar att redogöra beviset för:

Sats 6.1 (MacMahons teorem)**.** *Den genererande funktionen för en symmetrisk planpartition som får plats i $B(r, r, t)$ är*

$$\prod_{i=1}^{r} \frac{1 - q^{t+2i-1}}{1 - q^{2i-1}} \prod_{1 \le i < j \le r} \frac{1 - q^{2(t+i+j-1)}}{1 - q^{2(i+j-1)}}.$$

För att kunna bevisa sats 6.1 visar vi hur den genererande funktionen för en symmetrisk planpartition kan uttryckas som en summa över partitioner, och att denna kan skrivas som en kvot av två determinanter.

6.2 Symmetriska planpartitioner och Schurfunktioner

Proposition 6.1. *Det finns en bijektiv relation mellan*

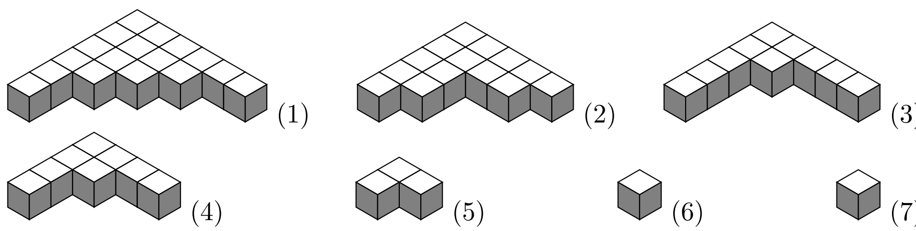
(a) planpartitioner med strängt monotont avtagande kolumner som har staplar av udda höjd och får plats i $B(r, t, 2r - 1)$, och

(b) symmetriska planpartitioner med högst r rader eller kolumner som får plats i $B(r, r, t)$.

Bevis av proposition 6.1. Vi utför detta bevis genom att plocka isär en symmetrisk planpartition, för att sedan sätta ihop den som en kolumnsträng planpartition med staplar av udda höjd.

Vår symmetriska planpartition har alltså max r rader och kolumner, och den högsta stapeln består utav max t kuber. Vi delar upp planpartitionen i våningar, där varje kub på våning i har höjd i.

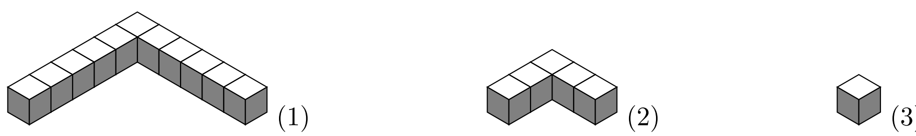
Exempel 17. *Planpartitionen i exempel 16 delas upp i 7 våningar.*



Figur 14: Våningar av en symmetrisk planpartition.

För varje våning delar vi nu upp kuberna i vinklar, så att vinkel j består utav de kuber i rad eller kolumn j som inte tillhör en eventuell vinkel $j-1$.

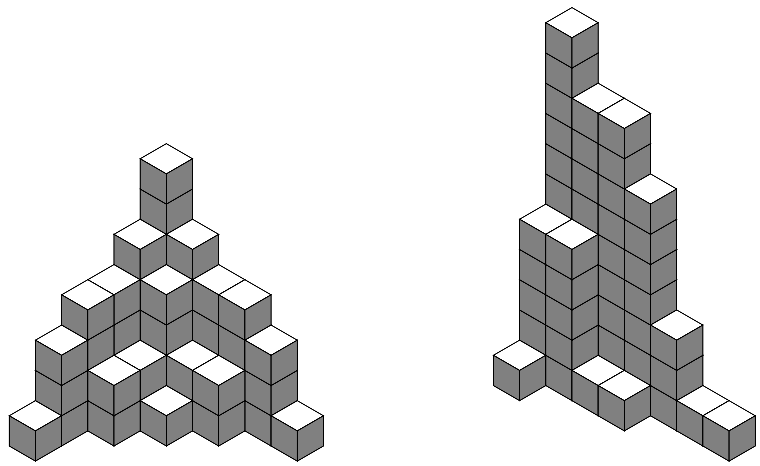
Exempel 18. *Våning 1 av planpartitionen i exempel 16 delas upp i 3 vinklar*



Figur 15: Vinklar av första våningen av en symmetrisk planpartition.

Varje vinkel har sidor som består utav max r stycken kuber. Om vi rätar ut alla vinklar så de bildar staplar, består alltså den högsta stapeln utav max $2r-1$ kuber, och varje stapel är av udda höjd tack vare symmetrin.

Vi låter nu den första våningen från den gamla planpartitionen bilda den första kolumnen i den nya planpartitionen, genom att ställa den yttersta vinkeln (vinkel 1) från denna våning på rad 1 av kolumn 1, vinkel 2 på rad 2 av kolumn 1, osv. Vi fortsätter på samma sätt att bilda nya kolumner av våningarna. Stapel i av kolumn j består nu alltså av de kuber som tidigare tillhörde vinkel i på våning j.



(a) (b)

Figur 16: (a) En symmetrisk planpartition och (b) dess avbilding till en kolumnsträngt monotont avtagande planpartition.

Eftersom varje kolumn i den nya planpartitionen består av staplar från olika vinklar av samma våning i den gamla, ser vi att de nya kolumnerna kommer vara strängt avtagande. Eftersom våning i i den gamla planpartitionen måste vara större än eller lika med våning $i+1$, så kommer motsvarande rad i i den nya planpartitionen vara högre än eller lika med rad $i+1$, alltså svagt monotont avtagande. Alltså har vi skapat en ny planpartition som är kolumnsträngt monotont avtagande och där varje stapel är av udda höjd, som får plats i $B(r, t, 2r - 1)$.

□

Detta resultat innebär att den genererande funktionen för symmetriska planpartitioner som får plats i $B(r, r, t)$ är densamma som den genererande funktionen för planpartitioner med strängt monotont avtagande kolumner som har staplar av udda höjd och får plats i $B(r, t, 2r - 1)$. Den senare, som alltså är en omvänd semistandard Youngtableau, finner vi genom att evaluera Schurfunktionen för variabler med udda exponenter, och sedan summera över alla partitioner.

Alltså har vi funnit att den genererande funktionen för symmetriska planpartitioner som får plats i $B(r, r, t)$ är

$$G(q) := \sum_{\lambda \subseteq \{t^r\}} s_\lambda(q^{2r-1}, q^{2r-3}, \ldots, q^3, q). \tag{18}$$

där $\{t^r\}$ är alla partitioner med högst r delar, som är mindre än eller lika med t.

6.3 Den genererande funktionen

Innan vi går vidare och hittar ett uttryck för den genererande funktionen $G(q)$, så bevisar vi följande proposition:

Proposition 6.2.

$$1 - x_1 \dots x_n = x_1 \dots x_n \sum_{k=1}^{n} x_k^{-1}(1 - x_k) \prod_{i \neq k} \frac{1 - x_i x_k}{x_i - x_k}. \tag{19}$$

Bevis. Vi representerar högerledet av (19) som en funktion i n variabler:

$$F_n(x_1, \dots, x_n) = x_1 \dots x_n \sum_{k=1}^{n} x_k^{-1}(1 - x_k) \prod_{i \neq k} \frac{1 - x_i x_k}{x_i - x_k},$$

och bevisar genom induktion på n att detta är lika med vänsterled av ekvationen.

Basfall:

Som funktion av variabeln x_1, då $n = 1$, får vi den linjära funktionen $F_1(x_1) = x_1 x_1^{-1}(1 - x_1) = (1 - x_1)$ vilket är lika med vänsterled av (19).

Induktionssteg:

Vi ser att när $x_1 = 0$ får vi $F_n(0) = 1$,
och när $x_1 = 1$ får vi:

$$F_n(1, x_2, \dots, x_n) = x_2 \dots x_n \sum_{k=2}^{n} x_k^{-1}(1 - x_k) \prod_{\substack{i \neq k \\ i,k \neq 1}} \frac{1 - x_i x_k}{x_i - x_k},$$

vilket enligt induktionshypotesen, är lika med

$$1 - x_2 \dots x_n.$$

F_n är en linjär funktion i variabeln x_1 även då $n > 1$. Detta ser vi eftersom $x_1, \dots, x_n$ är av grad 1 i x_1, och varje term i summan $\sum_{k=1}^{n} x_k^{-1}(1 - x_k) \prod_{i \neq k} \frac{1 - x_i x_k}{x_i - x_k}$ är av grad 0 eller -1 i x_1, vilket ger hela summan grad 0. Den totala graden för F_n är därmed $1 + 0 = 1$.

Med räta linjens ekvation kan vi hitta lutningen k av F_n som funktion av variabeln x_1:

$$k = \frac{F(1) - F(0)}{1 - 0} = -x_2 \dots x_n.$$

F_n korsar y-axeln vid $F_n(0) = 1$. Alltså får vi:

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = -x_2 \dots x_n \times x_1 + 1,$$

vilket är lika med vänsterled av (19).

$\square$

Nu kan vi visa hur man uttrycker summerade Schurfunktioner som en kvot av två determinanter. Denna kommer vi sen evaluera i variablerna $q^{2r-1}, q^{2r-3}, \dots, q^3, q$ för att få den genererande funktionen vi söker.

Sats 6.2. *Om vi summerar Schurfunktionerna för alla partitioner* $\lambda \subseteq \{t^r\}$*, kan summan uttryckas som följande kvot av determinanter:*

$$\sum_{\lambda \subseteq \{t^r\}} s_\lambda(x_1, \ldots, x_r) = \frac{det(x_i^{j-1} - x_i^{t+2r-j})_{i,j=1}^r}{det(x_i^{j-1} - x_i^{2r-j})_{i,j=1}^r}. \tag{20}$$

Bevis. Vi använder följande definition av Schurfunktioner:

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_r) = \frac{det(x_i^{r-j+\lambda_j})}{\prod_{1 \leq i < j \leq r}(x_i - x_j)},$$

för att skriva om vänsterled av (20):

$$\sum_{\lambda \subseteq \{t^r\}} s_\lambda(x_1, \ldots, x_r) = \sum_{\lambda \subseteq \{t^r\}} \frac{det(x_i^{r-j+\lambda_j})}{\prod_{1 \leq i < j \leq r}(x_i - x_j)},$$

och Weyls nämnarformel:

$$det((x_i^{r-j} - x_i^{2r-j})) = \left(\prod_{i=1}^r (1 - x_i)\right)\left(\prod_{1 \leq i < j \leq r}(x_i - x_j)(x_i x_j - 1)\right),$$

för att skriva om högerled av 20:

$$\frac{det(x_i^{j-1} - x_i^{t+2r-j})}{det(x_i^{j-1} - x_i^{2r-j})} = \frac{det(x_i^{j-1} - x_i^{t+2r-j})}{\prod_{i=1}^r (1 - x_i) \prod_{1 \leq i < j \leq r}(x_i - x_j)(x_i x_j - 1)}.$$

(20) är alltså ekvivalent med:

$$\sum_{\lambda \subseteq \{t^r\}} \frac{det(x_i^{r-j+\lambda_j})}{\prod_{1 \leq i < j \leq r}(x_i - x_j)} = \frac{det(x_i^{j-1} - x_i^{t+2r-j})}{\prod_{i=1}^r (1 - x_i) \prod_{1 \leq i < j \leq r}(x_i - x_j)(x_i x_j - 1)}$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\sum_{\lambda \subseteq \{t^r\}} det(x_i^{r-j+\lambda_j}) \prod_{i=1}^r (1 - x_i) \prod_{1 \leq i < j \leq r}(x_i x_j - 1) = det(x_i^{j-1} - x_i^{t+2r-j}). \tag{21}$$

Vi bevisar (21) med hjälp av induktion på antal variabler.

6.3.1 Basfall.

Vi visar att (21) gäller för en variabel, alltså då $r = 1$.

I vänsterled summerar vi över alla partitioner av t som består av högst $r = 1$ del. Då t representerar antalet kuber i en stapel, så måste t vara ett icke-negativt heltal. Alltså låter vi $0 \leq \lambda \leq t$. I vänsterled får vi då

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda \in \{0,1,\ldots t\}} det(x_i^{1-j+\lambda_j}) \prod_{i=1}^{1}(1-x_i) \prod_{1\leq i<j\leq 1}(x_i x_j - 1) =\\ \sum_{\lambda \in \{0,1,\ldots t\}} x_1^{1-1+\lambda_j}(1-x_1) =\\ x_1^0(1-x_1) + x_1^1(1-x_1) + x_1^2(1-x_1) + \ldots + x_1^t(1-x_1) =\\ 1 - x_1 + x_1 - x_1^2 + x_1^2 - x_1^3 + \ldots - x_1^t + x_1^t - x_1^{t+1} =\\ 1 - x_1^{t+1}.\end{aligned}$$

I högerled har vi en ensam determinant, som för $r = 1$ evalueras till

$$x_1^{1-1} - x_1^{t+2-1} = 1 - x_1^{t+1}$$

Alltså ser vi att $VL = HL$ i basfallet.

6.3.2 Induktionssteg

Vi antar att (21) gäller då antalet variabler är mindre än eller lika med $r - 1$.

Vi skriver om vänsterled av (21) genom att utveckla determinanten till en summa över permutationer enligt Leibniz formel:

$$det(x_i^{\lambda_j+r-j}) = \sum_{\sigma}(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{r} x_i^{\lambda_{\sigma(i)}+r-\sigma(i)}. \tag{22}$$

På samma sätt skriver vi om determinanten i högerled av (21):

$$det(x_i^{j-1} - x_i^{t+2r-j}) = \sum_{\sigma}(-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{r}(x_i^{\sigma(i)-1} - x_i^{t+2r-\sigma(i)}). \tag{23}$$

Eftersom faktorerna i produkten i högerled av (23) består utav två termer, så kommer vi få en summa av termer när vi utvecklar denna. Varje term kommer bestå utav r stycken faktorer, som alla kommer från antingen $x_i^{\sigma(i)-1}$ eller från $-x_i^{t+2r-\sigma(i)}$. Från mängden $R = \{1, 2, \ldots, r\}$ bildar vi därför en delmängd $S \subseteq R$, sådan att för varje $i \in S$ väljer vi termen $-x_i^{t+2r-\sigma(i)}$, och för varje $i \in R$ som inte ingår i S väljer vi $x_i^{\sigma(i)-1}$. För att uttrycka produkten summerar vi alltså över alla delmängder $S \subseteq R$, där en term har negativt tecken om ett udda antal negativa termer ingår, alltså om kardinaliteten av S är ett udda tal.

Vi skriver därmed om summan i högerled av (23) till:

$$\sum_{S\subseteq R}(-1)^{|S|}\prod_{i\in S}x_i^{t+2r-\sigma(i)}\prod_{i\notin S}x_i^{\sigma(i)-1}. \tag{24}$$

Sätter vi in (22) och (24) i (21) får vi alltså följande omskrivning av vår induktionshypotes:

$$\begin{aligned}\sum_{\lambda,\sigma}(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^{r}x_i^{\lambda_{\sigma(i)}+r-\sigma(i)}\prod_{i=1}^{r}(1-x_i)\prod_{1\le i<j\le r}(x_ix_j-1) = \\ \sum_{\sigma,S}(-1)^{I(\sigma)+|S|}\prod_{i\in S}x_i^{t+2r-\sigma(i)}\prod_{i\notin S}x_i^{\sigma(i)-1}.\end{aligned} \tag{25}$$

För att utföra induktionssteget genom induktionsantagandet att (25) gäller för $r-1$ variabler, definierar vi utifrån λ och σ en ny partitionen μ som har $r-1$ delar, och en ny permutation $\tau \in S_{r-1}$.

$\mu = \mu_1 \ge \mu_2 \ge \ldots \ge \mu_{r-1} \ge 0$ finner vi unikt genom att från varje $\lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}$ i $\lambda = \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_r \ge 0$ subtrahera λ_r. Istället för att summera över alla partitioner λ som består av högst r delar där varje del är mindre än eller lika med t, så kan vi alltså summera över alla tal λ_r mellan 0 och t, och alla partitioner μ som är sådana att $\mu_i = \lambda_i - \lambda_r$

$\tau \in S_{r-1}$ finner vi unikt från σ genom att plocka bort talet r och talet $k = \sigma^{-1}(r)$, alltså det tal som σ permuterar till r. På så vis blir τ en biljektiv avbildning från mängden $\{1, \ldots, r\} \setminus \{k\}$ till $\{1, \ldots, r-1\}$. $\tau(i) = \sigma(i)$ för $1 \le i < k$. För $k \le i \le r-1$ kommer däremot permutationen τ vara förskjuten ett steg till vänster jämfört med permutationen σ. Därför kommer σ ha $r-k$ fler inversioner än τ, alltså

$$I(\sigma) = I(\tau) + r - k$$

Vi skriver nu om vänsterled av (25), som vi kallar VL, i termer av μ och τ

$$\begin{aligned}VL = \sum_{\lambda_r=0}^{t}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{r-k}(1-x_k)x_k^{-1}(x_1\ldots x_r)^{\lambda_r+1}\prod_{i=1,i\ne k}^{r}(x_ix_k-1)\times \\ \sum_{\mu\tau}(-1)^{I(\tau)}\prod_{i=1,i\ne k}^{r}x_i^{\mu_{\tau(i)}+(r-1)-\tau(i)}\prod_{i=1,i\ne k}^{r}(1-x_i)\prod_{1\le i<j\le r,i,j\ne k}(x_ix_j-1).\end{aligned}$$

Här ser vi att första raden kommer från de termer som uteblir från produkterna på andra raden då $i, j \ne k$, och som därför måste läggas till för att likheten ska gälla. Andra raden ser vi att vi kan använda vår induktionshypotes på. Detta ger:

$$\sum_{\mu\tau}(-1)^{I(\tau)} \prod_{i=1, i\neq k}^{r} x_i^{\mu_{\tau(i)}+(r-1)-\tau(i)} \prod_{i=1,i\neq k}^{r}(1-x_i) \prod_{1\leq i<j\leq r, i,j\neq k}(x_ix_j-1) =$$

$$\{Induktionshypotes\}$$

$$\sum_{\tau,S}(-1)^{I(\tau)+|S|}\prod_{i\in S} x_i^{t-\lambda_r+2(r-1)-\tau(i)}\prod_{i\in\overline{S}}(x_i^{\tau(i)-1}) =$$

$$\{S:\tau=\sigma\}$$

$$\sum_{\sigma,S}(-1)^{I(\sigma)+|S|}\prod_{i\in S} x_i^{t-\lambda_r+2(r-1)-\sigma(i)}\prod_{i\in\overline{S}} x_i^{\sigma(i)-1}.$$

där delmängden S och dess komplement $\overline{S}$ alltså är partitioner av $\{1,\ldots,r\}\setminus\{k\}$, och vi har döpt om avbildningen τ till σ.

Alltså kan vi nu skriva om vänsterled av (25) till:

$$VL = \sum_{\lambda_r=0}^{t}\sum_{k=1}^{r}(-1)^{r-k}(1-x_k)x_k^{-1}(x_1\ldots x_r)^{\lambda_r+1}\prod_{i=1,i\neq k}^{r}(x_ix_k-1)\times$$
$$\sum_{\sigma,S}(-1)^{I(\sigma)+|S|}\prod_{i\in S} x_i^{t-\lambda_r+2(r-1)-\sigma(i)}\prod_{i\in\overline{S}} x_i^{\sigma(i)-1}.$$

Vi skriver om $(x_1\ldots x_r)^{\lambda_r+1}$ till:

$$\prod_{i\in S} x_i^{\lambda_r+1}\prod_{i\notin S} x_i^{\lambda_r+1},$$

och multiplicerar med produkten

$$\prod_{i\in S} x_i^{t-\lambda_r+2(r-1)-\sigma(i)}.$$

Detta kan skrivas:

$$\prod_{i\in S} x_i^{\lambda_r+1}\prod_{i\notin S} x_i^{\lambda_r+1}\prod_{i\in S} x_i^{t-\lambda_r+2(r-1)-\sigma(i)} =$$
$$\prod_{i\notin S} x_i^{\lambda_r+1}\prod_{i\in S} x_i^{\lambda_r+1+t-\lambda_r+2r-2-\sigma(i)} =$$
$$\prod_{i\notin S} x_i^{\lambda_r+1}\prod_{i\in S} x_i^{t+2r-2}\prod_{i\in S} x_i^{1-\sigma(i)}.$$

Vi får nu:

$$VL = \sum_{\lambda_r=0}^{t}\sum_{k=1}^{r}\sum_{\sigma}\sum_{S}(-1)^{r-k+(\sigma)+|S|}(1-x_k)x_k^{-1}\prod_{i\neq k}(x_ix_k-1)\times \\ \prod_{i\notin S}x_i^{\lambda_r+1}\prod_{i\in S}x_i^{t+2r-2}\prod_{i\in S}x_i^{1-\sigma(i)}\prod_{i\in \overline{S}}x_i^{\sigma(i)-1}. \tag{26}$$

Kvar återstår nu att förenkla uttryck 26 och visa att detta är lika med högerled i (25).

Om vi tittar på summan över λ_r, ser vi när denna skrivs ut att den går att skriva om med hjälp av formeln för geometriska serier

$$\sum_{\lambda_r=0}^{t}\prod_{i\notin S}x_i^{\lambda_r} = \prod_{i\notin S}x_i^0+\prod_{i\notin S}x_i^1+\prod_{i\notin S}x_i^2+\ldots+\prod_{i\notin S}x_i^t = \\ 1+\Big(\prod_{i\notin S}x_i\Big)+\Big(\prod_{i\notin S}x_i\Big)^2+\ldots+\Big(\prod_{i\notin S}x_i\Big)^t = \\ \frac{1-\Big(\prod_{i\notin S}x_i\Big)^{t+1}}{1-\Big(\prod_{i\notin S}x_i\Big)} = \frac{1-\prod_{i\notin S}x_i^{t+1}}{1-\prod_{i\notin S}x_i}. \tag{27}$$

Sedan tittar vi på summan över σ. Denna skrivs om med hjälp av Vandermondes formel.

Eftersom

$$\sum_{\sigma}(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^{r}x_i^{r-\sigma(i)} = \prod_{1\leq i<j\leq r}(x_i-x_j),$$

och vi har S och $\overline{S}$ som en partition av talet $r-1$ som vi delat upp produkten med hjälp av, och $x^{1-\sigma(i)} = (x^{\sigma(i)-1})^{-1}$, så kan vi skriva

$$\sum_{\sigma}(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i\in S}x_i^{1-\sigma(i)}\prod_{i\in\overline{S}}x_i^{\sigma(i)-1} = (-1)^{\binom{r-1}{2}}\prod_{\substack{1\leq i<j\leq r\\ i,j\neq k}}(x_i^{\epsilon_i}-x_j^{\epsilon_j}), \tag{28}$$

där

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1 & om \quad i\in S \\ 1 & om \quad i\notin S. \end{cases}$$

Med dessa omskrivningar blir vänsterled av (25):

$$VL = (-1)^{\binom{r-1}{2}} \sum_{k=1}^{r} \sum_{S \subseteq \{1,\ldots,r\} \setminus \{k\}} (-1)^{|S|+r-k} (1-x_k) x_k^{-1} \times$$

$$\prod_{i \notin S} x_i \frac{1 - \prod_{i \notin S} x_i^{t+1}}{1 - \prod_{i \notin S} x_i} \prod_{i \neq k} (x_i x_k - 1) \prod_{i \in S} x_i^{t+2r-2} \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq r \\ i,j \neq k}} (x_i^{\epsilon_i} - x_j^{\epsilon_j}).$$

Vi kan skriva om produkten $\prod_{i \neq k}(x_i x_k - 1)$, där k är fixt, på följande vis:

$$\prod_{i \neq k} (x_i x_k - 1) =$$

$$\prod_{i<k} (x_i x_k - 1) \prod_{i>k} (x_i x_k - 1) =$$

$$\prod_{i<k} (-1)(1 - x_i x_k) \prod_{i>k} (x_i x_k - 1) =$$

$$(-1)^{k-1} \prod_{i<k} (1 - x_i x_k) \prod_{i>k} (x_i x_k - 1) =$$

$$(-1)^{k-1} \prod_{\substack{i<k \\ i \in S}} (1 - x_i x_k) \prod_{\substack{i<k \\ i \notin S}} (1 - x_i x_k) \prod_{\substack{i>k \\ i \in S}} (x_i x_k - 1) \prod_{\substack{i>k \\ i \notin S}} (x_i x_k - 1) =$$

$$(-1)^{k-1} \prod_{\substack{i<k \\ i \notin S}} (1 - x_i x_k) \prod_{\substack{i>k \\ i \notin S}} (x_i x_k - 1) \prod_{i \in S} x_i \prod_{\substack{i<k \\ i \in S}} (x_i^{-1} - x_k) \prod_{\substack{i>k \\ i \in S}} (x_k - x_i^{-1}).$$

Produkten $\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq r \\ i,j \neq k}} (x_i^{\epsilon_i} - x_j^{\epsilon_j})$ skriver vi också om:

$$\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq r \\ i,j \neq k}} (x_i^{\epsilon_i} - x_j^{\epsilon_j}) =$$

$$\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq r \\ i,j \notin S \\ i,j \neq k}} (x_i - x_j) \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq r \\ i \in S \vee j \in S}} (x_i^{\epsilon_i} - x_j^{\epsilon_j}) \left(\prod_{\substack{i<k \\ i \in S}} (x_i^{\epsilon_i} - x_k^{\epsilon_k}) \prod_{\substack{i>k \\ i \in S}} (x_k^{\epsilon_k} - x_i^{\epsilon_i}) \right)^{-1},$$

där uttrycket i parentesen i högerled motsvarar de fall då $i = k$ och då $j = k$. Eftersom $\epsilon_i = -1$ då $i \in S$, och $\epsilon_k = 1$ eftersom $k \notin S$, är detta lika med:

$$\prod_{\substack{1 \leq i < j \leq r \\ i,j \notin S \\ i,j \neq k}} (x_i - x_j) \prod_{\substack{1 \leq i < j \leq r \\ i \in S \vee j \in S}} (x_i^{\epsilon_i} - x_j^{\epsilon_j}) \left(\prod_{\substack{i<k \\ i \in S}} (x_i^{-1} - x_k) \prod_{\substack{i>k \\ i \in S}} (x_k - x_i^{-1}) \right)^{-1}.$$

Med hjälp av dessa två omskrivningar får vi:

$$\prod_{i\neq k}(x_ix_k-1)\prod_{\substack{1\leq i<j\leq r\\ i,j\neq k}}(x_i^{\epsilon_i}-x_j^{\epsilon_j})=\prod_{\substack{i<j\\ i\in S\vee j\in S}}(x_i^{\epsilon_i}-x_j^{\epsilon_j})\prod_{\substack{i<j\\ i,j\neq k,\notin S}}(x_i-x_j)$$
$$\times(-1)^{k-1}\prod_{i\in S}x_i\prod_{i<k}(1-x_ix_k)\prod_{i>k}(x_ix_k-1)$$

Utför vi denna substitution får vi:

$$VL=(-1)^{\binom{r-1}{2}}\sum_{k=1}^{r}\sum_{S\subseteq\{1,\dots,r\}\setminus\{k\}}(-1)^{|S|+r-k}(1-x_k)x_k^{-1}\times$$
$$\prod_{i\notin S}x_i\left(\frac{1-\prod_{i\notin S}x_i^{t+1}}{1-\prod_{i\notin S}x_i}\right)\prod_{i\in S}x_i^{t+2r-1}\prod_{\substack{i<j\\ i\in S\vee j\in S}}(x_i^{\epsilon_i}-x_j^{\epsilon_j})\prod_{\substack{i<j\\ i,j\neq k,\notin S}}(x_i-x_j)\times$$
$$(-1)^{k-1}\prod_{i<k}(1-x_ix_k)\prod_{i>k}(x_ix_k-1).$$

Vi byter nu plats på summan över S och summan över k. Istället för att summera över varje delmängd $S\subseteq\{1,\dots,r\}\setminus\{k\}$, för varje $k\in\{1,\dots,r\}$, så summerar vi över varje $k\notin S$, för varje äkta delmängd $S\subset\{1,\dots,r\}$. Vi får då

$$VL=(-1)^{\binom{r-1}{2}}\sum_{S\subset\{1,\dots,r\}}(-1)^{|S|}\sum_{k\notin S}(-1)^{r-k}(1-x_k)x_k^{-1}\times$$
$$\prod_{i\notin S}x_i\left(\frac{1-\prod_{i\notin S}x_i^{t+1}}{1-\prod_{i\notin S}x_i}\right)\prod_{i\in S}x_i^{t+2r-1}\prod_{\substack{i<j\\ i\in S\vee j\in S}}(x_i^{\epsilon_i}-x_j^{\epsilon_j})\prod_{\substack{i<j\\ i,j\neq k,\notin S}}(x_i-x_j)\times$$
$$(-1)^{k-1}\prod_{\substack{i<k\\ i\notin S}}(1-x_ix_k)\prod_{\substack{i>k\\ i\notin S}}(x_ix_k-1),$$

vilket kan skrivas om till

$$(-1)^{\binom{r-1}{2}}\sum_{S\subset\{1,\dots,r\}}(-1)^{|S|}\prod_{i\in S}x_i^{t+2r-1}\prod_{\substack{i<j\\ i\in S\vee j\in S}}(x_i^{\epsilon_i}-x_j^{\epsilon_j})\left(\frac{1-\prod_{i\notin S}x_i^{t+1}}{1-\prod_{i\notin S}x_i}\right)\prod_{i\notin S}x_i$$
$$\sum_{k\notin S}(-1)^{r-k}(-1)^{k-1}(1-x_k)x_k^{-1}\prod_{\substack{i<k\\ i\notin S}}(1-x_ix_k)\prod_{\substack{i>k\\ i\notin S}}(x_ix_k-1)\prod_{\substack{i<j\\ i,j\neq k,\notin S}}(x_i-x_j).$$

Eftersom $(-1)^{r-k}(-1)^{k-1}=(-1)^{r-1}$ är oberoende av k och S kan vi flytta ut den termen utanför summorna. $\binom{r-1}{2}(r-1)=\binom{r}{2}$, och alltså får vi:

$VL=$

$$(-1)^{\binom{r}{2}}\sum_{S\subset\{1,\dots,r\}}(-1)^{|S|}\prod_{i\in S}x_i^{t+2r-1}\prod_{\substack{i<j\\ i\in S\vee j\in S}}(x_i^{\epsilon_i}-x_j^{\epsilon_j})\left(\frac{1-\prod_{i\notin S}x_i^{t+1}}{1-\prod_{i\notin S}x_i}\right)\times$$
$$\prod_{i\notin S}x_i\sum_{k\notin S}(1-x_k)x_k^{-1}\prod_{\substack{i<k\\ i\notin S}}(1-x_ix_k)\prod_{\substack{i>k\\ i\notin S}}(x_ix_k-1)\prod_{\substack{i<j\\ i,j\neq k,\notin S}}(x_i-x_j).$$

Vi noterar nu att vi kan skriva om

$$\prod_{\substack{i<k\\ i\notin S}}(1-x_ix_k)\prod_{\substack{i>k\\ i\notin S}}(x_ix_k-1)=\prod_{\substack{i<k\\ i\notin S}}(1-x_ix_k)\prod_{\substack{i>k\\ i\notin S}}(1-x_ix_k)\prod_{\substack{i>k\\ i\notin S}}(-1)=$$
$$\prod_{\substack{i\neq k\\ i\notin S}}(1-x_ix_k)\prod_{\substack{i>k\\ i\notin S}}(-1),$$

och

$$\prod_{\substack{i<j\\ i,j\neq k,\notin S}}(x_i-x_j)=\prod_{\substack{i<j\\ i,j\notin S}}(x_i-x_j)\prod_{\substack{i<k\\ i\notin S}}\frac{1}{x_i-x_k}\prod_{\substack{i>k\\ i\notin S}}\frac{1}{x_k-x_i}=$$
$$\prod_{\substack{i<j\\ i,j\notin S}}(x_i-x_i)\prod_{\substack{i<k\\ i\notin S}}\frac{1}{x_k-x_i}\prod_{\substack{i<k\\ i\notin S}}(-1)\prod_{\substack{i>k\\ i\notin S}}\frac{1}{x_k-x_i}=$$
$$\prod_{\substack{i<j\\ i,j\notin S}}(x_i-x_i)\prod_{\substack{i\neq k\\ i\notin S}}\frac{1}{x_k-x_i}\prod_{\substack{i<k\\ i\notin S}}(-1).$$

Produkten av dessa uttryck ger därför:

$$\prod_{\substack{i<k\\ i\notin S}}(1-x_ix_k)\prod_{\substack{i>k\\ i\notin S}}(x_ix_k-1)\prod_{\substack{i<j\\ i,j\neq k,\notin S}}(x_i-x_j)=$$
$$\prod_{\substack{i\neq k\\ i\notin S}}(1-x_ix_k)\prod_{\substack{i>k\\ i\notin S}}(-1)\prod_{\substack{i<j\\ i,j\notin S}}(x_i-x_i)\prod_{\substack{i\neq k\\ i\notin S}}\frac{1}{x_k-x_i}\prod_{\substack{i<k\\ i\notin S}}(-1)=$$
$$\prod_{\substack{i<j\\ i,j\notin S}}(x_i-x_i)\prod_{\substack{i\neq k\\ i\notin S}}\frac{1-x_ix_k}{x_k-x_i}\prod_{\substack{i\neq k\\ i\notin S}}(-1)=\prod_{\substack{i<j\\ i,j\notin S}}(x_i-x_i)\prod_{\substack{i\neq k\\ i\notin S}}\frac{1-x_ix_k}{x_i-x_k}.$$

Med hjälp av detta uttryck skriver vi om:

$$\prod_{i\notin S} x_i \sum_{k\notin S}(1-x_k)x_k^{-1}\prod_{\substack{i<k\\ i\notin S}}(1-x_ix_k)\prod_{\substack{i>k\\ i\notin S}}(x_ix_k-1)\prod_{\substack{i<j\\ i,j\neq k,\notin S}}(x_i-x_j)=$$

$$\prod_{i\notin S} x_i \sum_{k\notin S}(1-x_k)x_k^{-1}\prod_{\substack{i\neq k\\ i\notin S}}\frac{1-x_ix_k}{x_i-x_k}\prod_{\substack{i<j\\ i,j\notin S}}(x_i-x_i),$$

vilket enligt proposition 6.2 är lika med

$$(1-\prod_{i\notin S} x_i)\prod_{\substack{i<j\\ i,j\notin S}}(x_i-x_j).$$

Med denna substitution får vi:

$$VL=(-1)^{\binom{r}{2}}\sum_{S\subset\{1,\dots,r\}}(-1)^{|S|}\prod_{i\in S}x_i^{t+2r-1}\prod_{\substack{i<j\\ i\in S\vee j\in S}}(x_i^{\epsilon_i}-x_j^{\epsilon_j})\times$$

$$\left(\frac{1-\prod_{i\notin S}x_i^{t+1}}{1-\prod_{i\notin S}x_i}\right)(1-\prod_{i\notin S}x_i)\prod_{\substack{i<j\\ i,j\notin S}}(x_i-x_j)=$$

$$(-1)^{\binom{r}{2}}\sum_{S\subset\{1,\dots,r\}}(-1)^{|S|}\prod_{i\in S}x_i^{t+2r-1}\prod_{\substack{i<j\\ i\in S\vee j\in S}}(x_i^{\epsilon_i}-x_j^{\epsilon_j})\times$$

$$(1-\prod_{i\notin S}x_i^{t+1})\prod_{\substack{i<j\\ i,j\notin S}}(x_i-x_j).$$

Vi skriver sedan ihop de två vandermondeprodukterna, och får enligt (28):

$$\prod_{\substack{i<j\\ i\in S\vee j\in S}}(x_i^{\epsilon_i}-x_j^{\epsilon_j})\prod_{\substack{i<j\\ i,j\notin S}}(x_i-x_j)=\prod_{i<j}(x_i^{\epsilon_i}-x_j^{\epsilon_j})=$$

$$(-1)^{-\binom{r}{2}}\sum_{\sigma}(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i\in S}x_i^{1-\sigma(i)}\prod_{i\notin S}x_i^{\sigma(i)-1}.$$

Därmed får vi:

$$VL=(-1)^{\binom{r}{2}}\sum_{S\subset\{1,\dots,r\}}(-1)^{|S|}\prod_{i\in S}x_i^{t+2r-1}(1-\prod_{i\notin S}x_i^{t+1})\times$$

$$(-1)^{-\binom{r}{2}}\sum_{\sigma}(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i\in S}x_i^{1-\sigma(i)}\prod_{i\notin S}x_i^{\sigma(i)-1}=$$

$$\sum_{\sigma,S\subset\{1,\dots,r\}}(-1)^{I(\sigma)+|S|}\prod_{i\in S}x_i^{t+2r-1}(1-\prod_{i\notin S}x_i^{t+1})\prod_{i\in S}x_i^{1-\sigma(i)}\prod_{i\notin S}x_i^{\sigma(i)-1},$$

som vi utvecklar till:

$$VL = \sum_{\sigma, S\subset\{1,\dots,r\}} (-1)^{I(\sigma)+|S|} \prod_{i\in S} x_i^{t+2r-1} \prod_{i\in S} x_i^{1-\sigma(i)} \prod_{i\notin S} x_i^{\sigma(i)-1}$$
$$- \sum_{\sigma, S\subset\{1,\dots,r\}} (-1)^{I(\sigma)+|S|} \prod_{i\in S} x_i^{t+2r-1} \prod_{i\in S} x_i^{1-\sigma(i)} \prod_{i\notin S} x_i^{\sigma(i)-1} \prod_{i\notin S} x_i^{t+1},$$

varefter vi förenklar:

$$\begin{aligned} VL = &\sum_{\sigma, S\subset\{1,\dots,r\}} (-1)^{I(\sigma)+|S|} \prod_{i\in S} x_i^{t+2r-\sigma(i)} \prod_{i\notin S} x_i^{\sigma(i)-1} \\ &- \sum_{\sigma, S\subset\{1,\dots,r\}} (-1)^{I(\sigma)+|S|} \prod_{i\in S} x_i^{t+2r-\sigma(i)} \prod_{i\notin S} x_i^{t+\sigma(i)}. \end{aligned} \tag{29}$$

Vi betraktar nu determinanten $det(A)$, där

$$A = (x_i^{t+j} - x_i^{t+2r-j})_{i,j=1}^r.$$

I kolumn r av matris A kommer samtliga element vara 0, eftersom $x_i^{t+r} - x_i^{t+r} = 0$, och alltså är $det(A) = 0$.

Vi skriver om determinanten av A som en summa över permutationer, och delmängder S och $\overline{S}$ av mängden $\{1,\dots,r\}$ och får:

$$\begin{aligned} det(x_i^{t+j} - x_i^{t+2r-j})_{i,j=1}^r = &\sum_{\sigma} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{r} (x_i^{t+\sigma(i)} - x_i^{t+2r-\sigma(i)}) = \\ &\sum_{\sigma, S\subseteq\{1,\dots,r\}} (-1)^{I(\sigma)+|S|} \prod_{i\in S} x_i^{t+2r-\sigma(i)} \prod_{i\notin S} x_i^{t+\sigma(i)} = 0. \end{aligned}$$

Vi delar sedan upp summan över S i en del där $S = \{1,\dots,r\}$, då alltså $i \in S$ för alla i och $|S| = r$, och i den del som summerar över resterande delmängder, det vill säga alla äkta delmängder $S \subset \{1,\dots,r\}$.

$$\begin{aligned} &\sum_{\sigma} \Big((-1)^{I(\sigma)+r} \prod_{i} x_i^{t+2r-\sigma(i)} + \\ &\qquad \sum_{S\subset\{1,\dots,r\}} (-1)^{I(\sigma)+|S|} \prod_{i\in S} x_i^{t+2r-\sigma(i)} \prod_{i\notin S} x_i^{t+\sigma(i)} \Big) = 0 \\ &\qquad\qquad \Longleftrightarrow \\ &\sum_{\sigma} (-1)^{I(\sigma)+r} \prod_{i} x_i^{t+2r-\sigma(i)} = \\ &\qquad - \sum_{\sigma, S\subset\{1,\dots,r\}} (-1)^{I(\sigma)+|S|} \prod_{i\in S} x_i^{t+2r-\sigma(i)} \prod_{i\notin S} x_i^{t+\sigma(i)}. \end{aligned} \tag{30}$$

Den första summan av VL (29) skriver vi om med samma partitioner $S = \{1, \dots, r\}$ och $S \subset \{1, \dots, r\}$, denna gång genom att subtrahera den äkta delmängden från summan över potensmängden:

$$\begin{aligned}\sum_{\sigma, S \subset \{1,\dots,r\}} (-1)^{I(\sigma)+|S|} \prod_{i \in S} x_i^{t+2r-\sigma(i)} \prod_{i \notin S} x_i^{\sigma(i)-1} = \\ \sum_{\sigma, S \subseteq \{1,\dots,r\}} (-1)^{I(\sigma)+|S|} \prod_{i \in S} x_i^{t+2r-\sigma(i)} \prod_{i \notin S} x_i^{\sigma(i)-1} \\ - \sum_{\sigma} (-1)^{I(\sigma)+r} \prod_{i \in S} x_i^{t+2r-\sigma(i)}.\end{aligned} \tag{31}$$

(31) tillsammans med högerled av (30) ger nu:

$$\begin{aligned}VL = \sum_{\sigma, S \subseteq \{1,\dots,r\}} (-1)^{I(\sigma)+|S|} \prod_{i \in S} x_i^{t+2r-\sigma(i)} \prod_{i \notin S} x_i^{\sigma(i)-1} \\ - \sum_{\sigma} (-1)^{I(\sigma)+r} \prod_{i \in S} x_i^{t+2r-\sigma(i)} + \sum_{\sigma} (-1)^{I(\sigma)+r} \prod_{i} x_i^{t+2r-\sigma(i)} = \\ \sum_{\sigma, S \subseteq \{1,\dots,r\}} (-1)^{I(\sigma)+|S|} \prod_{i \in S} x_i^{t+2r-\sigma(i)} \prod_{i \notin S} x_i^{\sigma(i)-1}.\end{aligned}$$

Vilket är lika med högerled av (25).

Därmed har vi visat att om (21) gäller i $r-1$ variabler så gäller den även i r variabler, vilket tillsammans med basfallet $r = 1$ innebär att sats 6.2 är bevisad.

□

6.4 Beviset av MacMahons teorem

Vi kan nu hitta den genererande funktionen för en symmetrisk planpartition.

Bevis av sats 6.1. Vi sätter in uttryck (18) från proposition 6.1 i (20) från *sats 6.2* för att finna utrycket för den genererande funktionen för symmetriska planpartitioner:

$$\sum_{\lambda \subseteq \{t^r\}} s_\lambda(q^{2r-1}, q^{2r-3}, \dots, q^3, q) = \frac{det((q^{2r-2i+1})^{j-1} - (q^{2r-2i+1})^{t+2r-j})}{det((q^{2r-2i+1})^{j-1} - (q^{2r-2i+1})^{2r-j})} \tag{32}$$

Vi kallar täljaren av (32) för X och nämnaren för Y, och skriver om dessa med hjälp av Weyls nämnarformel.

Först skriver vi om Y, genom att substituera $x_i = q^{2r-2i+1}$.

$$det(x_i^{j-1} - x_i^{2r-j}) = \prod_{i=1}^{r} (1 - x_i) \prod_{1 \le i < j \le r} (x_i - x_j)(x_i x_j - 1) =$$

$$S:\left\{x_i = q^{2r-2i+1}\right\}$$

$$= \prod_{i=1}^{r}(1-q^{2r-2i+1}) \prod_{1\le i<j\le r}(q^{2r-2i+1}-q^{2r-2j+1})(q^{4r-2i-2j+2}-1)$$

Genom att indexera om och låta $i = r-i+1$ och $j = r-j+1$ (vilket inte ändrar determinantens värde) blir detta:

$$\prod_{i=1}^{r}(1-q^{2i-1}) \prod_{1\le i<j\le r}(q^{2i-1}-q^{2j-1})(q^{2i+2j-2}-1)$$

Vi skriver om det till:

$$Y = \prod_{i=1}^{r}(1-q^{2i-1}) \prod_{1\le i<j\le r}(1-q^{2j-2i})(q^{2i+2j-2}-1)(q^{2i-1}) \tag{33}$$

Sedan skriver vi om X till liknande form:

Vi låter åter igen $x_i = q^{2r-2i+1}$, och skriver efter denna substitution om X som en summa över permutationer:

$$X = det(x_j^{i-1} - x_j^{t+2r-i}) = \sum_{\sigma}(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^{r}(x_{\sigma(i)}^{i-1} - x_{\sigma(i)}^{t+2r-i})$$

Vi kan faktorisera ut $\prod_{i=1}^{r} x_i^{(t+2r-1)/2}$ från varje term i produkten, och får:

$$X = \prod_{i=1}^{r} x_i^{(t+2r-1)/2}\sum_{\sigma}(-1)^{I(\sigma)}\prod_{i=1}^{r}(x_{\sigma(i)}^{(2i-1-2r-t)/2} - x_{\sigma(i)}^{-(2i-1-2r-t)/2})$$

På samma sätt som tidigare summerar vi sedan över alla delmängder $S \subseteq \{1,\ldots,r\}$, där vi väljer $x_{\sigma(i)}^{-(2i-1-2r-t)/2}$ om $i \in S$, och $x_{\sigma(i)}^{(2i-1-2r-t)/2}$ om $i \notin S$.

$$\prod_{i=1}^{r} x_i^{(t+2r-1)/2}\sum_{\sigma,S\subseteq\{1,\ldots,r\}}(-1)^{I(\sigma)+|S|}\prod_{i\in S}x_{\sigma(i)}^{-(2i-1-2r-t)/2}\prod_{i\notin S}x_{\sigma(i)}^{(2i-1-2r-t)/2}$$

Vi låter nu

$$\epsilon_i = \begin{cases} -1 & om \quad i \in S \\ 1 & om \quad i \notin S, \end{cases}$$

och får:

$$X = \prod_{i=1}^{r} x_i^{(t+2r-1)/2}\sum_{\sigma,S\subseteq\{1,\ldots,r\}}(-1)^{I(\sigma)+|S|}\prod_{i=1}^{r}x_{\sigma(i)}^{\epsilon_i(2i-1-2r-t)/2}$$

Eftersom inversen av permutationen σ har samma inversionstal som σ^{-1}, så kan vi byta mellan dessa utan att uttryckets värde förändras. Vi kan även byta ut ϵ_i mot $\epsilon_{\sigma^{-1}(i)}$, utan att $|S|$ ändras. Då vi summerar över alla par (σ, S) så kan vi byta plats på $\sigma(i)$ och i i produkten. Detta ger:

$$X = \prod_{i=1}^{r} x_i^{(t+2r-1)/2} \sum_{\sigma, S \subseteq \{1,\ldots,r\}} (-1)^{I(\sigma)+|S|} \prod_{i=1}^{r} x_i^{\epsilon_i(2\sigma(i)-1-2r-t)/2} =$$

$$\prod_{i=1}^{r} q^{(2r-2i+1)(t+2r-1)/2} \sum_{\sigma, S \subseteq \{1,\ldots,r\}} (-1)^{I(\sigma)+|S|} \prod_{i=1}^{r} q^{\epsilon_i(2r-2i+1)(2\sigma(i)-1-2r-t)/2}$$

Vi skriver nu om X genom att faktorisera ut $q^{t(1-i)}$ från den första produkten

$$X =$$
$$\prod_{i=1}^{r} q^{t(1-i)} \prod_{i=1}^{r} q^{(t+2r-2i+1)(2r-1)/2} \times$$
$$\sum_{\sigma, S \subseteq \{1,\ldots,r\}} (-1)^{I(\sigma)+|S|} \prod_{i=1}^{r} q^{\epsilon_i(t+2r-2\sigma(i)+1)(2i-1-2r)/2}$$

Genom att substituera $x_i = q^{t+2r-2i+1}$ får vi:

$$X = \prod_{i=1}^{r} q^{t(1-i)} \prod_{i=1}^{r} x_i^{(2r-1)/2} \sum_{\sigma, S \subseteq \{1,\ldots,r\}} (-1)^{I(\sigma)+|S|} \prod_{i=1}^{r} x_{\sigma(i)}^{\epsilon_i(2i-1-2r)/2} \qquad (34)$$

På samma sätt som vi utvecklade X som en summa över σ och S kan vi skriva om följande determinant:

$$det(x_j^{i-1} - x_j^{2r-i}) = \sum_{\sigma} (-1)^{I(\sigma)} \prod_{i=1}^{r} (x_{\sigma(i)}^{i-1} - x_{\sigma(i)}^{2r-i}) =$$
$$\prod_{i=1}^{r} x_i^{(2r-1)/2} \sum_{\sigma, S} (-1)^{I(\sigma)+|S|} \prod_{i=1}^{r} x_{\sigma(i)}^{\epsilon_i(2i-1-2r)/2}$$

När vi substituerar detta i (34) får vi:

$$X = \prod_{i=1}^{r} q^{t(1-i)} det(x_j^{i-1} - x_j^{2r-i})$$

som genom beräkning av produkten och substitution tillbaka till $x_j = q^{t+2r-2j+1}$ kan skrivas:

$$X = q^{-tr(r-1)} det((q^{t+2r-2j+1})^{i-1} - (q^{t+2r-2j+1})^{2r-1})$$

Med Weyls nämnarformel får vi tillslut:

$$X = q^{-tr(r-1)} \prod_{i=1}^{r} (1 - q^{t+2i-1}) \prod_{1 \le i < j \le r} (q^{t+2i-1} - q^{t+2j-1})(q^{2t+2i+2j-2} - 1) =$$

$$q^{-tr(r-1)} \prod_{i=1}^{r} (1 - q^{t+2i-1}) \prod_{1 \le i < j \le r} q^t (1 - q^{2i-2j})(q^{2t+2i+2j-2} - 1)(q^{2i-1}) =$$

$$q^{-tr(r-1)} q^{tr(r-1)} \prod_{i=1}^{r} (1 - q^{t+2i-1}) \prod_{1 \le i < j \le r} (1 - q^{2i-2j})(q^{2t+2i+2j-2} - 1)(q^{2i-1}) =$$

$$\prod_{i=1}^{r} (1 - q^{t+2i-1}) \prod_{1 \le i < j \le r} (1 - q^{2i-2j})(q^{2t+2i+2j-2} - 1)(q^{2i-1}) \tag{35}$$

Sätter vi nu in X (35) och Y (33) i (32) får vi:

$$\sum_{\lambda \subseteq \{t^r\}} s_\lambda(q^{2r-1}, q^{2r-3}, \ldots, q^3, q) =$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{r} (1 - q^{t+2i-1}) \prod_{1 \le i < j \le r} (1 - q^{2j-2i})(q^{2t+2i+2j-2} - 1)(q^{2i-1})}{\prod_{i=1}^{n} (1 - q^{2i-1}) \prod_{1 \le i < j \le n} (1 - q^{2j-2i})(q^{2i+2j-2} - 1)(q^{2i-1})} =$$

$$\frac{\prod_{i=1}^{r} (1 - q^{t+2i-1}) \prod_{1 \le i < j \le r} (1 - q^{2t+2i+2j-2})}{\prod_{i=1}^{n} (1 - q^{2i-1}) \prod_{1 \le i < j \le n} (1 - q^{2i+2j-2})}$$

som den genererande funktionen för symmetriska planpartitioner som får plats i $B(r, r, t)$.

□

Därmed har vi bevisat MacMahons genererande funktion för symmetriska planpartitioner.

Referenser

[1] Biggs, Norman L. *Discrete Mathemtatics.* Oxford University Press, 2002.

[2] Bressoud, David M. *Proofs and Confirmations: The Story of the Alternating Sign Matrix Conjecture*, Cambridge University Press, 1999.

[3] Bøgvad, Rikard, och Paul Vaderlind. *Linjär Algebra: Grundkurs.* Liber, 2017.

[4] Kim, Jang Soo. "Example: Plane Partition." *TeXample.net*, 17 aug. 2009, https://texample.net/tikz/examples/plane-partition/, 22/3-2023.

[5] MacDonald, Ian G. *Symmetric Functions and Hall Polynomials.* Oxford Mathematical Monographs, 1995.