SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Ellipser från Apollonius till Newton

av

Mikael von Delwig

2023 - K6

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Ellipser från Apollonius till Newton

Mikael von Delwig

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Torbjörn Tambour

2023

Sammanfattning: I denna uppsats kommer du att få följa ellipsen historia från antiken fram till början på 1700 talet. När Apollonius gav ellipsen sitt namn under 200 talet f.kr fann han inget användningsområde för sin geometriska figur. Med tiden kom matematiker att upptäcka att ellipsen var mer intressant än man från början kunnat ana. När Rene Descartes under 1600 talet införde ett rätlinjigt koordinatsystem och kunde förvandla ellipsen från ett geometriskt objekt till ett algebraiskt objekt visade det sig att ellipsen och övriga kägelsnitt svarar mot kurvor som ges av andragradsekvationer. Johannes Kepler kunde på 1600 talet utifrån Tycho Brahes astronomiska mätdata visa att planetbanorna var ellipser med solen i ena brännpunkten. Därefter kunde Isac Newton utgående från att planetbanorna var ellipser räkna på krafter mellan himlakropparna och komma fram till den moderna gravitationslagen. Detta är minsann inget dåligt bidrag av en geometrisk figur som man från början trodde saknade viktiga applikationer. Jag gör i denna uppsats inte anspråk på att ha fått med allt om ellipsens historiska utveckling, men jag hoppas ändå på att ha fått med de viktigaste delarna av ellipsens matematiska historia.

Abstract: In this work you will be able to follow the history of the ellipse from antiquity to the beginning of the 18th century. When Apollonius gave the ellipse its name in the 2nd century BC, he found no application for his geometric figure. Over time, mathematicians came to discover that the ellipse was more interesting than they initially thought. When Rene Descartes introduced a rectangular coordinate system in the 17th century and was able to transform the ellipse from a geometric object into an algebraic object, it turned out that the ellipse and other conic sections correspond to curves given by quadratic equations. In the 17th century, Johannes Kepler was able to show, based on Tycho Brahe's astronomical measurement data, that the planetary orbits were ellipses with the sun at one focal point. After that, Isaac Newton was able to calculate the forces between the celestial bodies based on the fact that the planetary orbits were ellipses and arrive at the modern law of gravitation. This is certainly not a bad contribution of a geometric figure that was initially thought to lack important applications. In this work, I do not claim to have covered everything about the historical development of the ellipse, but I still hope to have covered the most important parts of the mathematical history of the ellipse.

Innehållsförteckning

1. Inledning. Sid: 3.

2. Geometri. Sid: 4.

2.1. Arkimedes (287-212 f.Kr.) och arean av parabelsegment. Sid: 4

2.2. Apollonius (250-175 f.Kr.) och Kägelsnitten. Sid: 5.

3. Algebra. Sid: 6.

3.1. Muhammad ibn Musa al-Khwarizmis (780-850) och andragradsekvationer. Sid: 6.

3.2. Alhazen (965–1039) och optik. Sid: 7.

3.3. Omar Khayyam (1048 - 1131) Kägelsnitt och lösningar till tredjegradsevationer. Sid: 7.

3.4. Rene Descartes (1596 – 1650) koordinatsystem och andragradsekvationer. Sid: 9.

3.5 Johannes Kepler (1571 – 1630) och ellipsens brännpunkter. Sid: 10.

3.6 Kepler och planeternas omloppsbanor i form av ellipser. Sid: 13.

3.7 Algebraisk härledning av ellipsens ekvation. Sid: 14.

3.8 Ellipsen som en linjärtransformation av en cirkel. Sid: 15.

4. Differential och integralkalkyl. Sid: 16.

4.1. Beräkning av ellipsens area. Sid: 17.

4.2. Beräkning av ellipsens omkrets. Sid: 18.

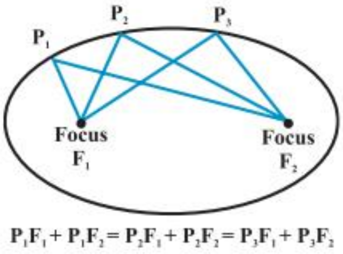
4.3 Newton härleder Keplers lagar. Sid: 20.

5. Käll- och litteraturförteckning. Sid: 27

6. Bilagor. Sid: 28.

1.Inledning

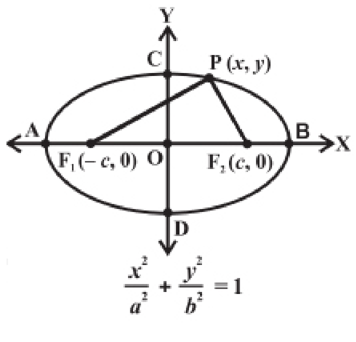
Innan vi börjar ellipsens historiska resa är det väsentligt att beskriva vad en ellips är. Ordet ellips kommer från grekiskans elleipsis som betyder utelämnande eller uteslutande. Det syftar på att en viss sträcka är lite kortare än en viss annan sträcka som den jämfördes med. Definitionen av en ellips är en plan kurva som består av alla punkter vilkas avstånd till två givna punkter har konstant summa det vill säga $P_1F_1 + P_1F_2 = P_2F_1 + P_2F_2.$ $(figur\ 1)$. De två givna punkterna kallas för ellipsens brännpunkter eller focus. En cirkel är ett specialfall av en ellips där de två givna punkterna sammanfaller och en ellips kan ses som en tillplattad cirkel.

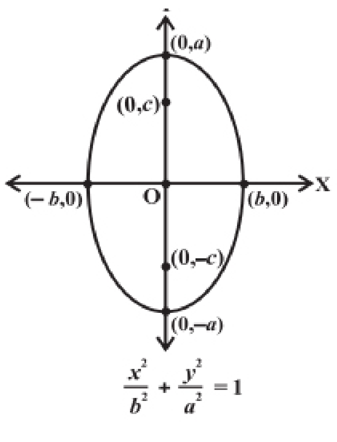


Figur 1 (Ellipse: Definition, Equations, Derivations, Observations, Q&A (toppr.com))

Ellipsen svarar mot en kurva som ges av andragradsekvationer och en ellips med medelpunkt i origo har i koordinater ekvationen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, där a > b > 0. Ellipsens axlar är de två sträckor som har ändpunkterna (a, 0) och (−a, 0) respektive (0, b) och (0, −b). Halvaxlarnas längder är talen a och b. Den axel 2a som är längst kallas för storaxel och den kortaste axeln 2b kallas för lillaxel. Om ellipsens axlar istället är de två sträckor som har ändpunkterna (0, a) och (0, -a) respektive (b, 0) och (-b, 0) har en ellips med medelpunkt i origo ekvationen: $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$

Om brännpunkterna ligger på x axeln ligger punkterna i (c, 0) och (−c, 0) och om brännpunkterna ligger på y axeln ligger de i (0, c) och (0, -c.). (figur 2).



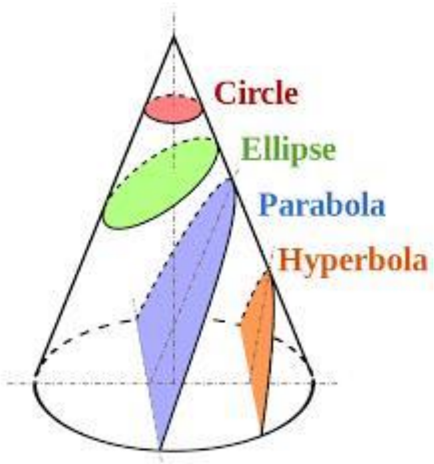


Figur 2(Ellipse: Definition, Equations, Derivations, Observations, Q&A (toppr.com))

Excentriciteten ε = c/a anger hur långt brännpunkterna ligger från varandra. Cirkeln är ett specialfall av ellipsen, nämligen när a = b; då är excentriciteten 0. **(**Ellipse - Wikipedia)

2. Geometri

Ellipsen är tillsammans med hyperbeln och parabeln geometriska figurer, så kallade koniska sektioner eller kägelsnitt. En kägla är en äldre benämning på en kon och kägelsnitten fås genom att skära snitt genom en kon.



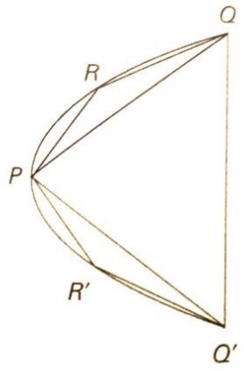
Figur 3(Conic section - Simple English Wikipedia, the free encyclopedia)

Ellipsens matematiska historia börjar med geometri och en av de första man känner till som arbetade med kägelsnitt var den grekiske matematikern Menaichmos (ca 380–322 f.Kr). Han arbetade med kubens fördubbling och detta arbete ledde honom till att studera ellipsen, hyperbeln och parabeln. Även den store grekiske matematikern Euklides (ca 325 – 265 f.Kr.) arbetade delvis med kägelsnitt.(Tengstrand, 2020, s.12).

2.1 Arkimedes (287-212 f.Kr.) och arean av parabelsegment.

En annan grekisk matematiker som arbetade med kägelsnitt var Arkimedes (287-212 f.Kr.) och han var en av de största matematikerna under antiken. Arkimedes var ifrån Syrakusa i Italien och var son till astronomen Phidas. Det är troligt att Arkimedes i sin ungdom tillbringade tid i Alexandria men han verkade i Syrakusa större delen av sitt liv. Han var också aktiv i försvaret av Syrakusa mot Romarna och han dödades då Marcellus styrkor invaderade Syrakusa år 212 f.Kr. Arkimedes gjorde banbrytande insatser inom matematiken. Han bestämde bland annat area och volymen av en sfär och arean av ett parabel segment, och vi kommer nedan visa det sistnämnda. (Katz,2009, s.98)

I sitt arbete Parabelns kvadratur beräknade Arkimedes arean som begränsas av denna kurva med hjälp av trianglar och Eudoxos uttömningsprincip. I vart och ett av de två parabelsegmenten PRQ och PR´Q´ i figuren nedan konstruerade han en triangel PRQ och PR´Q´. Han upprepar nu processen och gör motsvarande konstruktioner för de fyra nya segment som bildas och så vidare.



Figur 4 (Katz,2009, s.109)

I varje steg blir summan av de nya trianglarnas areor lika med ¼ av de föregående triangelareorna. Desto fler steg som tas, desto mer närmar sig summan av areorna parabelsegmentets area. Arkimedes formulerar och bevisar nu motsvarigheten till formeln för summan av en geometrisk talföljd

$a + \frac{1}{4}a + \left(\frac{1}{4}\right)^2 a + \cdots + \left(\frac{1}{4}4\right)^n a + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n \mathrm{a} = \frac{4}{3}a$, där a är arean av triangeln PQQ´.

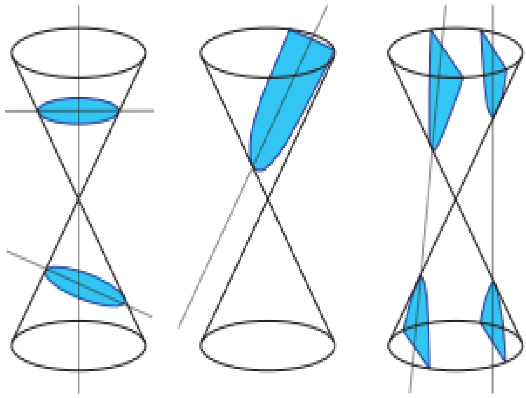
Med detta resultat kan han nu med hjälp av Eudoxos uttömningsprincip visa att arean av parabelsegmentet PQQ` är lika med 4/3 av arean av triangeln PQQ`. (Katz,2009, s.109-110) ,(Stillwill,2001, s.9).

2.2 Apollonius (250-175 f.Kr.) och Kägelsnitten.

Den matematiker under antiken som är mest känd för att arbeta med kägelsnitt är Apollonius. Han föddes i Perga som är en stad i Turkiet. De mest tillförlitliga uppgifterna om honom hittar man i inledningen till böckerna i hans verk om kägelsnitt, Konica. Där kan man läsa att han studerade i Alexandria och att han också var lärare i Alexandria. Konica skrevs omkring 200 f.kr. och innehåller sju böcker om kägelsnitt, det finns också en åttonde bok men den existerar bara som ett utkast och man vet inte om den fullbordats. Konica är skrivet i samma stil som Euklides Elementa och Apollonius refererar också ofta till Elementa, men i Konica är framställningen mer komplicerad och innehållet mer avancerat. Apollonius teori om kägelsnitt är omfattande och nästan heltäckande. Han behandlar tangenter och normaler och han studerar problem om maxima och minima. Några applikationer för sina teorier om kägelsnitten redogör inte Apollonius för. (katz, 2009, s.115).

Apollonius intresserade sig också för astronomi och han delade Aristoteles världsbild om att himlakropparna rör sig i cirklar. Han kunde inte ana att hans ellipser senare skulle komma att beskriva planeternas omloppsbanor. Den grekiska astronomen Aristarchos förordade ca 290 f.kr. en heliocentrisk världsbild men denna världsbild kom att falla i glömska och i stället blev det Ptolemaios (ca 90 – 180) geocentriska världsbild som kom att dominera lång tid framöver. Man låste fast sig i ett tänkande om cirklar och gjorde allt för att få världsbilden att stämma med observationer och beräkningar med planetbanor i cirklar. Att tänka på ellipser i stället för cirklar var det ingen som gjorde. Även när Copernicus långt senare år 1543 presenterade sin heliocentriska världsbild tänkte han sig planetbanorna som cirklar, en epicykel modell med 72 små cirklar som snurrade i otakt och som stämde bra med beräkningar. (Mazer,2010, s.10-13), (Bögvad&Vaderlind,2017, s. 269).

Ett kägelsnitt är en kurva som uppstår då ett plan skär en dubbelkon. I bilden nedan till vänster skär det undre planet dubbelkonen längs en ellips och i det övre planet skärs dubbelkonen längs en cirkel. I mitten bilden visas en parabel. Då är planet parallellt med en av konens generatriser. Bilden till höger visar hyperbler. Det var Apollonius som införde dessa benämningar på kägelsnitten. (Tengstrand, 2020, s. 249).



Figur 5 (Tengstrand,2020, s. 249)

3. Algebra

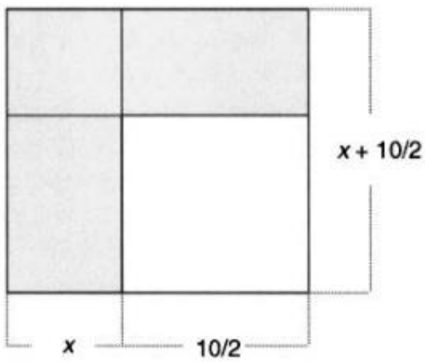
Vi hoppar nu fram i historien om kägelsnitt och ellipsen och hamnar i perioden 700 – 1300 då det skedde en vetenskaplig utveckling i de arabiska länderna runt medelhavet. Texterna från antiken översattes till arabiska och det är med hjälp av araberna vi idag har tillgång till många av Arkimedes, Euklides och Apollonius texter. Av Apollonius sju böcker om kägelsnitt, Konica, så är det tre av dessa som vi endast känner till genom arabiska översättningar som i sin tur översatts till latin. (Tengstrand,2020, s.262).

3.1. Muhammad ibn Musa al-Khwarizmis (780-850) och andragradsekvationer.

Det är just i de arabiska länderna runt år 700 som algebran börjar att utvecklas och den kopplades ofta samman med geometri. Det viktigaste namnet här är Muhammad ibn Musa al Khwarizmi (780-850) som utvecklade algebraiska metoder utifrån Euklidisk geometri. Han översatte antika vetenskapliga texter till arabiska och skrev egna verk inom matematik och astronomi.

Han verkade i Bagdad och skrev år 825 boken Hisab al-jabr w'al-muqabalah som betyder ungefär beräkning med komplettering och balansering. Ordet algebra kommer från al-jabr i bokens namn. Bokens idé var att fungera som ett hjälpmedel vid handel och arvskifte, men problemen formuleras på ett abstrakt sätt, vilket betonar metodernas generalitet. I boken har Al Khwarizmi en genomgång av metoder för att lösa ekvationer av första och andra graden. Ellipsen och övriga kägelsnitt är som bekant andragradsekvationer så man kan säga att Al Khwarizmi arbetade med kägelsnitt även om han själv inte visste om detta. (Tengstrand,2020,s. 278).

Vi kommer här följa Al Khwarizmis lösning till en andragradsekvation som med modern notation skrivs $x^2 + 10x = 39$. Enligt figuren nedan är den gråa arean $x^2 + 10x$ och detta är enligt ekvationen lika med 39. Lösningen beskriven av Al Khwarizmi går ut på att finna arean av den yttre kvadraten som blir $\left(\frac{10}{2}\right)^2 + 39 = 64$, och sedan ta dess kvadratrot för att finna längden på yttre kvadratens sida vilken i vårt fall blir 8. Då är x + 5 = 8 och lösningen till ekvationen blir x = 3. (Mazer,2010, s. 63-64)



Figur 6 (Mazer, 2010, s.63)

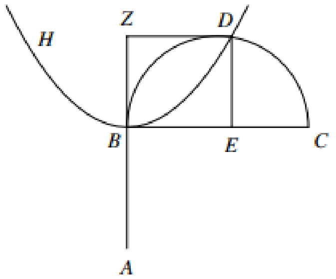
3.2 Alhazen (965–1039) och optik.

Alhazen eller Abu Ali al-Hasan ibn-al-Haythnam som var hans fullständiga namn föddes i Basra i Irak. Namnet Alhazen är en latinisering av al-Hasen. Alhazen gav ut många arbeten om både fysik och matematik. Ett problem som går under namnet Alhazens problem gäller optik och kan formuleras på följande sätt: En ljuskälla och en sfärisk spegel är givna. Bestäm den punkt på spegeln där ljuset reflekteras till en observatör. Detta Problem kan lätt formuleras geometriskt och leder då till en fjärdegrads-ekvation. Det formulerades från början av Ptolemaios och Alhazen löste det i den femte delen i hans stora bok om optik Kitab al-Manazir. Han använder sig av geometriska metoder där kägelsnitt spelar en avgörande roll. (Katz,2009, s.284), (Tengstarnd,2020, s.26)

3.3. Omar Khayyam (1048 - 1131) Kägelsnitt och lösningar till tredjegradsevationer.

En annan arabisk matematiker Omar Khayyam (1048 – 1131) använde sig av kägelsnitt för att konstruera lösningar till tredjegradsekvationen. (Tengstrand,2020, s. 262). Khayyam föddes i Iran men flyttade år 1070 till Samarkand och det var där han skrev berömda verk om astronomi och matematik. Han var också en poet. I sitt arbete om algebra Maqalah fi al-jabr w'al-muqabalah visar han hur man kan lösa tredjegradsekvationer geometriskt med hjälp av kägelsnitt. Hans lösningar visar på stora kunskaper om geometrin i Apollonius konica. Khayyam klassificerar tredjegradsekvationerna på liknande sätt, som Al Khwarizmi klassificerar sina andragradsekvationer, men antalet fall blir mycket större.

Vi skall titta på det första fallet, som Khayyam formulerar ”en kub och sidorna är lika med ett tal”. Vi ska se på lösningen av den trinomiala ekvationen $x^3 + \mathrm{p}x = q$. (Tengstrand,2020, s.281)



Figur 7 (Tengstrand, 2020, s.281)

Vi kommer här visa Khayyams svårgenomträngliga geometriska metod med modern notation. Vi skriver ekvationen $x^3 + \mathrm{p}x = q$ där q och p är positiva konstanter. Figurens sträcka AB är sidan i en kvadrat som har arean p, så alltså är AB = $\sqrt{p}$. Sträckan BC är höjden i rätblocket som har volymen q och basytan p. Då är sträckan BC= q/p. Vi inför nu ett koordinatsystem med origo i punkt B och med den räta linjen BC som x-axel och den räta linjen AZ som y-axel.

Vi tar hjälp av cirkelns allmänna ekvation:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

Vi kan nu beskriva Khayyams halvcirkel som:

$(x - \frac{\mathrm{q}}{\mathbf{2p}})^2 + y^2 = \frac{q^2}{\mathbf{4}p^4}$ där y ≥ 0.

Parabeln kan beskrivas med parametern AB = $\sqrt{p}$ vilket innebär att ekvationen kan uttryckas som

$\mathrm{y}\sqrt{p} = x^2$.

Om vi nu kombinerar ekvationerna får vi att

$x^2 - \frac{\mathrm{q}}{\mathbf{p}}x + \frac{1}{\mathbf{p}}\, x^4 = 0.$

Vi söker skärningspunkten E där x > 0. Vi dividerar varje term med x och får efter om skrivning att

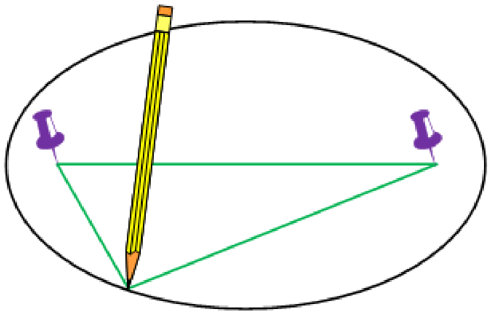
$$x^3 + px = q.$$

Punkten E:s abskissa x=EB är då lösningen till vår ekvation.

3.4 René Descartes (1596 – 1650), koordinatsystem och andragradsekvationer.

Vi hoppar nu fram några år i historien om ellipsen och hamnar på 1600 talet. Rene Descartes föddes 1596 i La Haye i Frankrike och var både filosof och matematiker. Descartes fick ett arv efter sina föräldrar som gjorde honom ekonomiskt oberoende under hela sitt liv vilket gjorde att han kunde ägna sig åt vetenskapen, men han deltog också under två år som officer i det trettioåriga kriget. Som filosof är han känd för de berömda orden ”Cogito, ergo sum”, som kan översättas med ”Jag tänker alltså är jag till”. År 1649 bjöds han in till Stockholm av Drottning Kristina. Under sin vistelse i Sverige vantrivdes han med Drottning Kristinas mycket tidiga morgonföreläsningar och med det kalla klimatet, och han drabbades av lunginflammation och dog i Stockholm 1650. Han begravdes först på Adolf Fredriks kyrkogård i Stockholm men kvarlevorna har senare flyttades till Paris och finns numera i Saint-Germain-des-Pres.

Hans bok Discours de la méthode kom ut 1637 och till den lade han tre olika appendix; La Dioptrique, Les Météores och La Géométrie. Den tredje, La Géométrie, är en mycket viktig bok i matematikens historia. Descartes kopplar där ihop geometri och algebra. Geometriska konstruktioner och teorem formuleras algebraiskt och algebraiska samband tolkas geometriskt. Boken består av tre delar. I den första diskuterar Descartes konstruktioner med passare och linjal och den börjar med att visa hur de fyra räknesätten och rotutdragning görs geometriskt. I andra delen tar Descartes upp kurvor och den tredje delen ägnas åt ekvationslösning där bland annat tredje- och fjärdegradsekvationerna behandlas. (Tengstrand, 2020, s. 78). Descartes resultat ger också en beskrivning av hur man kan rita en ellips med hjälp av ett snöre. Vi påminner oss om att definitionen av en ellips är en plan kurva som består av alla punkter vilkas avstånd till två givna punkter har konstant summa. Vi fäster ett snöre i de två brännpunkterna. Därefter sträcker man snöret och placerar pennan i en punkt på pappret. När pennan flyttas runt med snöret sträckt bildas en ellips. Se figur 8 nedan.



Figur 8 (Draw an Ellipse, how to draw an ellipse (cutoutfoldup.com))

Descartes införde ett rätvinkligt koordinatsystem i kägelsnitten, detta ledde till att de geometriska figurerna kunde beskrivas med symboler och på så sätt kunde ett geometriskt problem överföras till ett algebraiskt problem. Kägelsnitten kunde nu även ritas på ett enkelt sätt med hjälp av koordinatsystemet. Descartes upptäckte att parabelns geometriska form kunde avbildas på ett algebraiskt uttryck $y = x^2$. Därmed hade parabeln genomgått en förvandling från ett geometriskt objekt till ett algebraiskt objekt. Descartes visade att ellipsen (inklusive cirkeln) och de övriga kägelsnitten parabeln och hyperbeln var andragradsekvationer.

Man definierar andragradskurvor som mängden av alla lösningar (x,y) till en ekvation

$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$, där a, b och c inte får vara 0 samtidigt.

Det är dock inte så att alla dessa andragradsekvationer har lösningar i form av ellipser, parabler eller hyperbler. Lösningsmängden till $x^2 - y^2 = 0$ eller $x^2 = 4$ är ett par korsade eller parallella linjer. För $y^2 = 0$ är det endast en enda linje. Vi kan också få en enda punkt som i $x^2 + y^2 = 0$. Man kan också få tomma mängden som lösningsmängd till exempel i $x^2 + 1 = 0$. Dessa alla otypiska lösningsmängder kallas degenererade kurvor. (Bögvad&Vaderlind,2017, s. 279).

Men om vi bortser från alla otypiska lösningar som linjer, punkter eller ingen lösning alls så är andragradskurvor kägelsnitten ellipser, parabler eller hyperbler. En parabel är lösningarna (x,y) till ekvationen $y = ax^2$ och för en hyperbel är det $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.Med hjälp av Diskriminanten $D = b^2 - 4ac$ kan man från ekvationen $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ se vilket typ av kägelsnitt som kurvan motsvarar. Det blir en ellips (cirkel) om $D < 0$, en parabel om $D = 0$ och en hyperbel om $D > 0$.

3.5 Johannes Kepler (1571 – 1630) och ellipsens brännpunkter.

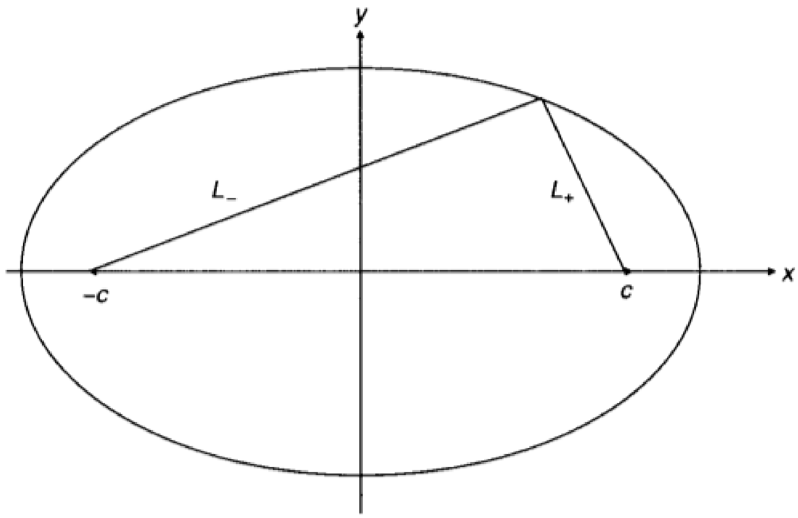
Det var Johannes Kepler som upptäckte att planetbanorna var ellipser med hjälp av Tycho Brahes (1546 – 1601) omfattande astronomiska mätdata insamlade på Brahes observatorium på Ven. Historien om Tycho Brahes omfattande mätdata börjar egentligen delvis år 1565 med att den danske kungen Fredrik ll halkar på en bro och faller ned i vattnet under bron. Under 1500 talet var simkunnigheten låg och att falla ned i djupt vatten var för de flesta människor livsfarligt. Tycho Brahes farbror och styvfar Jörgen Brahe som står bredvid kungen på bron hoppar ned i vattnet och räddar Fredrik ll från att drunkna men Jörgen Brahe omkommer själv i lunginflammation i sviterna av räddningen. Kungen belönar därefter familjen Brahe och kungen erbjuder sig senare att bekosta ett astronomiskt observatorium på ön Ven åt Tycho Brahe. (Mazer, 2010, s.256). Historien är full av tillfälligheter och man kan undra om Kepler skulle ha upptäckt att planetbanorna var ellipser och om Newton skulle ha upptäckt gravitationslagarna om inte kung Fredrik ll halkat på bron den där dagen år 1565.

Tycho Brahe föddes i Skåne som då var en del av Danmark. Han var en mycket god instrumentbyggare och en noggrann, systematisk observatör och han samlade in astronomiska mätdata under en period av 21 år på sitt observatorium på Ven. Han kunde på basis av sina mätdata visa att den tidigare geocentriska världsbilden inte kunde stämma. Tycho skapa en egen modell med jorden i mitten med solen och månen roterande runt jorden och de övriga planeterna roterande runt solen. Problemet för Tycho var att inte heller hans modell stämde särskilt väl med de mätdata han samlat in. Tycho visste att hans styrka inte var som teoretiker och att han behövde hjälp för att räkna fram att hans världsbild var korrekt med hjälp av de mätdata han samlat in. Han anställde därför matematikern Johannes Kepler år 1600 som sin assistent i hopp om att denne utifrån den insamlade mätdatan skulle bevisa att Tychos världsbild var korrekt och göra honom berömd.

Johannes Kepler var född i Würtenberg och kom att studera aritmetik, geometri, astronomi och musik vid universitet i Tübingen. Han arbetade som matematiklärare i Schweiz innan han anställdes som assistent till Tycho Brahe och började arbeta med Tycho Brahes mätdata. Redan innan Brahes död 1601 hade Kepler insett att Brahes världsmodell var felaktig, och Kepler var inne på en heliocentrisk modell. Då Brahe dog ärvde Jan Tegnagel som var gift med Brahes dotter hans kvarlåtenskap och all mätdata. Kepler lyckades behålla mätdata om planeten Mars utan att Tegnagel märkte detta vilket innebar att Kepler kunde fortsätta att arbetet med att analysera mätdata under 2 år efter Brahes död. Jan Tegnagel upptäckte efter 2 år att det saknades mätdata om Mars och begärde tillbaka denna från Kepler. (Mazor,2010, s.259)

Nu följer några år för Kepler då han inte har tillgång till Brahes mätdata och då arbetar i stället Kepler med optik. Han studerar bland annat ljusbrytning, ögats konstruktion och han konstruerar en kikare. Kepler bygger vidare på Apollonius och al-haythams arbeten och arbetar nu också med ellipser. Kepler upptäckte att summan av avståndet från de båda brännpunkterna F_1och F_2 till varje punkt på ellipsen är lika med längden på ellipsens storaxel.

Denna upptäckt gjorde Kepler utan kartesiska koordinater, utan ekvation för ellipsen och utan algebraiska standardoperationer. Kepler gav också brännpunkterna namnet fokus.(Mazer,2010, s. 150)



Figur 9 (Mazer, 2010, s.154)

En punkt uppfyller alltså $L_+ + L_-$ = 2a. Vi påminner oss också om att definitionen av en ellips är en plan kurva som består av alla punkter vilkas avstånd till två givna punkter har konstant summa.

Vi ska nu visa att punkterna på kurvan $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ uppfyller sambandet $L_+ + L_-$ = 2a. För en horisontell ellips med centrum i origo gäller att a > b > 0 och brännpunkterna F ligger på x-axeln i punkterna (c,0) och (-c,0) med $c^2 = a^2 - b^2$.

$L_+ + L_- = \sqrt{(x - c)^2 + y^2} + \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$.

Från ellipsens ekvation fås $y^2 = b^2 \left[1 - (\frac{x}{a})^2\right]$.

$L_+ + L_- = \sqrt{(x - c)^2 + b^2 \left[1 - (\frac{x}{a})^2\right]} + \sqrt{(x + c)^2 + b^2 \left[1 - (\frac{x}{a})^2\right]}$.

$= \sqrt{x^2 - 2xc + c^2 + b^2 - (\frac{bx}{a})^2} + \sqrt{x^2 + 2xc + c^2 + b^2 - (\frac{bx}{a})^2}$.

Vi har sedan tidigare att $c^2 = a^2 - b^2$ och vi substituerar c^2 och får då:

$$L_+ + L_- = \sqrt{x^2 - 2xc + a^2 - (\frac{bx}{a})^2} + \sqrt{x^2 + 2xc + a^2 - (\frac{bx}{a})^2}$$

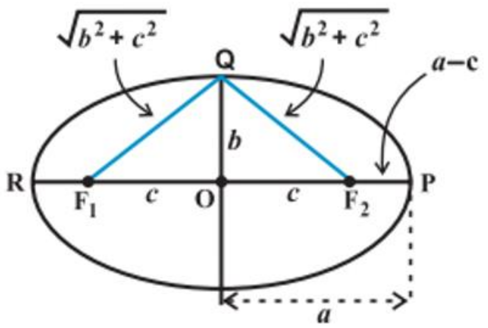
$$= \sqrt{\left[1 - (\frac{b}{a})^2\right] x^2 - 2xc + a^2} + \sqrt{\left[1 - (\frac{b}{a})^2\right] x^2 + 2xc + a^2}$$

Från $c^2 = a^2 - b^2$ får vi att $1 - (\frac{b}{a})^2 = (\frac{c}{a})^2$ och om vi substituerar in detta fås:

$$L_+ + L_- = \sqrt{(\frac{c}{a})^2 x^2 - 2xc + a^2} + \sqrt{(\frac{c}{a})^2 x^2 + 2xc + a^2}$$

$$= \sqrt{(a - \frac{c}{a} x)^2} + \sqrt{(a + \frac{c}{a} x)^2} = (a - \frac{c}{a} x) + \left(a + \frac{c}{a} x\right) = 2a$$

(Mazer,2010, s. 155).



Figur 10 (Ellipse: Definition, Equations, Derivations, Observations, Q&A (toppr.com))

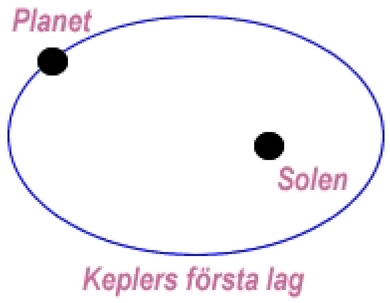
Att summan av avståndet från de båda brännpunkterna F_1 och F_2 till varje punkt på ellipsen är lika med längden på storaxeln 2a kan också förstås i figur 10 ovan. I punkten P gäller att

$F_1P + F_2P$ = c + a + (a–c) = 2a.

Punkterna F_1 och F_2 kallas som sagt brännpunkter. Anta att vi i figur 10 har tänt ett ljus i brännpunkten samt försilvrat insidan av ellipsen. Ljusstrålarna studsar då mot ellipsens insida och går därefter allihop genom den andra brännpunkten som blir väldigt ljus. Egenskapen används i geometrisk optik och elliptiska speglar, en ljusstråle som går genom en av brännpunkterna när den reflekteras passerar genom den andra brännpunkten. Denna egenskap har utnyttjats också inom akustik, bland annat i St. Paulskatedralen i London och i Capitol Hill i Washington. I de båda byggnaderna finns ett ” whispering gallery” som är ett stort rum med ellipsformade väggar. Står man vid den ena brännpunkten kan man avlyssna ett samtal som förs i den andra brännpunkten. (Bögvad&Vaderlind,2017, s. 268).

3.6 Kepler och planeternas omloppsbanor i form av ellipser.

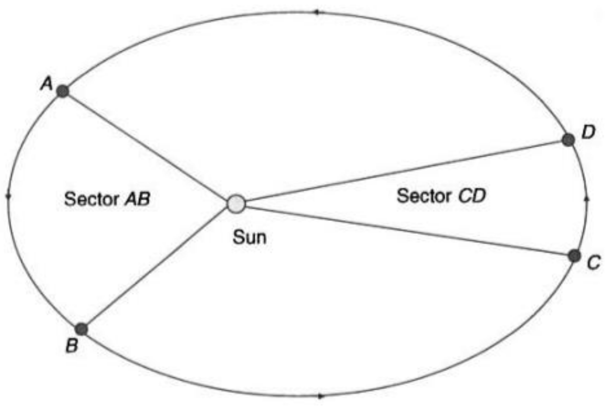
Efter några år av arbete med optik förhandlar Kepler med Jan Tegnagel om att återfå Brahes mätdata om Mars. Jan Tegnagel som insett att han själv inte har någon större nytta av dessa mätdata går med på att överlämna dessa till Kepler och han kan fortsätta att bygga sina teorier men nu är Kepler också utrustad med kunskaper om ellipser efter sitt arbete om optik. Han koncentrerar sitt arbete på att bestämma banan för planeten Mars och han upptäcker att Mars rör sig i en elliptisk bana med solen i ena brännpunkten (Keplers första lag).Kepler upptäcker också att sträckan från solen till Mars på lika långa tider genererar områden med lika stora areor (Keplers andra lag). Upptäckten publiceras i verket Astronoma Nova 1609. (Mazor,210, s259), (Tengstrand,2020,s.75). Assistenten Kepler hjälpte aldrig sin uppdragsgivare Tycho Brahe att bli världsberömd för sin världsbild men han gjorde honom i stället världsberömd för sina ovärderliga mätdata. Man kan undra om Kepler hade kommit på att planetbanorna är ellipser om han inte blivit fråntagen Brahes mätdata under några år och då arbetat med optik och ellipser.



Figur 11 (Forskare och Naturvetenskapsmän (robotbyn.se))

Keplers andra lag beskriver alltså det förhållande som finns mellan planeternas hastighet på ellipsen. Om en planet är på en punkt A på ellipsen och sedan flyttar sig till en punkt B på tiden t så bildas en areasektor AB, den arean är alltid lika stor oavsett var på ellipsen man befinner sig för samma tid t. (se figur 12 nedan) Areasektorn AB är med andra ord lika stor som den areasektor CD som bildas då planeten flyttar sig från punkt C på ellipsen till punkt D på tiden t. Planeten rör sig alltså snabbare när den är närmare solen. (Mazer ,2010, s.261).

Galileo Galilei (1564 - 1642) tog ställning för Keplers heliocentriska världsbild och han arbetade också med kägelsnitt och 1638 beskrev han kaströrelsen som en parabel.



Figur 12 (Mazer,2010, s.261)

Kepler fortsatte med sitt vetenskapliga arbete. Han utvecklade Astronoma Nova och publicerade 1619 Harmonices mundi. Här finns Keplers tredje lag som anger förhållandet mellan en planets omloppstid och planetbanans storaxel. Keplers tredje lag säger att uttrycket $\frac{T^2}{r^3}$ ger samma konstanta värde för alla planeter som går i bana runt solen, där T är planetens omloppstid och r är halva storaxeln i ellipsen. De sista åren av Keplers liv präglades av sjukdom och problem och han dog i Regensburg 1630. Han begravdes på den lokala kyrkogården där, men kyrkogården förstördes under trettioåriga kriget förmodligen av en svensk här. Ingenting återstår av Keplers grav. (Tengstrand,2020, s.74-75).

3.7 Algebraisk härledning av ellipsens ekvation.

Med hjälp av Rene Descartes algebra kan vi nu härleda ellipsens ekvation algebraiskt. Vi har under 3.5 visat med hjälp av ellipsens ekvation att en punkt P på ellipsen uppfyller $|PF_1| + |PF_2| = 2a$. Vi går nu från andra hållet och härleder ellipsens ekvation med hjälp av att $|PF_1| + |PF_2| = 2a$.

Vi har sedan tidigare att $|PF_1| + |PF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$, vilket kan skrivas om som:

$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$.

Nu kvadrerar vi båda sidor:

$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + ((x-c)^2 + y^2) \leftrightarrow$

$\leftrightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + ((x-c)^2 + y^2) - ((x+c)^2 + y^2)$

$= 4a^2 + (x^2 - 2xc + c^2) - (x^2 + 2xc + c^2) = 4a^2 - 4xc.$

Nu delar vi med 4:

$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 - 4xc.$

Vi kvadrerar igen:

$a^2((x-c)^2 + y^2) = (a^2 - xc)^2 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow a^2x^2 - x^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 \leftrightarrow$

$\leftrightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$

Vi har sedan tidigare $c^2 = a^2 - b^2$ vilket kan skrivas $b^2 = a^2 - c^2$. Vi substituerar $a^2 - c^2$:

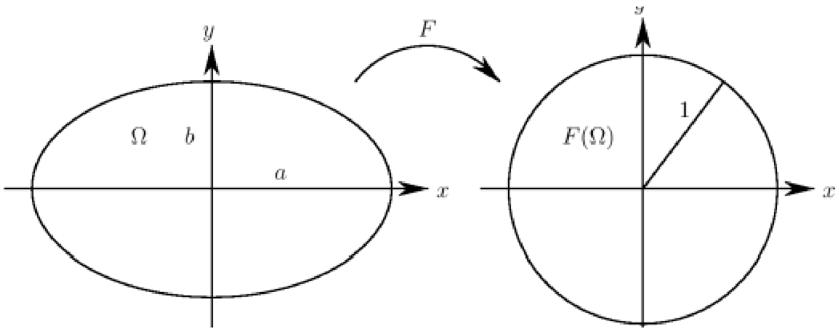
$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2.$

Vi delar med a^2b^2:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ Ellipsens ekvation

(Bögvad&Vaderlind,2017, s. 275).

3.8 Ellipsen som en linjärtransformation av en cirkel.



Figur 13 (Mazer,2010, s. 153)

Vi ska visa att bilden av enhetscirkeln under en viss linjär transformation är en ellips med ekvationen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.Vi börjar dock med att bestämma ellipsskivans area.

Vi har en linjär avbildning från $R^2\ till\ R^2$ med avbildningsmatrisen A, där determinanten av A är nollskiljd. I linjär algebra visas att en kvadrat avbildas på en parallellogram när man gör en linjär transformation A och att arean ändras med faktorn |det A|. Detta gäller då även för områden som kan approximeras med kvadrater, speciellt för cirklar och ellipser. Vi hoppar här över det gränsvärdesresonemang som behövs för att det här argumentet ska hålla.

Då gäller:

$|Det\ A| = \frac{Cirkelskivans\ area}{Ellipsskivans\ area}$.

Vi låter Ω.vara ett område innanför och på ellipsen med halvaxlar a och b.

Vi definierar en linjär avbildning F från $R^2\ till\ R^2$ som

.

$F\binom{x}{y} = A\binom{x}{y} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}\binom{x}{y} = \binom{\text{x/a}}{\text{y/b}}$, $\begin{vmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{vmatrix} = \frac{1}{ab}$.

Då gäller att $u^2 + v^2$ =1 i de nya koordinaterna (u,v) = $\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$ det vill säga F(Ω.) är en enhetscirkel.

$\frac{\pi}{Arean\ av\ \Omega} = \frac{Cirkelskivans\ area}{Ellipsskivans\ area} = |Det\ A| = \frac{1}{ab}$, vilket ger att arean av Ω är $\boldsymbol{\pi ab}$.

När vi ser på ellipsen som en linjär avbildning av enhetscirkeln kan vi också bestämma ellipsens ekvation utifrån cirkelns ekvation. I figur låter vi ellipsen avbildas av den linjära avbildningen F på enhetscirkeln.

Vi låter($\tilde{x}, \tilde{y}$) vara en punkt på cirkeln som är avbildad av matrisen F i en punkt (x, y) på en ellips:

$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$

Tillämpa F i punkten (x,y) på ellipsen vilket ger motsvarande punkt på cirkeln, ($\tilde{x}, \tilde{y}$):

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{a} \\ \frac{y}{b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

Då punkten ($\tilde{x}, \tilde{y}$) ligger på enhetscirkeln är cirkelns ekvation $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 1$. Vi har att

$\begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{a} \\ \frac{y}{b} \end{pmatrix}$ vilket nu ger att $\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$. Ellipsens ekvation.

(Mazer,2010,s. 152-153)

4. Differential och integralkalkyl

Under senare hälften av 1600-talet började differentialkalkylen etableras. Genombrottet skedde med Leibniz och Newton under 1680 talet. Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716) föddes i Leipzig och började redan som 14 åring på Leipzig universitet. Där läste han matematik och filosofi. Han avlade magisterexamen i juridik och doktorsexamen i filosofi. Matematik var bara en del av Leibnitz verksamhetsfält och han är troligen mest känd som filosof. Leibnitz utarbetade senare och oberoende av Newton sin version av differentialkalkylen. Han var dock först med att publicera sin upptäckt. Isaac Newton (1643 – 1727) var dock först med att utarbeta en fullständig kalkyl men var väldigt sen med att publicera sina resultat. Hans optiska arbete, Optics, som baseras på arbeten under 1670 talet kom i tryck först 1703. Det är först i en bilaga till detta arbete som man finner en mer utförligare beskrivning av integraler och derivator vilka han då arbetat med i decennier. Detta ledde till ett stort bråk mellan Newton och Leibniz om vem som var först med differentialkalkylen.

Det var dock Leibniz beteckningar som kom att dominera matematiska arbeten framöver och det var bara i England som man under en tid använde Newtons beteckningar. Leibniz publicerade sina första verk om integraler och derivator redan 1684. Newtons arbeten om integraler och derivator var då till viss del kända genom brev och rykten. De första utkasten kom med Principia 1687. Det är Leibniz symboler för integral som vi använder idag. Även om Leibniz och Newton behandlade samma område samtidigt hade de lite olika utgångspunkter. Newton tolkade differentialen som en förändring under mycket litet tidsintervall och derivaten som en hastighet. Han uppfattade tid och rum som absoluta enheter. Leibniz däremot uppfattade rum och tid som uppbyggda av relationer. När han beskrev derivatan i sin uppsats första gången 1684 så gjordes det i geometriska termer där en funktion beskrevs genom en kurva. Alla värden till funktionen tänks alltså vara givna som punkter, allt har redan hänt. Derivatan i en punkt tolkades i termer av tangentens lutning.(Johansson, 2004, s.392 – 410).

4.1 Beräkning av ellipsens area

Vi ska nu med hjälp av integraler beräkna arean A av en ellips.

Vi börjar med att beskriva elliptiskpolära koordinater:

x= arcosθ y= brsinθ $0 \leq r \leq 1$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

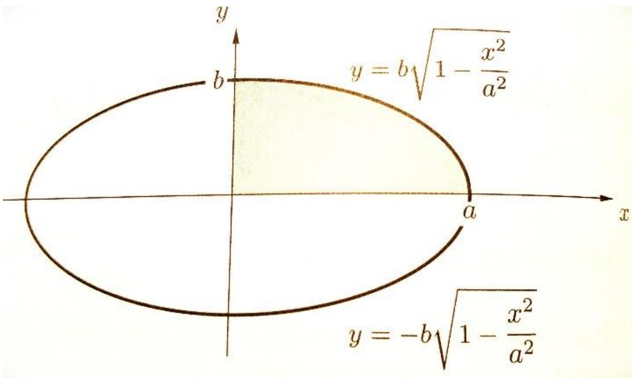
Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ger att $\frac{x}{a}$ = r cosθ vilket innebär att x= arcosθ.

Ellipsen $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ger att $\frac{y}{b}$ = r sinθ vilket innebär att y= brsinθ.

Vi har sedan tidigare ekvationen för ellipsen som en plan kurva:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \leftrightarrow y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$

Vi har också sedan tidigare bevisat att ellipsens area är πab genom matrisberäkning. Vi skall nu också visa att cirkels area kan bestämmas med integralkalkyl. Arean av den del av ellipsen som ligger i första kvadranten motsvarar en fjärdedel av hela ellipsens area på grund av symmetrin kring x- och y-axlarna.



Figur 14 (Persson & Böiers, 2010, s. 322)

Vi får hela ellipsens area till:

A= $4\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx$.

Vi kan parametrisera x= asint och i fallet med första kvadranten är $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

Variabelbyte x= asint, dx= a cost dt:

A= $4\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sqrt{1 - sin^2 t}$ acos t dt.

Vi har att $\sqrt{cos^2t}$ = $|cost|$ = cos t då $|t| < \frac{\pi}{2}$.

Vi beräknar primitiv funktion till cos^2t där $cos^2t = \frac{1}{2}(1 + cos2t)$

$\int cos^2t\ dt$= $\frac{1}{2}$ $\int dt$+ $\int cos2t\ dt$ = $\frac{1}{2}$ t+ $\frac{1}{4}$ sin2t + C = $\frac{1}{2}$ (t+sint cost) + C.

A= 4 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$ b$\sqrt{1 - sin^2t}$ acos t dt= 4ab$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2t$ dt =

= 4ab$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}(1 + cos2t)$dt = 2ab$\left[t + \frac{1}{2}\ \text{sin2t}\right]_0^{\pi/2} = \pi$ab.

(Persson & Böiers, 2010, s. 322)

Vi har tidigare visat att ellipsens area är πab och vi får nu samma resultat med integralkalkyl.

Vi har i 2.1 beskrivit Arkimedes beräkning av parabelsegment. Vi kommer här använda integration för att verifiera Arkimedes parabel inom segmentet som innesluts av parabeln y = x^2 och linjen y = 1. Den inskrivna triangeln har hörn i punkterna (-1,1), (1,1) och (0,0). Eftersom triangeln har basen 2 och höjden 1 är dess area lika med 1. Med integration beräknas segmentarean:

$$\int_{-1}^{1}(1 - x^2)dx = \left[x - \frac{x^2}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$$

4.2 Beräkning av ellipsens omkrets

Ellipsens omkrets kan inte bestämmas med elementära funktioner, vi kommer därför att beräkna ellipsens omkrets med hjälp av en integralkalkyl baserad på båglängd i första kvadranten.

Formeln för boglängden är

L = $\int_\alpha^\beta \sqrt{1 + (y')^2}$ dx.

Från ellipsens ekvation får vi att $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \leftrightarrow$ y = ± b $\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

Då vi kommer att utgå från första kvadranten är det bara den positiva delen av y som ligger ovan x axeln som kommer att användas.

Vi integrerar ¼ del av ellipsen när vi integrerar första kvadranten varför vi tar integralen gånger 4.

Vi kommer integrera från a till 0 enligt figur 14.

L = 4 $\int_0^a \sqrt{1 + (y')^2}$ dx.

Vi deriverar y = b $\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.

$y' = b\,\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x/a) = \frac{-bx}{a^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} = \frac{-bx}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}.$

$L = 4\int_0^a \sqrt{1 + \left(\frac{-bx}{a^2\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}\right)^2}\,dx = 4\int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^4\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}}\,dx$

Vi har att $a^2a^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) = a^2(a^2 - x^2)$.

$L = 4\int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^2x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}\,dx$

Vi inför nu polära koordinater, x= a sin θ och dx = a cos $\theta\ d\theta$.

Nya integrationsgränser blir $\frac{\pi}{2}$ och 0.

$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{b^2a^2\sin^2\theta}{a^2(a^2 - a^2\sin^2\theta)}}\ a\cos\theta d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{b^2\sin^2\theta}{a^2(1 - \sin^2\theta)}}\ a\cos\theta d\theta =$

$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \frac{b^2\sin^2\theta}{a^2\cos^2\theta}}\ \sqrt{a^2\cos^2\theta}\,d\theta = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\ \ d\theta$

Vi har nu en ekvation för ellipsens omkrets.

Vi går vidare och härleder en ekvation för ellipsens omkrets där excentriciteten e = c/a ingår. Vi har att

$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta}\ \ d\theta.$

$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2(1 - \sin^2\theta) + b^2\sin^2\theta}\ \ d\theta.$

Vi faktoriserar ut $\sin^2\theta$ och får

$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - 1(a^2 - b^2)\sin^2\theta}\ \ d\theta.$

Vi har att $c^2 = a^2 - b^2$ och $e = c/a$.

$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2 - c^2\sin^2\theta}\ \ d\theta.$

$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\left(1 - \frac{c^2\sin^2\theta}{a^2}\right.}\ \ d\theta.$

$L = 4a\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1 - e^2\sin^2\theta}\ \ d\theta.$

Nu har vi en andra formeln för ellipsens omkrets med excentriciteten.

(Circumference of an Ellipse – YouTube)

4.3 Newton härleder Keplers lagar.

Vi går nu vidare i ellipsens historia med att beskriva hur Isaac Newton kom fram till sina rörelselagar och gravitationslagen genom att utgå från Keplers lagar med ellipser. Man kan inte säga att Keplers lagar är fundamentala då de alla tre följer Newtons rörelselagar och gravitationslagen. Newtons lagar får betraktas som mer fundamentala även om han utgick från Keplers lagar när han formulerade gravitationslagen. Isaac Newton (1643-1727) föddes i Linolnshire i England och hans pappa dog några månader innan Newton föddes. Han växte upp i en familj som bestod av modern, mormodern, en halvbror och två halvsystrar och familjens ekonomi var god. Newton avlade examen i matematik 1665 vid universitet i Cambridge. Senare under 1665 utbröt pesten i Cambridge och Newton blev tvungen att flytta hem till Linconshire där han bodde i två år. Under dessa år gör Newton sina revolutionerande arbeten i matematik, optik, mekanik och astronomi. (Tengstrand,2020, s 84-85)

År 1674 slutade Newton med att ägna sig åt matematik och fysik och började i stället arbeta med att försöka framställa guld som alkemist. Han arbetade intensivt med detta under 10 år fram till 1683 då Edmund Halley (1656-1742) lyckade få Newton intresserad av vetenskap igen. (Mazer,2010, s.195) Newtons lagar publiceras 1687 i det stora arbetet Principia. Här beskriver Newton sin tre rörelselagar:

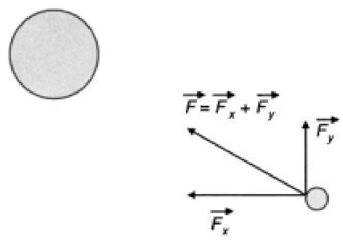
1) En kropp kommer antingen att stanna på sin utgångsposition eller hålla en konstant hastighet om inga andra krafter utifrån påverkar objektet.

2) Tidsderivatan av rörelsemängden har samma riktning och storlek som den applicerade kraften som verkar på en kropp med konstant massa.

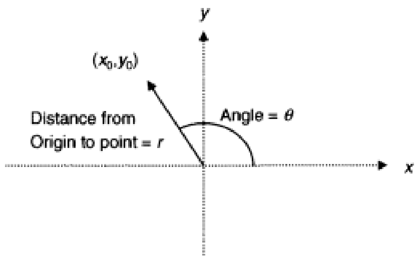
3) Två kroppar påverkar alltid varandra med lika stora men motriktade krafter.

I Principia visade Newton att planetbanas ellips överensstämmer med Newtons rörelselagar. Vi kommer här inte använda ellipsen som startpunkt utan i stället använda differential och integralkalkyl för att generera ellipsen. Vår väg till ellipsen följer sex steg.

Vi börjar med **steg 1**: Att bestämma en ekvation för $\frac{d}{dr}(\theta)$.



Figur 15 (Mazer,2010, s.276)



Figur 16 (Mazer, 2010, s.184)

Vi använder att rörelsemängden är konstant för att bestämma en ekvation för $\frac{d}{dr}(\theta)$.

Newton definierar rörelsemängden som planetens massa m gånger positionsvektorn r gånger vinkelhastigheten v_θ.

Vi visar nu rörelsemängdens bevarande, det vill säga att rörelsemängden är konstant.

Vi börjar med att derivera rv_θ med avseende på tiden.

$\frac{d}{dt}(rv_\theta)$ = r $\frac{d}{dt}(v_\theta)$ + v_θ $\frac{d}{dt}(r)$.

Enligt bilaga 2, Ekvation 3, är $\frac{d}{dt}(v_\theta)$ = $\frac{-v_r v_\theta}{dt}$.

Vi får att $\frac{d}{dt}(rv_\theta)$ = r $\frac{d}{dt}(v_\theta)$ + v_θ $\frac{d}{dt}(r)$ = r $\frac{-v_r v_\theta}{r}$ + v_θ $\frac{d}{dt}(r) =$ -$v_r v_\theta + v_r v_\theta = 0$.

Alltså är rörelsemängden mrv_θ konstant.

mr$v_\theta = k \leftrightarrow v_\theta = \frac{k}{mr}$.

Enligt bilaga 1, Ekvation 1, är $v_\theta =$ r$\frac{d}{dt}[\theta(r)]$ vilket ger och $v_r = \frac{d}{dt}(r)$)

r$\frac{d}{dt}[\theta(r)]$= $\frac{k}{mr} \leftrightarrow \frac{d}{dt}[\theta(r)]$= $\frac{k}{mr^2}$.

Vi använder kedjeregeln:

$\frac{d}{dr}(\theta)$ $\frac{d}{dt}(r)$= $\frac{k}{mr^2}$.

Vi substituerar $v_r = \frac{d}{dt}(r)$:

$\frac{d}{dr}(\theta)$ v_r = $\frac{k}{mr^2} \leftrightarrow \frac{d}{dr}(\theta)$ = $\frac{k}{mv_r r^2}$.

Vi har nu fått en ekvation för $\frac{d}{dr}(\theta)$ som innehåller både positionsvektorn r och den radiella hastigheten v_r.

Steg 2: Separation av radiella rörelsekomponenter.

Från bilaga 2 Ekvation 3 fås $\frac{d}{dt}(v_r)$ = $\frac{v_\theta^2}{r}$ + $\frac{F(r)}{m}$.

Då rörelsemängden är konstant enligt steg 1 kan vi kan sätta rv_θ till en konstant och uttrycka vinkelhastigheten v_θ i termer av variabeln r.

r$v_\theta = k \leftrightarrow v_\theta = \frac{K}{r}$.

Vi får då

$\frac{d}{dt}(v_r)$ = $\frac{v_\theta^2}{r}$ + $\frac{F(r)}{m}$ = $\frac{k^2}{m^2 r^3} + \frac{F(r)}{m}$.

Ekvationerna styrande rörelse i radiell riktning är skrivna bara i termer av de radiella variablerna r och v_r.

Steg 3: Hitta associerade energin och använda den till att etablera ett samband mellan r och v_r.

Ytterligare en rörelsekonstant, energin, bestäms för ekvationerna styrande rörelse i radiell riktning. Detta skapar en relation mellan r och v_r.

Från steg 2 har vi $\frac{d}{dt}(v_r) = \frac{k^2}{m^2r^3} + \frac{F(r)}{m}$ och vi vet att $\frac{d}{dt}(r) = v_r$.

Vi lämnar för ett ögonblick planetbanan och ellipsen och fokuserar på ett objekt som man släpper iväg och som faller ned vertikalt. För detta objekt kan man skriva rörelseekvationerna som $\frac{d}{dt}(y) = v_y$ och $\frac{d}{dt}(v_y) = -$ g. Här har vi en rörelsekonstant som kan skrivas

$E_m\ (y, v_y) = k_m(v_y) + P_m(y)$ där $k_m(v_y)$ och $P_m(y)$är funktioner av sina associerade variabler och $k_m(v_y)$ och $P_m(y)$ är också funktioner av tiden. Om man multiplicerar $E_m\ (y, v_y)$med objektets massa får man två komponenter i form av kinetiskenergi och potentiellenergi.

På motsvarande sätt kan vi nu bestämma energin för vårt system som

E= m $(k_m(v_r) + P_m(r))$.

Vi deriverar med avseende på tiden och produktregeln ger:

$\frac{d}{dt}(E) = m\left(\frac{d}{dt}[k_m(v_r)] + \frac{d}{dt}[P_m(r)]\right) =$

$= m\left(\frac{d}{dv_r}(k_m)\frac{d}{dt}(v_r) + \frac{d}{dr}(P_m)\frac{d}{dt}(r)\right)$
(kedjeregeln)

$= m\left(\frac{d}{dv_r}(k_m)\left(\frac{k^2}{m^2r^3} + \frac{F(r)}{m}\right) + \frac{d}{dr}(P_m)v_r\right) = 0$

Då gäller att energin är konstant.

Följande relationer för K och P säkerställer att energin är konstant ($\frac{dE}{dt}$=0)

$\frac{d}{dv_r}(k_m) = v_r$ och $\frac{d}{dr}(P_m) = -\left(\frac{k^2}{m^2r^3} + \frac{F(r)}{m}\right)$.

Genom att integrera båda ekvationerna fås de kinetiska och potentiella komponenterna.:

$k_m = \int v_r dv_r = \frac{1}{2} v_r^2,$ $\qquad P_m = -\int \left(\frac{k^2}{m^2r^3} + \frac{F(r)}{m}\right) dr$

Nu introducerar vi kraften F(r). Enligt inversa kvadratlagen är solens dragningskraft på planeten en kraft som är proportionell mot inversa kvadraten på avståndet mellan de två kropparna. Alltså är F(r)= $\frac{-\gamma}{r^2}$.

Newton menade att proportionalitets konstanten är en produkt av planetens massa m och solens massa M och en gravitationskonstant g. Alltså är $\gamma = mMg$. Genom att föra in denna kraft F(r) i integralen för P_m och genomföra integrationen fås ett uttryck för potential komponenten.

$P_m = \int \left(-\frac{k^2}{m^2r^3} + \frac{F(r)}{m}\right) dr = \frac{1}{2}\left(\frac{K}{mr}\right)^2 - \frac{Mg}{r}$

Vi multiplicerar rörelsekomponenten och lägeskomponenten med m och energin bestäms som:

E= $\frac{mv_r^2}{2} + \frac{k^2}{2mr^2} - \frac{mMg}{r}$.

Eftersom energin är en konstant, kan v_r lösas i termer av r:

$$v_r = \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2Mg}{r}\left(\frac{K}{mr}\right)^2}$$

Vi har att etablera ett samband mellan r och v_r.

Steg 4:

Vi förenklar nu steg 1 genom att använda relationen mellan r och v_r från steg 3. Genom att substituera resultatet från steg 3 in i resultatet av steg 1 skapas en ekvation på formen $\frac{d}{dr}(\theta)$ = h(r) där h är en funktion enbart av r.

$$\mathrm{h(r)} = \frac{d}{dr}(\theta) = \frac{k}{mv_r r^2} = \frac{k}{mr^2\sqrt{\frac{2E}{m}+\frac{2Mg}{r}\left(\frac{K}{mr}\right)^2}}.$$

Steg 5: Vi bestämmer θ genom integration:

Vi har från steg 4 att

$$\frac{d}{dr}(\theta) = \frac{k}{mr^2\sqrt{\frac{2E}{m}+\frac{2Mg}{r}\left(\frac{K}{mr}\right)^2}}$$

$$\theta = \int \frac{k}{mr^2\sqrt{\frac{2E}{m}+\frac{2Mg}{r}\left(\frac{K}{mr}\right)^2}}\,\mathrm{dr}$$

Vi delar med k flyttar in m/k under rottecknet.

$$= \int \frac{1}{r^2\sqrt{\left(\frac{m}{K}\right)^2\left(\frac{2E}{m}+\frac{2Mg}{r}\left(\frac{K}{mr}\right)^2\right)}}\,\mathrm{dr} = \int \frac{1}{r^2\sqrt{\frac{2Em}{k^2}+\frac{2Mg}{r}\left(\frac{m}{K}\right)^2-\frac{1}{r^2}}}\,\mathrm{dr}$$

Vi genomför variabelsubstitution för att förenkla integranden. Vi låter s = 1/r och ds = $-\frac{1}{r^2}dr$:

$$\theta = \int \frac{1}{r^2\sqrt{\frac{2Em}{k^2}+\frac{2Mg}{r}\left(\frac{m}{K}\right)^2-\frac{1}{r^2}}}\,\mathrm{dr} = -\int \frac{1}{\sqrt{\frac{2Em}{k^2}+2\mathrm{Mg}\left(\frac{m}{K}\right)^2 s - s^2}}\,\mathrm{ds}$$

Vi kvadratkompletterar:

$$\frac{2Em}{k^2} + 2\mathrm{Mg}\left(\frac{m}{K}\right)^2 s - s^2 = \left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2 + \frac{2Em}{k^2} - \left(s - \frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2 =$$

$$= \left[\left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2 + \frac{2Em}{k^2}\right]\left[1 - \frac{\left(s-\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2}{\left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2+\frac{2Em}{k^2}}\right]$$

Vi substituerar in kvadratkompletteringen in i integralen och förenklar:

$$\theta = - \int \frac{1}{\sqrt{\frac{2Em}{k^2} + 2\text{Mg}\left(\frac{m}{K}\right)^2 s - s^2}} \text{ds} = - \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{1}{\sqrt{\left[\left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2 + \frac{2Em}{k^2}\right]\left[1 - \frac{\left(s - \frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2}{\left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2 + \frac{2Em}{k^2}}\right]}} \text{ds} =$$

$$= - \frac{1}{\sqrt{\frac{Mgm^2}{k^2} + \frac{2Em}{k^2}}} \int \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\left(s - \frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2}{\left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2 + \frac{2Em}{k^2}}}} \text{ds}$$

Vi genomför ytterligare en variabelsubstitution för att förenkla integranden:

$$\text{Cos(u)} = \frac{s - \frac{Mgm^2}{k^2}}{-\sqrt{\left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2 + \frac{2Em}{k^2}}}$$

$$\text{-sin(u)du} = \frac{ds}{-\sqrt{\left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2 + \frac{2Em}{k^2}}}$$

$$\text{du} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2 + \frac{2Em}{k^2}}} \frac{ds}{\sin(u)} = \frac{1}{-\sqrt{\left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2 + \frac{2Em}{k^2}}} \frac{ds}{\sqrt{1 - cos^2(u)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2 + \frac{2Em}{k^2}}} \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{\left(s - \frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2}{\left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2 + \frac{2Em}{k^2}}}}$$

$$\text{u} = \int du = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2 + \frac{2Em}{k^2}}} \int \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{\left(s - \frac{Mgm^2}{2k^2}\right)^2}{\left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2 + \frac{2Em}{k^2}}}} =$$

$= - \theta$

u = $- \theta$

Integrationskonstanten har satts till noll. Konstanten bestämmer axelns orientering i förhållande till lösningen, så den är inte relevant för planetbanans form. Genom att gå baklänges genom variabelsubstitutionerna vi hitta sambandet mellan r och θ.

$- \theta = u$

Cos($- \theta$) = Cos(u)

Cos(θ) = Cos(u)

$$\text{Cos}(\theta) = \frac{s - \frac{Mgm^2}{k^2}}{-\sqrt{\left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2 + \frac{2Em}{k^2}}}$$

$$-\sqrt{\left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2+\frac{2Em}{k^2}}\,\mathrm{Cos}(\theta) = s-\frac{Mgm^2}{k^2}$$

$$-\sqrt{\left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2+\frac{2Em}{k^2}}\,\mathrm{Cos}(\theta)+\frac{Mgm^2}{k^2} = s$$

$$-\sqrt{\left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2+\frac{2Em}{k^2}}\,\mathrm{Cos}(\theta)+\frac{Mgm^2}{k^2} = \frac{1}{r}$$

$$\left(-\sqrt{\left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2+\frac{2Em}{k^2}}\,\mathrm{Cos}(\theta)+\frac{Mgm^2}{k^2}\right)\mathrm{r} = 1.$$

Steg 6

Vi kan nu omvandla relationen i steg 5 och uppenbara ellipsen. Ellipsen är kodad i den sista ekvationen i steg 5 i polära koordinater. I detta steg visar vi ellipsen i kartesiska koordinater. För att klargöra processen använder vi följande notation.

$\alpha = \frac{Mgm}{2E} \qquad -\beta^{\mathbf{2}} = \frac{k^2}{2Em}$

Vi bestämmer nu de kartesiska koordinaterna för ellipsen med hjälp av de polära koordinaterna:

$$\left(-\sqrt{\left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2+\frac{2Em}{k^2}}\,\cos(\theta)+\frac{Mgm^2}{k^2}\right)\mathrm{r} = 1.$$

$$\left(-\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right)^2-\frac{1}{\beta^2}}\,\cos(\theta)-\frac{\alpha}{\beta^2}\right)\mathrm{r} = 1.$$

$$-\frac{\alpha}{\beta^2}r = 1+\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right)^2-\frac{1}{\beta^2}}\;\mathrm{r}\cos(\theta)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right)^2 r^2 = \left(1+\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right)^2-\frac{1}{\beta^2}}\;\mathrm{r}\cos(\theta)\right)^2$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right)^2(x^2+y^2) = 1+2\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right)^2-\frac{1}{\beta^2}}\;\mathrm{x} + (\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right)^2 - \frac{1}{\beta^2})\,x^2$$

$$\frac{1}{\beta^2}x^2-2\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right)^2-\frac{1}{\beta^2}}\;\mathrm{x}+\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right)^2 y^2 = 1$$

$\frac{1}{\beta^2}(x^2 - 2\beta^2\sqrt{\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right)^2 - \frac{1}{\beta^2}}$ x) + $\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right)^2 y^2 = 1$

$(x^2 - 2\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$ x) + $\frac{\alpha^2}{\beta^2}y^2 = \beta^2$

$(x - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})^2 - (\alpha^2 - \beta^2) + \frac{\alpha^2}{\beta^2}y^2 = \beta^2$

$(x - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})^2 + \frac{\alpha^2}{\beta^2}y^2 = \alpha^2$

$\frac{(x - \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1.$

Nu har ellipsen uppenbarat sig. När E <0 och β^2> 0 är lösningen en ellips med storaxeln α och lillaxeln β, centrerad i punkten (x,y) = ($\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$, 0) med solen i origo i vänstra brännpunkten.

När E > 0 och β^2< 0 är lösningen en hyperbel. När E = 0 gäller följande:

$\left(-\sqrt{\left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2 + \frac{2Em}{k^2}}\cos(\theta) + \frac{Mgm^2}{k^2}\right)$r = 1.

$\frac{Mgm^2}{k^2}r = \frac{\boldsymbol{Mgm^2}}{\boldsymbol{k^2}}rcos(\theta) + 1$

$\left(\frac{Mgm^2}{k^2}r\right)^2 = \left(\frac{Mgm^2}{k^2}rcos(\theta) + 1\right)^2$

$\left(\frac{Mgm^2}{k^2}r\right)^2 (x^2 + y^2) = \left(\frac{Mgm^2}{k^2}\right)^2 x^2 + 2\frac{Mgm^2}{k^2}x + 1$

$\left(\frac{Mgm^2}{k^2}r\right)^2 y^2 = 2\frac{Mgm^2}{k^2}x + 1.$

$\frac{Mgm^2}{2k^2}y^2 = x + \frac{k^2}{2Mgm^2}$

$X = \frac{Mgm^2}{2k^2}y^2 - \frac{k^2}{2Mgm^2}$

Ekvationen beskriver en parabel som öppnar sig på x-axeln. Alla Apollonius kägelsnitt är lösningar till Newtons ekvationer.

(Mazer, 2010, s.287-293)

6.Käll- och litteraturförteckning

Mazer, Arthur, The ellipse: a historical and mathematical journey, (New Jersey, John Wiley & Sons,2010)

Bögvad, Rikard,Vaderlind, Paul, Linjär algebra Grundkurs, (Stockholm, Liber AB, 2017)

Johansson, Bo Göran, Matematikens historia, (Lund, Studentlitteratur, 2004)

J. Katz, Victor, A History of Mathematics: An Introduction (3rdedition). (Pearson Education, Inc,2009).

John Stillwell: A Concise History of Mathematics for Philosophers. (Cambridge University Press,2019).

Arne Persson och Lars-Christer Böiers. Analys i en variabel. (Studentlitteratur, Lund, 2001).

Tengstrand, Anders. Historiska perspektiv på matematik,2020. https://www.anderstengstrand-funderingarkringmatematik.se/ (Hämtad 21/5 - 2023.)

Conic section, Wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Conic_section. (Hämtad 21/5-2023.)

 - Wikipedia, https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse. (Hämtad 21/5-2023.)

Circumference of an Ellipse YouTube, **https://www.youtube.com/watch?v=r5pl_stL4c0ideo.** (Hämtad 21/5-2023.)

Ellipse: Definition, Equations, Derivations, Observations, Q&A (toppr.com), https://www.toppr.com/guides/maths/conic-sections/equations-of-ellipse/ (Hämtad 21/5-2023.)

Conic section - Simple English Wikipedia, the free encyclopedia, https://simple.wikipedia.org/wiki/Conic_section. (Hämtad 21/5-2023.)

Draw an Ellipse, how to draw an ellipse (cutoutfoldup.com). https://www.cutoutfoldup.com/502-draw-an- ellipse.php. (Hämtad 21/5-2023.)

Forskare och Naturvetenskapsmän (robotbyn.se). http://www.robotbyn.se/astrofysik/scientists.html, (Hämtad 21/5 - 2023.)

7. Bilagor

Bilaga 1 : Positionsvariabler och hastighet

x-komponenten av den roterade vektorn är identisk med den radiella komponenten av den ursprungliga vektorn. På samma sätt är y-komponenten i den roterade vektorn är identisk med vinkelkomponenten i ursprungliga vektorn.

$$\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = R(-\theta) \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

där $R(-\theta)$ är rotationsmatrisen genom vinkeln $-\theta$:

$$R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos(-\theta) & -\sin(-\theta) \\ \sin(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Inversen till matrisen till $R(-\theta)$ är matrisen $R(-\theta)$.

För att bestämma relationen mellan polära koordinater och hastigheten uttrycker vi först positionen (x,y) i polära koordinater.

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = R(\theta) \begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix}$$

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

För att bestämma relationen mellan polära koordinater och hastigheten uttrycker vi först positionen (x,y) i polära koordinater.

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{r(t)}\cos[\theta(t)] \\ \mathrm{r(t)}\sin[\theta(t)] \end{pmatrix}$$

I nästa steg deriverar vi med avseende på tiden i både vänster och höger led. I högerled använder vi också kedjeregeln och produktregeln.

Vi uttrycker relationen i ekvationen ovan i termer av polära koordinater och förenklar resultatet.

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}[x(t)] \\ \frac{d}{dt}[y(t)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}\left[\mathrm{r(t)}\cos[\theta(t)]\right] \\ \frac{d}{dt}\left[\mathrm{r(t)}\sin[\theta(t)]\right] \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos[\theta(t)]\frac{d}{dt}[\mathrm{r(t)}] + \mathrm{r(t)}\frac{d}{dt}\left[\cos[\theta(t)]\right] \\ \sin[\theta(t)]\frac{d}{dt}[\mathrm{r(t)}] + \mathrm{r(t)}\frac{d}{dt}\left[\sin[\theta(t)]\right] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos[\theta(t)]\frac{d}{dt}[\mathrm{r(t)}] + \mathrm{r(t)}\frac{d}{d\theta}[cos\theta]\frac{d}{dt}[\theta(t)] \\ \sin[\theta(t)]\frac{d}{dt}[\mathrm{r(t)}] + \mathrm{r(t)}\frac{d}{dt}\left[\sin[\theta(t)]\right] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos[\theta(t)]\frac{d}{dt}[\mathrm{r(t)}] + \mathrm{r(t)}\frac{d}{d\theta}[cos\theta]\frac{d}{dt}[\theta(t)] \\ \sin[\theta(t)]\frac{d}{dt}[\mathrm{r(t)}] + \mathrm{r(t)}\frac{d}{d\theta}[sin\theta]\frac{d}{dt}[\theta(t)] \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos[\theta(t)]\frac{d}{dt}[\mathrm{r(t)}] - \mathrm{r(t)}\sin(\theta)\frac{d}{dt}[\theta(t)] \\ \sin[\theta(t)]\frac{d}{dt}[\mathrm{r(t)}] + \mathrm{r(t)}\cos(\theta)\frac{d}{dt}[\theta(t)] \end{pmatrix}$$

$$= R(\theta)\begin{pmatrix} \frac{d}{dr}[r(t)] \\ r(t)\frac{d}{dt}[\theta(t)] \end{pmatrix}$$

Vi uttrycker relationen i ekvationen ovan i termer av polära koordinater och förenklar resultatet.

Detta är ekvivalent med:

$$R(\theta)\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}[r(t)] \\ r(t)\frac{d}{dt}[\theta(t)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}[r(t)] \\ r(t)\frac{d}{dt}[\theta(t)] \end{pmatrix} = R(-\theta)\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}[r(t)] \\ r(t)\frac{d}{dt}[\theta(t)] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_r(t) \\ v_\theta(t) \end{pmatrix}$$

Detta är ekvivalent med:

$\frac{d}{dt}(\mathrm{r}) = v_r$ $\quad$ $\frac{d}{dt}(\theta) = \frac{v_\theta}{r}$ $\quad$ **Ekvation 1.**

(Mazer, 2010, s.276-278)

Bilaga 2: Hastighetsvariabler och acceleration.

Vi vill uttrycka accelerationen i polära koordinater. Vi börjar med att derivera matrisen R med avseende på tiden.

Vi använder sedan kedjeregeln.

$$\frac{d}{dt}[R(-\theta(t))] = \begin{pmatrix} \frac{d}{dt}[\cos[\theta(t)]] & \frac{d}{dt}[\sin[\theta(t)]] \\ -\frac{d}{dt}[\sin[\theta(t)]] & \frac{d}{dt}[\cos[\theta(t)]] \end{pmatrix}$$

Vi använder sedan kedjeregeln.

$$\frac{d}{dt}[R(-\theta(t))] = \begin{pmatrix} \frac{d}{d\theta}[\cos(\theta)]\frac{d}{dt}(\theta) & \frac{d}{d\theta}[\sin(\theta)]\frac{d}{dt}(\theta) \\ -\frac{d}{d\theta}[\sin(\theta)]\frac{d}{dt}(\theta) & \frac{d}{d\theta}[\cos(\theta)]\frac{d}{dt}(\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\sin(\theta)\frac{d}{dt}(\theta) & \cos(\theta)\frac{d}{dt}(\theta) \\ -\cos(\theta)\frac{d}{dt}(\theta) & -\sin(\theta)\frac{d}{dt}(\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{d}{dt}(\theta)\begin{pmatrix} -\sin(-\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{pmatrix}$$

Vi söker nu accelerationen.

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(v_r) \\ \frac{d}{dt}(v_\theta) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}(\theta)\begin{pmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(v_x) \\ \frac{d}{dt}(v_y) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{d}{dt}(\theta)\begin{pmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{m}\cos(\theta)F(r) \\ \frac{1}{m}\sin(\theta)F(r) \end{pmatrix}$$

Ekvation 2

Vi har sedan tidigare att:

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} = R(\theta)\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_r \\ v_\theta \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} v_r\cos(\theta) + v_\theta \sin(\theta) \\ -v_r \sin(\theta) + v_\theta \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Insättning i ekvation 2 ger

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(v_r) \\ \frac{d}{dt}(v_\theta) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}(\theta)\begin{pmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$$

$$+\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{m}\cos(\theta)\,F(r) \\ \frac{1}{m}\sin(\theta)\,F(r) \end{pmatrix} =$$

$$\frac{d}{dt}(\theta)\begin{pmatrix} -\sin(\theta) & \cos(\theta) \\ -\cos(\theta) & -\sin(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_r\cos(\theta) + v_\theta \sin(\theta) \\ -v_r \sin(\theta) + v_\theta \cos(\theta) \end{pmatrix} +$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{m}\cos(\theta)\,F(r) \\ \frac{1}{m}\sin(\theta)\,F(r) \end{pmatrix} =$$

$$\frac{d}{dt}(\theta)\begin{pmatrix} v_\theta \\ -v_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{F(r)}{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Alltså är

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt}(v_r) \\ \frac{d}{dt}(v_\theta) \end{pmatrix} = \frac{d}{dt}(\theta)\begin{pmatrix} v_\theta \\ -v_r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{F(r)}{m} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Genom att använda uttrycket för vinkelhastighet i ekvation 1 fås accelerations ekvationerna:

$\frac{d}{dt}(v_r) = \frac{{v_\theta}^2}{r} + \frac{F(r)}{m}$ $\quad$ $\frac{d}{dt}(v_\theta) = \frac{-v_r v_\theta}{r}$ **Ekvation 3**

(Mazer, 2010, s.278- 280)