



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Komplexa talens användbarhet inom geometri

av

Alexander Pethrus

2023 - L1

Komplexa talens användbarhet inom geometri

Alexander Pethrus

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Paul Vaderlind

2023

Abstrakt

Denna uppsats är en redogörelse för hur användbara de komplexa talen är inom geometri, åtminstone till en viss utsträckning. Det visas dels genom att illustrera hur komplexa bevis och trigonometriska bevis (med reella tal) kan se olika ut för fyra spännande satser i planet och dels genom att ge en introduktion av Möbiustransformationer. Komplexa tal och geometrin går väl hand i hand, vilket enligt mina erfarenheter inte visas så ofta i exempelvis gymnasiet. För den som vill ha en introduktion i hur ett geometriskt tänk kring de komplexa talen ser ut kommer förhoppningsvis denna uppsats väl till pass.

Tack

Jag vill tacka min handledare Paul Vaderlind för all hjälp i mån av att komma på uppsatsämne och vara tillgänglig. Det har betytt mycket!

Innehållsförteckning

1	Introduktion	2
1.1	Historisk bakgrund	2
1.2	Definitioner	4
1.2.1	Komplexa tal	4
1.2.2	Komplexa konjugat	4
1.2.3	Absolutbelopp	5
1.3	Triangelolikheten	5
1.4	Elementära geometriska operationer	6
1.5	DeMoivres- och Eulers formel	7
1.5.1	DeMoivres formel och multiplikation av komplexa tal	7
1.5.2	DeMoivres formel	8
1.5.3	Eulers formel	8
1.6	Representation av linjer och liksidiga trianglar	9
1.7	Sammanfattning	12
2	Gör de komplexa talen geometrin enklare i planet?	12
2.1	Napoleons Sats	12
2.2	Ptolemaios Sats	14
2.3	Simsonlinjen	18
2.4	Morleys liksidiga triangel	20
3	Möbiustransformationer	24
3.1	Riemannsfären	24
3.1.1	Att beskriva punkter	24
3.1.2	Att beskriva linjer och cirklar	26
3.1.3	Stereografisk projektion	27
3.2	Definition av Möbiustransformationer	28
3.3	Avbildningar	29
3.3.1	Gruppen av Möbiustransformationer	29
3.3.2	Delgrupper	29
3.3.3	Exempel	30
3.4	Cross Ratio	30
3.4.1	Exempel	31
3.4.2	Konformitet	32
3.5	Avbildningar till sig självt	33
4	Avslutning	34
5	Appendix	35
5.1	Likformighet	35
5.2	Inskrivna vinklar	35
5.2.1	Inskrivna vinkel	35
5.2.2	Thales Sats	36
5.2.3	Två inskrivna vinklar på varsin sida av en linje, som är inskriven i samma cirkel	36
5.2.4	En sista inskriven vinkel	37
5.3	Att beskriva sidlängder med Sinussatsen	37
5.4	Centroider	38
6	Referenser	40

1 Introduktion

1.1 Historisk bakgrund

Somliga tror att de komplexa talen uppkom i sammanhanget där lösningar av kvadratiske ekvationer innehöll kvadratrötter ur negativa tal. Men så är det inte. För de komplexa talen har gradvis etablerats och uppkomsten av dem började i sammanhanget av kubiska ekvationer, inte kvadratiske (Merino, 2006).

Ända sedan Egyptierna har människan försökt hitta en metod, som löser den generella formen av kubiska ekvationer, nämligen $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Från slutet av 1300-talet kunde matematiker återge denna form på depresserad form, nämligen $pt + q = t^3$ där en fördel är att slippa hantera andragradstermen. Den fås enligt följande:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \quad (1)$$

vi gör variabelbytet $x = t - \frac{b}{3a}$ och får att (1) är ekvivalent med

$$\begin{aligned} & a\left(t - \frac{b}{3a}\right)^3 + b\left(t - \frac{b}{3a}\right)^2 + c\left(t - \frac{b}{3a}\right) + d \\ &= a\left(t^3 - \frac{bt^2}{a} + \frac{b^2t}{3a^2} - \frac{b^3}{27a^3}\right) + b\left(t^2 - \frac{2bt}{3a} + \frac{b^2}{9a^2}\right) + ct - \frac{bc}{3a} + d \\ &= at^3 - bt^2 + \frac{b^2t}{3a} - \frac{b^3}{27a^2} - \frac{2b^2t}{3a} + bt^2 - \frac{2b^2t}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} + ct - \frac{bt}{3a} + d \\ &= at^3 + \frac{b^2t}{3a} - \frac{b^3}{27a^2} - \frac{2b^2t}{3a} + \frac{b^3}{9a^2} + ct - \frac{bc}{3a} + d = 0. \end{aligned}$$

Detta resultat är i sin tur ekvivalent med

$$\begin{aligned} at^3 + ct - \frac{b^2t}{3a} + \frac{3b^3}{27a^2} - \frac{b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d &= at^3 + \frac{3ac - b^2}{3a}t - \frac{2b^3}{27a^2} + \frac{3ad - bc}{3a} \\ &= at^3 + \frac{3ac - b^2}{3a}t - \frac{6ab^3 + 81a^3d - 27a^2bc}{81a^3} = 0, \end{aligned}$$

vilket är ekvivalent med

$$t^3 + \frac{3ac - b^2}{3a^2}t + \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^3} = 0.$$

Om vi då sätter $p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}$ och $q = \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^3}$ så har vi vår depresserade form. Det finns tre relevanta sätt att representera detta, nämligen:

$$t^3 + pt = q \quad (2)$$

$$t^3 + q = pt \quad (3)$$

och

$$pt + q = t^3. \quad (4)$$

Scipione del Ferro var den första som löste (2), och kanske löste han de två andra formerna också (Merino, 2006). Han höll sin metod hemlig till sin dödsbädd då han avslöjade den för Antonio Maria Fior. Med denna metod utmanade Fior matematikern Niccolò Tartaglia på duell, som var återkommande evenemang och lockade publik. Att vinna gav status och kunde leda till karriärmässiga framgångar. Fior trodde sig vara

säker inför tävlingen då han kunde ge frågor som endast involverade kubiska former. Men hör och häpna, Tartaglia hittade metoden på egen hand natten innan tävlingen, som ledde till att Tartaglia vann. Likt del Ferro ville Tartaglia hålla denna metod hemlig och han hoppades att metoden skulle dö med honom.

Tartaglias metod handlade om att man reducerade en kubisk ekvation till någon av ekvationerna (2)-(4), för att sedan använda följande formler för respektive ekvation:

$$t = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad t = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}$$

och

$$t = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}.$$

Om det inte vore för matematikern Gerolamo Cardano så hade vi eventuellt inte känt till denna metod. Han tjatade envist på Tartaglia att avslöja den och tillslut gav Tartaglia efter, men endast gentemot löftet att Cardano själv aldrig skulle avslöja den. Cardano gick med på det, fastän han egentligen ville göra karriär med den.

Med tiden fick Cardano möjlighet att få träffa Fior och del Ferros anhängare. Genom dem fick han veta att Tartaglias metod redan var upptäckt flera decennier innan! Därmed kände Cardano att han kunde visa upp metoden för andra utan att rucka på löftet han gav till Tartaglia, liksom han hade upptäckt formeln på annat håll. Därmed skrev Cardano sitt verk *Ars Magna* (1545), men relationen mellan honom och Tartaglia blev dystert. I verket nämner Cardano att den första som upptäckte formeln var del Ferro, men att Tartaglia upptäckte den på egen hand (Merino, 2006).

I detta sammanhang, i strävandet att hitta en metod som löser kubiska ekvationer på generella formen blev det ibland så att vissa lösningar inkluderade kvadratrötter ur negativa tal. Detta betraktade matematiker på denna tid som ett tecken på att ekvationen ifråga saknar lösning, liksom hur ska man exempelvis uppfatta en geometrisk kvadrat med negativa sidlängder? Cardano själv tillhörde denna grupp skeptiker (Merino, 2006) och jag medger att det är svårt att ge ett intuitivt tillfredsställande svar. Men det är förmodligen en liten kostnad då de komplexa talens användbarhet väger upp för detta, vilket förhoppningsvis kommer bli tydligt.

Det var inte förrän Bombelli gav motexempel till denna skepticism som inställningen till kvadratrötter ur negativa tal började förändras. Exempelvis visade han att $t^3 = 15t + 4$ har en lösning, trots att kvadratrötter ur negativa tal uppkommer bland lösningarna (med Tartaglias formel får vi att ekvationen kan skrivas $t = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$), nämligen då $t = 4$. Bombelli hade en systematisk metod för att lösa liknande fall och härmed var det inte lika enkelt att bara vifta bort lösningar med kvadratrötter ur negativa tal (Merino, 2006).

Med tiden myntade Descartes beteckningen 'imaginära tal' för dessa konstiga kvadratrötter och sa att tanken på dessa inte kan fångas med hjälp av geometrin (Merino, 2006) och det är väl ofta därför många kan ha svårt att acceptera dessa lösningar.

Dessa skumma tal skulle tas ännu mer på allvar efter att Euler visade hur man kan tänka kring dem, som tal i planet och kom med definitionen $i = \sqrt{-1}$. Gauss i sin tur introducerade namnet 'komplexa tal' och nästan här i historien blev de komplexa talen etablerade (Merino, 2006).

Idag finns det olika vetenskapliga formler som innehåller komplexa tal, exempelvis Schrödingers ekvation för en fri partikel:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + a \Delta u = 0,$$

och Fourier transformation:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi\xi x} dx, \forall \xi \in \mathbb{R}$$

har den imaginära enheten inkluderad. Dessutom används de komplexa talen flitigt för att lösa växelströmsproblem (AC Circuit Analysis), växelströmsförlopp inom elektroteknik, vätskedynamik osv.

Varför de komplexa talen kan göra beräkningar enklare inom olika discipliner handlar om att de komplexa talen hanterar absolutbelopp och vinklar samtidigt, man gör geometriska skeenden till numeriska beräkningar. Förhoppningsvis får läsaren uppleva att uppsatsen tydliggör vad detta innebär.

1.2 Definitioner

De komplexa talen är egentligen inte så 'mystiska' eller 'komplicerade' som en kan tro. För de är egentligen bara tal som består av ett talpar (a, b) där $a, b \in \mathbb{R}$. Detta kan vi förstå genom att begrunda definitionen av komplexa tal.

1.2.1 Komplexa tal

Definition 1.2.1 Ett komplext tal är ett reellt ordnat talpar (a, b) med följande egenskaper:

- Två komplexa tal (a, b) och (c, d) är ekvivalenta om och endast om $a = c$ och $b = d$.
- Summan av två komplexa tal definieras av $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
- Produkten av två komplexa tal definieras av $(a, b)(c, d) = (ac - bd, bc + ad)$,

där operationerna i högra leden är vanliga reella operationer (Hahn, 1994).

Talparet $(a, 0)$ betraktas som ett reellt tal eftersom

$$(a, 0) \pm (b, 0) = (a \pm b, 0), \quad (a, 0)(b, 0) = (ab, 0)$$

och

$$\frac{(a, 0)}{(b, 0)} = \left(\frac{a}{b}, 0\right) \quad \text{om } b \neq 0.$$

Detta innebär att ett komplext talet $(a, 0)$ uppför sig som ett reellt tal, där de grundläggande lagarna (identitets-elementet, nollelementet, inversen, associationlagen, kummunitativa lagen och distributiva lagen) gäller.

Låt oss motivera den kända formuleringen $i = \sqrt{-1}$ genom att kvadrera komplexa talen $(0, 1)$ och $(0, -1)$. Från definitionen av komplexa tal har vi då att

$$(0, 1)^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$$

och att

$$(0, -1)^2 = (0, -1)(0, -1) = (-1, 0) = -1.$$

Om vi betecknar $(0, 1) = i$ så kan ett komplext tal (a, b) skrivas som

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0),$$

vilket rättfärdigar uttrycket $a + ib$, där a står för den reella delen och ib står för den imaginära delen där i är den imaginära enheten. Den reella- och imaginära delen betecknas Re och Im respektive i resten av uppsatsen. De komplexa tal som är nollskilda, men vars imaginära del är lika med noll är reella tal. På samma sätt, de nollskilda komplexa tal där reella delen är lika med noll kallas för rent imaginära.

1.2.2 Komplexa konjugat

Definition 1.2.2 För varje komplext tal $\alpha = (a, b) = a + ib$ finns det ett komplext konjugat $\bar{\alpha} = (a, -b) = a - ib$ (Hahn, 1994).

Sats 1.2.2 För varje komplext tal med respektive konjugat gäller följande delsatser:

$$\overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}, \quad \bar{\bar{\alpha}} = \alpha, \quad \text{och} \quad \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} \quad \text{om } \beta \neq 0 \quad (\text{Hahn, 1994}).$$

Bevis.

Låt $\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$, $\gamma = \alpha \pm \beta$, $\delta = \alpha \cdot \beta$ och $\epsilon = \frac{\alpha}{\beta}$ där $\beta \neq 0$. För varje följande rad bevisar vi varje delsats ovan från vänster till höger. Vi har att

$$\overline{\alpha \pm \beta} = (a - ib) \pm (c - id) = (a \pm c) - i(b \pm d) = \overline{\gamma} = \overline{\alpha \pm \beta},$$

$$\overline{\alpha \cdot \beta} = (a - ib)(c - id) = ac - iad - ibc - bd = (ac - bd) - i(ad + bc) = \overline{\delta} = \overline{\alpha\beta},$$

$$\overline{\overline{\alpha}} = \overline{(a + ib)} = a - ib = \alpha,$$

$$\epsilon \cdot \beta = \alpha \iff \overline{\epsilon} \cdot \overline{\beta} = \overline{\alpha} \iff \frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}} = \overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)}.$$

□

1.2.3 Absolutbelopp

Definition 1.2.3 Absolutbeloppet av ett komplext tal $\alpha = a + ib$ där $a, b \in \mathbb{R}$ definieras som

$$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\alpha\overline{\alpha}} \quad (\text{Hahn, 1994}).$$

Lägg märke till att $|\alpha|$ kan tolkas som längden för hypotenusan av en rätvinklad triangel (se första figuren i avsnitt 1.4). Vi kan alltså tolka längden av ett komplext tal α , som avståndet från origo till punkten α i planet. På detta sätt kan vi tänka när vi hanterar olikheter med komplexa tal. Vi kan även tolka reella tal på samma sätt, bara det att längden för deras hypotenusor är ekvivalent med längden för närmsta kateten längs med x -axeln (då motstående katets längd är lika med noll).

1.3 Triangelolikheten

Detta avsnitt är relevant för avsnittet 2.2.

Sats 1.3 (Triangelolikheten) För alla $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ har vi att $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Hahn, 1994).

Bevis.

Ha i åtanke att $2\text{Re}(z) = z + \overline{z}$ och att konjugatet till $z = \overline{z_1}z_2$ är $\overline{z} = \overline{\overline{z_1}z_2}$, vilket innebär att $\overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} = 2\text{Re}(\overline{z_1}z_2)$. Ha också i åtanke att $\text{Re}(z) \leq |z|$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

Låt ett komplext tal $z = z_1 + z_2$. Då har vi att

$$|z|^2 = |z_1 + z_2|^2 = z\overline{z} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = z_1\overline{z_1} + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) + z_2\overline{z_2}$$

$$= |z_1|^2 + \overline{z_1}z_2 + \overline{\overline{z_1}z_2} + |z_2|^2 = |z_1|^2 + 2\text{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \leq |z_1|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| + |z_2|^2$$

Eftersom $|\overline{z_2}| = |z_2|$ har vi att detta är lika med

$$|z_1|^2 + 2|z_1| \cdot |z_2| + |z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2.$$

Eftersom $|z_1 + z_2|$ och $|z_1| + |z_2|$ är icke-negativa får vi att detta är ekvivalent med

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

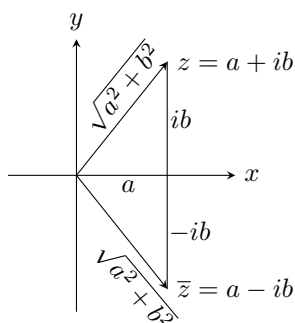
□

Lägg märke till att likhet råder om och endast om $Re(z_1 \bar{z}_2) = |z_1 \bar{z}_2|$. I det icke-triviala fallet då $z_1 \cdot z_2 \neq 0$, har vi att $Re(z) = |z|$ om och endast om z är ett icke-negativt reellt tal. Alltså har vi att triangelolikheten blir en likhet om och endast om $z_1 \bar{z}_2 \geq 0 \in \mathbb{R}$. Om vi multiplicerar båda sidor av detta uttryck med $\frac{1}{|z_2|^2}$ får vi att detta är ekvivalent med $\frac{z_1}{z_2} > 0 \in \mathbb{R}$. Denna form av villkoret använder vi för avsnitt 2.2.

1.4 Elementära geometriska operationer

Vi har sett i avsnitt 1.2 att komplexa tal inte är så mystiska, som de kan verka vid första anblicken. Förhoppningsvis kommer mystiken kring dem minska mer och mer under uppsatsens gång.

Utifrån avsnitt 1.2 och vetenskapen om att varje reellt talpar kan representeras av en punkt i xy -planet, förstår vi att detta även gäller komplexa tal. Att reella talpar kan motsvaras av en punkt $z = x + iy$ i komplexa planet. Komplexa planet är alltså ett vanligt plan, bara det att vi lokaliserar oss med hjälp av komplexa tal.



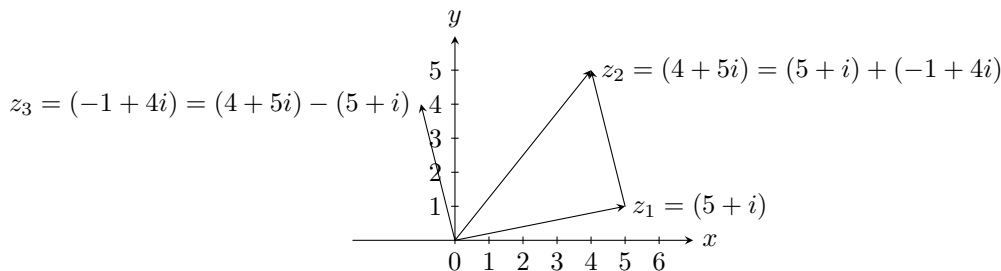
Den reella delen motsvaras av x -axeln och den imaginära delen motsvaras av y -axeln. Det komplexa konjugatet till ett godtyckligt komplext tal $z = a + ib$ motsvaras av punkten som speglar sig i x -axeln, nämligen $\bar{z} = a - ib$. Här ser vi bland annat att $z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a = 2Re(z)$, vilket i sin tur innebär att $\frac{z + \bar{z}}{2}$ är reellt och att $\frac{z - \bar{z}}{2}$ är rent imaginärt.

Vi ser också att ett komplext tal kan representeras av en vektor eller linje som utgår från origo. Därmed kommer vi utgå från att ett komplext tal ska tolkas som en punkt, linje eller vektor i resten av uppsatsen.

När vi adderar komplexa tal så är det som att addera vektorer. Exempelvis har vi att $(2 + i) + (1 + 2i) = 3 + 3i$. Vi kan tänka oss att vänsterled och högerled är olika sätt att representera samma komplexa tal, där vänster- och högerled är som att gå två olika vägar till punkten som representeras av komplexa talet ifråga.

Dessutom, låt oss säga att vi vill gå direkt till en komplex punkt $u = c + id$ från en annan komplex punkt $v = e + if$, hur bär vi oss åt då? Då tar man slutpunkten (dit vi vill gå) och subtraherar med startpunkten. Resultatet är det tal vi behöver addera startpunkten med för att 'gå' från startpunkten till slutpunkten. Första steget ges på formen $u - v = (c + id) - (e + if) = w$ där $w \in \mathbb{C}$ och andra steget ges på formen $u = v + w$. Det komplexa talet w är en ny punkt eller vektor. Enda skillnaden mellan $u - v$ och w är att w utgår från origo, men har samma längd och lutning som $u - v$. Alltså kan vi representera olika avståndsvektorer mellan två godtyckliga punkter i komplexa planet med en motsvarande vektor som utgår från origo.

Låt oss se vad detta innebär. Betrakta följande bild:



Vi ser bland annat att vektorn från punkten z_3 till z_2 kan representeras av vektorn z_1 eftersom $z_2 - z_3 = z_1$.

Notera också de två olika vägarna till punkten z_2 . Antingen går vi direkt via diagonalen, eller så går vi till z_1 för att sedan gå till z_2 . Detta är alltså olika sätt att beskriva vektorer och punkter i komplexa planet.

Vi kan även transformera en komplex vektor beroende på vad vi vill göra. Om vi skulle vilja rotera ett komplext tal motsols 90° så multiplicerar vi med i , liksom om (a, b) multipliceras med i får vi $(0, 1)(a, b) = i(a + ib) = -b + ia = (-b, a)$. Vi kan också rotera medsols 90° genom att istället multiplicera med $-i$.

Vi kan även invertera en komplex vektor genom att multiplicera det med -1 . Detta innebär att vektorn behåller sin längd och pekar mot rakt motsatta riktningen. Identitetstransformationen är alltså multiplikation med 1. Med detta tänk ser vi hur vi kan ändra komplexa vektorers längd och samtidigt behålla dess riktning. För att förlänga utan att byta riktning multiplicerar vi med ett tal $a > 1 \in \mathbb{R}$ och vill vi förkorta utan att byta riktning multiplicerar vi med ett tal $1 > b > 0 \in \mathbb{R}$.

Med dessa typer av transformationer (rotationer, inverteringar, längdändringar) kan vi föreställa oss vad som brukar hända om vi multiplicerar ett komplext tal med något annat komplext tal. Det som brukar hända är att både storleken och vinkeln ändras (eventuellt ändras riktningen också). Exempelvis, låt oss utföra multiplikationen $(2 + i)(-1 + 3i)$, vilket är lika med $-5 + 5i$. Här ser vi att vinkeln har förändrats, samt att riktningen har bytts eftersom vi multiplicerade med ett negativt reellt tal.

Låt oss jämföra hur avbildningar för komplexa och reella matriser kan se ut. Först ut har vi en reell matris:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

vilket i komplexa termer är samma sak som $1 + 2i$. Vi kan alltså representera alla komplexa tal med 2×2 matriser. Detta sätt att representera komplexa tal används i avsnittet om Möbiustransformationer.

1.5 DeMoivres- och Eulers formel

Vi såg i förgående avsnitt hur man kan utfärda en nittiograders rotation av ett komplext tal genom att multiplicera med $\pm i$. Men om vi vill göra andra typer av rotationer sätter vi in vinkeln vi vill rotera med i DeMoivres formel och multiplicerar det med det komplexa tal vi vill transformera. Om vi vill ändra längden samtidigt som vi roterar så ändrar vi bara på värdet för r . Mycket smidigt. Låt oss därför härleda den ett steg i taget.

Det är relativt välkänt att komplexa tal kan representeras på polär form. Vi vet att en punkt (x, y) kan representeras på polär form som $(x = r \cos \theta, y = r \sin \theta)$ i planet. På samma sätt som enhetscirkeln står r för radien eller avståndet från origo till punkten och θ för vinkeln mellan x -axeln och linjen från origo till punkten. Ett komplext tal z kan alltså representeras på polär form i enlighet med $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ om $z \neq 0$ (annars är $r = 0$ och vinkeln θ odefinierad), där $r = |z|$ och θ är argumentet för z ($\arg z$).

1.5.1 DeMoivres formel och multiplikation av komplexa tal

Sats 1.5.1 Anta att $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$ och att $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$. Då har vi att

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)) \iff |z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \quad (\text{Hahn, 1994}).$$

Bevis.

Vi har att

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1)) \cdot r_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2)) \\ &= r_1 r_2 \left((\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2) \right). \end{aligned}$$

Med additionsformlerna är detta ekvivalent med att

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)).$$

□

Nu är vi redo att formulera DeMoivres formel.

1.5.2 DeMoivres formel

Sats 1.5.2 (DeMoivres formel). För $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ och $n \in \mathbb{Z}$ har vi att

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) \iff |z^n| = |z|^n, \quad \arg(z^n) = n \cdot \arg(z) \quad (\text{Hahn, 1994}).$$

Bevis.

Vi bevisar endast fallet då $n = -1$ eftersom endast det kommer vara relevant för resten av uppsatsen. Vi har att

$$(\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta - i \sin \theta) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

Vi dividerar yttre leden med $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ och får att

$$\frac{1}{r(\cos \theta + i \sin \theta)} = \frac{1}{r}(\cos \theta - i \sin \theta) = \frac{1}{r}(\cos -\theta + i \sin -\theta).$$

Sista likheten beror på att Cosinus är en jämn funktion medan Sinus är en udda funktion. Sammataget har vi att

$$|z^{-1}| = |z|^{-1}, \quad \arg(z^{-1}) = -\arg(z).$$

□

Notera att detta innebär att $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$. Detta kommer vi använda i avsnitt 2.2 och 3.4.2.

I detta sammanhang är det bra att nämna vad orientering är. Orientering är den imaginära rotationen eller förflyttning (eller både och) som tar referensplaceringen av en geometrisk figur till dess nuvarande placering. Om vi exempelvis likt beviset multiplicerar ett komplext tal z_1 med ett komplext tal $\frac{1}{z_2}$ så får vi orienteringen från z_1 till z_2 (i detta fall en rotation från z_1 till z_2).

1.5.3 Eulers formel

Vi måste såklart säga något om Eulersformel eftersom den går hand i hand med DeMoivres formel då de kan användas för samma syften.

Enligt Taylors formel har vi att

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

för alla $x \in \mathbb{R}$. Men vad händer om vi ersätter x med $i\theta$? Då får vi att

$$e^{i\theta} = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} + \dots\right) + i \left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots\right).$$

Om vi är bekanta med Taylors formel för Cosinus och Sinus så ser vi att

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta,$$

vilket är Eulers formel (Hahn, 1994).

Från avsnittet om DeMoivres formel ser vi nu att

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta = (e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

Alltså har vi nu att $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n (\cos n\theta + i \sin n\theta)$ där återigen r är avståndet från origo till punkten och $n \in \mathbb{Z}$. Som sagt, Eulers- och DeMoivres formel går hand i hand.

1.6 Representation av linjer och liksidiga trianglar

Sats 1.6.1 (Representation av parallella linjer) För fyra punkter $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ har vi att vektor $\overrightarrow{\alpha\beta}$ är parallel med vektor $\overrightarrow{\gamma\delta}$ om och endast om

$$\frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma} \in \mathbb{R} \iff \frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma} = \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\bar{\delta} - \bar{\gamma}} \quad (\text{Hahn, 1994}).$$

Bevis.

I avsnitt 1.5.1 såg vi hur man kan beräkna en vinkel från linje z_1 till linje z_2 och i avsnitt 1.5.2 såg vi hur man kan beräkna en vinkel från z_2 till z_1 . Från avsnitt 1.4 gjorde vi klart att komplexa punkter kan representeras av vektorer. Att beräkna $\frac{\alpha - \beta}{\delta - \gamma}$ är alltså samma sak som att beräkna vinkeln från $\overrightarrow{\delta\gamma}$ till $\overrightarrow{\alpha\beta}$.

Från avsnitt 1.4 har vi att ett komplext tal kan representeras av en vektor som utgår från origo och slutar i punkten ifråga. Därmed, om två olika vektorer har lika längd och riktning kommer divisionen i fråga bli lika med 1. Å andra sidan, om två vektorer har lika riktning men inte lika längd, kommer vi ändå få ett reellt tal. Detta eftersom den ena vektorn kommer vara antingen en förlängning eller förkortning av den andra (se avsnitt 1.4). Så fort två vektorer inte har samma riktning kommer vi behöva den imaginära enheten för att 'vrida' ena vektorn för att få dem parallella.

Det enda fallet divisionen resulterar i ett reellt tal utan att vektorerna har samma riktning är när vektorerna pekar i rakt motsatta riktning. Detta såg vi också i avsnitt 1.4.

Tillsist, om $\frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma} \in \mathbb{R}$ spelar det ingen roll om vi tar komplexa konjugatet till denna division eftersom konjugatet till ett reellt tal är lika med samma reella tal. Därmed gäller ekvivalensen för sats 1.6.1. \square

Alltså har vi att $\overrightarrow{\alpha\beta}$ och $\overrightarrow{\gamma\delta}$ har samma eller motsatt riktning beroende på om $\frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma}$ är positivt- eller negativt reellt tal, respektive. Med samma tänk från beviset får vi följande sats:

Sats 1.6.2 (Representation av ortogonala linjer) Vektorerna $\overrightarrow{\alpha\beta}$ och $\overrightarrow{\gamma\delta}$ är ortogonala mot varandra om och endast om

$$\frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma} \in Im \iff \frac{\beta - \alpha}{\delta - \gamma} + \frac{\bar{\beta} - \bar{\alpha}}{\bar{\delta} - \bar{\gamma}} = 0 \quad (\text{Hahn, 1994}).$$

Det är enkelt att inse att ekvivalensen gäller eftersom om vänstra sidan av ekvivalensen är ett rent imaginärt tal, så kommer additionen av dess konjugat bli lika med noll.

Sats 1.6.3 (Representation av liksidiga trianglar) Två trianglar $\triangle z_1 z_2 z_3$ och $\triangle w_1 w_2 w_3$ är likformiga (\sim) om och endast om:

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}, \iff \begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{Hahn, 1994}).$$

Bevis.

Vi vet att två trianglar är likformiga om förhållandet mellan två sidpar är lika där mellanliggande vinkel också är lika. Då har vi att

$$\begin{aligned}
\begin{vmatrix} z_1 & w_1 & 1 \\ z_2 & w_2 & 1 \\ z_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0 &\iff z_1(w_2 - w_3) - w_1(z_2 - z_3) + z_2w_3 - z_3w_2 = 0 \\
&\iff w_3z_2 - w_3z_1 - w_1z_2 + w_1z_1 = w_2z_3 - w_2z_1 - w_1 - w_1z_3 + w_1z_1 \\
&\iff w_3(z_2 - z_1) - w_1(z_2 - z_1) = w_2(z_3 - z_1) - w_1(z_3 - z_1) \\
&\iff (w_3 - w_1)(z_2 - z_1) = (w_2 - w_1)(z_3 - z_1) \iff \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1}. \\
&\iff \left| \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \right| = \left| \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \right| \cap \arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \arg \frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} \iff \Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3.
\end{aligned}$$

□

Detta i sin tur ger att $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta \overline{w_1 w_2 w_3}$ eftersom $\Delta \overline{w_1 w_2 w_3} \sim \Delta w_1 w_2 w_3$ och om vi nu hade att $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta w_1 w_2 w_3$ så har vi att $\Delta z_1 z_2 z_3 \sim \Delta \overline{w_1 w_2 w_3}$.

Sats 1.6.4 (Representation av pararella linjer eller kolinjära punkter med determinanter) Att tre punkter $z, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ ligger på samma linje och är således kolinjära, är ekvivalent med att:

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \beta & \bar{\beta} & 1 \\ \gamma & \bar{\gamma} & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{Hahn, 1994}).$$

Bevis.

Från Sats 1.6.3 har vi att determinanten för Sats 1.6.4 är ekvivalent med

$$\frac{(\beta - z)}{(\gamma - z)} = \frac{(\bar{\beta} - \bar{z})}{(\bar{\gamma} - \bar{z})} \iff \frac{(\beta - z)}{(\gamma - z)} - \frac{(\bar{\beta} - \bar{z})}{(\bar{\gamma} - \bar{z})} = 0.$$

Att vi har detta uttryck innebär från Sats 1.6.1 att vektor $(\beta - z)$ är parallel med vektor $(\bar{\beta} - \bar{z})$ och att vektor $(\gamma - z)$ är parallel med $(\bar{\gamma} - \bar{z})$. Respektive parallela vektorer kan representeras av samma vektor med motsvarande riktning och längd från origo. Nu, en vektor minus sig självt kommer alltid bli noll.

□

Låt mig ge en förtydligande kommentar. Så fort punkterna z, β, γ inte är kolinjära kommer inte den parallela ekvationen att uppfyllas. Då kan vi inte representera vektorerna $(\beta - z)$ och $(\bar{\beta} - \bar{z})$ med samma vektor från origo eller så kan vi inte representera vektorerna $(\gamma - z)$ och $(\bar{\gamma} - \bar{z})$ med samma vektor från origo. Därmed gäller ekvivalensen för Sats 1.6.4.

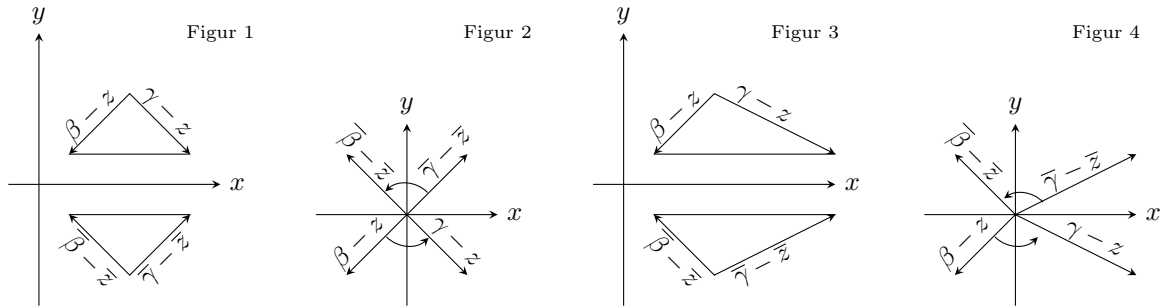
Sats 1.6.5 För punkterna $z, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ innebär determinanten

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \beta & \bar{\gamma} & 1 \\ \gamma & \bar{\beta} & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

att z är ortogonal gentemot β och γ , samt att avståndet från z till β och γ respektive är lika (Hahn, 1994).

Bevis.

Från avsnitt 1.6.4 vet vi att determinanten är ekvivalent med $\frac{(\beta-z)}{(\gamma-z)} - \frac{(\bar{\gamma}-\bar{z})}{(\bar{\beta}-\bar{z})} = 0$ eftersom vi endast har byt plats på $\bar{\beta}$ och $\bar{\gamma}$.

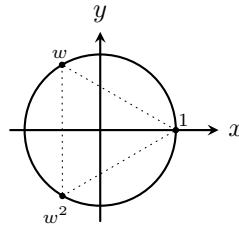


Från avsnitt 1.4 kan vi representera vektorerna i figur 1, som vektorer utgående från origo respektive (se figur 2). I figur 2 ser vi att vi har symmetri då respektive vinkel har samma orientering, men framför allt har lika vinkelstorlek och längd. Vi ser alltså att vektorerna inte är oberoende. Exempelvis kan vi få $\bar{\gamma} - \bar{z}$ och $\beta - z$ om vi multiplicerar $\bar{\beta} - \bar{z}$ och $\gamma - z$ med $(-i)$ respektive. Denna symmetri bryts då punkten z ligger närmre antingen β eller γ (se figur 3 och 4), vilket skulle innebära att determinanten inte blir lika med noll. \square

Sats 1.6.6 (Liksidiga Triangeln $\triangle 1ww^2$) För en liksidig triangel $\triangle 1ww^2$ får vi ekvationen $w^2 + w + 1 = 0$ (Hahn, 1994).

Bevis.

Låt punkterna $w = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ och $w^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ enligt följande bild:



Vi vet att triangeln $\triangle 1ww^2$ är liksidig om sidlängderna är lika. Sidlängden för sida ww^2 är lika med $|\frac{\sqrt{3}}{2}| + |-\frac{\sqrt{3}}{2}| = \sqrt{3}$. Notera att sidlängden från 1 till $-\frac{1}{2}$ är lika med $\frac{3}{2}$ eftersom $1 - (-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}$. Nu, sidlängderna för sidorna $1w$ och $1w^2$ är också lika med $\sqrt{3}$ eftersom

$$\frac{|\frac{3}{2}|}{|\pm \frac{\sqrt{3}}{2}|} = \sqrt{3}.$$

Alltså är triangeln $\triangle 1ww^2$ liksidig. Den är även inskriven i enhetscirkeln eftersom $|1| = |w| = |w^2| = 1$.

Nu, notera från bilden ovan att $w^2 = \bar{w}$ och att $w^3 = 1 + 0i$. Vi har att $w^2 + w + 1 = 0$ eftersom

$$w^2 + w + 1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i + 1 = 0.$$

\square

Detta är relevant för Napoleons- och Morleys sats.

1.7 Sammanfattning

Förhoppningsvis har vi nu en grundläggande förståelse om vad de komplexa talen är och om vad det innebär att utföra operationer på komplexa tal. Att de inte är så mystiska som en kan tro vid första anblicken.

Förhoppningsvis kan läsaren ana varför de komplexa talen är så användbara, då de behandlar vinklar och längder direkt på numeriskt vis. Vi kommer få se mer av hur detta kan se ut i avsnitt 2 och 3.

De flesta avsnitten förutsätter relevant elementär geometrisk kunskap, som finns i Appendix.

2 Gör de komplexa talen geometrin enklare i planet?

Här följer fyra (förhoppningsvis spännande) geometriska satsar med bevis. Här har jag tagit med de enklaste trigonometriska bevisen (som jag har kunnat hitta) och komplexa bevis för att illustrera hur geometriska beräkningar med reella- och komplexa tal kan se olika ut. Om detta säger något om huruvida komplexa talen gör beräkningar i planet enklare får läsaren avgöra.

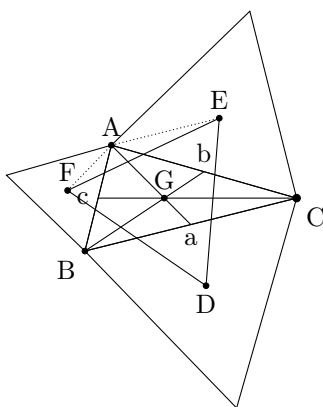
2.1 Napoleons Sats

Sats 2.1 Om en liksidig triangel ritas på utsidan för varje sida av en godtycklig triangel så bildar centroiderna för dessa liksidiga trianglar ännu en liksidig triangel. (Hahn, 1994)

(Läsaren bör se appendix 5.4 om denne inte är bekant med centroider.)

Trigonometriskt Bevis

Betrakta följande figur:



Vi undersöker om sidlängderna \overline{EF} , \overline{FD} och \overline{DE} är lika. Om de är det så är triangeln $\triangle DEF$ liksidig och Napoleons sats följer. Låt oss börja.

Låt $a = BC$, $b = AC$ och $c = AB$.

Vi ser direkt att $\angle FAB = \angle EAC = \frac{\pi}{6}$ eftersom alla yttre trianglar är liksidiga med respektive vinkel lika med $\frac{\pi}{3}$. Vi använder Cosinussatsen på triangel $\triangle EFA$ och får att

$$|EF|^2 = |AE|^2 + |AF|^2 - 2(|AE|)(|AF|)\cos\left(A + \frac{\pi}{3}\right). \quad (5)$$

Nu, för en centroid av en godtycklig triangel är sträckan från en mittpunkt av en sida till respektive centroid en tredjedel jämfört med sträckan från samma punkt till motstående hörn. Därmed kan vi skriva

$$|AE| = b\left(\frac{2}{3}\right)\left(\sin \frac{\pi}{3}\right) = b\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = b\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = b\frac{3}{3\sqrt{3}} = \frac{b}{\sqrt{3}},$$

och

$$|AF| = c\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{c}{\sqrt{3}}.$$

Nu har vi att (5) är ekvivalent med

$$|EF|^2 = \left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\left(\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\left(\frac{c}{\sqrt{3}}\right)\cos\left(A + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{b^2}{3} + \frac{c^2}{3} - 2\frac{bc}{3}\cos\left(A + \frac{\pi}{3}\right).$$

$$\iff 3|EF|^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(A + \frac{\pi}{3}\right).$$

Enligt additionsformeln för Cosinus kan vi skriva om $\cos\left(A + \frac{\pi}{3}\right)$ som

$$\cos A \cos \frac{\pi}{3} - \sin A \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\cos A}{2} - \frac{\sqrt{3}\sin A}{2}.$$

Vi sätter in detta i (5) och får att

$$3|EF|^2 = b^2 + c^2 - bc\cos A + \sqrt{3}bc\sin A.$$

Vi har från Cosinusatsen att

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \iff a^2 - b^2 - c^2 = -2bc\cos A \iff \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} = -bc\cos A.$$

Samtidigt har vi från Sinussatsen att

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \iff a = \frac{b\sin A}{\sin B} = \frac{c\sin A}{\sin C} \iff ab = \frac{b^2\sin A}{\sin B} = \frac{bc\sin A}{\sin C}$$

$$\iff bc\sin A = ab\sin C = 2\Delta$$

där Δ är arean av $\triangle ABC$.

Nu kan vi skriva om (5) igen och får att

$$3|EF|^2 = b^2 + c^2 + \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2} + 2\sqrt{3}\Delta = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 2\sqrt{3}\Delta$$

$$\iff |EF|^2 = \frac{(a^2 + b^2 + c^2)}{6} + \frac{2\sqrt{3}\Delta}{3}.$$

Om vi gör likadant för sidorna FD och DE får vi lika högerled, alltså är $|EF| = |FD| = |DE|$. Triangeln $\triangle DEF$ har lika långa sidor och därmed är den liksidig. □

Komplext Bevis

Låt $\triangle z_1 z_2 z_3$ vara en godtycklig triangel och $\triangle w_1 z_3 z_2$, $\triangle z_3 w_2 z_1$ samt $\triangle z_2 z_1 w_3$ vara liksidiga trianglar med samma orientering som $\triangle 1\omega\omega^2$. Från Sats 1.6.6. vet vi att ekvationen för $\triangle 1\omega\omega^2$ är lika med $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Låt också $\xi_1 = D$, $\xi_2 = E$ och $\xi_3 = F$ beteckna centroiderna för respektive liksidiga trianglar. Då har vi att

$$w_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2 = 0,$$

$$z_3 + \omega w_2 + \omega^2 z_1 = 0$$

och att

$$z_2 + \omega z_1 + \omega^2 w_3 = 0.$$

Att triangeln $\triangle \xi_1 \xi_2 \xi_3$ är liksidig visas av följande beräkning:

$$\begin{aligned} & \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \\ &= \frac{1}{3}(w_1 + z_3 + z_2) + \frac{\omega}{3}(z_3 + w_2 + z_1) + \frac{\omega^2}{3}(z_2 + z_1 + w_3) \\ &= \frac{1}{3} \left((w_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2) + (z_3 + \omega w_2 + \omega^2 z_1) + (z_2 + \omega z_1 + \omega^2 w_3) \right) = 0 \end{aligned}$$

Varför $\frac{1}{3}$? Jo, för att avståndet för sträckan från mittpunkten av en sida till respektive motstående hörn av en godtycklig triangel är en tredjedel från centroiden (se appendix 5.4). Varje inre parentes är lika med noll eftersom var och en av dessa representerar liksidiga trianglar. Alltså, triangeln $\triangle \xi_1 \xi_2 \xi_3$ är liksidig. \square

2.2 Ptolemaios Sats

Låt en sida betecknas som ihopsatta stora bokstäver, exempelvis en sida AB . Låt sidlängder betecknas på samma sätt fast med ett streck över, exempelvis en sidlängd \overline{AB} . Låt detta gälla för resten av uppsatsen.

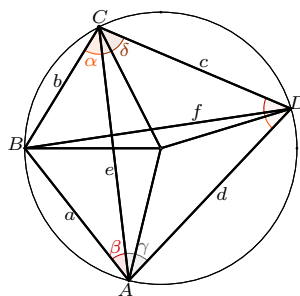
Sats 2.2 För fyra godtyckliga punkter A, B, C, D i planet så gäller

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} \geq \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

Likhet gäller om och endast om dessa fyra punkter är kocykliska eller kolinjära och ligger i alfabetisk ordning (medsols eller motsols) (Hahn, 1994).

Trigonometriskt Bevis

Betrakta följande figur:



Från appendix 5.2.1. har vi att vinkeln $\alpha = \angle ACB = \angle ADB$ och att vinkeln $\beta = \angle BDC = \angle BAC$. Notera också att från appendix 5.2.3 har vi att innebörden av att fyrhörningen $ABCD$ är kocyklisk är ekvivalent med följande:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \angle BAD + \angle BCD = 180^\circ.$$

Vi har från Sinussatsen att

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = \frac{d}{\sin \delta} = \frac{e}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{f}{\sin(\beta + \gamma)} = 2R.$$

Låt origo O vara mittpunkten till cirkeln. Låt cirkelns radie betecknas R . Från appendix 5.3 kan vi härmed beskriva respektive sidlängder som

$$|a| = 2R \sin \alpha, \quad |b| = 2R \sin \beta, \quad |c| = 2R \sin \gamma$$

$$|d| = 2R \sin \delta = 2R \sin(180^\circ - (\alpha + \beta + \gamma)) = 2R \sin(\alpha + \beta + \gamma)$$

samt att

$$|e| = 2R \sin(\alpha + \beta)$$

$$|f| = 2R \sin(\beta + \gamma).$$

Utifrån detta kan Ptolemaios sats skrivas som

$$\begin{aligned} \overline{AC} \cdot \overline{BD} &= 2R \sin(\alpha + \beta) \cdot 2R \sin(\beta + \gamma) = 4R^2 \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \gamma) \\ &= \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{BC} \cdot \overline{AD} = 2R \sin \alpha \cdot 2R \sin \gamma + 2R \sin \beta \cdot 2R \sin(\pi - (\alpha + \beta + \gamma)) \\ &\iff 4R^2 \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \gamma) = 4R^2(\sin \alpha \sin \beta + \sin \beta \sin(\pi - (\alpha + \beta + \gamma))) \\ &\iff \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \gamma) = \sin \alpha \sin \beta + \sin \beta \sin(\alpha + \beta + \gamma). \end{aligned}$$

Vi använder additionsformeln för Sinusfunktionen för vänster- och högerled för att sedan jämföra om de är ekvivalenta. Vi börjar med vänsterledet. Vi har då att

$$\begin{aligned} V.L. &= \sin(\alpha + \beta) \sin(\beta + \gamma) = (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)(\sin \beta \cos \gamma + \cos \beta \sin \gamma) \\ &= \sin^2 \beta \cos \gamma \cos \alpha + \sin \alpha \cos \beta \sin \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \beta \cos \beta \sin \gamma + \sin \alpha \cos^2 \beta \sin \gamma. \end{aligned} \quad (6)$$

Låt $\alpha + \beta = \xi$, då har vi för högerledet att

$$\begin{aligned} H.L. &= \sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin(\xi + \gamma) \\ &= \sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta(\sin \xi \cos \gamma + \cos \xi \sin \gamma) = \sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta(\sin \alpha + \beta \cos \gamma + \cos \alpha + \beta \sin \gamma) \\ &= \sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta(\cos \gamma(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) + \sin \gamma(\cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \alpha)) \\ &= \sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \gamma \cos \alpha \sin \beta + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha \cos \beta - \sin \beta \sin \gamma \sin \beta \sin \alpha \\ &= \sin^2 \beta \cos \gamma \cos \alpha + \sin \beta \cos \gamma \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \gamma - \sin^2 \beta \sin \gamma \sin \alpha. \end{aligned} \quad (7)$$

Här ser vi direkt att de tre första termerna i (6) överensstämmer med de tre första termerna för V.L. i (7). Vi behöver alltså undersöka om resterande termer för respektive led är ekvivalenta. Vi använder trigonometriska ettan och får att

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \gamma - \sin \gamma \sin \alpha \sin^2 \beta &= \sin \alpha \sin \gamma - (\sin \gamma \sin \alpha)(1 - \cos^2 \beta) = \sin \alpha \sin \gamma - \sin \gamma \sin \alpha + \sin \gamma \sin \alpha \cos^2 \beta \\ &= \sin \alpha \cos^2 \beta \sin \gamma.\end{aligned}$$

□

Komplext Bevis

För fyra komplexa tal $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ har vi denna identitet:

$$\begin{aligned}(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) + (\alpha - \delta)(\beta - \gamma) \\ &= \alpha\gamma - \alpha\delta - \beta\gamma + \beta\delta + \alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\delta + \delta\gamma \\ &= \alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma + \delta\gamma = (\alpha - \gamma)(\beta - \delta).\end{aligned}$$

Med triangelolikheten har vi att

$$|\alpha - \beta| \cdot |\gamma - \delta| + |\alpha - \delta| \cdot |\beta - \gamma| \geq |\alpha - \gamma| \cdot |\beta - \delta|.$$

Låt $z_1 = (\alpha - \beta)(\gamma - \delta)$ och $z_2 = (\alpha - \delta)(\beta - \gamma)$, då blir vi triangelolikheten

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Från Sats 1.3 fick vi att detta blir en likhet om och endast om $\frac{z_1}{z_2} \geq 0 \in \mathbb{R}$. Därför undersöker vi om $\frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)} \geq 0 \in \mathbb{R}$. Vi har att om

$$\frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)} = \frac{\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \delta}}{\frac{\beta - \gamma}{\gamma - \delta}} \quad (8)$$

är ett positivt reellt tal, så är det ekvivalent med att

$$\frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\gamma - \beta)(\alpha - \delta)} = \frac{\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \delta}}{\frac{\gamma - \beta}{\gamma - \delta}} \quad (9)$$

är ett negativt reellt tal. Hur kan vi vara säkra på det? Notera att $(\beta - \gamma) = -(\gamma - \beta)$, då är det relativt enkelt att se ekvivalensen. Annars kan en testa fall för fall. Nu, att $\frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\gamma - \beta)(\alpha - \delta)} < 0$ är ekvivalent med att

$$\arg\left(\frac{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)}{(\gamma - \beta)(\alpha - \delta)}\right),$$

vilket från avsnitt 1.5.2 är

$$= \arg\left\{\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \delta}\right\} - \arg\left\{\frac{\gamma - \beta}{\gamma - \delta}\right\} = \pi + 2\pi n \text{ där } n \in \mathbb{Z}.$$

Notera att sista likhetstecknet beror på appendix 5.2.3.

För göra slutet lite tydligare, låt oss begrunda varför Appendix 5.2.3 är relevant. Vi har att $\arg\left\{\frac{\alpha - \beta}{\alpha - \delta}\right\}$ är vinkeln mellan $\vec{\beta\alpha}$ till $\vec{\alpha\delta}$ och $\arg\left\{\frac{\gamma - \beta}{\gamma - \delta}\right\}$ är vinkeln mellan $\vec{\beta\gamma}$ till $\vec{\delta\gamma}$. Från Appendix 5.2.3 skulle detta ge oss att

$$360^\circ - \angle\delta\gamma\beta - \angle\beta\alpha\delta = 180^\circ = \pi.$$

Detta förutsätter som sagt att respektive punkter ligger på en cirkel. Sammantaget implicerar ekvivalenserna, tillsammans med triangelolikheten och appendix 5.2.3 att $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ är kocykliska där α och γ är på motsatta hörn diagonalt sätt, samma gäller för β och δ . Detta innebär i sin tur att våra punkter är i alfabetisk ordning medsols eller motsols.

□

Komplext Bevis med Cross Ratio

Låt uttrycket $(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ definieras som $\frac{(\alpha-\gamma)(\beta-\delta)}{(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)}$. Detta kallas för Cross Ratio, vilket vi kommer stötta på mer i avsnitt 3.4.

Från förgående komplexa bevis hade vi att $z_1 = (\alpha - \beta)(\gamma - \delta)$ och att $z_2 = (\alpha - \delta)(\beta - \gamma)$. Med detta får vi att

$$\begin{aligned} \overline{AB} \cdot \overline{CD} + \overline{AD} \cdot \overline{BC} &= |\alpha - \beta||\gamma - \delta| + |\alpha - \delta||\beta - \gamma| = |(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)| + |(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)| \\ &= \left(\frac{|(\alpha - \beta)(\gamma - \delta)|}{|(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)|} + 1 \right) |(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)| = \left(\left| \frac{z_1}{z_2} \right| + 1 \right) |(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)| \\ &\geq \left| \left(\frac{z_1}{z_2} + 1 \right) z_2 \right| = |(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) + (\alpha - \delta)(\beta - \gamma)|. \end{aligned} \quad (10)$$

Från identiteten i början av förgående komplexa bevis är detta lika med

$$|(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)| = |\alpha - \gamma||\beta - \delta| = \overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

Från beviset av triangelolikheten i avsnitt 1.3 får vi likhet om och endast om $\frac{z_1}{z_2} \geq 0 \in \mathbb{R}$.

□

Vi har alltså bevisat den generella formen av Ptolemaios sats (Istället för \overline{DA} har vi \overline{AD}). Från detta får vi följande korollär:

Korollär 2.2.1 Fyra punkter $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ är kocykliska eller kolinjära om och endast om

$$(\alpha, \beta; \gamma, \delta) \in \mathbb{R} \quad (\text{Hahn, 1994}).$$

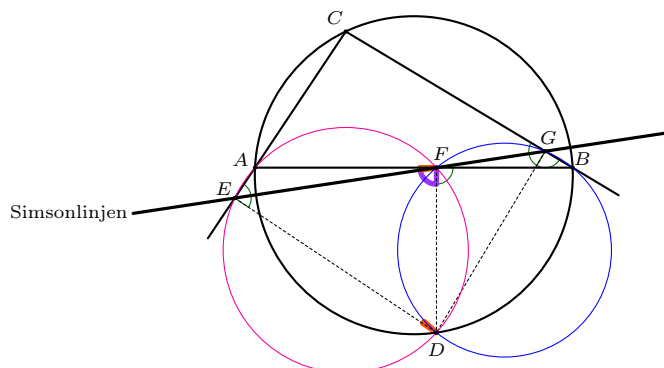
Det är enkelt att förstå att detta är sant eftersom generella formen av Ptolemaios sats är ekvivalent med

$$\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} + 1 = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} \iff -\frac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}} + 1 = -\frac{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}.$$

Detta korollär kommer vara användbart för avsnitten om Simsonlinjen, Cross Ratio och Möbiustransformationer.

2.3 Simsonlinjen

Sats 2.3 För en triangel $\triangle ABC$ och en punkt D , låt E, F, G vara punkter på linjerna BC, CA, AB vars respektive vinkel gentemot punkten D är rät. Då är punkterna E, F och G kolinjära om och endast om D ligger på cirkeln som omger hörnen till $\triangle ABC$ (Hahn, 1994).



Trigonometriskt Bevis

Vi har att vinkeln $\angle BGD$ är rät och utifrån detta har vi från Thales sats (appendix 5.2.2) att linjen \overline{BD} är en diameter i den cirkel som går genom punkterna B, G och D . Vi har även att vinkeln $\angle BFD$ är rät, så den cirkel som går genom punkterna B, F, D har samma diameter som går genom punkterna B, G, D . Alltså ligger hörnen till fyrhörningen $\square BGF D$ på samma cirkel och är därmed cyklisk.

På samma sätt är fyrhörningen $\square AED F$ cyklisk eftersom vinklarna $\angle AED$ och $\angle AFD$ är räta.

Vidare har vi från appendix 5.2.1. att

$$\angle DAE = \angle DFE \quad \text{och att} \quad \angle BFG = \angle BDG = \frac{\pi}{2} - \angle DBG = \frac{\pi}{2} - \angle DBC.$$

Högra likhetstecknen innebär att $\angle GFD = \frac{\pi}{2} + \angle BFG = \frac{\pi}{2} + (\frac{\pi}{2} - \angle DBC) = \pi - \angle DBC$.

Eftersom $\square ACBD$ är en cyklisk fyrhörning har vi från appendix 5.2.3 att $\angle DBC + \angle DAC = \pi \iff \angle DAC = \pi - \angle DBC$. Nu, eftersom $\angle DAE = \angle DFE$ har vi att

$$\angle GFD = \pi - \angle DBC = \angle DAC = \pi - \angle DAE = \pi - \angle DFE$$

och eftersom

$$\angle GFE = \angle DFE + \angle GFD = \angle DFE + (\pi - \angle DFE) = \pi$$

så ligger punkterna G, E och F på en rät linje.

Om D inte ligger på cirkeln så är $\angle ADB + \angle ACB \neq \pi$ och därmed får vi att $\angle DAC + \angle DBC \neq \pi$. Då skulle våra beräkningar inte gå ihop och då skulle $\angle GFE \neq \pi$. Sammantaget har vi bevisat att om och endast om relationen gäller. □

Komplext Bevis

Vi utgår från samma figur som vi gjorde i förgående trigonometriska bevis, men istället antar vi att $\triangle ABC$ ligger på enhetscirkeln och att punkterna A, B, C, D representeras av de komplexa punkterna $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ respektive.

Från avsnitt 1.6.4 kan vi skriva en linje med tre kolinjära punkter, i vårt fall sidan AB enligt:

$$\begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \alpha & \bar{\alpha} & 1 \\ \beta & \bar{\beta} & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) - \bar{z}(\alpha - \beta) + (\alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta) = 0.$$

Låt oss skriva om uttrycket. Låt $\alpha = a + ib$. Vi vet att $|\alpha| = 1$ utifrån vårt antagande om att α ligger på enhetscirkeln. Nu har vi att $\frac{1}{a+ib} = \frac{1(a-ib)}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a-ib}{|\alpha|^2} = a - ib$. Alltså gäller relationen $\bar{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$ i detta sammanhang, samma för β . Vi använder dessa relationer och får att uttrycket är ekvivalent med

$$\begin{aligned} z\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta}\right) - \bar{z}(\alpha - \beta) + \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\beta}{\alpha} = 0 &\iff \frac{z\beta - z\alpha}{\alpha\beta} - \bar{z}(\alpha - \beta) + \frac{\alpha^2 - \beta^2}{\alpha\beta} = 0 \\ \iff \frac{z(\beta - \alpha)}{\alpha\beta} - \bar{z}(\alpha - \beta) + \frac{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}{\alpha\beta} &\iff -\frac{z(\alpha - \beta)}{\alpha\beta} - \bar{z}(\alpha - \beta) + \frac{(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)}{\alpha\beta} = 0 \\ \iff -\frac{z}{\alpha\beta} - \bar{z} + \frac{(\alpha + \beta)}{\alpha\beta} = 0 &\iff \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} = \frac{z}{\alpha\beta} + \bar{z} \\ \iff z + \alpha\beta\bar{z} = \alpha + \beta. & \tag{11} \end{aligned}$$

Alltså är sidan $AB = \alpha + \beta = z + \alpha\beta\bar{z}$.

Nu, linjen som går genom mittpunkten av sidan AB och är rät gentemot punkterna A och B ges enligt (från Sats 1.6.5):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} z & \bar{z} & 1 \\ \alpha & \bar{\beta} & 1 \\ \beta & \bar{\alpha} & 1 \end{vmatrix} = z(\bar{\alpha} - \bar{\beta}) - \bar{z}(\alpha - \beta) + \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = \frac{z}{\beta} - \frac{z}{\alpha} - \bar{z}(\alpha - \beta) + 1 - 1 = 0 \\ \iff \frac{z(\alpha - \beta)}{\alpha\beta} - \bar{z}(\alpha - \beta) = 0 &\iff \frac{z}{\alpha\beta} - \bar{z} = 0 \iff z - \alpha\beta\bar{z} = 0. \end{aligned}$$

Alltså, linjen som är rät gentemot punkterna A och B , och går genom punkterna z och δ är

$$z - \alpha\beta\bar{z} = \delta - \alpha\beta\bar{\delta}. \tag{12}$$

Skärningspunkten $F(\lambda)$ mellan denna linje och AB ges genom att lösa ekvationen som fås genom addera ihop ekvation (11) och (12), alltså genom att lösa:

$$\begin{aligned} (z + \alpha\beta\bar{z}) + (z - \alpha\beta\bar{z}) = \alpha + \beta + \delta - \alpha\beta\bar{\delta} &\iff 2z = \alpha + \beta + \delta - \alpha\beta\bar{\delta} \\ \iff \lambda = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \delta - \alpha\beta\bar{\delta}). & \tag{13} \end{aligned}$$

På samma sätt får vi de andra skärningspunkterna G (låt den representeras av komplexa talet μ) och E (låt den representeras av komplexa talet v) genom att lösa

$$\mu = \frac{1}{2}(\beta + \gamma + \delta - \beta\gamma\bar{\delta}) \quad \text{och att} \quad v = \frac{1}{2}(\gamma + \alpha + \delta - \gamma\alpha\bar{\delta}).$$

Nu, vi vet från korollär 2.2 att tre punkter är kolinjära (alternativt kocykliska) om och endast om $\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} \in \mathbb{R}$. För vår del är alltså skärningspunkterna E, F och G kolinjära om och endast om $\frac{\lambda - v}{\mu - v} \in \mathbb{R}$.

Vi har att

$$\begin{aligned} \frac{\lambda - v}{\mu - v} &= \frac{\frac{1}{2}(\alpha + \beta + \delta - \alpha\beta\bar{\delta}) - \frac{1}{2}(\gamma + \alpha + \delta - \gamma\alpha\bar{\delta})}{\frac{1}{2}(\beta + \gamma + \delta - \beta\gamma\bar{\delta}) - \frac{1}{2}(\gamma + \alpha + \delta - \gamma\alpha\bar{\delta})} = \frac{\frac{1}{2}(\beta - \gamma - \alpha\beta\bar{\delta} + \gamma\alpha\bar{\delta})}{\frac{1}{2}(\beta - \alpha - \beta\gamma\bar{\delta} + \gamma\alpha\bar{\delta})} \\ &= \frac{(\beta - \gamma)(1 - \alpha\bar{\delta})}{(\beta - \alpha)(1 - \gamma\bar{\delta})}. \tag{14} \end{aligned}$$

Nu, vi använder notationen $r = |\delta|$ (längden från punkten δ till cirkelns mittpunkt), vilket är detsamma som $(\delta\bar{\delta})^{\frac{1}{2}} \iff r^2 = \delta\bar{\delta} \iff \frac{r^2}{\delta} = \bar{\delta}$. Nu, vi kan skriva om ekvation (14) enligt:

$$\begin{aligned} & \frac{(\beta - \gamma)(1 - \alpha \frac{r^2}{\delta})}{(\beta - \alpha)(1 - \gamma \frac{r^2}{\delta})} = \frac{\beta - \beta\alpha \frac{r^2}{\delta} - \gamma + \gamma\alpha \frac{r^2}{\delta}}{\beta - \beta\gamma \frac{r^2}{\delta} - \alpha + \alpha\gamma \frac{r^2}{\delta}} \\ \iff & \frac{\frac{1}{\beta} - \frac{\delta r^{-2}}{\beta\alpha} - \frac{1}{\gamma} + \frac{\delta r^{-2}}{\gamma\alpha}}{\frac{1}{\beta} - \frac{\delta r^{-2}}{\beta\gamma} - \frac{1}{\alpha} + \frac{\delta r^{-2}}{\alpha\gamma}} = \frac{\frac{\beta\alpha - \beta\delta r^{-2}}{\beta^2\alpha} + \frac{\gamma\delta r^{-2} - \gamma\alpha}{\gamma^2\alpha}}{\frac{\beta\gamma - \beta\delta r^{-2}}{\beta^2\gamma} + \frac{\alpha\delta r^{-2} - \alpha\gamma}{\alpha^2\gamma}} = \frac{\frac{\gamma^2\alpha(\beta\alpha - \beta\delta r^{-2}) + \beta^2\alpha(\gamma\delta r^{-2} - \gamma\alpha)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}}{\frac{\alpha^2\gamma(\beta\gamma - \beta\delta r^{-2}) + \beta^2\gamma(\alpha\delta r^{-2} - \alpha\gamma)}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}} \\ & = \frac{\gamma^2\alpha(\beta\alpha - \beta\delta r^{-2}) + \beta^2\alpha(\gamma\delta r^{-2} - \gamma\alpha)}{\alpha^2\gamma(\beta\gamma - \beta\delta r^{-2}) + \beta^2\gamma(\alpha\delta r^{-2} - \alpha\gamma)} = \frac{\gamma^2\alpha(\beta\alpha - \beta\delta r^{-2}) - \beta^2\alpha(\gamma\alpha - \gamma\delta r^{-2})}{\alpha^2\gamma(\beta\gamma - \beta\delta r^{-2}) - \beta^2\gamma(\alpha\gamma - \alpha\delta r^{-2})} \\ & = \frac{\gamma^2\alpha\beta(\alpha - \delta r^{-2}) - \beta^2\alpha\gamma(\alpha - \delta r^{-2})}{\alpha^2\gamma\beta(\gamma - \delta r^{-2}) - \beta^2\gamma\alpha(\gamma - \delta r^{-2})} = \frac{\gamma\alpha\beta(\gamma(\alpha - \delta r^{-2}) - \beta(\alpha - \delta r^{-2}))}{\alpha\gamma\beta(\alpha(\gamma - \delta r^{-2}) - \beta(\gamma - \delta r^{-2}))} \\ & = \frac{(\gamma - \beta)(\alpha - \delta r^{-2})}{(\alpha - \beta)(\gamma - \delta r^{-2})} = \frac{\frac{\gamma - \beta}{\alpha - \beta}}{\frac{\gamma - \delta r^{-2}}{\alpha - \delta r^{-2}}} = (\gamma, \alpha; \beta, \delta r^{-2}). \end{aligned}$$

Vet vet alltså att F, G och E är kolinjära om och endast om

$$(\gamma, \alpha; \beta, \delta r^{-2}) \in \mathbb{R},$$

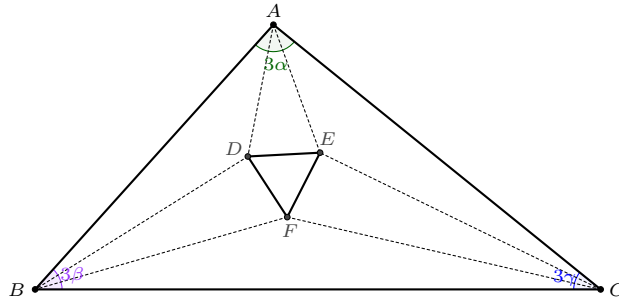
vilket är ekvivalent med att $\gamma, \alpha, \beta, \delta r^{-2}$ är kocykliska, vilket i sin tur är ekvivalent med att

$$|\delta r^{-2}| = 1 \iff |\delta| \left| \frac{1}{r^2} \right| = 1 \iff |\delta| = |r^2| = r = 1.$$

Den sista likheten beror på att vi utgick från enhetscirkeln. Kom ihåg också att vi förutsatte att de andra punkterna α, β och γ redan låg på enhetscirkeln, därmed behöver vi bara visa att avståndet från punkten δ till enhetscirkelns centrum har längd 1, vilket vi uppenbarligen har lyckats med. Alltså existerar Simsonlinjen. \square

2.4 Morleys liksidiga triangel

Sats 2.4 Om man för varje hörn av en godtycklig triangel bildar en trisektor (en vinkel som är uppdelad i tre lika stora vinklar) sådana att respektive linjer skär varandra (se bild), då får vi tre skärningspunkter, som utgör hörnen till en liksidig triangel (Hahn, 1994).



Trigonometriskt Bevis

Låt oss utgå från triangeln $\triangle ABC$ i bilden ovan, som symboliserar en godtycklig triangel. För $\triangle ABC$ har vi att $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = \pi \iff \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{3}$.

Låt cirkeln som omger triangelns hörn ha radie $R = 1$. Från Sinussatsen har vi att $\overline{AB} = 2 \sin 3\gamma$, $\overline{BC} = 2 \sin 3\alpha$ och att $\overline{CA} = 2 \sin 3\beta$. Nu, för $\triangle DEF$ har vi från Sinussatsen att

$$\frac{\overline{BF}}{\sin \gamma} = \frac{\overline{FC}}{\sin \beta} = \frac{\overline{CB}}{\sin(\pi - (\beta + \gamma))} = \frac{2 \sin 3\alpha}{\sin(\pi - (\beta + \gamma))} = \frac{2 \sin 3\alpha}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{2 \sin 3\alpha}{\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)}.$$

Detta är ekvivalent med att

$$\overline{BF} = \frac{2 \sin 3\alpha}{\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)} \sin \gamma.$$

Vi kan förenkla detta uttryck genom identiteten $\sin 3\theta = 4 \sin \theta \sin(\frac{\pi}{3} + \theta) \sin(\frac{\pi}{3} - \theta)$. Bevis för detta ges enligt följande:

$$4 \sin \theta \sin(\frac{\pi}{3} + \theta) \sin(\frac{\pi}{3} - \theta) = 2 \sin \theta \left(2 \sin(\frac{\pi}{3} + \theta) \sin(\frac{\pi}{3} - \theta) \right).$$

Vi använder den trigonometriska identiteten $2 \sin A \sin B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$ och får att

$$4 \sin \theta \sin(\frac{\pi}{3} + \theta) \sin(\frac{\pi}{3} - \theta) = 2 \sin \theta \left(\cos(\frac{\pi}{3} - \theta - \frac{\pi}{3} - \theta) - \cos(\frac{\pi}{3} - \theta + \frac{\pi}{3} + \theta) \right) = 2 \sin \theta \left(\cos 2\theta - \cos \frac{2\pi}{3} \right)$$

$$= 2 \sin \theta \left(\cos 2\theta - \left(-\frac{1}{2}\right) \right) = 2 \sin \theta \left(\frac{2 \cos 2\theta + 1}{2} \right) = \sin \theta (2 \cos 2\theta + 1) = \sin \theta (2(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 1)$$

$$= \sin \theta (2(1 - 2 \sin^2 \theta) + 1) = \sin \theta (3 - 4 \sin^2 \theta) = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta.$$

Tillbaka till beviset för Morleys triangel. Låt vinkeln $\theta = \alpha$. Då får vi att

$$\begin{aligned} \overline{BF} &= \frac{2 \sin 3\alpha}{\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)} \sin \gamma = \frac{2(4 \sin \alpha \sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha) \sin \gamma)}{\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)} \\ &= \frac{8 \sin \alpha \sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) \sin(\frac{\pi}{3} - \alpha) \sin \gamma}{\sin(\frac{\pi}{3} - \alpha)} = 8 \sin \alpha \sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) \sin \gamma. \end{aligned}$$

På samma sätt är $\overline{BD} = 8 \sin \gamma \sin(\frac{\pi}{3} + \gamma) \sin \alpha$. Vi kollar om detta stämmer med Cosinussatsen. För triangeln $\triangle BFD$ är

$$|FD|^2 = |BF|^2 + |BD|^2 - 2|BF| \cdot |BD| \cos \beta$$

$$= 64 \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma \left(\sin^2(\frac{\pi}{3} + \gamma) + \sin^2(\frac{\pi}{3} + \alpha) - 2 \sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) \sin(\frac{\pi}{3} + \gamma) \cos \beta \right). \quad (15)$$

Notera att $\alpha + \beta + \gamma + \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = (\frac{\pi}{3} + \alpha) + (\frac{\pi}{3} + \gamma) + \beta = \pi$. Alltså existerar en triangel med vinklarna $(\frac{\pi}{3} + \alpha)$, $(\frac{\pi}{3} + \gamma)$ och β . Självklart existerar det en stor familj av sådana trianglar, men kom ihåg att vi har valt cirkeln med $R = 1$. Utifrån att den stora parantesen i uttrycket är på formen för Cosinussatsen kan vi beskriva sidlängden $R \sin^2 \beta$ enligt:

$$\sin^2 \beta = \sin^2(\frac{\pi}{3} + \alpha) + \sin^2(\frac{\pi}{3} + \gamma) - 2 \sin(\frac{\pi}{3} + \alpha) \sin(\frac{\pi}{3} + \gamma) \cos \beta.$$

Om vi sätter in detta i ekvationen för (15) får vi att

$$|FD|^2 = 64 \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma \sin^2 \beta \iff |FD| = 8 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Om vi utför liknande beräkningar för trianglarna $\triangle ADE$ och $\triangle CEF$ får vi samma resultat. Alltså är

$$|FD| = |FE| = |ED| = 8 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Alltså har $\triangle DEF$ lika långa sidor och är därmed liksidig. □

Komplex Bevis

Innan vi redogör för beviset behöver vi följande lemma:

Lemma Anta att t_1, t_2, t_3, t_4 är punkter på enhetscirkeln. Då skär bågarna $t_1 t_2$ och $t_3 t_4$ varandra i punkten

$$z = \frac{\overline{t_1 + t_2} - \overline{t_3} - \overline{t_4}}{t_1 t_2 - t_3 t_4} \quad (\text{Hahn, 1994}).$$

Bevis

Från beviset av Simsonlinjen har vi här att linjen, som passerar punkterna t_1 och t_2 , samt punkterna t_3 och t_4 är

$$z + t_1 t_2 \bar{z} = t_1 + t_2 \quad \text{och} \quad z + t_3 t_4 \bar{z} = t_3 + t_4$$

respektive.

Då har vi att skärningspunkten för dessa två linjer ges av

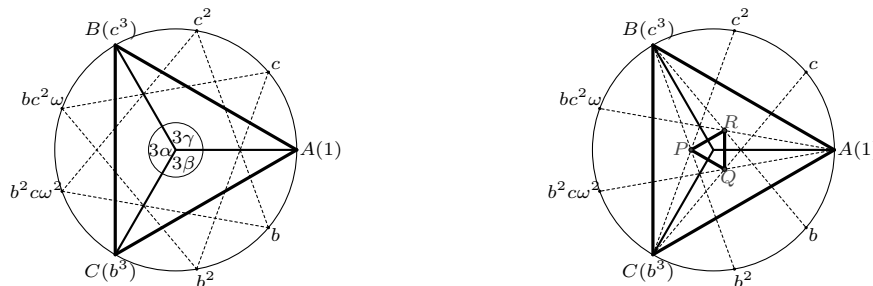
$$z + (t_1 t_2) \bar{z} - t_1 - t_2 = z + (t_3 t_4 - t_3 - t_4) \bar{z} \iff (t_1 t_2 - t_3 t_4) \bar{z} = t_1 + t_2 - t_3 - t_4$$

$$\iff z = \frac{\overline{t_1 + t_2} - \overline{t_3} - \overline{t_4}}{t_1 t_2 - t_3 t_4}.$$

□

Bevis av Sats 2.4

Låt triangeln $\triangle ABC$ ligga på enhetscirkeln enligt följande figurer:



Här ser vi direkt att

$$\angle AOB = 3\gamma,$$

där $0 < \gamma < \frac{2\pi}{3}$ och att

$$\angle AOC = 3\beta,$$

där $-\frac{2\pi}{3} < \beta < 0$ (notera att detta är ekvivalent med $\frac{2\pi}{3} > -\beta > 0$).

Vi får även att

$$\angle BOC = 3\alpha$$

där $\alpha = \frac{2\pi}{3} + \beta - \gamma > 0$. Detta eftersom vinkeln $\angle AOC$ har motsatt orientering, som ger oss att

$$3\alpha = 2\pi - (-3\beta) - 3\gamma > 0 \iff \alpha = \frac{2\pi}{3} + \beta - \gamma > 0.$$

Med denna vetskap tillsammans med vänstra figuren ser vi att argumenten för punkterna som trisekterar bågen \widehat{BC} (och som inte innehåller punkten A) är

$$\alpha + 3\gamma = \frac{2\pi}{3} + \beta - \gamma + 3\gamma = \frac{2\pi}{3} + \beta + 2\gamma$$

och

$$2\alpha + 3\gamma = \frac{4\pi}{3} + 2\beta - 2\gamma + 3\gamma = \frac{4\pi}{3} + 2\beta + \gamma.$$

Därmed, om vi betecknar punkterna som trisekterar $\widehat{AB}, \widehat{AC}$ som c, c^2 och b, b^2 respektive. Då är $B = c^3$ och $C = b^3$ och punkterna som trisekterar \widehat{BC} är givna av $bc^2\omega$ och $b^2c\omega^2$ där $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ (från Sats 1.6.6).

Låt nu $P(\lambda), Q(\mu), R(v)$ vara skärningsområdena för de likbenta trisektorerna med vinklar mot B och C, C och A , samt A och B respektive. Då, från relationen vi såg i komplexa beviset för Simsonlinjen och vårt lemma får vi nu att

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\overline{b^2 + c^3 - b^3 - c^2}}{b^2c^3 - b^3c^2} = \frac{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^3} - \frac{1}{b^3} - \frac{1}{c^2}}{\frac{1}{b^2c^3} - \frac{1}{b^3c^2}} = \frac{\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^3} - \frac{1}{b^3} - \frac{1}{c^2}}{\frac{b^3c^2 - b^2c^3}{b^5c^5}} = \frac{b^5c^5(\frac{c^3+b^2}{b^2c^3} + \frac{-c^2-b^3}{b^3c^2})}{b^3c^2 - b^2c^3} \\ &= \frac{b^3c^2(c^3 + b^2) + b^2c^3(-c^2 - b^3)}{b^3c^2 - b^2c^3} = \frac{b^3c^5 + b^5c^2 - b^2c^5 - b^5c^3}{b^3c^2 - b^2c^3} = \frac{b^2(bc^5 + b^3c^2 - c^5 - b^3c^3)}{b^2(bc^2 - c^3)} \\ &= \frac{c^2(bc^3 + b^3 - c^3 - b^3c)}{c^2(b-c)} = \frac{bc^3 + b^3 - c^3 - b^3c}{b-c} = \frac{(b-c)(b^2 + bc + c^2) - bc(b^2 - c^2)}{b-c} \\ &= \frac{(b-c)(b^2 + bc + c^2 - bc(b+c))}{b-c} = (b^2 + bc + c^2) - bc(b+c), \\ \mu &= \frac{1 + \overline{b^2c^1\omega^2 - b^3 - c}}{b^2c^1\omega^2 - b^3c} = \frac{1 + \frac{1}{b^2c\omega^2} - \frac{1}{b^3} - \frac{1}{c}}{\frac{1}{b^2c\omega^2} - \frac{1}{b^3c}} \\ &= \frac{\frac{b^2c\omega^2+1}{b^2c\omega^2} + \frac{-c-b^3}{b^3c}}{\frac{b^3c-b^2c\omega^2}{b^5c^2\omega^2}} = \frac{b^5c^2\omega^2(\frac{b^5c^2\omega^2+b^3c-b^3c^3\omega^2-b^5c\omega^2}{b^5c^2\omega^2})}{b^3c - b^2c\omega^2} = \frac{b^2c(b^3c\omega^2 + b - c\omega^2 - b^3\omega^2)}{b^2c(b - \omega^2)} \\ &= \frac{b^3c\omega^2 + b - c\omega^2 - b^3\omega^2}{b - \omega^2}. \end{aligned}$$

Kom nu ihåg från beviset av 1.6.6 att $w^3 = 1$. Alltså är detta ekvivalent med

$$\begin{aligned} \frac{b^3c + bw - c - b^3}{bw - 1} &= \frac{c(b^3 - 1) - b(b^2 - w)}{w(b - w^2)} \\ &= w^2 \left(c(b^2 + bw^2 + w) - b(b + w^2) \right) \end{aligned}$$

eftersom

$$c(b^3 - 1) - b(b^2 - w) = w(b - w^2)w^2(c(b^2 + bw^2 + w) - b(b + w^2)).$$

Tillsist, med liknande beräkningar får vi att

$$\begin{aligned} v &= \frac{1 + b^{-1}c^{-2}\omega^{-1} - b^{-1} - c^{-3}}{b^{-1}c^{-2}\omega^{-1} - b^{-1}c^{-3}} = \frac{bc^3 + c\omega^2 - c^3 - b}{c\omega^2 - 1} \\ &= \frac{b(c^3 - 1) - c(c^2 - \omega^2)}{\omega^2(c - \omega)} = \omega(b(c^2 + c\omega + \omega^2) - c(c + \omega)) \end{aligned}$$

Därmed är

$$\lambda + \omega\mu + \omega^2\nu$$

$$= b^2 + bc + c^2 - b^2c - bc^2 + b^2c + bc\omega^2 + c\omega - b^2 - b\omega^2 + bc^2 + bc\omega + b\omega^2 - c^2 - c\omega = 0.$$

□

3 Möbiustransformationer

Möbiustransformationer har en mängd användningsområden inom fysik och matematik. Bland annat för Minkowski Space, Lorentz transformationer, optik, Special Relativity, växelströmsförlopp, vätskedynamik etc. Möbiustransformationer använder sig av komplexa tal och är en av de mer elementära konforma transformationerna som finns och därför känns det angeläget att ge en introduktion för att visa de komplexa talens användbarhet på det sättet.

För att kunna förstå Möbiustransformationer ska vi först bekanta oss med Riemannsfären för att sedan se ett intressant förhållande mellan Möbiustransformationer och Riemannsfären.

3.1 Riemannsfären

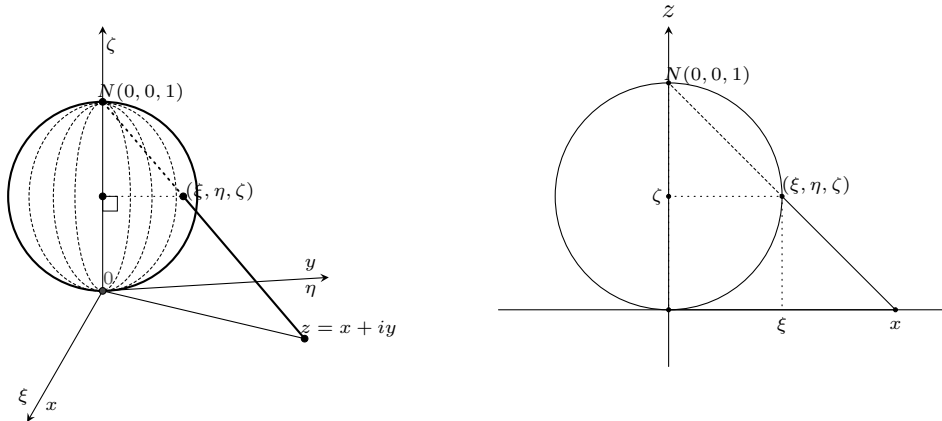
3.1.1 Att beskriva punkter

Låt vår Riemannsfär ha origo i punkten $(0, 0, \frac{1}{2})$ där längden för radien är $\frac{1}{2}$ enligt ekvationen:

$$x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2.$$

Vi kan säga att denna sfär står ovanpå komplexa planet eftersom den har sydpolen i origo (se bild nedan). Om vi ritar en linje l från en punkt $z = x + iy$ i komplexa planet till punkten $N = (0, 0, 1)$ på sfären, så skulle vi skära sfären innan vi når N . Den enda punkten som vi inte kan träffa på detta sätt, där vi skär sfären före N , är punkten N självt. För att åtgärda det lägger vi till ännu en punkt, nämligen 'oändlighetspunkten', som egentligen motsvarar oändligheten för planet. På samma sätt som en linje $y = x$ (där $x \rightarrow \infty$) anträffar linjen ifråga punkten N på Riemannsfären.

Tanken är att Riemannsfären ska representera komplexa planet $\hat{\mathbb{C}}$, som definieras som planet $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. För att förstå motsvarigheten av punkter på Riemanns sfär och punkter på $\hat{\mathbb{C}}$, betrakta Riemannsfären:



Den andra figuren illustrerar sfären om vi tittar längs med y -axeln. Utifrån likformighet (se appendix 5.1) ser vi att

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{(1-\zeta)}{1} = (1-\zeta),$$

Detta i sin tur är ekvivalent med att $\frac{x}{\xi} = \frac{y}{\eta} = \frac{1}{(1-\zeta)}$. Från detta får vi direkt att

$$x = \frac{\xi}{1-\zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1-\zeta}.$$

Från detta och att $z \in \mathbb{C}$ har vi att

$$z = x + iy = \frac{\xi}{1-\zeta} + \frac{i\eta}{1-\zeta} = \frac{\xi + i\eta}{1-\zeta}.$$

Nu, vi kan skriva om ekvationen för Riemannsfären enligt:

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\iff \xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - \left(\zeta^2 - \zeta + \frac{1}{4}\right) = \zeta - \zeta^2 = \zeta(1-\zeta)$$

$$\iff x^2(1-\zeta)^2 + y^2(1-\zeta)^2 = \zeta(1-\zeta) \iff x^2 + y^2 = \frac{\zeta}{(1-\zeta)},$$

alltså har vi att $|z|^2 = x^2 + y^2 = \frac{\zeta}{1-\zeta}$.

Det vi har åstadkommit är att beskriva x, y och z i ξ, η - och ζ -termer. Vi kan även göra det motsatta. Notera att

$$1 + |z|^2 = 1 + x^2 + y^2 = 1 + \frac{\zeta}{1-\zeta} = \frac{1-\zeta + \zeta}{1-\zeta} = \frac{1}{1-\zeta}.$$

Från detta ser vi att

$$\xi = x(1-\zeta) = \frac{x}{1+|z|^2} \quad \text{och att} \quad \eta = y(1-\zeta) = \frac{y}{1+|z|^2}.$$

Vi hittar ζ på följande sätt:

$$1 - \zeta = \frac{1}{1+|z|^2} \iff \zeta = 1 - \frac{1}{1+|z|^2} = \frac{1+|z|^2 - 1}{1+|z|^2} = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}.$$

Detta innebär att för varje punkt i komplexa planet finns en unik punkt på Riemannsfären och vice versa. Alltså är relationen mellan Riemannsfären och komplexa planet bijektiv om vi lägger till oändlighetspunkten vi talade om ovan.

3.1.2 Att beskriva linjer och cirklar

Förutom att relatera punkter från komplexa planet till punkter på sfären kan vi relatera cirklar och linjer på samma sätt. Vi har att cirkelns ekvation är

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad (16)$$

där $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ och $B^2 + C^2 \geq 4AD$ (notera att (16) blir en linjes ekvation när $A = 0$). Ekvation (16) i $\xi\eta\zeta$ -koordinater ges enligt:

$$\begin{aligned} A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 &\iff A\left(\frac{\zeta}{1-\zeta}\right) + B\left(\frac{\xi}{1-\zeta}\right) + C\left(\frac{\eta}{1-\zeta}\right) + D = 0 \\ &\iff A\zeta + B\xi + C\eta + D(1-\zeta) = 0 \end{aligned}$$

Varför är villkoret $B^2 + C^2 \geq 4AD$ relevant? Det har göra med att det ska finnas reella lösningar för andragradens ekvationer. Vi har nämligen att

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0 \iff (Ax^2 + Bx + D_1) + (Ay^2 + Cy + D_2) = 0,$$

där $D_1 + D_2 = D$. För att det ska finnas reella lösningar för ekvationen till höger behöver $Ax^2 + Bx + D_1$ uppfylla $B^2 - 4AD_1 \geq 0$ och $Ay^2 + Cy + D_2$ uppfylla $C^2 - 4AD_2$. Dessa villkor kommer från kvadratkomplettering när en löser ut variabeln för en andragradsekvation. Sammantaget, om vi adderar båda andragradsekvationerna så adderar vi respektive villkor och får att

$$B^2 - 4AD_1 + C^2 - 4AD_2 \geq 0 \iff B^2 + C^2 - 4A(D_1 + D_2) = B^2 + C^2 - 4AD \geq 0.$$

Villkoret för att det finns en lösning för cirkelns ekvation i komplexa planet är alltså $B^2 + C^2 \geq 4AD$.

Villkoret $B^2 + C^2 \geq 4AD$ motsvaras av villkoret för att det ska finnas en punkt på sfären där vår linje l (se avsnitt 3.1.1) skär igenom. Vi vet att vår Riemannsfär är på formen $(x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = (\frac{1}{2})^2)$. Centrum är alltså punkten $(0, 0, \frac{1}{2})$. Om vi sätter in detta i (16) får vi att

$$(A - D)z + Bx + Cy + D = 0 \iff \frac{1}{2}(A - D) + D = \frac{1}{2}(A + D) = 0.$$

Därefter, om vi tar avståndsformeln för sfärens centrala punkt och en punkt i komplexa planet (som sfären står på enligt bild från avsnitt 3.1.1) får vi alltså att villkoret $B^2 + C^2 \geq 4AD$ motsvaras av

$$\left| \frac{\frac{1}{2}(A - D) + D}{\sqrt{(A^2 + B^2 + (A - D)^2)}} \right| = \left| \frac{\frac{1}{2}(A + D)}{\sqrt{(A^2 + B^2 + (A - D)^2)}} \right| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

Vi är alltså halvvägs för att bevisa följande sats:

Sats 3.1.2 Cirklar och linjer i komplexa planet motsvaras av cirklar på sfären. Linjer motsvaras av cirklar som går genom nordpolen $N(0, 0, 1)$. På samma sätt, cirklar på sfären motsvaras av antingen cirklar eller linjer i komplexa planet (Hahn, 1994).

Bewis.

För att bevisa att cirklar på sfären motsvaras av antingen cirklar eller linjer i komplexa planet börjar vi med att observera att en cirkel på sfären är en skärningssektion av ett plan

$$A\xi + B\gamma + C\zeta + D = 0, \quad (17)$$

som i punkten $(0, 0, \frac{1}{2})$ uppfyller villkoren

$$\left| \frac{\frac{1}{2}C + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \right| \leq \frac{1}{2}, \quad \text{och} \quad A^2 + B^2 \geq 4D(C + D).$$

Vi har alltså villkoret som försäkrar existensen av en skärningspunkt. Varför villkoret $A^2 + B^2 \geq 4D(C + D)$? Jo, eftersom

$$A\xi + B\eta + C\zeta + D = 0 \iff A\left(\frac{z + \bar{z}}{2(1 + |z|^2)}\right) + B\left(\frac{z - \bar{z}}{2i(1 + |z|^2)}\right) + C\left(\frac{|z|^2}{1 + |z|^2}\right) + D = 0$$

$$\iff \frac{1}{2}A((x + iy) + (x - iy)) + \frac{1}{2i}B((x + iy) - (x - iy)) + C|z|^2 + D(1 + |z|^2) = 0$$

$$\iff Ax + By + (C + D)|z|^2 + D = 0 \iff Ax + By + (C + D)(x^2 + y^2) + D = 0.$$

Då $D = D_1 + D_2$ har vi att

$$Ax + By + (C + D)(x^2 + y^2) + D = 0 \iff \left((C + D)x^2 + Ax + D_1 \right) + \left((C + D)y^2 + By + D_2 \right) = 0.$$

För att respektive parantes ska ha en reell lösning måste de uppfylla $A^2 \geq 4D_1(C + D)$ och $B^2 \geq 4D_2(C + D)$ respektive. Detta får vi som sagt genom kvadratkomplettering. Om vi adderar ihop dem får vi att (17) måste uppfylla $A^2 + B^2 \geq 4D(C + D)$.

Om $C + D \neq 0$, då representerar ekvationen en cirkel, och om $C + D = 0$ (om cirkeln passerar nordpolen), representerar ekvationen en linje. □

3.1.3 Stereografisk projektion

Definition 3.1.3 Stereografisk projektion är den bijektiva relationen mellan punkter i komplexa planet $\hat{\mathbb{C}}$ och punkter på Riemannsfären (Schwerdtfeger, 1980).

Sats 3.1.3 Stereografisk projektion bevarar vinklar.

Följande resonemang motiverar på ett tydligt sätt varför denna sats är sann.

Utan att förlora generalitet kan vi anta att två kurvor som skär varandra i planet är två linjer, som skär varandra i punkten (x_0, y_0) . Från Sats 3.1.2 har vi att dessa två linjer avbildas på två cirklar på Riemannsfären som har skärningspunkterna (ξ_0, η_0, ζ_0) och nordpolen. Om två linjer i planet är

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{och} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

så är respektives stereografiska avbildning i planet

$$A_1\xi + B_1\eta + C_1(1 - \zeta) = 0 \quad \text{och} \quad A_2\xi + B_2\eta + C_2(1 - \zeta) = 0.$$

Nu, tangeterna som motsvarar cirklarna vid nordpolen är skärningspunkterna av dessa plan med planet $\zeta = 1$, deras ekvationer blir alltså

$$A_1\xi + B_1\eta = 0 \quad \text{och} \quad A_2\xi + B_2\eta = 0.$$

Det är uppenbart att vinkeln mellan de två linjerna i komplexa planet är detsamma som vinkeln mellan de två tangenterna vid nordpolen eftersom planet då $\zeta = 1$ är parallell med komplexa planet vår Riemannsfär står på.

3.2 Definition av Möbiustransformationer

För att undersöka komplexa funktioner med komplexa variabler underlättar det att använda två komplexa plan. Låt z -planet representera variabeln z och låt w -planet representera variabeln w .

Definition 3.2 Möbiustransformationer definieras av rationella funktioner på formen

$$w = Tz = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}, \quad \text{där} \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \quad (\text{Hahn, 1994}).$$

Villkoret försäkrar att T inte är en konstant. För om $\alpha\delta - \beta\gamma = 0$ så innebär det att

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\gamma\alpha z + \gamma\beta}{\gamma(\gamma z + \delta)} = \frac{\gamma\alpha z + \alpha\delta}{\gamma(\gamma z + \delta)} = \frac{\alpha(\gamma z + \delta)}{\gamma(\gamma z + \delta)} = \frac{\alpha}{\gamma},$$

vilket inte stämmer in på definitionen av en Möbiustransformation eftersom w inte transformerar variabeln z utan bara är en komplex konstant.

Identitetsavbildningen är en Möbiustransformation, som vi får om vi sätter $\beta = \gamma = 0$ och $\alpha = \delta$.

Hittills har vi att Möbiustransformationen är definierad överallt i z -planet förutom i punkten $z = -\frac{\delta}{\gamma}$. För då har vi att

$$w = \frac{\alpha(-\frac{\delta}{\gamma}) + \beta}{\gamma(-\frac{\delta}{\gamma}) + \delta},$$

vilket blir noll i nämnaren.

Inversen till w är

$$z = T^{-1}w = \frac{\delta w - \beta}{-\gamma w + \alpha} \quad \text{där} \quad \begin{vmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0.$$

Inversen är väldefinierad i alla punkter förutom i $w = \frac{\alpha}{\gamma}$.

Om vi vill bli av med punkterna $z = -\frac{\delta}{\gamma}$ och $w = \frac{\alpha}{\gamma}$ (vilket vore fördelaktigt) kan vi behandla $z = -\frac{\delta}{\gamma}$ som $w = \infty$ och $w = \frac{\alpha}{\gamma}$ som $z = \infty$. Detta innebär att för dessa transformationer går Möbiustransformationer från Riemannsfären till Riemannsfären (till sig självt). Denna komplettering av definitionen för Möbiustransformationer bevarar bijektiviteten från planet $\hat{\mathbb{C}}$ till sig självt. Denna tanke återkommer vi till i avsnitt 3.5.

En sammansättning av Möbiustransformationer är i sig en Möbiustransformation. Om vi utför en avbildning från z -planet till w_1 -planet och sedan till w_2 -planet kan vi tolka det som *en* Möbiustransformation även om vi kan dela upp det i flera delar av Möbiustransformationer. Samma tänk som från avsnitt 1.4 när vi kan ta två olika vägar till samma punkt i komplexa planet, kan vi utföra olika Möbiustransformationer för att få samma slutresultat. Se och jämför exemplen 3.3.3 med 3.4.1.

Hur skiver vi sammansättningen av två Möbiustransformationer w_1w_2 ? Vi har att

$$w_1 = Tz = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$$

och att

$$w_2 = Sw_1 = \frac{ax_1 + b}{cw_1 + d}, \quad \text{där} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0.$$

Sammansättningen blir

$$w_2 = STz = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (a\alpha + b\gamma)z & a\beta + b\delta \\ (c\alpha + d\gamma)z & c\beta + d\delta \end{pmatrix} = \frac{(a\alpha + b\gamma)z + (a\beta + b\delta)}{(c\alpha + d\gamma)z + (c\beta + d\delta)},$$

där

$$\begin{vmatrix} (a\alpha + b\gamma) & a\beta + b\delta \\ (c\alpha + d\gamma) & c\beta + d\delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \neq 0.$$

3.3 Avbildningar

Från förgående avsnitt kan vi etablera:

3.3.1 Gruppen av Möbiustransformationer

Sats 3.1 Mängden M som består av alla Möbiustransformationer utgör en grupp eftersom den uppfyller följande:

Sammanläggning För alla $T, S \in M$, så är sammansättningen TS definierad för alla element i M , och $TS \in M$.

Identitetselementet Mängden M har ett identitetselement I , där $TI = IT = T$ för alla $T \in M$.

Inverselementet För varje element $T \in M$ finns ett motsvarande element $T^{-1} \in M$, som kallas inversen till T och har egenskapen $TT^{-1} = T^{-1}T = I$.

Associativa lagen Den associativa lagen gäller i M . För alla $T, S, U \in M$ gäller att $(TS)U = T(SU)$.

3.3.2 Delgrupper

Gruppen av Möbiustransformationer har några specifika delgrupper:

Förflyttningar Denna delgrupp förflyttar ett geometriskt objekt åt den riktning som en konstant b pekar åt. Den beskrivs enligt:

$$w = Tz = z + b \quad \text{där } b \in \mathbb{C}.$$

Vidgningar $w = Tz = \alpha z$ där $\alpha \in \mathbb{C}$.

Denna delgrupp har i sin tur två underliggande delgrupper:

a) Storleksändringar

Storleksändringar kan beskrivas enligt:

$$w = Tz = az,$$

där a är en positiv reell konstant. Alltså alla längder ändrar storlek, vinklarna behålls.

b) Rotationer

Rotationer beskrivs enligt:

$$w = Tz = kz,$$

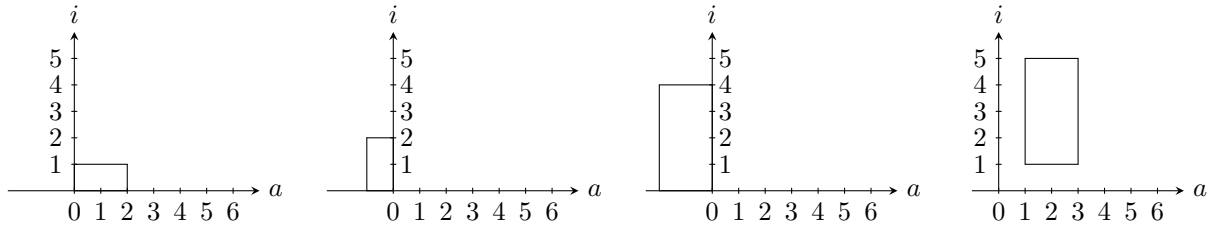
där $k \in \mathbb{C}$ och $|k| = 1$. Detta är en rotation runt origo med argumentet k . Vi skulle kunna ersätta k med Eulers formel så att vi har att $w = Tz = |k|e^{ki}z$. Det är hjälpsamt att notera att storleksändringar och rotationer är kommutativa och att vidgningar är en produkt av dem.

Inverser $w = Tz = \frac{1}{z}$

Notera att här har vi att $z = |z|e^{i\theta}$. Detta ger oss att inversen kan skrivas som $\frac{1}{|z|}e^{-\theta i}$.

3.3.3 Exempel

Låt oss rita en figur med hörnpunkterna $z_1 = 0, z_2 = 2, z_3 = 2 + i$ och $z_4 = i$. Den ser ut som första figuren:



Transformationen från första- till sista figuren kan beskrivas enligt:

$$f_1(z_n) = e^{\frac{\pi}{2}i}z_n, f_2(z_n) = 2 \cdot (f_1(z_n)), f_3(z_n) = f_2(z_n) + (3 + i),$$

$$f_3(z_n) = f_2(z_n) + (3 + i) = 2 \cdot (f_1(z_n)) + (3 + i) = 2 \cdot e^{\frac{\pi}{2}i}z_n + (3 + i) = 2z_n i + 3 + i$$

där $n = 1, 2, 3, 4$. Här blir $z_1 = 3 + i, z_2 = 3 + 5i, z_3 = 1 + 5i$ och $z_4 = 1 + i$. Respektive punkts slutgiltiga avbildning kan vi kalla för w_1, w_2, w_3, w_4 .

3.4 Cross Ratio

Definition 3.4.1 För fyra komplexa punkter α, β, γ och δ defineras Cross Ratio som

$$(\alpha, \beta; \gamma, \delta) = \frac{(\alpha - \gamma)(\beta - \delta)}{(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)} \quad (\text{Hahn, 1994}).$$

Sats 3.4.1 Möbiustransformationer påverkar inte Cross Ratio (Hahn, 1994).

Bevis.

För att visa att Möbiustransformationer bevarar Cross Ratio visar vi först att en cirkel i komplexa planet motsvaras av en unik cirkel på Riemannsfären. En cirkel bestäms entydigt av tre punkter. Därmed borde följande gälla:

$$\frac{aw + b}{cw + d} = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \quad \text{där } a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta, z, w \in \mathbb{C}.$$

Om vi löser w i termer av z får vi att w är en Möbiustransformation av z . Om nämnaren försvinner på någon av sidorna måste den andra nämnaren försvinna och samma förhållande gäller även täljarna. Därmed, om en Möbiustransformation avbildar punkterna z_1, z_2 och z_3 på w_1, w_2 och w_3 respektive, kan vi skriva detta som

$$\frac{w - w_2}{w - w_3} = k \frac{z - z_2}{z - z_3} \quad k \in \mathbb{C}, \quad (18)$$

där konstanten k behöver bestämmas. Här ser vi att Möbiustransformationen bestäms av ekvivalensen som avbildar z_2 till w_2 och z_3 till w_3 . Det innebär att k behöver väljas på sådant sätt att z_1 motsvaras av w_1 enligt följande:

$$\frac{w_1 - w_2}{w_1 - w_3} = k \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3} \iff k = \frac{(w_1 - w_2)(z_1 - z_3)}{(w_1 - w_3)(z_1 - z_2)}. \quad (19)$$

Vi sätter in detta i (18) och får att

$$\frac{w - w_2}{w - w_3} = \frac{(w_1 - w_2)(z_1 - z_3)}{(w_1 - w_3)(z_1 - z_2)} \frac{z - z_2}{z - z_3} \iff \frac{(w_1 - w_2)(w_1 - w_3)}{(w_1 - w_3)(w_1 - w_2)} = \frac{(z_1 - z_2)(z_1 - z_3)}{(z_1 - z_3)(z_1 - z_2)}.$$

Den sista ekvivalensen ger att Möbiustransformationen avbildar z_j till w_j där $j = 1, 2, 3$. Vidare kan man enkelt se att en Möbiustransformation även avbildar z_0 till w_0 eftersom

$$\frac{(w_0 - w_2)(w_1 - w_3)}{(w_0 - w_3)(w_1 - w_2)} = \frac{(z_0 - z_2)(z_1 - z_3)}{(z_0 - z_3)(z_1 - z_2)} \iff (w_0, w_1; w_2, w_3) = (z_0, z_1; z_2, z_3).$$

Alltså, Möbiustransformationer påverkar inte Cross Ratio.

Från detta följer direkt att för en avbildning från z_j till w_j (där $j = 1, 2, 3, 4$) finns en Möbiustransformation om och endast om $(w_0, w_1; w_2, w_3) = (z_0, z_1; z_2, z_3)$. Detta kan man generalisera enkelt genom att låta en av punkterna gå mot ∞ . Låt exempelvis $z_0 = \infty$, då får vi att

$$(z_0, z_1; z_2, z_3) = \frac{\frac{z_0 - z_2}{z_0 - z_3}}{\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}} = \frac{\frac{\infty - z_2}{\infty - z_3}}{\frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_3}}.$$

Eftersom det inte spelar någon roll vad för ändligt tal vi subtraherar mot ∞ får vi att

$$(z_0, z_1; z_2, z_3) = \frac{\frac{\infty}{z_1 - z_2}}{\frac{\infty}{z_1 - z_3}} = \frac{\frac{1}{z_1 - z_2}}{\frac{1}{z_1 - z_3}} = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}.$$

□

Detta innebär att vi alltid kan hitta en Möbiustransformation som avbildar $z_j \in \hat{\mathbb{C}}$ till $w_j \in \hat{\mathbb{C}}$ (där $j = 1, 2, 3$) genom att lösa

$$\frac{(w - w_2)(w_1 - w_3)}{(w - w_3)(w_1 - w_2)} = \frac{(z - z_2)(z_1 - z_3)}{(z - z_3)(z_1 - z_2)}$$

för w .

3.4.1 Exempel

Låt oss utgå från samma exempel som från exempel 3.3.3. För att använda formeln behöver vi endast tre punkter. Vi tar inte med paret z_4 till w_4 . Att använda formeln för Cross Ratio ser ut som följande:

$$\frac{(z - 2)(0 - (2 + i))}{(z - (2 + i))(0 - 2)} = \frac{(w - (3 + 5i))((3 + i) - (1 + 5i))}{(w - (1 + 5i))((3 + i) - (3 + 5i))} \iff \frac{(z - 2)(-2 - i)}{(z - 2 - i)(-2)} = \frac{(w - 3 - 5i)(2 - 4i)}{(w - 1 - 5i)(-4i)}$$

$$\iff (-2z - zi + 4 + 2i)(-4wi + 4i - 20) = (2w - 4wi - 26 + 2i)(-2z + 4 + 2i)$$

$$\iff 8zwi - 4zw + 12zi + 44z + 8w - 16wi - 88 - 24i = 8zwi - 4zw + 16w - 12wi + 52z - 4zi - 108 - 44i$$

$$\iff -8z + 16zi + 20 + 20i = 8w + 4wi \iff -2z + 4zi + 5 + 5i = w(2 + i)$$

$$\iff w = \frac{(-2z + 4zi + 5 + 5i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{-4z + 2zi + 8zi + 4z + 10 - 5i + 10i + 5}{5} = 2zi + 3 + i,$$

vilket vi nu ser är samma transformation som från exempel 3.3.3. På detta sätt slipper vi hitta vår egen väg för respektive punkter genom en avbildning i taget, utan vi hittar resultatet direkt med hjälp av Cross Ratio. Smidigt värre.

3.4.2 Konformitet

Från beviset av Sats 1.6.5 har vi att orientering är riktningen som pekar från

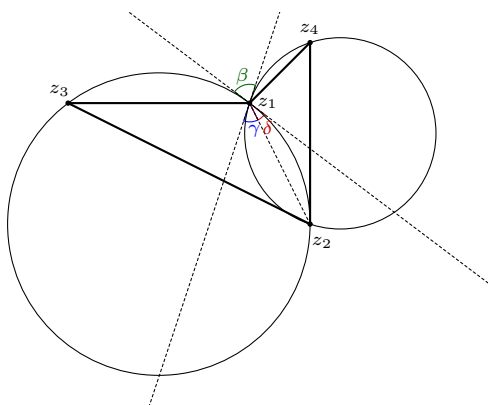
Sats 3.5.2 En Möbiustransformation är en konform avbildning, dvs. en Möbiustransformation bevarar vinklar och orientering mellan två skärande kurvor (Hahn, 1994).

Bevis.

Vi kan bevisa satsen utan att förlora generalitet genom att anta att två skärande kurvor är cirklar. Låt z_1, z_2 vara två skärningspunkter mellan två cirklar. Välj sedan en godtycklig punkt på varje cirkel, låt dessa godtyckliga punkter benämnas z_3, z_4 respektive. Då har vi att

$$\arg(z_3, z_4; z_1, z_2) = \arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}\right) - \arg\left(\frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}\right) = \angle z_2 z_3 z_1 - \angle z_2 z_4 z_1.$$

Rita sedan linjer från z_1 till z_3 och z_4 , samt från z_2 till z_3 och z_4 . Exempelvis kan det se ut som följande:



Låt sedan z_3 och z_4 gå mot z_1 längs med respektive cirkel. Nu, enligt appendix 5.2.4 har vi att vinkeln $\gamma + \delta = \beta$.

Men eftersom Cross Ratio inte påverkas av Möbiustransformation innebär detta att vi har visat att Möbiustransformationer bevarar vinklar och orientering mellan två skärande kurvor. Möbiustransformationer är konforma. □

3.5 Avbildningar till sig självt

Vad detta avsnitt innebär visas genom att först beakta följande två fall för definitionen av Möbiustransformationer:

a) om $\gamma = 0 \implies \delta \neq 0$

I detta fall får vi att

$$w = Tz = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\alpha}{\delta} z + \frac{\beta}{\delta}.$$

b) om $\gamma \neq 0$

I detta fall får vi att

$$w = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} = \frac{\gamma(\alpha z + \beta)}{\gamma(\gamma z + \delta)} = \frac{\alpha\gamma z + \gamma\beta}{\gamma(\gamma z + \delta)} = \frac{\alpha\gamma z + \gamma\beta + \alpha\delta - \alpha\delta}{\gamma(\gamma z + \delta)} = \frac{\alpha(\gamma z + \delta) - (\alpha\delta - \beta\gamma)}{\gamma(\gamma z + \delta)} = \frac{\alpha}{\gamma} - \frac{\alpha\delta - \beta\gamma}{\gamma(\gamma z + \delta)}.$$

Det sista resultatet tillsammans med fallet då $\gamma = 0$ visar oss att varje Möbiustransformation är en produkt av förflyttningar, vidgningar och inverser.

Om vi stannar upp och tänker till är det inte svårt att inse att förflyttningar och vidgningar avbildar linjer på linjer och cirklar på cirklar. Men, detta är inte sant för inverser även om inverser inte förändrar familjen av linjer och cirklar. Hur vet vi det sistnämnda? Jo, kom ihåg en cirkels ekvation där vi har att $A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0$ (där $B^2 + C^2 > 4AD$). Om vi sätter $A = a$, $D = c$ och $b = \frac{1}{2}(B + iC)$ kan vi skriva om detta till

$$az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c = 0 \quad \text{där } |b^2| > ac. \quad (20)$$

Detta är en godtycklig cirkel alternativt en linje om $a = 0$. Om vi nu multiplicerar (20) med inversen $w = \frac{1}{z}$ får vi att detta är ekvivalent med

$$\begin{aligned} \frac{1}{z\bar{z}}(az\bar{z} + \bar{b}z + b\bar{z} + c) &= a + \frac{\bar{b}}{\bar{z}} + \frac{b}{z} + \frac{c}{z\bar{z}} \\ &= a + \bar{b}\bar{w} + bw + cw\bar{w} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

Ekvation (21) är av samma typ som ekvation (20). Att Möbiustransformationer består av förflyttningar, vidgningar och inverser och ingen av dem förändrar familjen av linjer och cirklar. Detta ger oss följande sats:

Sats 3.4.4 Möbiustransformationer avbildar familjen av cirklar och linjer i planet till sig självt (Hahn, 1994)

Vi har sett i avsnitt 3.2 att Möbiustransformationer gör operationer på objekt i komplexa planet $\hat{\mathbb{C}}$. Vi såg att detta plan har en bijektiv relation med Riemannsfären. Vi har också sett att både Möbiustransformationer och stereografisk projektion från punkten N på Riemannsfären bevarar vinklar.

Att Möbiustransformationer avbildar objekt i planet till sig självt kan förstås som att transformationen går från Riemannsfär till Riemannsfär. Alternativt från $\hat{\mathbb{C}}$ till $\hat{\mathbb{C}}$.

Detta samband är intressant eftersom det innebär att en transformation på Riemannsfären har en motsvarighet i komplexa planet $\hat{\mathbb{C}}$ där vinklar, orientering och familjen av cirklar och linjer bevaras. Att Möbiustransformationer är konformella är alltså en mycket intressant egenskap, åtminstone enligt mig.

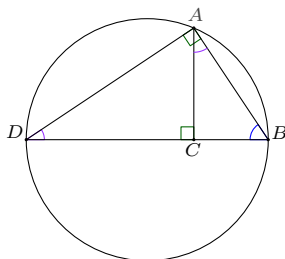
4 Avslutning

Förhoppningsvis har vi fått se hur väl de komplexa talen går ihop med geometrin. Jag anser att vissa exempel visar att beräkningar blir betydligt enklare med komplexa tal, men ibland även svårare. Det är svårt att säga vilka typer av beräkningar som är enklast då individer är olika och är vana vid olika matematiska verktyg. Men syftet för de komplexa talen är inte endast att göra alla beräkningar enklare än reella beräkningar. Fortfarande har de stora användningsområden inom fysik och matematik. Jag hoppas att läsaren har fått en god förståelse om varför det är så.

5 Appendix

5.1 Likformighet

Låt oss betrakta följande triangel:



Vi ser att triangelarna $\triangle BAD$ och $\triangle ACD$ har två lika vinklar, nämligen $\angle A = \angle C = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$. De har även en gemensam vinkel, nämligen $\angle D$. Vi vet att om två trianglar har två lika vinklar, så är de likformiga. Det betyder att vinklarna är kongruenta, men att sidlängderna kan variera. Alltså har vi här att $\triangle BAD \sim \triangle ACD$ (tecknet ' \sim ' står för likformighet).

På samma sätt kan vi betrakta triangelarna $\triangle BAD$ och $\triangle ACB$. Dessa har också två lika vinklar och en gemensam vinkel, nämligen $\angle A = \angle C = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$ och $\angle B$ respektive. Alltså är $\triangle BAD \sim \triangle ACB$, som i sin tur innebär att alla tre trianglar $\triangle BAD, \triangle ACD$ och $\triangle ACB$ är likformiga.

Eftersom dessa tre trianglar är likformiga får vi följande samband, att

$$\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{AD}, \quad \frac{DC}{AD} = \frac{AD}{BD} = \frac{AC}{AB} \quad \text{och} \quad \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC} = \frac{AB}{AD}.$$

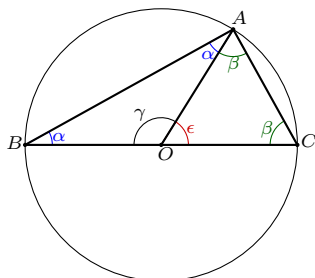
5.2 Inskrivna vinklar

5.2.1 Inskrivna vinkel

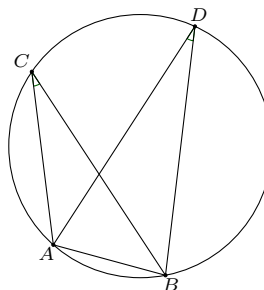
Sats 5.2.1 Mittpunktsvinkeln är två gånger så stor som motsvarande periferivinkeln (exempelvis $\angle A, \angle C$ eller $\angle D$ enligt figur 1 och 2.) om och endast om punkterna, som utgör de yttre hörnen ligger på en cirkel (Hahn,1994).

Bevis.

Figur 1:



Figur 2:



Vi har att $\angle BOC = 180^\circ$, vilket innebär att

$$\angle BOC = 180^\circ - \epsilon + 2\alpha \iff 2\alpha - \epsilon = 0 \iff 2\alpha = \epsilon.$$

□

Detta innebär i sin tur för figur 2 att om punkterna C och D är på samma sida av en linje AB . Då är punkterna A, B, C, D kocykliska om och endast om $\angle ACB = \angle ADB$.

5.2.2 Thales Sats

Sats 5.2.2 Om en triangels hörnpunkter ligger på en cirkel där en av sidorna utgör cirkelns diameter så är triangeln rätvinklig. Detta är ekvivalent med att om en triangels hörnpunkter ligger på en cirkel där en av hörnen på cirkeln är rätvinklig, så innebär det att motstående sida är diametern för cirkeln (Hahn, 1994).

Bevis.

Thales sats är en version av Sats 5.2.1. Vi kan alltså bevisa Thales sats genom att först observera första figuren i avsnitt 5.2.1, då får vi att

$$2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = \gamma + \epsilon = 180^\circ \iff \alpha + \beta = 90^\circ.$$

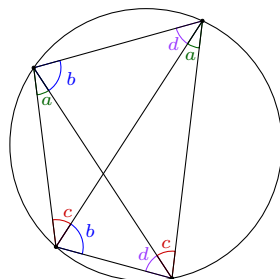
□

5.2.3 Två inskrivna vinklar på varsin sida av en linje, som är inskriven i samma cirkel

Sats 5.2.3 För en fyrhörning som är inskriven en cirkel är vinkelsumman av motstående vinklar (diagonalt sätt) lika med 180° (Hahn, 1994).

Bevis.

Betrakta triangeln:



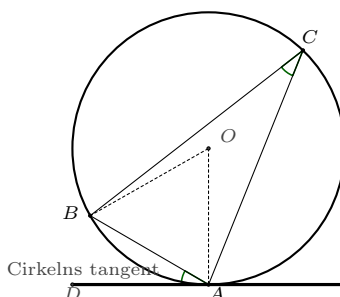
Att vinklarna har respektive värden rättfärdigas av Sats 5.2.1. Här ser vi enkelt att $2a + 2b + 2c + 2d = 360^\circ \iff a + b + c + d = 180^\circ = \pi$

□

5.2.4 En sista inskriven vinkel

Sats 5.2.4 Vinkeln mellan en cirkels tangent och anslutande korda är lika med vinkeln för bågen, som bildas mellan cirkelns tangent och kordan ifråga (Hahn, 1994).

Bevis.



Här ser vi direkt från appendix 5.2.1 att $2C = \angle AOB$ och att $\angle BAO + \angle ABO = 180^\circ - 2C$. Eftersom triangeln $\triangle AOB$ är likbent så har vi att $\angle ABO = \angle BAO$, vilket ger oss att $\angle BAO = 90^\circ - C$. Observera att $\angle OAD = 90^\circ$. Sammantaget har vi att

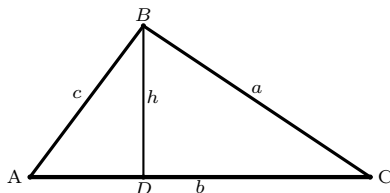
$$\angle BAD = \angle OAD - \angle BAO \iff 90^\circ - (90^\circ - C) = C.$$

Alltså, vinkel $\angle BAD = C$.

□

5.3 Att beskriva sidlängder med Sinussatsen

Betrakta följande godtyckliga triangel:



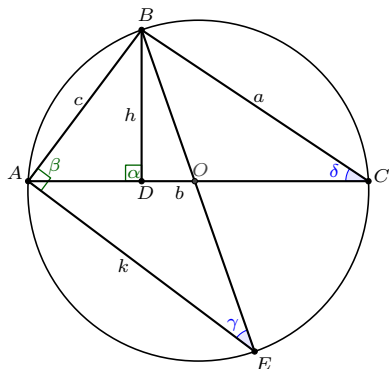
Utifrån likformighet mellan trianglarna $\triangle ABD$ och $\triangle ABC$ har vi för Sinussatsen att

$$\sin A = \frac{h}{c}, \quad \sin C = \frac{h}{a} \iff c \sin A = a \sin C = h,$$

vilket innebär att $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}$.

Vi vet att arean ABC för triangeln $\triangle ABC$ ges på formen $ABC = \frac{bh}{2} = \frac{bc \sin A}{2}$, vilket är lika med $\frac{abc}{4R}$ (som visas från nästa mening) där R är radien för cirkeln som definieras av punkterna A, B, C .

Var kommer $\frac{abc}{4R}$ ifrån? Betrakta följande figur:



Från appendix 5.2.1. har vi att $\angle\delta = \angle\gamma$, vilket innebär att $\angle ABE = \angle DBC$ och då är trianglarna $\triangle ABC$ och $\triangle ABE$ likformiga. Utifrån denna likformighet har vi att

$$\frac{c}{2R} = \frac{h}{a}.$$

Låt arean för $\triangle ABC$ skrivas $ABC = \frac{bh}{2} \iff \frac{2ABC}{b} = h$. Vi stoppar in detta i förgående ekvation och får att

$$\frac{c}{2R} = \frac{h}{a} = \frac{\frac{2ABC}{b}}{a} = \frac{2ABC}{ab} \iff \frac{abc}{4R} = ABC.$$

Vi går vidare och får att

$$ABC = \frac{ab \sin C}{2} = \frac{abc}{4R} \iff \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R}$$

Detta sammantaget med Sinussatsen ger att

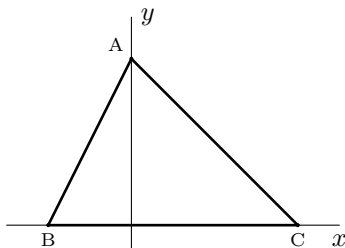
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} = \frac{1}{2R}.$$

5.4 Centroider

Sats 5.4 För tre sträckor, som går från varsin hörnpunkt av en triangel till respektive motstående sidas mittpunkt gäller följande: att (1) avståndet från respektive hörn till triangelns centroid är $\frac{2}{3}$ -delar av respektive sträcka och att (2) avståndet från respektive sidors mittpunkt till triangelns centroid är $\frac{1}{3}$ -del av respektive sträcka (Hahn, 1994).

Bevis.

Betrakta följande godtyckliga triangel $\triangle ABC$:



Koordinaterna för mittpunkterna av AB, BC och CA är $(-\frac{B}{2}, \frac{A}{2}), (\frac{C-B}{2}, 0), (\frac{C}{2}, \frac{A}{2})$ respektive. Låt oss konstruera linjen a mellan B och $(\frac{C}{2}, \frac{A}{2})$. Lutningen k får vi genom $\frac{\frac{A}{2}-0}{\frac{C}{2}-(-B)} = \frac{A}{C+2B}$. Punktformen för linje a blir alltså att $y - 0 = k(x - (-B)) = \frac{A(x+B)}{C+2B}$.

Om vi behandlar linje b på samma sätt (låt den gå genom $(-\frac{B}{2}, \frac{A}{2})$ och C) får vi att $y - 0 = \frac{A(x-C)}{-(B+2C)}$. Vi kan nu använda dessa två linjer för att hitta centroiden, som är deras skärningspunkt Y . Vi har att

$$Y = \frac{A(x+B)}{C+2B} = \frac{A(x-C)}{-(B+2C)} \iff -(x+B)(B+2C) = (x-C)(C+2B)$$

$$\iff -xB - 2xC - B^2 - 2BC = xC + 2xB - 2CB - C^2$$

$$\iff -xB - 2xC - B^2 = xC + 2xB - C^2 \iff C^2 - 3xC = B^2 + 3xB$$

$$\iff -3x(B+C) = B^2 - C^2 = (B+C)(B-C) \iff -3x = B-C \iff x = -\frac{B-C}{3}.$$

Nu kan vi sätta in detta i linje b och får att

$$Y = \frac{A(\frac{C-B}{3} - \frac{3C}{3})}{-(B+2C)} = \frac{A(\frac{-2C-B}{3})}{-(B+2C)} = \frac{-A(B+2C)}{-3(B+2C)} = \frac{A}{3}.$$

□

6 Referenser

Merino, Orlando. *A Short History of Complex Numbers*. University of Rhode Island, January 2006.

Hahn, Liang-shin. (1994). *Complex Numbers and Geometry*. (Första upplagan). The Mathematical Association of America.

Schwerdtfeger, Hans. (1980). *Geometry of Complex Numbers*. (Dover Edition). Dover Publications Inc, New York.