

SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Nollställen till slumpopolynom: när och varför hopar de sig kring
enhetscirkeln?

av

Leia Molin

2023 - L2

Nollställen till slumpopolynom: när och varför hopar de sig kring enhetscirkeln?

Leia Molin

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Aron Wennman

2023

Contents

1	Abstract	2
2	Inledning	3
2.1	Bakgrund	3
2.2	Syfte	4
2.3	Analytiska Definitioner	4
2.4	Sannolikhetsteoretiska Definitioner	7
3	Vägen till Jensens formel	11
3.1	Cauchys Integralformel	11
3.2	Medelvärdesegenskapen	13
3.3	Bevis för att den komplexa logaritmen är analytisk .	14
3.4	Jensens formel	15
3.5	Konsekvenser av Jensens formel	17
4	En uppskattning av antalet nollställen långt från enhetscirkeln	19
4.1	Införande av beteckningar	19
4.2	Uppskattningen	20
4.3	Reflektionspolynomet	22
5	Problem	22
5.1	Problemformulering	22
5.2	Lösningsförslag	23

1 Abstract

The purpose of this thesis is to explore an interesting phenomenon concerning the distribution of zeroes of random polynomials with independent coefficients. The starting point is a simulation where we create a random polynomials coefficients were independent and uniformly distributed. If we then determine the roots numerically and do a visual representation we see that the roots seem to cluster near the unit circle. A theoretical overview of some basics of complex analysis is given, and we attempt to interpret this figure and answer the question why it appears as it does.

The first part of the thesis contains relevant probabilistic and analytic definitions. The second segment is centered on Jensen's formula. The formula is proved by using Cauchy's integral formula, the mean value property and the proof to why the complex logarithm is holomorphic. Jensen's formula is important because it supplies a method for estimating the number of zeroes of an analytic function; and is thus directly linked to our circle and purpose of this thesis.

In the last segment of this thesis we summarize some key aspects of Nikeghbali and Hughes' article *The Zeroes of random Polynomials cluster uniformly near the unit circle*, and furthermore use the material from the thesis to solve a smaller problem.

2 Inledning

2.1 Bakgrund

Ett komplext polynom är ett uttryck på formen

$$a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n, \quad (1)$$

där a_0, \dots, a_n är fixerade komplexa koefficienter och z är en variabel. Vi säger att polynomet har grad n om $a_n \neq 0$. Ett polynom av grad n har exakt n nollställen enligt Algebrans fundamentalsats. Polynomet kan därmed entydigt skrivas som produkten:

$$a_n \cdot (z - Z_1) \cdot \dots \cdot (z - Z_n),$$

där Z_1, \dots, Z_n är polynomets nollställen. Att bestämma dessa nollställen är ett återkommande problem inom matematik. I allmänhet är det väldigt svårt och nästintillt omöjligt att precis hitta komplexa polynoms rötter. Istället kan rötterna undersökas genom att studera slumppolynom.

Ett slumppolynom är ett koncept inom sannolikhets teorin som uttrycks enligt 1, som kan anpassas efter flera olika sorter sannolikhetsfördelningar. Ett exempel på detta kan ses i ett preliminärt experiment. Här skapades ett slumppolynom där koefficienterna var oberoende samt likformigt fördelade. Vi fixerar först ett tal $M > 0$. För varje tal a_k ($0 \leq k \leq n$) på detta intervall är sannolikheten att a_k ligger på ett litet delintervall med längd ϵ lika med $\frac{\epsilon}{2M}$.

Efter att ha bestämt rötterna numeriskt till det slumppolynom som skapas för koefficienterna gjordes en visuell representation med hjälp av programmet Mathematica. Den visuella representationen kan ses i Figur 1 och är en något ojämn cirkel.

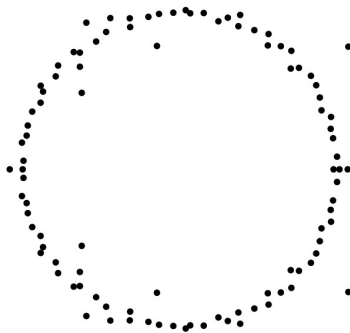


Figure 1: Rötterna till ett slumppolynom av grad 100 med oberoende och likafördelade koefficienter

2.2 Syfte

Syftet med detta arbetet är att få fördjupad kunskap om polynom samt dess nollställen utifrån ett teoretiskt perspektiv där knapphändig tidigare erfarenhet om komplex analys finnes. Ett delmål av detta är därmed att förstå varför Figur 1 ser ut som den gör.

2.3 Analytiska Definitioner

Först definieras

$$\mathbb{D}(z, r) = \{w \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$$

som beskriver cirkelskivor i det komplexa talplanet \mathbb{C} . Detta beskriver mängden av alla vektorer i \mathbb{C} med avstånd mindre än r till en given punkt z .

Definition 1 (Randpunkt). *Vi säger att z är en randpunkt till mängden M om alla $\mathbb{D}(z)$ innehåller punkter både från M och M s komplement M^c . Vi benämner mängden av alla randpunkter till M som ∂M .*

Definition 2 (Öppen mängd, sluten mängd, slutna höljen). *Vi säger att M är en öppen mängd om inga randpunkter till M ligger i M . Mängden M sägs vara sluten om $\partial M \cup M$. Det slutna höljet av mängden M definierar vi som unionen $M \cup \partial M$.*

Definition 3 (Analytisk funktion). *Låt Ω vara en öppen mängd i \mathbb{C} och f en komplexvärd funktion på Ω . Funktionen f är analytisk i punkten $z_0 \in \Omega$ om*

$$\frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

konvergerar mot något tal då $h \rightarrow 0$. Om detta gränsvärde existerar betecknas detta $f'(z_0)$ och sägs vara derivatan av f i punkten z_0 . De krav som sätts på h i denna kontext är att $h \in \mathbb{C}$, $h \neq 0$ och att $z_0 + h \in \Omega$.

Analytiska funktioner har flera andra namn, i uppsatsen kommer även komplex differentierbar och holomorf att användas. Det finns flera exempel på analytiska funktioner, $\cos(z)$, e^z och polynom är några exempel. En analytisk funktion kan deriveras oändligt många gånger. Detta kan jämföras med den realla funktionen $g(x) = |x| \cdot x$, som är deribarnar i reell mening, men ej har en kontinuerlig andraderivata i punkten $x = 0$.

Definition 4 (Hävbar singularitet). *Anta att f är en funktion som är analytisk i komplementet av en punkt a i en öppen delmängd U av de komplexa talen \mathbb{C} . Punkten a är då en hävbar singularitet för f om det finns en analytisk funktion g som är definierad på hela U så att $f(z) = g(z)$ för alla $z \in U \setminus \{a\}$.*

Detta kan omformuleras mer vardagligt som att en hävbar singularitet är en punkt där en analytisk funktion ej är definierad, men där det ändå är möjligt att med hjälp av närliggande punkter beräkna hur funktionen ska definieras i punkten för att den utvidgade funktionen skall bli analytisk. Exempelvis är

$\frac{\sin(x)}{x}$ då $x = 0$ en hävbar singularitet, eftersom uttrycket i denna punkt ej är definierad men om vi sätter $f(0) = 0$ blir funktionen analytisk. Mer allmänt visar det sig att en singularitet är hävbar om funktionen är begränsad i en omgivning av punkten.[2, s.9 84]

Definition 5 (Meromorf funktion, poler och nollställen). *Vi säger att a är en pol till en funktion f om det för något k , gäller att*

$$(z - a)^k f(z)$$

är analytisk i en omgivning av a . En funktion sägs vara meromorf om den är analytisk på en öppen mängd i några isolerade poler. Ett nollställe till en meromorf funktion f är ett komplext tal z som uppfyller att $f(z) = 0$.

Detta kan jämföras med en essentiell singularitet, som är en punkt a så att f är analytisk i $\mathbb{D}(a, \xi) \setminus \{a\}$ för något ξ , men där $(z - a)^k f(z)$ ej är analytisk för något k . Därmed kan en pol beskrivas som någorlunda reguljär i förhållande till de övriga singulariteterna.

Ett exempel på detta kan ses i $f(z) = e^{1/z}$, som har en essentiell singularitet då $z = 0$. Ett exempel på poler och nollställen kan ses i funktionen $h(z)$, som har ett nollställe av ordning 1 då $z = 2$, samt en pol av ordning 7 då $z = 5$ samt en pol av ordning 3 då $z = 4$.

$$h(z) = \frac{z + 2}{(z - 5)^7(z + 4)^3}$$

Ett litet instick

Innan vi går över till nästa definition kommer här en intuitiv förklaring av vad en kurva och en parametrisering av en sådan kurva är. Med en kurva avser vi värdemängden för en kontinuerlig funktion f från ett intervall $[0, a]$ till det komplexa planet. Funktionen f kallas för en parametrisering av kurvan. Exempelvis så är enhetscirkeln med mittpunkt i origo en sådan kurva, där dess parametrisering blir $z(t) = \cos t + i \sin t$ alternativt $z(t) = e^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Definition 6 (Konturintegral). *Anta att vi har en kurva γ i planet som parametriseras av $z : [a, v] \rightarrow \mathbb{C}$ som har en kontinuerlig derivata som aldrig försvinner. Anta även att f är en kontinuerlig funktion på γ . Då kan vi definiera integralen av f längst med γ som:*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt.$$

Här är det viktigt att poängtera att integralen till höger ej är beroende av den specifika parametriseringen. I [2, s.21] visas detta genom att via kedjeregeln skriva om integralen via:

$$\int_a^b f(z(t)) z'(t) dt = \int_c^d f(z(t(s))) z'(t(s)) t'(s) ds = \int_c^d f(p(s)) p'(s) ds,$$

där $p(s)$ är en annan parametrisering av samma kurva; d.v.s $z(t) = p(g(t))$ för någon strikt växande bijektiv funktion $g : [a, b] \rightarrow [c, d]$. Om γ är styckvis slät så är integralen av f över γ summan av integralen av f över de släta delarna av γ så att om $z(t)$ är en delvis slät parametrisering (som tidigare) så gäller det att:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(z(t))z'(t)dt.$$

Integration av kontinuerliga funktioner över kurvor har även följande egenskaper:

(i) Den är linjär, det vill säga om $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gäller det att:

$$\int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z))dz = \alpha \int_{\gamma} f(z)dz + \beta \int_{\gamma} g(z)dz.$$

(ii) Om γ^- är γ men omvänd orientation, gäller det att:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = - \int_{\gamma^-} f(z)dz.$$

(iii) Olikheten

$$\left| \int_{\gamma} f(z)dz \right| \leq \sup_{z \in \gamma} |f(z)| \cdot \text{length}(\gamma)$$

Se t.ex [2, s.22].

Innan vi går vidare till Cauchys sats introducerar vi ett par koncept från topologin. En öppen mängd sägs vara sammanhängande om varje par av punkter kan förbindas med en kurva som är helt innehållen i mängden. Ett enkelt sammanhängande område är ett sammanhängande område utan några "hål" i området.

Sats 1 (Cauchys sats). *Låt $U \subseteq \mathbb{C}$ vara ett enkelt sammanhängande område, och låt $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ vara en analytisk funktion. Låt sedan $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ vara en sluten slät kurva. Då gäller att:*

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0. \tag{2}$$

Med andra ord innebär detta att kurvintegralerna över två kurvor med samma ändpunkter i ett enkelt sammanhängande område för en analytisk funktion är desamma. Detta bevis konstrueras i Princeton ([2, s.32]) konstruerar dem detta bevis genom att först visa att

$$\int_{\gamma} f(z)dz = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)),$$

om F är en primitiv funktion till f på det giva området, det vill säga om $F'(z) = f(z)$. De går sedan över till att bevisa att denna primitiva funktionen

$F(z)$ existerar under de givna förutsättningarna, och ges av

$$F(z) = \int_a^z f(w)dw,$$

där integralen tas över någon kurva i området som förbinder a och z , se [2, Sats 2.1]. Detta beviset kommer på grund av arbetsekonomiska skäl att utelämnas.

2.4 Sannolikhetsteoretiska Definitioner

En introduktion till sannolikhetsteoretin

Det tänkta resultatet av ett slumpförsök, vars möjliga utfall utgörs av tal, kallas slumpvariabel (eller stokastisk variabel). När försöket väl har utförts kallas observationsresultatet för en observation av slumpvariabeln.[1]. Detta skiljer sig på så sätt från andra "vanliga" tal, eftersom talets värde i sig är okänt, medans sannolikheten att talet antar ett visst värde är känt. Det finns två olika sorters slumpvariabler, diskreta samt konitnuerliga.

Den diskreta slumpvariabeln kan jämföras med att kasta en sexsidig tärning, det är slumpmässigt vilken sida av tärningen som hamnar uppåt, men vi vet att det kommer vara något heltal mellan 1 och 6. I detta fall är sannolikheterna samma för alla utfall, då

$$P(X = 1) = P(X = 2) = \dots = P(X = 6) = \frac{1}{6}.$$

När det handlar om kontinuerliga slumpvariabler finns det oändligt många möjliga utfall, vilket gör att det finns oändligt många utfall och att sannolikheten för ett specifikt utfall $\mathbb{P}(X = K) = 0$. Detta för att om vi har en tallinje på intervallet $[1,10]$ så finns det oändligt många tal på denna tallinje, och därför även oändligt många utfall. Denna uppsats kommer främst att handla om kontinuerliga slumpvariabler.

Täthetsfunktionen och andra egenskaper till kontinuerliga slumpvariabler

Till varje kontinuerlig slumpvariabel X hör en täthetsfunktion $f_X(x)$ som uppfyller:

$f_X(x) \geq 0$ för alla x och

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1.$$

Med hjälp av denna beräknas sannolikheter som integraler via:

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b f_X(x)dx = [F_X(x)]_a^b = F_X(b) - F_X(a), \quad (3)$$

där $F_X(x)$ är den primitiva funktionen till $f_X(x)$ som uppfyller att $F_X(-\infty) = 0$. Därmed gäller det att:

$$\mathbb{P}(Z \leq x) = F_X(x).$$

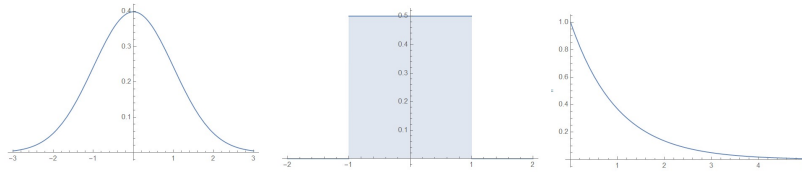


Figure 2: Normalfördelning, Likformig fördelning samt Exponentialfördelning visualiserat.

Det gäller även att $F_X(-x) = 1 - F_X(x)$ eftersom sannolikheten att utfallet ej skall hända är komplementhändelsen till att utfallet sker. Sannolikheten för enskilda utfall är som tidigare nämnt alltid 0.

Väntevärdet $E(X) = \mu$ är den punkt där du vid en visualisering vid täthetsfunktionen har hälften av fördelningen på vardera sida. Den beräknas som $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$. Variansen $V(X) = \sigma^2$ beräknas som $E[(x-\mu)^2]$ och kan räknas på två olika sätt:

$$\begin{aligned} V(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu)^2 f(x) dx \\ V(X) &= E(X^2) - [E(X)]^2 \end{aligned} \tag{4}$$

Standardavvikelsen beräknas enligt $\sqrt{V(X)}$ [1].

Några av de vanligaste fördelningarna är den gaussiska, likformiga och exponentiella. Deras täthetsfunktioner är alla visualiserade i figur 2 utifrån samma ordning som de presenterades. I denna uppsats kommer den uniforma och den gaussiska fördelningen att användas. Därmed kommer dem att introduceras nedanför.

Normalfördelning

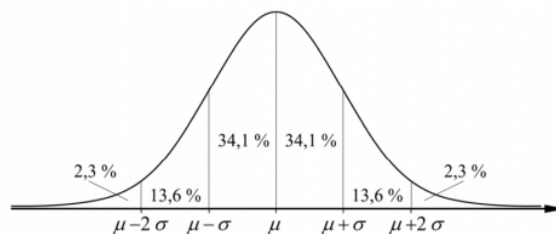


Figure 3: Normalfördelning med μ utmärkt.

Gaussiska slumpvariabler

Om slumpvariabeln har täthetsfunktionen:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

med villkoren att $-\infty < x < \infty$, $-\infty < \mu < \infty$ och $\sigma > 0$ är X Gaussisk (eller Normal)fördelad. Detta betecknas som $X \sim N(\mu, \sigma)$. Dess väntevärde är $E(x) = \mu$ och dess varians respektive standardavvikelse är $V(X) = \sigma^2$ respektive $D(X) = \sigma$. Täthetsfunktionen av normalfördelningen med dessa beteckningar illustreras i figur 3.

Om en slumpvariabel är $N(0, 1)$ fördelad betecknas täthetsfunktionen φ som:

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

och vi kan även använda räkneregler för kontinuerliga slumpvariabler. Dessa kan ses i ekvation (3).

Likformiga slumpvariabler

Den likformiga fördelningen kallas ibland även rektangulär på grund av hur dess visualisering ser ut. För startpunkten a och slutpunkten b gäller det att rektangelns längsida är $(b-a)$ och för att rektangeln skall bli ett hölje blir höjden $\frac{1}{(b-a)}$.

Om $X \sim U(a, b)$ så gäller att täthetsfunktionen uppfyller:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{för } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{för övriga } x \text{ som antas.} \end{cases}$$

För väntevärde, varians och standardavvikelse gäller det att:

$$E(X) = \frac{a+b}{2}$$
$$V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$D(X) = \frac{b-a}{\sqrt{12}}. \quad (5)$$

Sats 2 (Markovs olikhet). *Låt X vara en slumpvariabel och $g : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty]$ en kontinuerlig funktion. Då gäller, för varje tal $\epsilon > 0$, följande uppskattning av sannolikheten $\mathbb{P}\{h(X) \geq \epsilon\}$:*

$$\mathbb{P}\{h(X) \geq \epsilon\} \leq \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}\{h(X)\}.$$

Tillämpningen vi använder oss av är för att göra uppskattningar på sannolikheter av typen:

$$\mathbb{P}\{|X| \geq \epsilon\}.$$

Vi tillämpar då olikheten med funktionen $h : \mathbb{C} \rightarrow [0, \infty)$, som definieras som $h(x) = |x|$. Olikheten ger den övre begränsningen:

$$\mathbb{P}\{|X| \geq \epsilon\} \leq \frac{1}{\epsilon} \mathbb{E}|X|.$$

Sats 3 (Jensens olikhet). *Låt X vara en integrerbar slumpvariabel. Låt nu $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vara en konvex funktion. Då gäller att $\mathbb{E}[g(X)] \geq g(\mathbb{E}[X])$.*

Bevis. En funktion $g(X)$ är konvex om det för varje punkt x_0 på g stämmer att g alltid är över tangenten i x_0 . Detta kan alltså skrivas som:

$$g(x) \geq g(x_0) + b(x - x_0), \forall x$$

där b är tangentens lutning.

Om vi nu sätter att $x = X$ och att $x_0 = \mathbb{E}[X]$ blir nu olikheten:

$$\begin{aligned} g(X) &\geq g(\mathbb{E}[X]) + b(X - \mathbb{E}[X]) \\ \mathbb{E}[g(X)] &\geq \mathbb{E}[g(\mathbb{E}[X]) + b(X - \mathbb{E}[X])] \\ &= g(\mathbb{E}[X]) + b(\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]) = g(\mathbb{E}[X]). \end{aligned}$$

Därmed är beviset klart. □

3 Vägen till Jensens formel

3.1 Cauchys Integralformel

Sats 4. Anta att f är en analytisk funktion i en öppen mängd som innehåller det slutna höljet av disken D . Om C markerar gränscirkeln till D med positiv riktning gäller att:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)} d(\zeta), z \in D \quad (6)$$

Enklare uttryckt innebär detta att funktionen är bestämd av värdena som f antar på randcirkeln $C = \partial D$

Bevis av Cauchys Integral formel

Bevis. Vi fixerar först $z \in D$ och betraktar nyckelhålet $\Gamma_{\delta,\epsilon}$ enligt bilden nedanför. Här symboliserar δ bredden på den skapade korridoren och ϵ radien på cirkeln C_ϵ . Punkterna A,B,D samt E symboliserar ändpunkterna på korridorerna. Du kan se en visualisering av detta i figur 4.

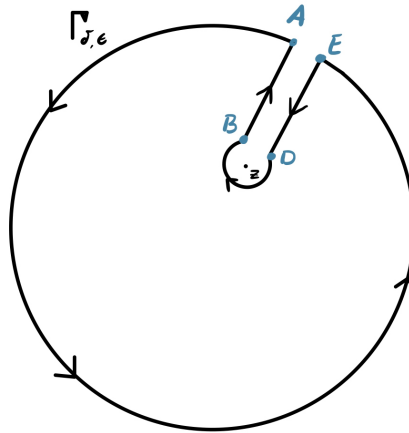


Figure 4: Nyckelhålet $\Gamma_{\delta,\epsilon}$.

Eftersom funktionen $F(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)}$ är analytisk överallt förutom då $\zeta = z$ kan vi med hjälp av Cauchys sats (sats 1) säga att

$$\oint_{\Gamma_{\delta,\epsilon}} F(\zeta)d\zeta = 0.$$

Vi låter $\delta \rightarrow 0$ för att "stänga" δ -korridoren. $F(\zeta)$ s kontinuitet gör så att integralerna som representerar korridorerna AB och DE tar ut varandra. Vi betecknar dessa två integraler som

$$\int_{\pm I_\delta} F(\zeta)d\zeta.$$

Vi inser att då $\delta \rightarrow 0$ kommer integralerna över I_δ^+ och I_δ^- att ta ut varandra, så deras summa är $o(1)$ då $\delta \rightarrow 0$. Efter att detta har skett kvarstår endast gränscirkeln C och C_ϵ . En bildlig representation av detta ses i figur 5. Därefter skriver vi om $F(\zeta)$ som $\frac{f(\zeta)-f(z)}{\zeta-z} + \frac{f(z)}{\zeta-z}$ och observerar att första termen är begränsad och att dess integral därmed kommer närma sig 0 då längden av kurvan C_ϵ går mot 0.

Sammanfattningsvis vet vi alltså att:

$$\oint_{\Gamma_{\delta,\epsilon}} F(\zeta)d\zeta = 0 \Leftrightarrow \int_C F(\zeta)dz + \int_{C_\epsilon} F(\zeta)dz + \int_{\pm I_\delta} F(\zeta)d\zeta = 0.$$

Detta innebär att om vi först låter $\delta \rightarrow 0$ kommer vi att få:

$$\int_C F(\zeta)dz = - \int_{C_\epsilon} F(\zeta)dz = - \int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta.$$

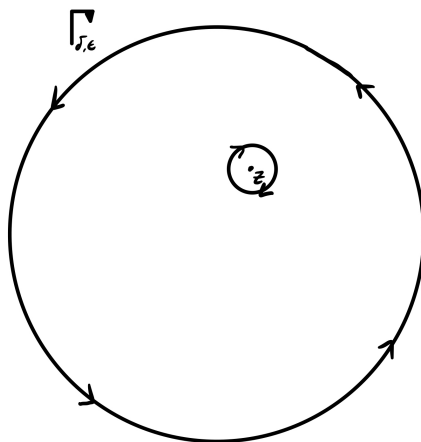


Figure 5: Nyckelhålet $\Gamma_{\delta,\epsilon}$ utan dess korridor.

Vidare utveckling då $\epsilon \rightarrow 0$ ges av:

$$\int_C F(\zeta) dz = - \int_{C_\epsilon} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta + \int_{C_\epsilon} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta.$$

Vi noterar härnäst att integranden i den sista integralen är begränsad, och efter $|C_\epsilon| = o(1)$ är integralen $o(1)$ enligt egenskapen (iii) på s.6. Efter detta gör vi ett variabelbyte som lyder:

$$\left[\begin{array}{l} \zeta = \epsilon e^{-it} + z \quad \leftrightarrow \quad \zeta - z = \epsilon e^{-it} \\ \frac{d\zeta}{dt} = -i\epsilon e^{-it} \quad \leftrightarrow \quad d\zeta = -i\epsilon e^{-it} dt \end{array} \right].$$

Efter variabelbytet och omskrivningar erhålles:

$$\int_{C_\epsilon} \frac{f(z)}{\zeta - z} d\zeta = f(z) \int_{C_\epsilon} \frac{d\zeta}{\zeta - z} = f(z) \int_0^{2\pi} \frac{-\epsilon i e^{-it}}{\epsilon e^{-it}} dt.$$

Genom att fortsätta förenkla uttrycket till höger ges därmed:

$$-f(z) \int_0^{2\pi} \frac{\epsilon i e^{-it}}{\epsilon e^{-it}} dt = -f(z) \int_0^{2\pi} i dt = -f(z) \cdot 2\pi i.$$

Efter det att gränsvärdet har tagits och den begränsade högertermen går mot 0 återstår

$$\int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -f(z) 2\pi i.$$

Vi gör några sista omskrivningar enligt:

$$f(z) \cdot 2\pi i = \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \Rightarrow f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

och därmed är vårt bevis klart. □

3.2 Medelvärdesegenskapen

Definition 7 (Medelvärdesegenskapen). Om f är en analytisk funktion i en disk D_R , gäller det att i punkten $z_0 \in D_R$ att:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r e^{i\theta}) d\theta \quad (7)$$

för alla radier r sådana att $0 < r < R$.

Kurvan vi integrerar över är en cirkel som skapas av $e^{i\theta}$ då argumentet varierar. Cirkeln kommer att ha radien r och mittpunkten z_0 [2].

Bevis. Detta bevis utgår från Cauchys Integralformel (4) och mittpunkten av en disk. Detta ger oss:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (8)$$

Vidare utveckling av detta ger oss:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{z_0 + re^{i\theta} - z_0} d(z_0 + re^{i\theta}) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) \cdot id\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta. \end{aligned}$$

Detta avslutar beviset. \square

3.3 Bevis för att den komplexa logaritmen är analytisk

Sats 5 (Den komplexa logaritmen är analytisk). *Låt Ω vara ett enkelt sammanhängande område och $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ vara en analytisk funktion. Då finns en analytisk funktion $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ så att*

$$e^{g(z)} = f(z).$$

Det gäller även att $g' = \frac{f'}{f}$ och för något fixerat $p \in \Omega$ gäller det att:

$$g(z) = g(p) + \int_p^z \frac{f'(\omega)}{f(\omega)} d\omega.$$

Bevis. Vi fixerar först en punkt z_0 i Ω och definierar $g(z)$ som

$$g(z) = a + \int_p^z \frac{f'(\omega)}{f(\omega)} d\omega,$$

där kurvan vi integrerar över sammansluter z och p och är innehållen i Ω . Vi återkommer till hur a definieras. Denna funktion är oberoende av kurvan mellan p och z , och då $\frac{f'}{f}$ är analytisk är även $g(z)$ analytisk med

$$g'(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}.$$

Om vi nu utgår från funktionen $F(z) = e^{-g(z)} f(z)$, så är dess derivata

$$\begin{aligned} F'(z) &= -e^{g(z)} g'(z) f(z) + e^{-g(z)} f'(z) = \\ &= e^{-g} (f' - g' f) = 0. \end{aligned}$$

Eftersom Ω är ett sammanhängande område implicerar detta att $F(z)$ är konstant. Då $g(p) = a$ så att $F(p) = e^{-a} f(p)$.

Vi väljer nu att $a = \log |f(p)| + i \arg f(p)$. Då kommer $e^a = f(p) \rightarrow F(p) = 1$. Just eftersom f är konstant så implicerar detta att

$$e^{g(z)} = f(z),$$

vilket avslutar beviset. \square

3.4 Jensens formel

Jensens formel

Jensens formel används för att beräkna antalet nollställen av funktionen f inuti disken D_R med radien R och origo som mittpunkt. Därmed är formeln fundamental för vår syftesformulering om att få fördjupad kunskap om polynom och dess nollställen.

Sats 6. Jensens formel

Antagande 1. Antaganden för Jensens formel

Låt Ω vara en öppen mängd som innehåller det slutna höljet av disken D_R och anta att

- funktionen f är analytisk i Ω
- $f(0) \neq 0$
- f ej försvinner på cirkeln C_R .
- z_1, z_2, \dots, z_N är nollställena av f inuti D_R .

Detta sista antagande innebär i praktiken att det ej finns några nollställen som hopar sig runt cirkeln. Då säger Jensens formel att denna likhet gäller:

$$\log |f(0)| = \sum_{k=1}^N \log\left(\frac{|z_k|}{R}\right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta. \quad (9)$$

Bevis av Jensens formel

Bevis. Vi skriver först upp en funktion $g(z)$, som fås genom att dividera bort alla f 's nollställen på disken D_R . Detta skrivs som:

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z - z_1)(z - z_2)\dots(z - z_N)}$$

och $g(z)$ är då definierad på mängden $\Omega - \{z_1, z_2, \dots, z_N\}$. Detta får en följd konsekvenser.

- $g(z)$ kommer aldrig försvinna på D_R .
- $g(z)$ kommer vara begränsad för varje z_j , vilket gör att z_j är en hävbar singularitet.

Som en följd av vår uppdelning av $f(z)$ kan vi skriva $f(z)$ som $g(z) \cdot \prod_{j=1}^N (z - z_j)$, där både $g(z)$ och $\prod_{j=1}^N (z - z_j)$ är analytiska. Beviset delas upp i två delar, där vi visar att formeln stämmer för båda termerna i produkten. Slutligen visar vi att dessa två tillsammans ger Jensens formel för produkten.

Vi börjar med att visa att

$$\log |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(\operatorname{Re} e^{i\theta})| d\theta. \quad (10)$$

Utifrån antagandet att $g(z)$ är analytisk i en disk större än D_R använder vi detta för att skriva om absolutbeloppet av $g(z)$:

$$\begin{aligned} |g(z)| &= |e^{h(z)}| = |e^{\operatorname{Re} h(z) + i\operatorname{Im} h(z)}| = e^{\operatorname{Re} h(z)} \\ &\Rightarrow \log |g(z)| = \operatorname{Re} h(z). \end{aligned}$$

Vi använder oss nu av detta i medelvärdessatsen då $f(z) = \log |g(z)|$ och erhåller:

$$\log |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(0 + \operatorname{Re} e^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(\operatorname{Re} e^{i\theta})| d\theta.$$

Vilket var det vi ville visa.

Nästa del av beviset är att visa att Jensens formel även är applicerbar på $\prod_{j=1}^N (z - z_j)$. Detta görs genom att visa att det gäller för funktionen på formen $f(z) = z - w$, $w \in D_R$. w representerar här de enskilda termerna i vår produkt. Summan av dessa termer kommer alltså att tillsammans representera varje nollställe. Det räcker därmed att visa att:

$$\log |w| = \log \left(\frac{|w|}{R} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |Re^{i\theta} - w| d\theta. \quad (11)$$

Därefter observerar vi att $\log \left(\frac{|w|}{R} \right) = \log |w| - \log(R)$ samt att $\log |Re^{i\theta} - w| = \log |R| + \log |e^{i\theta} - \frac{w}{R}|$. Vi kallar detta för egenskap 2 och 3. För vår skull räcker det alltså att visa att:

$$\int_0^{2\pi} \log |e^{i\theta} - a| d\theta = 0, |a| \leq 1.$$

Om vi istället låter $\theta \rightarrow -\theta$ kommer det att räcka att visa att:

$$\int_0^{2\pi} \log |1 - ae^{i\theta}| d\theta = 0, |a| \leq 1.$$

För att visa att denna likhet gäller använder vi oss av funktionen $F(z) = 1 - az$, som ej kommer att ha några nollställen på D_R . Därmed kommer det att finnas en analytisk funktion $G(z)$ på en disk med en radie > 1 , så att:

$$\begin{aligned} F(z) = e^{G(z)} &\leftrightarrow \log |F(z)| = \log |e^{G(z)}| = \\ \log |e^{\operatorname{Re}(G(z)) + i\operatorname{Im}(G(z))}| &= \log e^{\operatorname{Re} G(z)} = \operatorname{Re} G(z). \end{aligned}$$

Detta gör att då $F(0) = 1$ kommer även $\log |F(0)| = 0$. Vi sätter nu in $G(z)$ i medelvärdesatsen och erhåller att:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} G(e^{i\theta}) d\theta = \operatorname{Re} G(0).$$

Vi vet därmed att både vårt vänsterled och vårt högerled kan skrivas om som $\log |F(0)|$. Därmed är vårt bevis för denna term klar och vi har nu bevisat att Jensens formel stämmer för våra två faktorer $g(z)$ och $\prod_{j=1}^N (z - z_j)$.

För att sammanfatta så vet vi alltså att

$$\log |g(0)| = 0 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(\operatorname{Re} e^{i\theta})| d\theta.$$

och att

$$\log \left(\prod_{j=1}^N |0 - z_j| \right) = \sum_{k=1}^N \log \left(\frac{|z_k|}{R} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \prod_{j=1}^N |R e^{i\theta} - z_j| d\theta.$$

När vi nu adderar dessa termer får vi:

$$\log |g(0)| + \log \left(\prod_{j=1}^N |0 - z_j| \right) = \sum_{k=1}^N \log \left(\frac{|z_k|}{R} \right) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(\operatorname{Re} e^{i\theta})| + \log \prod_{j=1}^N |R e^{i\theta} - z_j| d\theta.$$

Som en konsekvens av logaritmregeln $\log a + \log b = \log(ab)$ ges vänsterledet av

$$\log(|g(0)| \cdot \prod_{j=1}^N |0 - z_j|) = \log |f(0)|$$

enligt vår definition av $g(z)$ respektive $\prod_{j=1}^N |z - z_j|$. Högerledet kommer att bli

$$\sum_{k=1}^N \log \left(\frac{|z_k|}{R} \right) + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (\log(|g(\operatorname{Re} e^{i\theta})| \cdot \prod_{j=1}^N |R e^{i\theta} - z_j|)) d\theta,$$

Vilket avslutar vårt bevis. □

3.5 Konsekvenser av Jensens formel

Lemma 1. Om z_1, \dots, z_N är nollställen till funktionen f inuti disken D_R gäller det att:

$$\int_0^R \mathbf{n}(r) \frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^N \log \left| \frac{R}{z_k} \right|, \quad (12)$$

där $\mathbf{n}(r)$ (eller $\mathbf{n}_f(r)$ om vi vill hålla reda på den aktuella funktionen) är antalet nollställen till f inuti disken D_r med radien $0 < r < R$.

Bevis av Lemma 1

Bevis. Vi gör först en omskrivning där serien $\sum_{k=1}^N \log \left| \frac{R}{z_k} \right|$ skrivs om till $\sum_{k=1}^N \int_{|z_k|}^R \frac{dr}{r}$. Då täljaren blir den övre gränsen samt nämnaren den undre gränsen av integralen. Eftersom derivatan av radien $\log r = \frac{1}{r}$ följer sista delen av omskrivningen.

Efter detta definierar vi den karaktäristiska funktionen $\eta_k(r)$ som:

$$\eta_k(r) = \begin{cases} 1 & \text{om } r > |z_k|, \\ 0 & \text{om } r \leq |z_k|, \end{cases}$$

I dessa fall kommer $\sum_{k=1}^N \eta_k(r) = \mathbf{n}(r)$. Vi gör flertalet omskrivningar och kommer fram till formen i lemmat:

$$\sum_{k=1}^N \int_{|z_k|}^R \frac{dr}{r} = \sum_{k=1}^N \int_0^R \eta_k(r) \frac{dr}{r} = \int_0^R \left(\sum_{k=1}^N \eta_k(r) \right) \frac{dr}{r} = \int_0^R \mathbf{n}(r) \frac{dr}{r}.$$

□

Detta lemma beskriver ett samband mellan antalet nollställen inom disken D med någon radie $0 < r < R$ och hur snabbt funktionen f växer. Genom att använda oss av detta lemma samt Jensens formel fås under antagandena att $f(0) \neq 0$ samt f aldrig försvinner på cirkeln C_r så kan vi skriva om Jensens formel som:

$$\int_0^R \mathbf{n}(r) \frac{dr}{r} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\theta})| d\theta - \log |f(0)|. \quad (13)$$

4 En uppskattning av antalet nollställen långt från enhetscirkeln

I denna del av uppsatsen ett resultat från en artikel skriven av Nikeghbali samt Hughes att presenteras. Denna sats presenteras här på ett komprimerat vis för läsarens skull. I artikeln visar författarna ett universiellt resultat, i bemärkelsen att slumppolynomets koefficienter ej behöver bara oberoende eller likafördelade för att satserna skall gälla, vilket var fallet tidigare.

Dessa resultat kommer senare att användas i uppsatsens sista del.

4.1 Införande av beteckningar

Vi låter först $P_N(Z)$ vara en sekvens av komplexa polynom, så att

$$P_N(Z) = \sum_{k=0}^N a_k Z^k, \quad (14)$$

och där $a_0 a_N \neq 0$. Vi benämner rötterna till $P_N(Z)$ genom z_1, \dots, z_n . Låt sedan

$$L_N(P_N) = \log\left(\sum_{k=0}^N |a_k|\right) - \frac{1}{2} \log |a_0| - \frac{1}{2} \log |a_N|. \quad (15)$$

Vi definierar sedan ett tal $\nu_N(\rho)$ som

$$\nu_N(\rho) := \#\{z_k : 1 - \rho \leq |z_k| \leq \frac{1}{1 - \rho}\}. \quad (16)$$

Detta tal symboliserar antalet nollställen som ligger i ett ringområde begränsad av $1 - \rho$ och $\frac{1}{1 - \rho}$, där ρ är begränsad av $0 \leq \rho \leq 1$.

Vi använder oss av beteckningen från (14) och betecknar polynomets nollställen som z_j , där $1 \leq j \leq N$. För $0 \leq \rho \leq 1$ gör vi 3 stycken beteckningar. Dessa är:

$$\begin{aligned} \Delta_1(\rho) &= \#\{z_j, |z_j| < 1 - \rho\} \\ \Delta_2(\rho) &= \#\{z_j, |z_j| > \frac{1}{1 - \rho}\} \\ \nu_N(\rho) &= \#\{z_j, 1 - \rho < |z_j| < \frac{1}{1 - \rho}\} \end{aligned} \quad (17)$$

Här är den tredje beteckningen ekvivalent med (16). Dessa beteckningar kommer då att räkna antalet nollställen som tillhör polynomet $P_N(Z)$ som ligger inuti det markerade området i figur 6.

Detta markerade område kan beskrivas som de nollställen som ligger utanför en disk med radien $1 - \rho$, men inuti den stängda disken med radien $\frac{1}{1 - \rho}$.

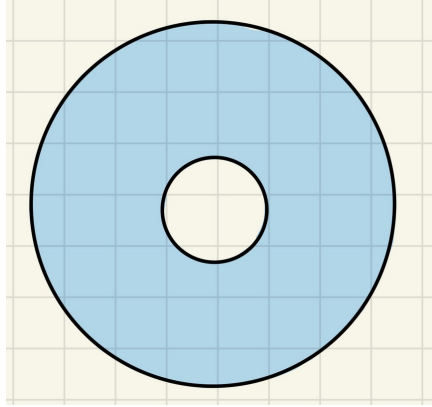


Figure 6: Markerat område för nollställen som tillhör $\Delta_{3,N}(\rho)$

4.2 Uppskattningen

Sats 7. [3, Sats 4]

För $N \geq 1$, låt $(a_k)_{0 \leq k \leq N}$ vara en sekvens av komplex som uppfyller att $a_0 a_N \neq 0$. Då gäller för $0 < \rho < 1$ att:

$$\frac{1}{N} \Delta_1(\rho) \leq \frac{1}{N\rho} (\log(\sum_{k=0}^N |a_k|) - \log |a_0|). \quad (18)$$

$$\frac{1}{N} \Delta_2(\rho) \leq \frac{1}{N\rho} (\log(\sum_{k=0}^N |a_k|) - \log |a_N|). \quad (19)$$

samt

$$(1 - \frac{1}{N} \nu_N(\rho)) \leq \frac{2}{N\rho} (\log(\sum_{k=0}^N |a_k|) - \frac{1}{2} \log |a_0| - \frac{1}{2} \log |a_N|). \quad (20)$$

Bevis. Först använder vi oss av Lemma (1) och skriver om Jensens formeln för vår aktuella cirkel. Detta blir:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P_N(e^{i\varphi})| d\varphi - \log |P_N(0)| = \sum_{|z_i| < 1} \frac{1}{|z_i|} \quad (21)$$

Precis som beskrivits i Lemma 1 beskrivs högerledet i antalet nollställen inuti den öppna disken D_R . Eftersom vi undersöker cirkeln $e^{i\varphi}$ med radien $R = 1$ är det inuti den öppna disken D_1 . Efter detta observerar vi att eftersom $0 \leq \rho \leq 1$ kommer $|z_i| \leq 1 - \rho$ och därmed kommer även $\log \frac{1}{|z_i|} \geq \rho$. Utifrån detta kan vi skriva om vårt högerled enligt:

$$\sum_{|z_i|} \log \frac{1}{|z_i|} \geq \sum_{|z_i| < 1 - \rho} \log \frac{1}{|z_i|} \geq \Delta_{1,N} \cdot \rho.$$

Den sista likheten utgår från Δ_1 s definition. Förutom detta observeras även att $\max_{\varphi \in [0, 2\pi]} P_N(e^{i\varphi}) \leq \sum_{k=0}^N |a_k|$. En omskrivning av (21) ger oss då:

$$\rho \Delta_1(\rho) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |P_N(e^{i\varphi})| d\varphi - \log |P_N(0)| \leq \log \left(\sum_{k=0}^N |a_k| \right) - \log |a_0|,$$

vilket är ekvivalent med (18) efter att ha dividerat med N samt ρ .

När vi nu går vidare till (19) observerar vi först $\Delta_{2,N}$. Vi noterar att om z_0 är ett nollställe till polynomet $P_N(Z) = \sum_{k=0}^N a_k Z^k$ kommer även $\frac{1}{z_0}$ vara ett nollställe för polynomet $Q_N(Z)$. Detta följer från definitionen av poler och nollställen (Definition 5). Därmed vet vi att objektet i fråga är en stängd disk med radien $\frac{1}{1-\rho}$.

Polynomet $Q_N(Z)$ är *reflektionspolynomet*

$$Q_N(Z) = Z^N P\left(\frac{1}{Z}\right).$$

Detta reflektionspolynom kommer att beskrivas ytterligare när beviset är klart. Vi skriver om $Q_N(Z)$ som $Z^N P_N\left(\frac{1}{Z}\right) = a_N + a_{N-1}Z + \dots + a_0 Z^N$. Antalet nollställen för Q_N utanför $D_{(1-\rho)^{-1}}$ kommer vara lika många som antalet nollställen för P_N i skivan $D_{1-\rho}$. Vi kan därmed tillämpa (18) på polynomet Q_N och erhåller då:

$$\frac{1}{N} \Delta_2 \leq \frac{1}{N\rho} \left(\log \sum_{k=0}^N |a_k| - \log |a_N| \right)$$

efter att ha dividerat med N samt ρ .

Sist av allt vill vi få fram (20). Detta gör vi genom att först observera att $N - \nu_N(\rho)$ kommer vara lika med $\Delta_1 + \Delta_2$. Det vill säga:

$$N - \nu_N(\rho) = \Delta_1 + \Delta_2.$$

Genom att använda oss av (18) samt (19) erhålles:

$$N - \nu_N(\rho) \leq \frac{2}{\rho} \log \left(\sum_{k=0}^N |a_k| \right) - \log |a_0| - \log |a_N|.$$

Varav vi erhåller (20) genom att bryta ut 2:an i högerledet samt dividera med N .

För att nu få det på formen i sats 3 utgår vi från (20). Eftersom $L_N(P) = \log \sum_{k=0}^N |a_k| - \frac{1}{2} \log |a_0| - \frac{1}{2} \log |a_N|$ (utifrån dess definition) kan vi ersätta parantesen i högerledet med $L_N(P)$, vilket avslutar beviset. \square

4.3 Reflektionspolynomet

Till varje polynom finns det ett *reflektionspolynom*. Om vårt polynom är

$$P_N(Z) = \sum_{k=0}^N a_k Z^k$$

har nollstället z_0 kommer $\frac{1}{z_0}$ vara ett nollställe till $P_N(Z)$ s *reflektionspolynom*

$$Q_N(Z) = Z^N P\left(\frac{1}{Z}\right),$$

vilket vi därmed även kan skriva som

$$Q_N(z) = Z^N P_N\left(\frac{1}{Z}\right) = a_N + a_{N-1}Z + \dots + a_0 Z^N.$$

Låt nu P_N vara ett slumppolynom med likafördelade och oberoende koefficienter. Eftersom fördelningen av Q_N 's koefficienter sammanfaller med P_N 's måste deras nollställen ha samma fördelning. Det är detta som förklarar just varför vi får den symmetrin som kan ses i figur 1. Det är alltså fördelningen av nollställen som speglas i reflektionspolynomen.

5 Problem

Här nedan kommer ett problem som använder sig av de tidigare redovisade resultaten.

5.1 Problemformulering

Anta att du slumpar fram n stycken tal som blir koefficienter till ett slumppolynom på formen $a_0 + a_1 z^1 + \dots + a_n z^n$. Anta sedan att dessa koefficienter är likafördelade och oberoende av varandra. Detta polynom tillåts även vara komplext, och därmed blir de tal som slumpas fram på formen $a + bi$.

Låt nu $\nu_{n,\rho}$ ges av:

$$\nu_{n,\rho} := \#\{z, 1 - \rho < |z| < \frac{1}{1 - \rho}, P_n(z) = 0\}$$

där

$$P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k.$$

Om $n \rightarrow \infty$ och $\rho \rightarrow 0$, vad är då sannolikheten att:

$$\left| \frac{\nu_{n,\rho}}{n} - 1 \right| > \delta$$

om vi låter koefficienterna vara : a) normalfördelade b) likformigt fördelade?
En annan fråga är om:

$$\left| \frac{\nu_{n,\rho}}{n} - 1 \right| \rightarrow 0?$$

5.2 Lösningsförslag

Generell uppskattning

Vi antar i detta lösningsförslag att $\mathbb{E}|a_0|$ och $\mathbb{E}|a_N|$ är ändliga tal. Dessutom antar vi att $\mathbb{P}(a_0 = 0) = 0$.

Talet $\nu_n(\rho)$ kommer som bekant att beteckna antalet nollställen i ringområdet som begränsas av $1 - \rho$ och $\frac{1}{1-\rho}$, vi vill att detta ringområde skall vara litet och betraktar därmed ρ som nära noll.

Enligt sats 7 kommer olikheten

$$\left(1 - \frac{1}{N}\nu_N(\rho)\right) \leq \frac{2L_N(P)}{N\rho}$$

att gälla, givet att $a_0 a_n \neq 0$. Då väntevärden bevarar olikheter kan vi därmed skriva om olikheten som:

$$\mathbb{E}\left(\left(1 - \frac{1}{N}\nu_N(\rho)\right)\right) \leq \frac{2}{N\rho}\mathbb{E}(L_N(P)).$$

För att kunna uppskatta väntevärdet av vårt högerled använder vi oss av sats 3 för att visa att

$$\mathbb{E}(\log Y) \leq \log \mathbb{E}(Y).$$

Då e^X är en konvex funktion kan vi enligt Jensens olikhet utgå från olikheten

$$e^{\mathbb{E}(X)} \leq \mathbb{E}(e^X) \leftrightarrow \mathbb{E}(X) \leq \log \mathbb{E}(e^X). \quad (22)$$

Vi fortsätter därmed genom att ersätta X med $\log(Y)$ och erhåller

$$\mathbb{E}(\log Y) \leq \log \mathbb{E}(Y),$$

vilket är det vi ville visa.

Detta innebär att om vi kan visa att $\frac{2}{N\rho}\mathbb{E}(L_N(\rho))$ är lika med $o(1)$ då $N \rightarrow \infty$ så kommer högerledet att vara begränsat och därmed kommer även vårt originaluttryck gå mot 0. För att visa att högerledet går mot $o(1)$ vill vi visa att täljaren $2\mathbb{E}(L_N(P))$ växer långsammare än täljaren $N\rho$.

Enligt olikheten 22 gäller olikheten

$$\mathbb{E}\left(\log \sum_{k=0}^N |a_k|\right) + C \leq C + \log \sum_{k=0}^N \mathbb{E}|a_k|.$$

Vad är då väntevärdet av $L_N(P)$? Vi vet från ekvation 20 att vi kan skriva om $\mathbb{E}(L_N(P))$ till:

$$\mathbb{E} \log \sum_{k=0}^N |a_k| - \mathbb{E} \log |a_0| - \mathbb{E} \log |a_N| \leq C + \log \sum_{k=0}^N \mathbb{E}|a_k|.$$

Denna olikhet kommer att gälla då väntevärdet av såväl $\log |a_0|$ och $\log |a_N|$ kommer att anta ett fixt värde.

Vad kommer då $\log \sum_{k=0}^N \mathbb{E}|a_k|$ att vara? Jo, $\mathbb{E}|a_k|$ kommer att vara ett fixt tal. Detta kommer att gälla för alla a_k eftersom de är likafördelade och eftersom vi antog att $bE|a_0| < \infty$. Vi får då att

$$\log \sum_{k=0}^N \mathbb{E}|a_k| = O(\log N)$$

eftersom summan har N termer. Logaritmen kommer även i jämförelse med N att växa väldigt långsamt. Därmed kan vi skriva om bråket som

$$\frac{2o(N)}{N\rho},$$

vilket då kommer gå mot 0 då $N \rightarrow \infty$ om ρ är fixerat. Detta är dock baserat på att $N \rightarrow \infty$ snabbare än vad $\rho \rightarrow 0$. Märk även att vi även kan uttrycka kvoten som

$$\frac{2O(\log(N))}{N\rho}. \quad (23)$$

Detta kommer att gälla oavsett vad för fördelning vi har på koefficienterna, om vi kan garantera att $\mathbb{P}(a_0 a_n \neq 0) = 1$. Exempelvis då vi har en kontinuerlig fördelning.

Men hur påverkar de olika fördelningarna vår kvot? Först kan vi konstatera att $\mathbb{P}(a_0 a_n \neq 0) = 1$ då vi enbart hanterar kontinuerliga fördelningar. Vi kan därför sammanfatta vårt svar på problemet i tre punkter.

Om a_1, \dots, a_N är likafördelade och oberoende kontinuerliga slumpvariabler så är $\mathbb{E} \log |a_0|$ och $\mathbb{E}|a_0|$ ändliga på formen kan vi göra uppskattningen att

$$\mathbb{E}\left(1 - \frac{\nu_N(\rho)}{N}\right) \leq \frac{C + \log N}{N\rho}.$$

Genom denna uppskattning kan vi dra slutsatsen att

$$\mathbb{E}\left(1 - \frac{\nu_N(\rho)}{N}\right) \rightarrow 0$$

om ρ antingen är fixt eller inte krymper för snabbt. För att kontrollera att detta stämmer bör ρ villkoras med hjälp av N . Exemplevis genom att sätta att $\rho = \frac{1}{\log(N)}$ eller $\rho = \frac{1}{\sqrt{N}}$.

Vi kan även med hjälp av vår uppskattningen ge ett svar på vad sannolikheten är att

$$|\nu_N(\rho) - N| > \delta.$$

Via uppskattningen samt Markovs olikhet får vi, eftersom $1 - \frac{\nu_N(\rho)}{N} > 0$, att

$$\mathbb{P}(|\nu_N(\rho) - N| > \delta) \leq \frac{\mathbb{E}(1 - \frac{\nu_N(\rho)}{N})}{\delta} \leq \frac{C + \log(N)}{N\rho\delta}.$$

Även här ser vi att då N alltid kommer att växa snabbare än $\log(N)$, och för tal ρ och δ som är fixerade eller krymper tillräckligt långsamt i förhållande till N kommer denna kvot att gå mot 0 då $N \rightarrow \infty$.

Det är med dessa slutsatser som uppsatsen slutar. I framtida uppsatser eller forskning tror jag att det hade varit spännande att se vad som hade hänt om vi ej enbart undersökte likafördelade koefficienter, för att se om vår uppskattning gäller även där.

References

- [1] Britton, T., Garmo, H. *Sannolikhetslära och statistik för lärare*. Lund: studentlitteratur (2002).
- [2] Stein, E., Shakarchi, R. *Princeton lectures in Analysis II -Complex analysis*. Princeton: Princeton University Press (2003)
- [3] Hughes, C.P., Nikeghbali, A. *The Zeroes of random Polynomials cluster uniformly near the unit circle*. Cambridge: Cambridge University Press (2008)