



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Det Isopermetriska Problemet då och idag

av

Christian Westin

2023 - L3

Det Isoperimetriska Problemet då och idag

Christian Westin

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Jonathan Rohleder

2023

Abstrakt

This work is going to present the *Isopermetric Problem* and how the proof for the problem is presented in the ancient times by Zenodorus and in the modern times by Hurwitz. In order to do this there is going to be a thorough presentation of the background for each proof and thereafter the proof to the problem itself. The modern proof will involve *Fourier Series*.

Tack

Jag vill tacka mina handledare Jonathan Rohleder och Annemarie Luger som har varit till stor hjälp under detta arbete med sin tillgänglighet och stöd. Det har verkligen uppskattats!

Innehåll

1	Introduktion	4
1.1	Den historiska bakgrunden	4
1.2	Det Isopermetriska Problemet	4
1.3	Syfte	5
2	Det Antika Beviset: Zenodorus	5
2.1	Liksidighet innebär större area	5
2.2	Fler hörn innebär större area	7
2.3	Archimedes och arean för en cirkel	10
2.4	Zenodorus bevis	12
2.5	Den Isopermetriska Satsen	14
3	Vägen till det moderna beviset	14
3.1	Fourierserier	14
3.2	Trigonometriska serier	18
3.3	Alternativt framställning för Fourierserier	22
4	Användbara satser om Fourierserier	23
4.1	Termvis derivering	23
4.2	Parsevals Sats	25
5	Det moderna beviset: Hurwitz	28
6	Avslutning	32
7	Referenser	33

1 Introduktion

1.1 Den historiska bakgrunden

Dido, den ökända ledaren av Karthago, står vid fören av sitt skepp med en flotta seglande bakom sig. Hur länge de har seglat längs med den norra afrikanska kusten har fallit i glömska, men målet är lika tydligt som när de kastade loss och hissade segel: att finna ett land att kalla sitt eget. Till slut kommer de till en bukt med en kulle inåt land som skulle ge en god vy över området, en möjlighet att finna vad de söker. Efter att de hade ankrat skeppen börjar Dido klättra upp för kullen och vid toppen möts hon av en eremit som långsamt vänder sig om. Dido får veta att hon har kommit till ett land frälst av en ox-gud och den som löser oxens gåta kommer inte bara att bli frälst, men också dess följe. ”Ta ox-lädet och skapa den största hagen som ox-guden sett, bara då ska du bli frälst” sade eremiten. Dido tittade ut mot bukten med sina skepp och undrade vart de hamnat. Efter en stund så skar Dido ox-lädet i en tunn remsa och började gå. Om det var på detta sätt som historien utspelades kan jag endast spekulera i, men visst låter det som en trovärdig berättelse.

Berättelsen ger en version om det *Isopermetriska Problemet* och det tillhör historien lika naturligt som det antika Romerska Imperiet. Blåsjö i sin artikel skriver att Dido möjligtvis var den första att ställas inför det *Isopermetriska Problemet* när Dido försökte stänga in en så stor yta som möjligt med en tunn remsa ox-läder [1, pp. 526].

En naturlig fråga som uppstår vid det här laget är varför valde Dido att använda sig av en tunn remsa ox-läder? Ett möjligt svar till denna fråga skulle kunna vara att ju längre man skär en remsa ox-läder ju större area kan man innesluta då vi har en större omkrets att nyttja. Denna utgångspunkt är inte orimlig att tänka sig men om Dido hade ett sådant resonemang är idag omöjligt att veta. Vad vi kan säga är att det fanns en uppfattning i den antika världen om att omkretsen för ett objekt var direkt knutet till arean av ett objekt [1, pp. 527]. Om Dido var medveten om detta under sitt försök eller om Dido lyckades lösa det *Isopermetriska Problemet* är tyvärr förlorat till historien.

1.2 Det Isopermetriska Problemet

Vad är då det *Isopermetriska Problemet*? Tänk dig att vi har ett snöre av en viss längd. Med detta snöre kan vi skapa olika figurer som alla kommer att innesluta en area. Frågan är då vilken av dessa figurer som kommer att innesluta störst area? Vi kan formulera detta med en mer matematisk frågeställning.

Fråga: *Av alla figurer med omkrets P , vilken kommer att innesluta störst area A ?*

Svar: *En cirkel med omkrets P kommer att innesluta störst area A [1, pp. 530].*

Men varför är svaret en cirkel? Detta leder mig in till syftet för arbetet.

1.3 Syfte

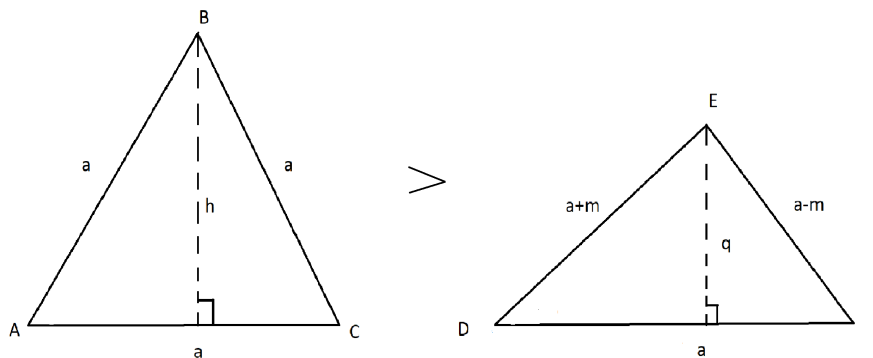
Syftet med detta arbete är att redogöra för två lösningar av det *Isoperimetriska Problemet* och de tillhörande teorierna för varje bevis. De två bevisen som kommer att behandlas är det antika beviset av *Zenodorus* och det mer moderna beviset av *Hurwitz* som använder *Fourierserier*.

2 Det Antika Beviset: Zenodorus

Från vad man har kunnat urskilja från historien så är *Zenodorus* den som formulerade det *Isoperimetriska Problemet*. Det arbete som *Zenodorus* själv skrev har tyvärr gått förlorat till tiden och vi har endast kännedom om arbetet via *Theon av Alexandrias* anteckningar [9]. Enligt dessa anteckningar så bygger *Zenodorus* sitt bevis utifrån två satser: En regelbunden polygon av n hörn kommer att täcka mindre area än en regelbunden polygon av $n + 1$ hörn om de är isoperimetriska, och *Archimedes* sats för arean av en cirkel. Av nyfikenhet har jag inkluderat ett bevis för att en liksidig triangel täcker större area än en icke-liksidig triangel.

2.1 Liksidighet innebär större area

Sats 2.1. *Av isoperimetriska trianglar så täcker en liksidig triangel störst area [6].*



Bevis. Herons Formel säger att arean för en triangel är

$$A_t = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

där $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ och a, b, c representerar en sidlängd vardera av en triangel. Det gäller

$$A_t^2 = s(s-a)(s-b)(s-c),$$

att $c = 2s - a - b$ och därför är

$$A_t^2 = s(s-a)(s-b)(a+b-s).$$

Om vi beräknar den partiella derivatan för sidlängd a och b och bestämmer när dessa är noll, $\frac{dA_t}{da} = \frac{dA_t}{db} = 0$, så bestämmer vi när arean kommer vara som störst för sidlängderna a och b . Den partiella derivatan för $\frac{dA_t}{da}$ är

$$\begin{aligned} 2A_t \frac{dA_t}{da} &= s(s-b)(-1)(a+b-s) + s(s-b)(s-a) \\ &= s(s-b)(-a-b+s+s-a) \\ &= s(s-b)(2s-2a-b) \\ &= s(s-b)(a+b+c-2a-b), \end{aligned}$$

alltså är

$$\frac{dA_t}{da} = \frac{s(s-b)(c-a)}{2A_t}.$$

Eftersom vi är intresserade av en triangel så måste det gälla att sidorna $a, b \geq 0$ och $a+b \leq s$ för annars hade vi inte haft en triangel. Då måste $a = c$ för att $\frac{dA_t}{da} = 0$. Om vi beräknar den partiella derivatan för $\frac{dA_t}{db}$ så är

$$\begin{aligned} 2A_t \frac{dA_t}{db} &= s(s-a)(-1)(a+b-s) + s(s-a)(s-b) \\ &= s(s-a)(-a-b+s+s-b) \\ &= s(s-a)(2s-2b-a) \\ &= s(s-a)(a+b+c-2b-a), \end{aligned}$$

alltså är

$$\frac{dA_t}{db} = \frac{s(s-a)(c-b)}{2A_t}.$$

Då måste $b = c$ för att $\frac{dA_t}{db} = 0$. Det är värt att notera att $A_t > 0$ för annars så skulle vi inte ha en triangel och vi behöver inte ta hänsyn till s när vi deriverar då detta är en konstant. Detta innebär att den maximala arean nås när sidan $a = b = c$, vilket är en liksidig triangel. \square

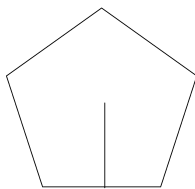
Det följer då att alla innervinklar i triangeln måste vara lika för att uppnå den maximala arean vilket även gör triangeln regelbunden. Vad vi nu kan säga är att den antika uppfattning om att arean för något är direkt knutet till omkretsen var en föreställning som inte höll vatten. Det är snarare så att det är geometrin bakom figuren som spelar roll för att maximera arean.

2.2 Fler hörn innebär större area

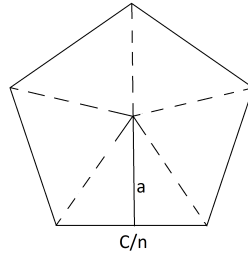
Det går att bevisa att den maximala arean av en polygon uppnås när polygonet är regelbundet [1, pp. 529]. Nu när vi vet att en polygon av n hörn och bestämd omkrets kommer att täcka störst area när den är regelbunden så undrar vi vad som händer när vi ökar antalet hörn i en regelbunden polygon?

Sats 2.2. *Av isoperimetriska regelbundna polygon så har det med flest hörn störst area [6].*

Bevis. Anta att vi har en regelbunden polygon av omkrets C . I detta polygon så skapar vi en perpendikulär linje från polygonets mittpunkt till en sida vilket vi kallar *apotem* enligt figuren nedan.



I detta polygon så kan vi skapa n likbenta trianglar där varje sida har längd C/n och utgör basen för en triangel och varje *apotem* a utgör höjden för varje triangel enligt figuren nedan.

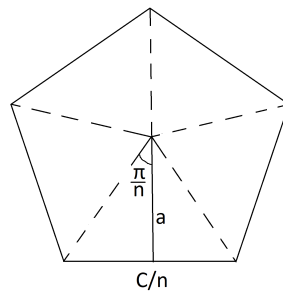


Vi vet att arean för en triangel är $A_t = \frac{1}{2} \cdot \text{baslängden} \cdot \text{höjden}$. Arean A_p för en regelbunden polygon av n trianglar är då

$$A_p = \frac{1}{2} a \frac{C}{n} n = \frac{1}{2} a C.$$

Då för att bevisa att fler hörn i en regelbunden polygon av bestämd omkrets innebär större area så behöver vi bevisa att apotemen a växer.

Vinkeln vid mittpunkten för det regelbundna polygonet i varje likbent triangel kommer att vara $\frac{2\pi}{n}$ där vår apotem a är en bisektris. Vinkeln är då $\frac{\pi}{n}$ enligt figuren nedan.



Med hjälp av trigonometri har vi att

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{n}\right) &= \frac{C}{2n} \\ \Leftrightarrow a &= \frac{C}{2n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}.\end{aligned}$$

Då $n \geq 3$ och $n \in \mathbb{N}$ så låter vi

$$f(x) = \frac{C}{2x \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)},$$

för att derivera. Om derivatan alltid är positiv så vet vi att a alltid växer. Då är

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{C}{2} (-1) \frac{\tan\left(\frac{\pi}{x}\right) - \frac{\pi}{x \cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)}}{\left(x \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)^2} \\ &= \frac{C}{2} \cdot \frac{\frac{\pi}{x \cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} - \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)}{\left(x \tan\left(\frac{\pi}{x}\right)\right)^2}.\end{aligned}$$

Vi ser att vi har en kvadrat i nämnaren så vi behöver visa att

$$\frac{\pi}{x \cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} - \tan\left(\frac{\pi}{x}\right) \geq 0$$

när $x \geq 3$. Det gäller att

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{x \cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} - \tan\left(\frac{\pi}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x} \frac{\pi}{\cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} - x \tan\left(\frac{\pi}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x \cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} (\pi - x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)) \\ &= \frac{\pi}{x \cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} \left(1 - \frac{x}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{x}\right) \cos\left(\frac{\pi}{x}\right)\right).\end{aligned}$$

Med identiteten $\sin(2\theta) = 2 \sin(\theta) \cos(\theta)$ gäller det att

$$\frac{\pi}{x \cos^2\left(\frac{\pi}{x}\right)} \left(1 - \frac{x}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{x}\right)\right).$$

Vi ser att

$$\frac{\pi}{x \cos^2(\frac{\pi}{x})} \geq 0$$

när $x \geq 3$ så vi behöver bestämma om

$$1 - \frac{x}{2\pi} \sin(\frac{2\pi}{x}) \geq 0$$

när $x \geq 3$. Låt $t = 2\pi/x$ och eftersom $x \geq 3$ så gäller det att $0 < t \leq 2\pi/3$. Vi har då att

$$1 - \frac{\sin(t)}{t} \geq 0.$$

Vi vet att $\sin(t)/t \leq 1$ så derivatan är aldrig negativ och därmed växer apotemen a vilket innebär att arean ökar när antalet hörn blir fler.

□

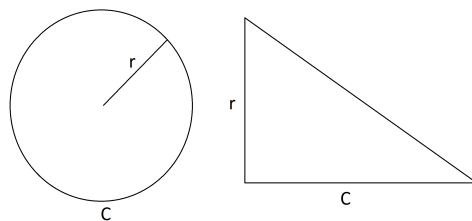
Vi blir mer och mer övertygade om att det är geometrin av figuren som kommer att påverka den maximala arean vi kan täcka. Hittills har vi enbart tittat på figurer av polygon men det finns ytterligare en figur som vi måste beröra, nämligen cirkeln.

2.3 Archimedes och arean för en cirkel

Archimedes bevisade utifrån omkretsen av en cirkel och arean för en triangel den välkända formeln att arean för en cirkel är $A_c = \pi r^2$. *Zenodorus* använder sig av detta i sitt bevis så låt oss titta närmare på varför detta är sant.

Sats 2.3. *Arean för en cirkel är $A_c = \pi r^2$ [3].*

Bevis. Anta att vi har en cirkel av radie r och omkrets C . Vi skapar nu en triangel där vi låter radien r vara höjden i vår triangel och vi låter omkretsen C vara basen i vår triangel enligt figurerna nedan.



Vi vet att arean för en triangel är $A_t = \frac{1}{2} \cdot \text{baslängden} \cdot \text{höjden}$. Då är arean för vår triangel

$$A_t = \frac{1}{2}rC = \frac{1}{2}r \cdot 2\pi r = \pi r^2.$$

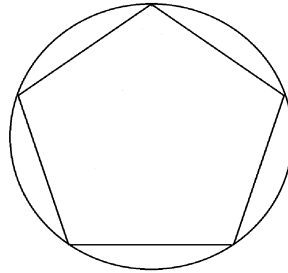
Då behöver vi bevisa att $A_c = A_t$. Vi gör detta genom att titta på två olika fall där vi i båda fallen kommer att härleda en motsägelse.

- Fall 1:** Cirkeln är större än triangeln.
- Fall 2:** Cirkeln är mindre än triangeln.

Fall 1: Om arean A_c för cirkeln är större än triangeln så finns det nåt positivt tal α sådant att

$$\alpha = A_c - A_t > 0.$$

I vår cirkel kan vi skriva in en regelbunden polygon av n hörn och area A_p som kommer att ha mindre area än vår cirkel enligt figuren nedan.



Då finns det nåt positivt tal β sådant att

$$\beta = A_c - A_p > 0.$$

Om vi ökar antalet hörn i en regelbunden polygon så kommer det för något n gälla att $\beta < \alpha$ då vår regelbundna polygon närmar sig arean för cirkeln. Men vi vet att arean för en regelbunden polygon är $A_p = \frac{1}{2}asn$ där s är en sidas längd. Apotemen a kommer alltid att vara mindre än radien r för cirkeln. Detta innebär att arean för vårt regelbundna polygon kommer alltid att vara mindre än vår triangel eftersom

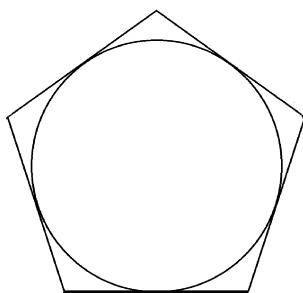
$$A_p = \frac{1}{2}asn < \frac{1}{2}rC = A_t.$$

Detta är en motsägelse då vi vet att det regelbundna polygonet är större än triangeln. Cirkeln kan inte vara större än triangeln.

Fall 2: Om arean för cirkeln är mindre än triangeln så finns det något positivt tal γ sådant att

$$\gamma = A_t - A_c > 0.$$

Då kan vi skapa en regelbunden polygon av n hörn och area A_p där vi skriver in cirkeln i det regelbundna polygonet enligt figuren nedan.



Då finns det något positivt tal β sådant att

$$\beta = A_p - A_c > 0.$$

Om vi ökar antalet hörn i det regelbundna polygonet så kommer det för något n gälla att $\beta < \gamma$ då vår regelbundna polygon närmar sig arean för cirkeln. Men arean för en regelbunden polygon är $A_p = \frac{1}{2}asn$. Apotemen a kommer i detta fall att vara lika med radien r och omkretsen för det regelbundna polygonet kommer alltid att vara större än cirkelns omkrets C . Detta innebär att vår regelbundna polygon är större än vår triangel eftersom

$$A_p = \frac{1}{2}asn > \frac{1}{2}rC = A_t.$$

Detta är en motsägelse då vi vet att vår triangel är större än vår regelbundna polygon. Cirkeln kan inte vara mindre än triangeln.

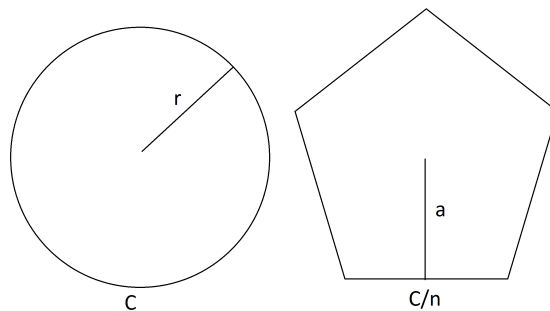
Det enda som återstår är att arean för cirkeln och triangeln måste vara lika. Arean för en cirkel är $A_c = \pi r^2$. \square

2.4 Zenodorus bevis

Nu när vi vet att arean är störst för en regelbunden polygon och att arean för en cirkel kan beräknas med hjälp av areaformeln för en triangel är vi redo att ta oss an beviset av *Zenodorus*.

Sats 2.4. En cirkel av omkrets C har större area än arean för en regelbunden polygon av n hörn och omkrets C [1, pp. 528].

Bevis. Anta att vi har en cirkel av radie r och omkrets C och att vi har en regelbunden polygon av n hörn, *apotem* a och omkrets C enligt figurerna nedan.



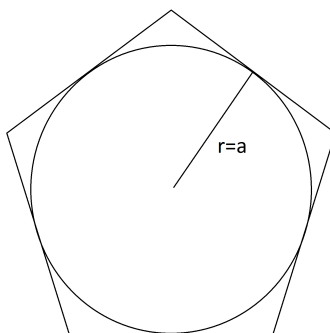
Arean för en cirkel A_c och en regelbunden polygon A_p är

$$A_c = \frac{1}{2}rC,$$

$$A_p = \frac{1}{2}a \frac{C}{n} n = \frac{1}{2}aC.$$

Då behöver vi bevisa att radien r är större än *apotem* a för att $A_c > A_p$.

Vi förstörar det regelbundna polygonet så att radien r och apotemen a är lika enligt figuren nedan.



Nu är omkretsen för vårt regelbundna polygon större än omkretsen för vår cirkel. Detta innebär att radien r för cirkeln måste ha varit större än apotemen a från början. Alltså måste arean för cirkeln ha varit större än vårt regelbundna polygon ursprungligen. Så en cirkel har större area än alla regelbundna polygon när omkretserna är lika. \square

2.5 Den Isoperimetriska Satsen

Zeonodoruses bevis av det *Isoperimetriska Problemet* må framstå som relativt trivialt där även någon utan en djup matematisk bakgrund skulle kunna förstå beviset, vilket inte alltid är sant för andra bevis i matematikens värld. Om ett bevis skulle kunna kategoriseras som charmigt tack vare sin enkelhet så skulle detta bevis med säkerhet kvalificera sig i denna kategori. Beviset leder till den *Isoperimetriska Satsen*.

Sats 2.5. *En cirkel med omkrets C har alltid större area än arean för ett polygon med omkrets C .*

Denna sats går även att uttryckas som en olikhet, den *Isoperimetriska Olikheten*.

Sats 2.6. *Det gäller att $L^2 - 4\pi A \geq 0$ där L är omkretsen och A är arean av en figur med likhet endast för en cirkel. [1, pp. 530].*

Dock så finns det ett problem med detta antika bevis och det är att det tar inte hänsyn till alla sorters figurer utan endast regelbundna polygon och cirkeln. Finns det en figur vi skulle kunna skapa som varken är en polygon eller en cirkel som täcker större area? Vi överlåter denna fråga till *Hurwitz*.

3 Vägen till det moderna beviset

Jag har nämnt *Hurwitz* ett antal gånger nu men vi får beväpna oss med tålamod. För att vi ska kunna förstå *Hurwitz* så måste vi först ha en förståelse kring *Fourierserier*.

3.1 Fourierserier

Fourierserier är en utveckling av en periodisk funktion med en summa av trigonometriska funktioner. För att redogöra denna teori så kommer jag att använda mig av boken från Walter Rudin.

Definition 3.1. Låt $\{\lambda_n\}$ vara en följd av kontinuerliga komplexa funktioner på ett intervall $[a, b]$ där $n \in \mathbb{Z}^+$, sådan att

$$(1) \quad \int_a^b \lambda_n \overline{\lambda_m} dx = 0$$

där $n \neq m$. Då sägs $\{\lambda_n\}$ vara ett ortogonalt system av funktioner på intervallet $[a, b]$ [5, pp. 186].

Definition 3.2. Om det gäller att $\{\lambda_n\}$ är ett ortogonalt system och

$$(2) \quad \int_a^b |\lambda_n|^2 dx = 1$$

för alla n så är $\{\lambda_n\}$ ortonormal och $\{\lambda_n\}$ kallas ortonormalt system [5, pp. 187].

Definition 3.3. Ett *trigonometriskt polynom* är en ändlig summa på formen

$$(3) \quad f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

där koefficienterna $a_0, \dots, a_N, b_1, \dots, b_N$ är komplexa tal [5, pp. 185].

Med *Eulers trigonometriska identitet*, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, kan (3) uttryckas som

$$(4) \quad f(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx},$$

eftersom

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} &= \sum_{n=-N}^N (c_n \cos(nx) + c_n i \sin(nx)) \\ &= c_0 + \sum_{n=-N}^{-1} (c_n \cos(nx) + c_n i \sin(nx)) + \sum_{n=1}^N (c_n \cos(nx) + c_n i \sin(nx)) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^N (c_{-n} \cos(-nx) + c_{-n} i \sin(-nx) + c_n \cos(nx) + c_n i \sin(nx)) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^N (c_{-n} \cos(nx) - c_{-n} i \sin(nx) + c_n \cos(nx) + c_n i \sin(nx)) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^N ((c_n + c_{-n}) \cos(nx) + (c_n - c_{-n}) i \sin(nx)) \\ &= a_0 + \sum_{n=1}^N (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \end{aligned}$$

Ett *trigonometriskt polynom* har period 2π och då gäller det när $n = \pm 1, \pm 2, \dots$ att

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{e^{inx}}{in} \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{in\pi}}{in} - \frac{e^{in(-\pi)}}{in} \right) = 0,$$

och när $n = 0$ gäller det att

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \frac{1}{2\pi} [x]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi}(\pi + \pi) = 1.$$

Vi har då följande lemma.

Lemma 3.1. Systemet

$$(5) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx},$$

och systemet

$$(6) \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nx), \dots$$

bildar ortonormala system över $[-\pi, \pi]$ för $n \in \mathbb{N}$ [5, pp. 187].

Om vi väljer att multiplicera (4) med e^{-imx} , där m är ett heltal, så får vi att

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-imx} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx} e^{-imx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-N}^N c_n e^{in(n-m)x} dx. \end{aligned}$$

Från (5) så gäller det att vi endast får en koefficient c_n när $n = m$ enligt

$$(7) \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Definition 3.4. Om $\{\lambda_n\}$ är ett ortonormalt system och

$$(8) \quad c_n = \int_a^b f(x) \overline{\lambda_n(x)} dx,$$

så säger vi att c_n är den n -te *Fourierkoefficienten* av $f(x)$ relativ $\{\lambda_n\}$ [5, pp. 187].

Definition 3.5. Då är

$$(9) \quad f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \lambda_n(x)$$

Fourierserien till f relativ $\{\lambda_n\}$.

Symbolen \sim vi använder i (9) berör inte konvergensen av serien, den indikerar enbart att koefficienterna c_n bestäms av (8) [5, pp. 187].

Sats 3.1. Låt $\{\lambda_n\}$ vara ett ortonormalt system i intervallet $[a, b]$ och låt

$$(10) \quad s_N = \sum_{m=1}^N c_m \lambda_m$$

vara den n -te partialsumman av Fourierserien till f . Anta också att

$$(11) \quad t_N = \sum_{m=1}^N y_m \lambda_m$$

där koefficienterna y_m är komplexa tal. Då gäller det att

$$(12) \quad \int_a^b |f - s_N|^2 dx \leq \int_a^b |f - t_N|^2 dx$$

med likhet endast när $y_m = c_m$ [5, pp. 187].

Bevis. Det gäller att

$$\int_a^b f \overline{t_N} dx = \int_a^b f \sum_{m=1}^N \overline{y_m \lambda_m} dx = \sum_{m=1}^N c_m \overline{y_m}$$

från (8) och (11). Eftersom $\{\lambda_n\}$ är ortonormal så gäller det att

$$\int_a^b |t_N|^2 dx = \int_a^b t_N \overline{t_N} dx = \int_a^b \sum_{m=1}^N y_m \lambda_m \sum_{k=1}^N \overline{y_k \lambda_k} dx = \sum_{m=1}^N |y_m|^2$$

enligt definitionen (2) och (11), och därför

$$\begin{aligned} \int_a^b |f - t_N|^2 dx &= \int_a^b |f|^2 dx - \int_a^b f \overline{t_N} dx - \int_a^b \overline{f} t_N dx + \int_a^b |t_N|^2 dx \\ &= \int_a^b |f|^2 dx - \sum_{m=1}^N c_m \overline{y_m} - \sum_{m=1}^N \overline{c_m} y_m + \sum_{m=1}^N |y_m|^2 \\ &= \int_a^b |f|^2 dx - \sum_{m=1}^N |c_m|^2 + \sum_{m=1}^N |y_m - c_m|^2 \end{aligned}$$

vilket är som minst när $y_m = c_m$ då den positiva termen försvinner. Men när $y_m = c_m$ så är $t_N = s_N$ vilket innebär att olikheten är

$$(13) \quad \int_a^b |f - s_N|^2 dx \leq \int_a^b |f - s_N|^2 dx.$$

□

Detta innebär att, för alla funktioner t_N , så är s_N den bästa möjliga approximationen till f . Om vi ersätter y_m med c_m i vår olikhet så får vi att

$$(14) \quad \int_a^b |s_N|^2 dx = \sum_{m=1}^N |c_m|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx,$$

eftersom $\int_a^b |f - t_N|^2 dx \geq 0$ [5, pp. 187].

Sats 3.2. Om $\{\lambda_n\}$ är ortonormal i intervallet $[a, b]$ och

$$f(x) \sim \sum_{m=1}^{\infty} c_m \lambda_m(x)$$

så gäller det att

$$(15) \quad \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Bevis. Om vi låter $N \rightarrow \infty$ i (14) så får vi (15) [5, pp. 188]. □

Det följer då att

$$(16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0.$$

3.2 Trigonometriska serier

Denna sektion kommer enbart att beröra det ortonormala systemet från (5) och funktioner f som har period 2π och är integrerbara på intervallet $[-\pi, \pi]$. *Fourierserien* till f är då serien givet av (9) och *Fourierkoefficienterna* är givna av (7) och

$$(17) \quad s_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inx}$$

är den n -te partialsumman av *Fourierserien* till f .

Den olikhet som vi härledde i (14) var för ett godtyckligt ortonormalt system. Eftersom vi nu kommer att titta på funktioner som är 2π periodiska och ortonormala system över $[-\pi, \pi]$ från (5) så blir olikheten i (14)

$$(18) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |s_N(x)|^2 dx = \sum_{n=-N}^N |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \text{ [5, pp. 189].}$$

Sats 3.3. *Det gäller att*

$$(19) \quad \sum_{k=-N}^N e^{ikx} = 1 + \sum_{k=1}^N 2 \cos(kx).$$

Bevis. Vi bevisar detta med identiteten

$$(20) \quad e^{ikx} + e^{i(-k)x} = 2 \cos(kx).$$

Vi skriver vår ändliga summa på formen

$$\begin{aligned} \sum_{k=-N}^N e^{ikx} &= \sum_{k=1}^N e^{ikx} + \sum_{k=1}^N e^{i(-k)x} + e^{ix(0)} \\ &= \sum_{k=1}^N (e^{ikx} + e^{i(-k)x}) + 1. \end{aligned}$$

Med (20) har vi att

$$\sum_{k=-N}^N e^{ikx} = 1 + \sum_{k=1}^N 2 \cos(kx).$$

□

Vi säger att

$$(21) \quad D_N(x) = \sum_{k=-N}^N e^{ikx} = 1 + \sum_{k=1}^N 2 \cos(kx).$$

Precis som att vi kan skriva trigonometriska funktioner med hjälp av *Euler* i (4) så kan vi göra en omskrivning av (21) vilket vi kommer att använda i nästa sats. Om vi multiplicerar (21) med $\sin(x/2)$ får vi att

$$D_N(x) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{k=1}^N 2 \cos(kx) \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

Med identiteten $2 \sin(a) \cos(b) = \sin(a+b) + \sin(a-b)$ får vi att

$$D_N(x) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \sum_{k=1}^N \left(\sin\left(\frac{1}{2} + k\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x \right).$$

Om vi tittar på summan i högerledet så ser vi att detta är en *teleskoperande serie*, vilket innebär att endast den första termen och den sista termen är det som kommer att vara kvar. Vi får då att

$$D_N(x) \sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{3x}{2} - \sin \frac{x}{2} + \sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{3x}{2} + \dots$$

vilket reduceras till

$$D_N(x) = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Definition 3.6. Identiteten

$$(22) \quad D_N(x) = \sum_{k=-N}^N e^{ikx} = \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

kallar vi *Dirichlet-kärnidentiteten* [5, pp. 189].

Från (17) har vi att

$$\begin{aligned} s_N(x) &= \sum_{n=-N}^N \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} e^{inx} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{n=-N}^N e^{in(x-t)} dt, \end{aligned}$$

och med *Dirichlet-kärnidentiteten* är

$$(23) \quad s_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) D_N(t) dt.$$

Vi kan se att de två integralerna är lika med variabel bytet $u = x - t$, vi har då att

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_N(x-t) dt &= -\frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} f(x-u) D_N(u) du \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x-u) D_N(u) du. \end{aligned}$$

Alla involverade funktioner har en period av 2π och vi integrerar alltid med en längd 2π oavsett valet av x så integralerna är lika.

Följande sats visar då att *Fourierserien* konvergerar punktvis till f under vissa förutsättningar.

Sats 3.4. Om det för något x finns konstanter $\lambda > 0$ och $M < \infty$ sådana att

$$(24) \quad |f(x+t) - f(x)| \leq M|t|$$

för alla $t \in [-\lambda, \lambda]$, då gäller det att

$$(25) \quad \lim_{N \rightarrow \infty} s_N(x) = f(x) \text{ [5, pp. 189].}$$

Bevis. Vi har att

$$s_N(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt,$$

och att

$$f(x) = f(x) \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} dt,$$

då det gäller att

$$(26) \quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) dx = 1.$$

Låt

$$(27) \quad g(t) = \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin(t/2)},$$

för $0 < |t| \leq \pi$ där $g(0) = 0$. Då är

$$|s_N(x) - f(x)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin(t/2)} \sin\left(\left(N + \frac{1}{2}\right)t\right) dt.$$

Det gäller att

$$|g(t)| = \left| \frac{f(x-t) - f(x)}{\sin(t/2)} \right| = \left| \frac{\frac{f(x-t) - f(x)}{t}}{\frac{\sin(t/2)}{2(t/2)}} \right|.$$

Vi har från (24) att

$$\left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| \leq M.$$

Då gäller det

$$\left| \frac{\frac{f(x-t) - f(x)}{t}}{\frac{\sin(t/2)}{2(t/2)}} \right| \leq 2M.$$

Med den trigonometriska identiteten $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$ har vi att

$$\begin{aligned} |s_N(x) - f(x)| &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(x-t) - f(x)}{\sin(t/2)} \cos\left(\frac{t}{2}\right) \right) \sin(Nt) dt + \\ &\quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{f(x-t) - f(x)}{\sin(t/2)} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right) \cos(Nt) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sin(Nt) dt + \\ &\quad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos(Nt) dt. \end{aligned}$$

Vi har att $g(t) \cos\left(\frac{t}{2}\right) \sin(Nt)$ och $g(t) \sin\left(\frac{t}{2}\right) \cos(Nt)$ kan betraktas som *Fourierkoefficienter*. Från (16) så gäller det att när $N \rightarrow \infty$ så kommer koefficienterna att gå mot 0, då vi har ett ortonormalt system, vilket medför att

$$\lim_{N \rightarrow \infty} |s_N(x) - f(x)| = 0.$$

□

Vi kan nu sammanfatta kapitlet med att *Fourierserien* till en funktion bestäms av

$$(28) \quad f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx},$$

där

$$(29) \quad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

Det finns situationer då *Fourierserien* inte konvergerar till $f(x)$, därför garderar vi oss och ersätter inte \sim med $=$.

3.3 Alternativt framställning för Fourierserier

Ett annat sätt att framställa *Fourierserier* är att använda sig av det ortonormala systemet från (6). *Fourierserien* till $f(x)$ är då

$$(30) \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

där *Fourierkoefficienterna* a_0, a_n, b_n är

$$(31) \quad \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx. \end{aligned}$$

a_0 bestäms genom att integrera (3) över en period 2π . a_n bestäms genom att multiplicera (3) med $\cos(mx)$ och integrera över en period 2π och eftersom systemet är ortonormalt så får vi endast en koefficient när $n = m$. På liknande sätt bestämmer vi b_n men vi multiplicerar (3) med $\sin(mx)$ istället.

4 Användbara satser om Fourierserier

4.1 Termvis derivering

Nu när vi har etablerat hur *Fourierserien* till en funktion bestäms så kan vi titta på termvis derivering av *Fourierserier* genom att starta med ett exempel [4].

Exempel: Funktionen $f(x) = x$ är definierad i intervallet $-\pi \leq x \leq \pi$. Vi vet att derivatan $f'(x) = 1$. Om vi vill bestämma *Fourierserien* till $f(x)$ på formen (28) så är koefficienten

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[\frac{-x e^{-inx}}{in} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-inx}}{in} dx \right).\end{aligned}$$

Vi ser att $n = 0$ är en kritisk punkt så vi behandlar detta fall separat.

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x dx = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

För alla andra n så är

$$\begin{aligned}c_n &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\pi e^{-in\pi} + \pi e^{in\pi}}{in} - \left[\frac{e^{-inx}}{(in)^2} \right]_{-\pi}^{\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{\pi(-1)^n + \pi(-1)^n}{in} - \frac{(-1)^n - (-1)^n}{(in)^2} \right) \\ &= \frac{(-1)^{n+1}}{in}.\end{aligned}$$

Fourierserien till $f(x)$ är då

$$\begin{aligned}f(x) &\sim \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{inx} \\ &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{1-n}}{-in} e^{-inx} + \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{inx}.\end{aligned}$$

Om vi nu deriverar *Fourierserien* till $f(x)$ termvis så får vi serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((-1)^{1-n} e^{-inx} + (-1)^{n+1} e^{inx}).$$

Dock så uppstår det nu ett problem då detta är en icke-konvergent serie. Så det går inte att derivera alla *Fourierserier* till en funktion termvis.

Problemet i exemplet uppstod då $f(-\pi) \neq f(\pi)$. Med denna förutsättning formulerar vi följande sats.

Sats 4.1. En deriverbar funktion $f(x)$ som har *Fourierserien*

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

och uppfyller $f(-\pi) = f(\pi)$ har en derivata $f'(x)$. Då kommer derivatan $f'(x)$ att ha *Fourierserien*

$$f'(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n i n e^{inx}$$

givet av att derivera *Fourierserien* till $f(x)$ termvis.

Bevis. Termvis derivering av *Fourierserien* till $f(x)$ ger serien

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n i n e^{inx}.$$

Eftersom $f(x)$ är deriverbar så finns det en derivata $f'(x)$ som har *Fourierserien*

$$f'(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} d_n e^{inx}.$$

Då för att satsen ska gälla så måste vi bevisa att $d_n = c_n i n$. Enligt (29) så är

$$d_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) e^{-inx} dx,$$

vilket vi integrerar partiellt och får att

$$\begin{aligned} d_n &= \frac{1}{2\pi} \left(\left[e^{-inx} f(x) \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (-in) e^{-inx} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(e^{-in\pi} f(\pi) - e^{in\pi} f(-\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (in) e^{-inx} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left((-1)^n f(\pi) - (-1)^n f(-\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} f(x) (in) e^{-inx} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) (in) e^{-inx} dx \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx \right) in \\ &= c_n i n. \end{aligned}$$

□

4.2 Parsevals Sats

Att kvadrera *Fourierserier* innebär en lång matematisk uträkning varje gång. Lyckligtvis så visar *Parsevals Sats* en användbar egenskap. Men för att gå igenom denna sats så behöver vi göra ett antagande för funktionen $f(x)$ då vi kommer att behöva integrera en serie termvis och då behövs *likformig konvergens*.

Definition 4.1. Vi har serien $\sum_{k=1}^n f_k(x)$ och serien av positiva tal

$$M_1 + M_2 + \dots + M_k + \dots$$

där serien av positiva tal konvergerar. Då om det gäller för alla x på intervallet $[a, b]$ att det från något k uppfyller $|f_k(x)| \leq M_k$ så konvergerar serien $\sum_{k=1}^n f_k(x)$ likformigt på $[a, b]$ [8, pp. 10].

Sats 4.2. Om termerna av serien är kontinuerliga över $[a, b]$ och om serien är likformigt konvergent så gäller det att

$$\int_a^b \left[\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) \right] dx = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\int_a^b f_k(x) dx \right] \quad [8, \text{pp. } 10].$$

Eftersom koefficienterna a_n, b_n ges av (31) så måste vi välja funktionen $f(x)$ på ett sådant sätt att när $n \rightarrow \infty$ så får vi en likformigt konvergent serie. Vi kräver då att $f(x)$ är 2π periodisk och två gånger deriverbar med en kontinuerlig andra derivata. Vi har då att

$$\begin{aligned} |a_n| &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{f(x) \sin(nx)}{n} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'(x) \sin(nx)}{n} dx \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(\frac{f'(x) \cos(nx)}{n^2} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f''(x) \cos(nx)}{n^2} dx \right) \\ &= \frac{1}{n^2 \pi} \left(f'(x) \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos(nx) dx \right). \end{aligned}$$

Då alla funktioner involverade är kontinuerliga så finns det något tal Q sådant att

$$|a_n| = \frac{1}{n^2 \pi} \left(f'(x) \cos(nx) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f''(x) \cos(nx) dx \right) \leq \frac{Q}{n^2 \pi}.$$

På liknande sätt så kommer det visa sig att även $b_n \leq \frac{Q}{n^2 \pi}$ när vi ställer detta krav på $f(x)$. Då tar vi oss an *Parsevals Sats*.

Sats 4.3. $f(x)$ är en 2π periodisk och två gånger deriverbar funktion med en kontinuerlig andra derivata och den har Fourierserien

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Då gäller det att

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad [\mathbf{8}, \text{pp. 119}].$$

Bevis. Anta att vi har Fourierserien

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Då gäller det att

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0^2}{4} + a_0 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) + \right. \\ &\quad \left. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)) \right) dx. \end{aligned}$$

För att göra det tydligare så delar vi upp denna långa integral i tre bitar.

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{a_0^2}{4} dx, \\ I_{2(n)} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(a_0 \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right) dx, \\ I_{3(n,m)} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)) \right) \\ &\quad \left(\sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos(mx) + b_m \sin(mx)) \right) dx. \end{aligned}$$

Integralen I_1 är trivial och efter integrering får vi att $I_1 = \frac{a_0^2}{2}$. Förflyttar vi oss till integralen $I_{2(n)}$ och använder sats 4.2 för att byta plats på summation och integration har vi att

$$I_{2(n)} = \frac{1}{\pi} \left(a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{\sin(nx)}{n} - b_n \frac{\cos(nx)}{n} \right) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi}.$$

Eftersom n alltid är ett heltal och våra gränser är π och $-\pi$ så kommer vår term $\sin(\pm\pi n) = 0$. Vår term med $\cos(nx)$ ger följande när vi använder oss av gränserna.

$$I_{2(n)} = \frac{1}{\pi} \left(a_0 \sum_{n=1}^{\infty} \left(b_n \frac{\cos(-\pi n)}{n} - b_n \frac{\cos(\pi n)}{n} \right) \right) = 0.$$

För integralen $I_{3(n,m)}$ så noterar vi att vi arbetar med ortonormala system så vi behöver endast titta på fallet $n = m$. Vi har då att uttrycket $I_{3(n,m)}$ efter utveckling är

$$I_{3(n,n)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 \cos^2(nx) + 2a_n b_n \cos(nx) \sin(nx) + b_n^2 \sin^2(nx)) dx.$$

Vi fick ytterligare ett lång uttryck så vi delar upp $I_{3(n,n)}$ i tre bitar.

$$I_{4(n,n)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 \cos^2(nx)) dx,$$

$$I_{5(n,n)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n b_n \cos(nx) \sin(nx)) dx,$$

$$I_{6(n,n)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^2 \sin^2(nx)) dx.$$

Integralen $I_{4(n,n)}$ kan vi integrera med hjälp av den trigonometriska identiteten $2 \cos^2(x) = \cos(2x) + 1$ och sats 4.2. Vi har då att integralen $I_{4(n,n)}$ efter integrering är

$$\begin{aligned} I_{4(n,n)} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 (\cos(2nx) + 1)) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{2\pi} \left(\frac{\sin(2nx)}{2n} + x \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2. \end{aligned}$$

Integrerar vi integralen $I_{5(n,n)}$ med substitution och sats 4.2 så har vi att

$$I_{5(n,n)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (2a_n b_n \cos(nx) \sin(nx)) dx = 0.$$

Integrerar vi integralen $I_{6(n,n)}$ med identiteten $2 \sin^2(x) = 1 - \cos(2x)$ och sats 4.2 så har vi att

$$I_{6(n,n)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (b_n^2 \sin^2(nx)) dx = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2.$$

Detta innebär att integralen $I_{3(n,n)}$ är

$$I_{3(n,n)} = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Med resultaten för I_1 , $I_{2(n)}$ och $I_{3(n,n)}$ har vi att

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

□

5 Det moderna beviset: Hurwitz

Vi har nu nåt punkten där vi är redo att använda oss av alla de verktyg vi har gått igenom. Vi kommer att se hur *Hurwitz* använder sig av allting nedan.

Sats 5.1. *För en parametriserad kurva gäller det att $L^2 - 4\pi A \geq 0$, där L är kurvans längd och A är arean för en enkel sluten kurva, med likhet endast för cirkeln [1, pp. 552].*

Bevis. Vi väljer en parametrisering $t \rightarrow (x(t), y(t))$ som skapar en kurva av längd L över intervallet $t \in [-\pi, \pi]$ med konstant hastighet som uppfyller $(x(-\pi), y(-\pi)) = (x(\pi), y(\pi))$. Detta översätts till

$$(32) \quad (x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2.$$

Vi låter vår parametriserade kurvas koordinatfunktioner vara *Fourierserierna*

$$x(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)),$$

$$y(t) \sim \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos(nt) + d_n \sin(nt)).$$

Eftersom kurvan är kontinuerlig och ändpunkterna är lika så kan vi beräkna derivatorna till koordinatfunktionerna med sats 4.1. Koordinatfunktionernas derivator är då

$$x'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos(nt) - na_n \sin(nt)),$$

$$y'(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (nd_n \cos(nt) - nc_n \sin(nt)).$$

Vi skriver L^2 med vår parametrisering i (32) och får att

$$\begin{aligned}
L^2 &= 4\pi^2 \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 \\
&= 2\pi^2 \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{L}{2\pi} \right)^2 dt \right) \\
&= 2\pi^2 \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ((x'(t))^2 + (y'(t))^2) dt \right) \\
&= 2\pi^2 \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos(nt) - na_n \sin(nt)) \right)^2 dt + \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} (nd_n \cos(nt) - nc_n \sin(nt)) \right)^2 dt \right).
\end{aligned}$$

Vi använder *Parsevals Sats* för förenkling och får att

$$\begin{aligned}
L^2 &= 2\pi^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 b_n^2 + n^2 a_n^2) + \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 d_n^2 + n^2 c_n^2) \right) \\
&= 2\pi^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 b_n^2 + n^2 a_n^2 + n^2 d_n^2 + n^2 c_n^2) \right) \\
&= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2)).
\end{aligned}$$

För A använder vi oss av formeln för *arean av en parametriserad kurva* [7]. Vi har då att

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-\pi}^{\pi} xy' dt \\
&= \pi \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} xy' dt \right) \\
&= \pi \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)) \right) \right. \\
&\quad \left. \left(\sum_{n=1}^{\infty} (nd_n \cos(nt) - nc_n \sin(nt)) \right) dt \right).
\end{aligned}$$

Från ortonormaliteten har vi att

$$\begin{aligned}
 A &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{a_0}{2} a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt) \right) dt + \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(n a_n d_n \cos^2(nt) - n b_n c_n \sin^2(nt) \right) dt \right) \\
 &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} (n a_n d_n - n b_n c_n) \\
 &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} (n(a_n d_n - b_n c_n)).
 \end{aligned}$$

Med detta så beräknar vi uttrycket $L^2 - 4\pi A$ till

$$\begin{aligned}
 L^2 - 4\pi A &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2)) - 4\pi(\pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n)) \\
 &= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2)) - 4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} (n(a_n d_n - b_n c_n)) \\
 &= 2\pi^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) - 2n(a_n d_n - b_n c_n) \right) \\
 &= 2\pi^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a_n^2 + n^2 b_n^2 + n^2 c_n^2 + n^2 d_n^2 - 2n a_n d_n + 2n b_n c_n \right) \\
 &= 2\pi^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n a_n - d_n)^2 - d_n^2 + n^2 b_n^2 + n^2 c_n^2 + n^2 d_n^2 + 2n b_n c_n \right) \\
 &= 2\pi^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n a_n - d_n)^2 - d_n^2 + (n b_n + c_n)^2 - c_n^2 + n^2 c_n^2 + n^2 d_n^2 \right) \\
 &= 2\pi^2 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n a_n - d_n)^2 + (n b_n + c_n)^2 + (n^2 - 1)(c_n^2 + d_n^2) \right).
 \end{aligned}$$

Vi har en summa av kvadrater så uttrycket är aldrig negativt vilket bekräftar det första påståendet i satsen. Då bestämmer vi när det är likhet med 0. När $n = 1$ så måste

$$a_1 = d_1, \quad b_1 = -c_1.$$

För alla $n \geq 2$ så är koefficienterna $a_n, b_n, c_n, d_n = 0$. Våra koordinatfunktioner när $n = 1$ och $a_1 = d_1, b_1 = -c_1$ är

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos t + b_1 \sin t, \\
 y(t) &= \frac{c_0}{2} - b_1 \cos t + a_1 \sin t.
 \end{aligned}$$

Ekvationen för en cirkel är $(x - c_x)^2 + (y - c_y)^2 = r^2$. Om vi använder oss av parametriseringarna $x(t)$ och $y(t)$ i ekvationen för en cirkel när $n = 1$ har vi att

$$\begin{aligned} \left(x(t) - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y(t) - \frac{c_0}{2}\right)^2 &= (a_1 \cos t + b_1 \sin t)^2 + (-b_1 \cos t + a_1 \sin t)^2 \\ &= a_1^2 \cos^2 t + 2a_1 b_1 \sin t \cos t + b_1^2 \sin^2 t + \\ &\quad b_1^2 \cos^2 t - 2a_1 b_1 \sin t \cos t + a_1^2 \sin^2 t \\ &= a_1^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) + b_1^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) \\ &= a_1^2 + b_1^2 \end{aligned}$$

För alla $t \in [-\pi, \pi]$ så är avståndet från mittpunkten $(a_0/2, c_0/2)$ alltid $a_1^2 + b_1^2$ så kurvan $t \rightarrow (x(t), y(t))$ när $n = 1$ är en cirkel vilket bekräftar likhet med 0 i olikheten endast för en cirkel. \square

6 Avslutning

Då har vi kommit till punkten där det är dags för några avslutande kommentarer. För det första så hoppas jag att ni som läsare har funnit framställningen givande och för det andra att ni har fått en förståelse kring allt det som har berörts. Förhoppningsvis är ni nu övertygade att en cirkel är svaret till det *Isopermetriska Problemet*. Om det är så att ni är nyfikna på ytterligare bevis angående det *Isopermetriska Problemet*, och tro mig det finns många, så hänvisar jag er till artikeln av Blåsjö [1]. Där finns det även möjlighet för den som är nyfiken att bli introducerad till den matematik som används för de olika bevisen.

Innan vi säger adjö så vill jag återkoppla till den berättelse som började arbetet. Från arkeologiska utgrävningar har man återskapat denna bild av hur Karthago kan ha sett ut under antiken [2].



För detta folk var skeppen av stor betydelse och dess hamn en centralt viktig punkt för staden. Då Dido var dess ledare, och möjligtvis den som tog sig an det *Isopermetriska Problemet* för första gången, är det kanske inte förvånade att en cirkel utgör hamnens kärna. För mig, absolut inte!

7 Referenser

1. Blåsjö, Victor. The Isoperimetric Problem. *The American Mathematical Monthly*. 112:6, 2005, 526-566. doi: 10.1080/00029890.2005.11920227.
2. Carthaginian Trade: Trade Routes of Ancient Carthage. *Carthage Magazine*. 2021. <https://carthagemagazine.com/carthaginian-trade-routes-of-ancient-carthage/> (Åtkomst 2023-02-25).
3. Casselman, Bill. Archimedes on the Circumference and Area of a Circle. *American Mathematical Society*. 2012. <http://www.ams.org/publicoutreach/feature-column/fc-2012-02> (Åtkomst 2023-02-02).
4. Fasshaur, Greg. Math 461: Fourier Series and Boundary Value Problems. *Department of Applied Mathematics Illinois Institute of Technology*. Fall 2015. https://www.math.iit.edu/~fass/Notes461_Ch3.pdf (Åtkomst 2023-02-22).
5. Rudin, Walter. *Principles of Mathematical Analysis*. 3rd ed. New York: McGraw-Hill cop. 1976.
6. Singhal, Ravi. 2018. Perimeter and Area of Regular Polygons - From Triangles to Circles - The Iso-Perimetric Theorem. *Ektalks*. 21 September. <https://ektalks.blogspot.com/2018/09/perimeter-and-area-of-regular-polygons.html> (Åtkomst 2023-02-02).
7. Strang, Gilbert & Herman, Edwin. 11.2: Calculus of Parametric Curves. *LibreTexts*. (2022). [https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A_Calculus_\(OpenStax\)/11%3A_Parametric_Equations_and_Polar_Coordinates/11.02%3A_Calculus_of_Parametric_Curves](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Calculus/Book%3A_Calculus_(OpenStax)/11%3A_Parametric_Equations_and_Polar_Coordinates/11.02%3A_Calculus_of_Parametric_Curves) (Åtkomst 2023-02-02).
8. Tolstov, Georgii Pavlovich. *Fourier Series*. New York: Dover Publ. 1976.
9. Wiegert, Jennifer. The Sagacity of Circles: A History of the Isoperimetric Problem - Early History of the Problem. *Convergence*. Mathematical Association of America. 2010. <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/the-sagacity-of-circles-a-history-of-the-isoperimetric-problem-early-history-of-the-problem> (Åtkomst 2023-02-24).

Självständigt arbete i matematik rättelser

Christian Westin

11/06/23

1. För sats 2.1 på s. 6 arbetar vi med den kompakta mängden $a, b \geq 0$ och $a + b \leq s$ där s är omkretsen av triangeln. På randen är arean för triangeln 0 då vi endast har två sidor, därav måste det största värdet vara i området där de partiella derivatorna är 0.
2. För sats 2.2 på s. 7 är polygonets mittpunkt den punkt där varje hörn är lika långt ifrån.
3. För sats 2.3 på s. 11 menar jag att arean för vår regelbundna polygon närmar sig arean för vår cirkel.
4. Den sista formeln på s. 11 gäller eftersom $a < r$ då det regelbundna polygonet är inskrivet i cirkeln och r utgör hypotenusan i en rätvinklig triangel i det regelbundna polygonet. Även om omkretsen är lika så måste $A_p < A_t$.
5. För sats 3.1 och 3.2 på s. 17 och s. 18 är antagandet att $f(x)$ är kvadratintegrerbara.
6. I början av sektion 3.2 på s. 18 ska det stå ”funktioner f som är 2π periodiska och kvadrat-integrerbara” och inte bara integrerbara.
7. I slutet av sats 3.4 på s. 22 kan vi använda (16) då det gäller att $g(t)$ är uppåt begränsad.
8. För sats 5.1 på s. 28 är ”parametriseringen $t \rightarrow (x(t), y(t))$ en enkel sluten kurva av längd L över intervallet $t \in [-\pi, \pi]$ med konstant hastighet som är fyra gånger deriverbar med kontinuerliga derivator”.
9. På s. 124 i *Analys i flera variabler* av Person och Böiers står det att ”då båglängden är parametern har tangentvektorn den konstanta längden 1” vilket motiverar att det går att finna en parametrisering med konstant hastighet i likhet med (32) på s. 28.
10. På s. 31 är distansen till mittpunkten $\sqrt{a_1^2 + b_1^2}$ och inte $a_1^2 + b_1^2$.