SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Approximationer av π

av

Emre Döner

2023 - L4

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Approximationer av π

Emre Döner

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Jonathan Rohleder

2023

Acknowledgment

I would like to express my sincerest gratitude to my professor for their guidance and support throughout the writing process of this essay. Their insights and expertise have been invaluable and have greatly contributed to the completion of this project. Thank you for being a constant source of encouragement and for providing me with the tools necessary to succeed.

Abstract

Many students who study math use the number π in their calculations without fully understanding its significance. This paper aims to provide a deeper understanding of π by introducing different methods for approximating its value. Two approaches to approximation will be explored, such as the method used by Arkimedes and another method used by the mathematician Stephen Lucas. In addition, the paper will present some basic characteristics of π and a mathematical proof that demonstrates why it is an irrational number.

Sammanfattning

Många elever stöter på talet π i sina matematikstudier, men har sällan en djup förståelse för dess betydelse. Därför är syftet med detta arbete att ge en djupare förståelse för π genom att introducera olika metoder för att uppskatta dess värde. Två metoder kommer att presenteras, den ena metoden Arkimedes använde och en annan metod matematiker Stephen K. Lucas använder sig av. Arbetet kommer också att presentera några grundläggande egenskaper hos π och ett matematiskt bevis som visar varför π är ett irrationellt tal.

Innehållsförteckning

1 Introduktion

1.1 Varför skriver jag om π?

Alla som studerar matematik har någon gång stött på talet π. Många vet var och hur man använder talet π. Däremot är det få människor som vet hur man kommer fram till talet π. Oftast brukar man först träffa talet π i högstadiet och använder det nästan i alla kurser i gymnasiet. Elever brukar acceptera talet π som den är och lärarna brukar inte gå in mycket djupare in på själva talet. Detta leder till att det inte finns en djup förståelse för talet π. Syftet med detta arbete är att ge en djupare förståelse för talet π, talets historia, talets grundläggande egenskaper samt hur man kommer fram till själva talet.

1.2 Kort historia om talet π

Talet π är ett tal inom matematiken som representerar förhållandet mellan cirkelns omkrets och diameter. Värdet av talet π beräknades först för ungefär 4000 år sen. Det var Babylonierna och antika Egypten som först uppskattade värdet av π. Babylonierna uppskattade värdet till $\frac{25}{8} \approx 3.125$ och Egyptierna uppskattade värdet av π till $\frac{256}{81} \approx 3.16$. Detta gjordes med hjälp av att fysiskt mäta omkretsen eller arean av en cirkel de hade uppskattad till att det var ett värde nära 3. Informationen i detta avsnitt kommer att framföras med hjälp av artikeln [1].

Efter ungefär 1500 år så uppskattade den grekiska matematikern Arkimedes talet π till ett tal som var mellan $\frac{22}{7}$ och $\frac{223}{71}$. Detta gjorde han med hjälp av att beräkna polygoner inskriven i en cirkel och utanför cirkeln. Genom att därefter uppskatta omkretsen mellan dessa två så lyckades han komma fram till två närmare tal till det vi känner till idag, nämligen 3.1408 och 3.1428, vilket han hävdade att π var ett tal mellan dessa.
Under 400-talet så uppskattades talet π till ytterligare 5 precisa decimaler av olika indiska matematiker. Därefter uppskattades värdet av π till $\frac{335}{113} \approx 3.14159292$ av en kinesisk matematiker vid namnet Zu Chongzhi. På detta sätt för varje år som gick så kom matematiker från hela värden fram till fler och fler decimaler, vilket gjorde talet π mer precist men samt så kom man fram till att det var irrationellt, alltså att talet fortsätter oändligt och icke-periodiskt i decimaler. Den grekiska bokstaven π användes först av

matematikerna under 1700-talet och introducerades av en walesisk matematiker William Jones år 1706. Det skapades med hjälp av första bokstaven av det grekiska ordet *perimetros* som betyder omkrets.

1.3 Vad är π, grundläggande egenskaper

Talet π som introduceras tidigt i matematikvärlden är ett tal som fortsätter icke-periodiskt i oändlighet i decimaler. Detta leder också till att själva talet aldrig kan skrivas exakt, vilket betyder att det är ett irrationellt tal. Det innebär att talets decimaler fortsätter i oändligheten. Detta leder till att vi avrundar själva talet innan användning för att förenkla det för oss. Den vanligaste avrundningen till π som oftast används inom matematiken är 3.14. Talet π, som även kallas för Arkimedes konstant efter matematikern Arkimedes, är en av de första personerna som approximerade π till det tal vi är vana vid idag, nämligen 3.14. Approximationen som utfördes av Arkimedes kommer att introduceras senare i denna uppsats.

Talet π representerar förhållandet mellan två fundamentala storheter hos en cirkel. π representerar förhållandet mellan en cirkels omkrets och dess diameter. För att få fram omkretsen eller arean av en cirkel behöver vi använda oss av talet π. Till exempel, omkretsen av en cirkel räknar vi ut via formeln $O = \pi \cdot 2r$. Ytterligare räknar vi ut arean med formeln $A = \pi \cdot r^2$. Eftersom talet är samma för alla cirklar så använder vi oss av π för alla olika cirklar. Vidare är förhållandet mellan omkrets och diameter konstant för varje cirkel, se t.ex. [2]."

Man kan också visa att π är konstant för alla cirklar genom geometrisk analys och trigonometri. Man kan bevisa att förhållandet mellan en cirkels omkrets och dess diameter alltid är detsamma genom att använda trigonometri och inskrivna polygoner. Genom att öka antalet sidor i polygonen, kan man närma sig cirkels omkrets och visa att förhållandet mellan omkretsen och dess diameter närmar sig π.

Detta arbetes huvudfokus kommer att vara att redovisa hur man approximerar talet π med olika metoder. Bland annat kommer arbetet visa hur man approximerar talet π med hjälp av polygoner som det nämndes ovan.

Denna typ av approximation gjordes först av Arkimedes. Däremot kommer arbetes huvudfokus att vara på approximation av π med hjälp av integraler. Dessutom kommer arbetet också att visa varför talet π är ett irrationellt tal.

2 Bevis till att π är ett irrationellt tal

Under Under 1760-talet presenterade Johann Heinrich Lambert det första beviset för att talet π var ett irrationellt tal. Lambert var en känd schweizisk/fransk polymat, vars kunskaper spände över en mängd ämnen, inklusive matematik, fysik, astronomi och många andra. Lamberts bevis att π är ett irrationellt tal är en av hans flertal andra uppfinningar inom matematiken. Lambert bevisade att talet π är irrationellt genom att använda sig av en serie av termer som innehåller potenser av primtal. Däremot genom tiden har olika matematiker bevisat att π är irrationellt med olika metoder. För att bevisa att talet π är ett irrationellt tal skall vi använda oss av ett bevis som matematikern Ivan Niven har utfört. Ivan Nivens bevis är väldigt kortfattat och tydligt vilket gör det enkelt att bevisa att π är ett irrationellt tal. Beviset han har utfört är genom att göra två motsägande antaganden om talet π. Vi ska utföra ett par matematiska uträkningar för att visa att de två antaganden är motsägelser till varandra, vilket kommer att leda till att π är ett irrationellt tal. Vi kommer att ta hjälp av två källor för att bevisa detta [4] [7].

Sats 2.1. *π är irrationellt.*

Bevis: För att få en motsägelse börjar vi med antagandet att talet π är ett rationellt tal. Antagandet innebär då att $\pi = \frac{a}{b}$ där a och b är positiva heltal samt där $b \neq 0$. Vidare, så kan vi för varje heltal n definiera en polynomfunktion på följande sätt:

$$f_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}.$$

För varje $x \in \mathbb{R}$ kan vi definiera $F_n(x)$ på följande sätt:

$$F_n(x) = f_n(x) - f_n''(x) + f_n^{(4)}(x) + ... + (-1)^n f_n^{(2n)}(x). \qquad (1)$$

Innan vi fortsätter vill vi se två egenskaper f_n har. Detta kommer att hjälpa till senare med vårat bevis.

1. $f_n(0) = 0$. Vilket inte behöver något bevis eftersom att det är uppenbart.

2. $f_n(\pi - x) = f_n(x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Detta bevis blir lite mer komplex men kan göras genom att substituera π till $\frac{a}{b}$.

För att bevisa egenskap två ovan substituerar vi x till $\pi - x$ och vidare substituerar vi π till $\frac{a}{b}$, $f(\pi - x) = f(\frac{a}{b} - x)$.Sätter vi in det i vår ursprungliga polynomfunktion får vi:

$$\begin{aligned} f_n(\pi - x) &= \frac{(\frac{a}{b} - x)^n (a - b(\frac{a}{b} - x))^n}{n!} = \\ &= \frac{(\frac{a}{b} - x)^n (bx)^n}{n!} = \frac{x^n (a - bx)^n}{n!} = f_n(x). \end{aligned}$$

För att fortsätta vidare ska vi utföra bevis för två egenskaper. Vi ska bevisa att integralen $\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)dx$ alltid måste ha ett heltal som resultat. Sedan ska vi bevisa att samma integral med ett annat bevis är ett tal som ligger mellan värdena 0 och 1, vilket är motsägande.

Egenskap ett:

Lemma 2.2.
$$\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)dx$$
har alltid ett heltal som värde.

Bevis: Vi kollar på funktion F_n i (1) och ser att $F_n(0)$ och $F_n(\pi)$ kommer alltid att vara ett heltal. Detta följs i med att derivatorna av f_n på 0 och π är heltal vilket kommer att bevisas. Vår funktion $F_n(x)$ är en summa av dessa heltal, alltså leder detta till att $F_n(0)$ och $F_n(\pi)$ också är heltal.
För att fortsätta måste vi nu bevisa att k'te derivatan när $x = 0$ alltså $f_n^{(k)}(0)$

kommer att alltid vara ett heltal. Detta kan vi se genom att kolla på ekvationen

$$f_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}.$$

Bevis till detta, alltså att $f_n^{(k)}(0) =$ heltal, där $n =$ heltal och där k som är antal gånger vi deriverar går upp till samma tal som n, kan göras allmänt men kan enklast observeras med att välja till exempel $n = 3$.

Lemma 2.3. *$f_n^{(k)}(x)$ har heltvalsvärden då $x = 0$ och $x = \pi$ där $f_n^{(k)}(x)$ betecknar den $k-te$ derivatan av f.*

Bevis: För att bevisa lemma 2.3 börjar vi först med att notera att $f_n(0) = 0$ och $f_n(\pi) = 0$. Vi fortsätter med att expandera $f_n(x)$.
Binomialsatsen säger att vi för alla reella tal a och b och alla icke-negativa heltal n har

$$(a-bx)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k}(-bx)^k,$$

där $\binom{n}{k}$ är binomialkoefficienten, som definieras som

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Genom att sätta in detta uttryck i täljaren för $f_n(x)$ får vi

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} \\ &= \frac{x^n \cdot \binom{n}{0} \cdot a^n \cdot (-bx)^0}{n!} + \frac{x^n \cdot \binom{n}{1} \cdot a^{n-1} \cdot (-bx)^1}{n!} \\ &\quad + \frac{x^n \cdot \binom{n}{2} \cdot a^{n-2} \cdot (-bx)^2}{n!} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + \frac{x^n \cdot \binom{n}{n-1} \cdot a \cdot (-bx)^{n-1}}{n!} + \frac{x^n \cdot \binom{n}{n} \cdot (-bx)^n}{n!} \end{aligned}$$

där vi har expanderat $f_n(x)$ och kan fortsätta med att välja n. Den minsta exponenten x kan ha är talet n för alla termer i vårat uttryck. Detta leder till att $f_n'(0), f_n''(0), ..., f_n^{(n-1)}(0) = 0$ eftersom att varje term i varje derivation kommer att multipliceras med termer som innehåller x.

Exempel: För att se kan vi direkt kolla på ett exempel då $n = 3$ och sedan göra ett allmänt bevis. När $n = 3$ får vi följande

$$\begin{aligned}\frac{x^3(a-bx)^3}{3!} &= \frac{x^3 \cdot \binom{3}{0} \cdot a^3 \cdot (-bx)^0}{3!} + \frac{x^3 \cdot \binom{3}{1} \cdot a^2 \cdot (-bx)^1}{3!} \\ &\quad + \frac{x^3 \cdot \binom{3}{2} \cdot a^1 \cdot (-bx)^2}{3!} + \frac{x^3 \cdot \binom{3}{3} \cdot a^0 \cdot (-bx)^3}{3!}.\end{aligned}$$

Nu sätter vi ihop termerna och får

$$\begin{aligned}\frac{x^3(a-bx)^3}{3!} &= \frac{x^3 \cdot 1 \cdot a^3}{6} + \frac{x^3 \cdot 3 \cdot a^2 \cdot (-bx)}{6} \\ &\quad + \frac{x^3 \cdot 3 \cdot a \cdot (-bx)^2}{6} + \frac{x^3 \cdot 1 \cdot (-bx)^3}{6} \\ &= \frac{x^3a^3}{6} - \frac{3x^4a^2b}{6} + \frac{3x^5ab^2}{6} - \frac{x^6b^3}{6} \\ &= \frac{x^3a^3 - 3x^4a^2b + 3x^5ab^2 - x^6b^3}{6}.\end{aligned}$$

Vi kan se mönstret att efter förenkling kommer vi att alltid få stora och jobbiga uttryck, däremot så kommer första termen alltid ha samma form, nämligen $\frac{a^3x^3}{3!}$. Vad som är intressant med detta uttryck är att när vi tar n-te derivatan av denna term så kommer x att försvinna. Vidare har vi tidigare sagt att $n = 3$ alltså ser det ut på följande sätt

$$\begin{aligned}f_3'(x) &= \frac{3x^2a^3}{3!} + \frac{x^3(-12a^2b + 15xab^2 - 6x^2b^3)}{3!} \\ f_3''(x) &= \frac{3 \cdot 2xa^3}{3!} + \frac{x^2(-36a^2b + 60xab^2 - 30x^2b^3}{3!} \\ f_3'''(x) &= \frac{3 \cdot 2 \cdot 1a^3}{3!} + \frac{x(-72a^2b + 180xab^2 - 120x^2b^3)}{3!}.\end{aligned}$$

Nu ser vi att vi har samma värden i nämnaren och täljaren på första termen, alltså kommer fakulteten att försvinna och vi kommer att endast ha kvar a^3. Oavsett vilken n vi väljer så kommer något liknande att hända och vi kommer att endast ha kvar värdet a. Vad som händer med högra termen är att den försvinner när vi sätter in $x = 0$. Alltså har vi bevisat att $f_n^{(k)}(0) = \text{heltal}$.

Nu tittar vi på ett mer allmänt bevis: Vi har ekvationen $f_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$. Vi vill visa att $f_n^{(k)}(0)$ och $f_n^{(k)}(\pi)$ är heltal för varje heltal $k \geq n$. Först tittar vi på koefficienten av x^k i $f_n(x)$, vilket kan skrivas som $f_n^{(k)}(0)/k!$ enligt Taylors sats. Enligt binomialsatsen kan koefficienten av x^k också skrivas som $c_k/(n!)$, där c_k är ett heltal. Därför kan vi skriva om $f_n^{(k)}(0)$ som:

$$f_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!}c_k$$

.
Notera att c_k är koefficienten av x^k i uttrycket $\frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$. Nu behöver vi visa att $c_k = 0$ för $k < n$. Bland alla termerna i polynomet $f_n(x)$ är den term med den lägsta graden (högsta potensen av x) som inte är lika med noll av grad n. Detta innebär att koefficienten c_k är noll för alla $k < n$. För $k \geq n$ är $\frac{k!}{n!}$ ett heltal, eftersom $k!$ är delbart med $n!$. Detta innebär att $f_n^{(k)}(0)$ är ett heltal på grund av ekvationen $f_n^{(k)}(0) = \frac{k!}{n!}c_k$. På samma sätt kan man visa att $f_n^{(k)}(\pi)$ är ett heltal för varje heltal $k \geq n$. Således har vi visat att $f_n^{(k)}(0)$ och $f_n^{(k)}(\pi)$ är heltal för $k \geq n$. Vi kan tillägga att eftersom att den högsta exponenten av x är $2n$ så gäller det att

$$f_n^{(k)}(0) = 0, \quad k \geq 2n + 1.$$

För att visa att detsamma gäller för $f_n^{(k)}(\pi) = 0$ räcker det med att se att $f_n(x)$ är symmetrisk på linjen $x = \frac{1}{2}\pi$, alltså $f_n(x) = f_n(\pi - x)$. Nu kan vi dra slutsatsen att $f_n^{(k)}(0)$ har heltalsvärden för alla k.

□

Vi fortsätter med vår bevis till lemma 2.1 med att bevisa följande ekvation

$$F_n(x) + F_n''(x) = f_n(x). \tag{2}$$

Denna är sann på grund av att

$$F_n(x) = f_n(x) - f_n^{''}(x) + f_n^{''''}(x) - ... + (-1)^n f^{(2n)}(x),$$
$$F_n^{''}(x) = f_n^{''}(x) - f_n^{''''}(x) + ... - (-1)^n f^{(2n)}(x).$$

Notera att vi inte har en sista term i det ovanstående uttrycket på grund av att f_n är ett polynom av grad $2n$. Detta medför att alla derivator av ordning $2n+1$ och högre försvinner. Varannan derivata har olika tecken vilket leder till att vi får ett mönster där termerna tar ut varandra så att när vi adderar på följande sätt $F^{''}(x) + F(x)$ så återstår endast $f(x)$, därför stämmer (2). Vi introducerar funktionen

$$F_n'(x)\sin(x) - F_n(x)\cos(x).$$

Vi fortsätter med att ta derivatan av denna funktion med hjälp av kedjeregeln och får

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dx}(F_n'(x)\sin(x) - F_n(x)\cos(x)) \\
&= F_n''(x)\sin(x) + F_n'(x)\cos(x) - F_n'(x)\cos(x) + F_n(x)\sin(x) \\
&= F_n''(x)\sin(x) + F_n(x)\sin(x) \\
&= (F_n''(x) + F_n(x))\sin(x) = f_n(x)\sin(x).
\end{aligned}$$

Notera att den sista förenklingen kan göras på grund av (2). Vidare arbetar vi med $f_n(x)\sin(x)$. Vi integrerar funktionen från 0 till π

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)dx \\
&= \Big[F_n'(x)\sin(x) - F_n(x)\cos(x)\Big]_0^\pi \\
&= F_n'(\pi)\sin(\pi) - F_n(\pi)\cos(\pi) - (F_n'(0)\sin(0) - F_n(0)\cos(0)) \\
&= F_n(\pi) + F_n(0).
\end{aligned}$$

Vi har redan bevisat att $F_n(\pi)+F_n(0)$ är ett heltal. Alltså är $\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)$ ett heltal.

□

Egenskap två:

Lemma 2.4.
$$0 < f_n(x)\sin(x) < \frac{a^n\pi^n}{n!}$$
gäller när $0 < x < \pi$*.*

Bevis: Vi vill börja med att notera att $f_n(x)\sin(x)$ alltid är positiv mellan 0 och π eftersom funktionen sin alltid är positiv i detta intervall och polynomet $a - bx$ också är positivt i detta intervall, eftersom vi vet att $\pi = \frac{a}{b}$, alltså $a - bx > a - b\pi = 0$.
Vi vill nu fokusera på övre begränsningen. Vi vet omedelbart att $0 < \sin(x) < 1$ alltid stämmer när $0 < x < \pi$. Vidare kan vi då komma till slutsatsen att $f_n(x)\sin(x) < f_n(x)$. Nu går vi tillbaka till $f_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$. Notera att $a - bx < a$ när $0 < x < \frac{a}{b}$, således kan vi då säga att $(a - bx)^n$ måste vara mindre än a^n. På liknande sätt kommer termen x^n att vara mellan 0 och $(\pi)^n$ när $0 < x < \pi$. Om vi nu sätter ihop allt så får vi olikheten
$$0 < f_n(x)\sin(x) < \frac{a^n\pi^n}{n!}.$$
Alltså stämmer egenskap 2. $\square$

Vi kan nu gå över till att analysera egenskap 2. Om vi integrerar alla funktioner i olikheten för sig själv får vi
$$\int_0^\pi 0\,dx < \int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx < \int_0^\pi \frac{a^n\pi^n}{n!}\,dx,$$
vilket leder till
$$0 < \int_0^\pi f_n(x)\sin(x)\,dx < \frac{a^n\pi^{n+1}}{n!}.$$
Nu kan vi börja analysera vad som händer när $n \to \infty$. Bråket på övre begränsningen rör sig mot 0 när $n \to \infty$. Detta kan vi se genom att ta gränsvärdet av övre begränsningen på följande sätt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(a\pi)^n}{n!} = 0.$$

Vi vet att detta stämmer då

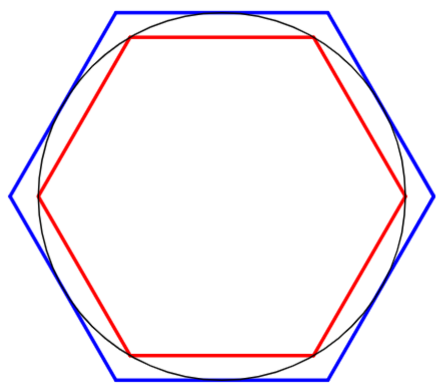
$$\lim_{n\to\infty} \frac{A^n}{n!} = 0.$$

Nu kan vi dra slutsatsen att för tillräckligt stort n kommer integralen att ligga mellan värdena 0 och 1.

Om π är ett heltal, har vi med lemma 2.2 visat att integralen $\int_0^\pi f_n(x)\sin(x)dx$ alltid är ett heltal, enligt beviset ovan. Däremot med hjälp av egenskap två så har vi också visat att samma integral antar värden mellan 0 och 1 för tillräckligt stora n. Detta är en motsägelse vilket gör så att vi kan dra slutsatsen om att talet π är ett irrattionellt tal. $\square$

3 Arkimedes approximation av π

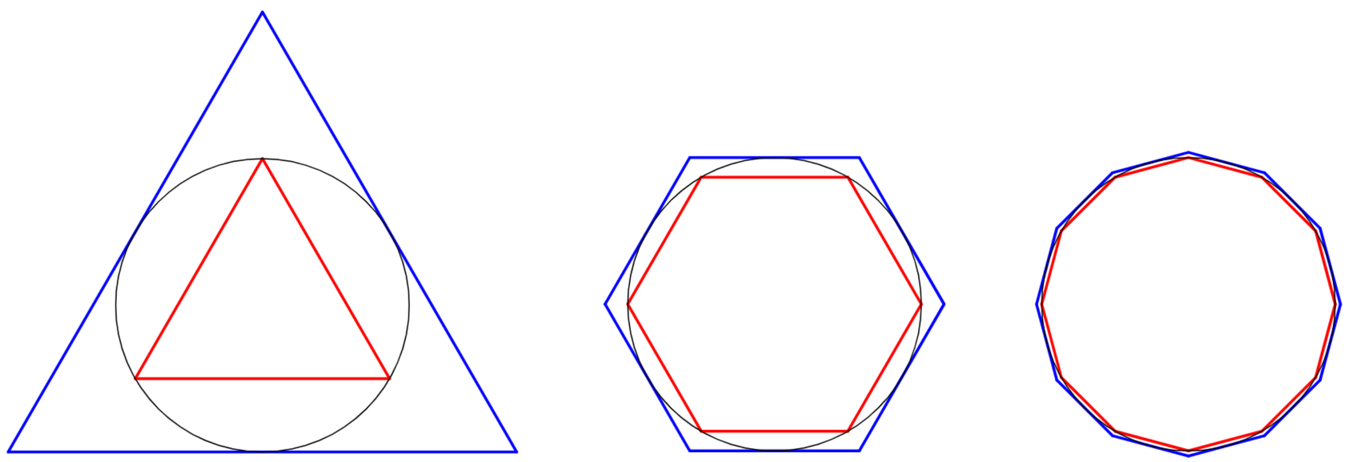
I de kommande kapitlarna kommer vi att studera hur vi approximerar talet π på olika metoder. De valda metoderna är endast några av många fler olika approximationer av talet π. Då vi tidigare har nämnt det så kan det kan vara bra att påminna oss om att Arkimedes approximation är en av de tidigaste approximationerna av talet π. Detta är också en anledning till att talet π också kallas för Arkimedes konstant. Bakgrunden till denna approximation är att Arkimedes definierar π som $\pi = \frac{C}{D}$, där C står för *circumference*(omkrets) och D står för *diameter*.
Arkimedes metod för att uppskatta talet π är att inkludera polygoner både inskrivna i en cirkel och utanför cirkeln.



(b)

Som tidigare skrivet så är själva idén rätt så simpel då man kan illustrera enkelt med bilden (b) på följande sätt. På bilden kan vi se en cirkel och två liksidiga polygoner med sex hörn. Vi kan beskriva detta förhållande genom att benämna polygonerna och cirkeln. Vidare kommer vi att minska och öka hörnen för att klargöra förhållandet. Vi har en liksidig polygon som är större än cirkeln som vi kan kalla för C_n och en liksidig polygon som är mindre än cirkeln som vi kan kalla för c_n. Idén med polygonerna är att ju fler hörn en polygon har, desto närmre kommer dess längd till cirkelns omkrets. Omkretsen till polygonen som är utanför cirkeln nämner vi till $O(C_n)$, polygonens omkrets innanför cirkeln nämner vi till $O(c_n)$ och cirkelns omkrets nämner vi till C. Siffran n betecknar antalet sidor på våra polygoner inne och utanför cirkeln. Då får vi det rätt så tydligt ett förhållande på följande sätt $O(c_n) < C < O(C_n)$.

Om vi höjer talet n, kommer dessa två polygoner att komma närmare cirkeln, tills de till slut nästan nuddar själva cirkeln. Detta kan illustreras med dessa figurer där vi kan se att $n = 3, 6, 12$. Vidare kan vi tydligt se på figurerna att figuren med högst antal n är polygonen med omkretsen närmast cirkeln.

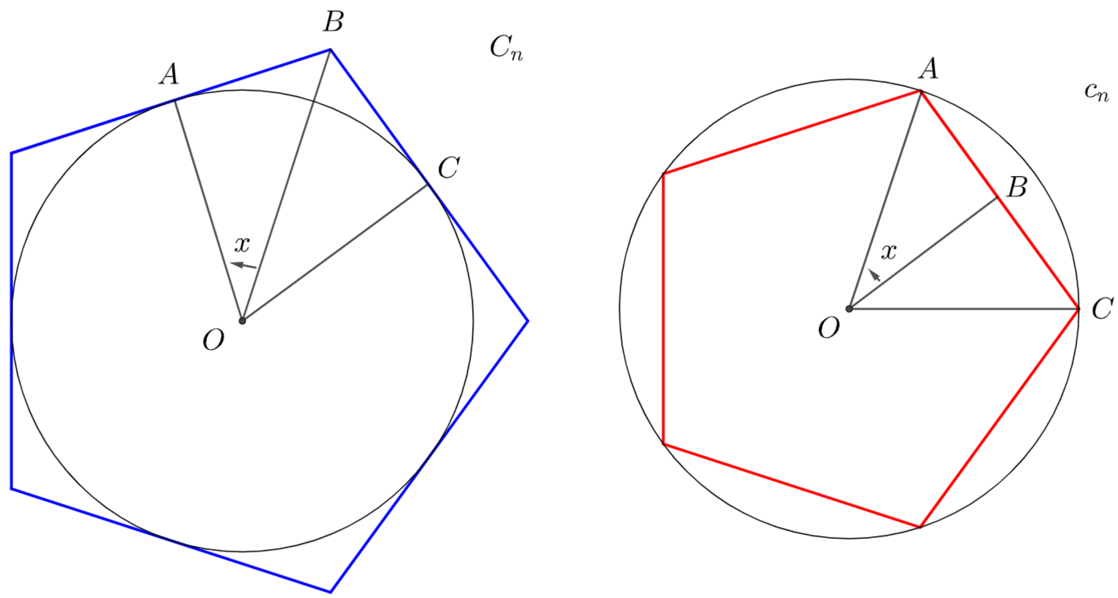


(a) (b) (c)

Här kan vi se de inskrivna polygonerna i rött och de polygonerna utanför cirkeln i blå. Klart och tydligt kan man se att av dessa tre så är (c) närmast cirkelns omkrets och (a) längst ifrån. Vidare leder detta till om att kunna hitta en metod för att räkna omkretsen av en polygon med n sidor, så att vi kan komma fram till talet π genom att ta ett tillräckligt stort n.

För att hitta en metod för att räkna ut omkretsen av en polgyon med n sidor behöver vi använda oss av trigonometri och Pythagoras sats. Genom att kolla på våra tidigare figur (b) så kan vi bestämma en formel för polygonerna

c_n och C_n. Säg att diametern på cirkeln är 1, då kan vi rita upp på följande sätt:



Genom att se på dessa figurer så kan vi hitta en formel för att räkna omkretsen av polygonerna i både C_n och c_n.

Sats 3.1. *Omkretsen av polygon c_n som är en n-sidig polygon är given av ekvationen*

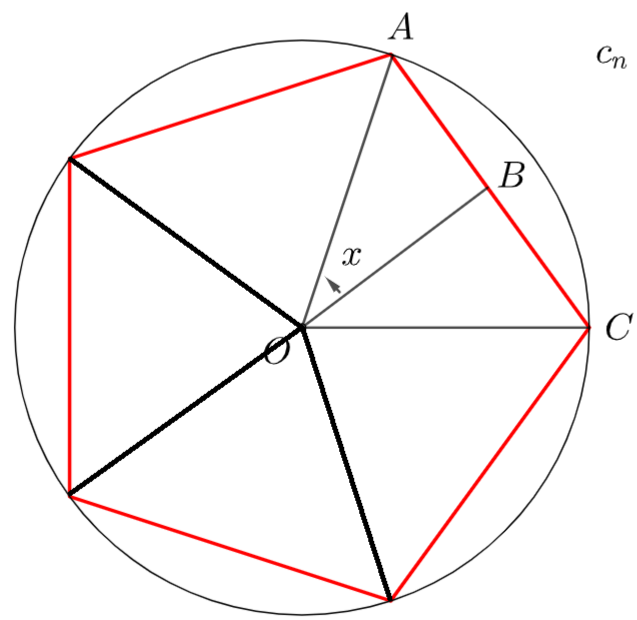
$$O(c_n) = n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Bevis: Med en cirkel på diameter 1 vet vi att radiens längd är $OA = \frac{1}{2}$. Vidare kan vi få fram dessa uträkningar på c_n som är en n-sidig polygon:
Vi vet att OB är vinkelrät mot AC. Dessutom vet vi att $AB = BC$. För att veta vad $\sin(x)$ är så kan vi använda oss av förhållandet $\sin(x) = \frac{\text{motstående sida}}{\text{hypotenusan}}$. Vi får alltså $\sin(x) = \frac{|AB|}{\frac{1}{2}} = 2 \cdot |AB| = |AC|$. Vi kan då använda detta förhållande för att beräkna längden av en sida av vår polygon, eftersom vi tidigare har visat att längden av en sida är dubbelt så lång som AB. Omkretsen av en n-sidig polygon där sidorna är lika långa ges av antal sidor gånger längden av en sida. Alltså får vi ekvationen där $O(c_n)$

innebär omkretsen av c_n:

$$O(c_n) = n \cdot |AC| = n \cdot \sin(x).$$

Nästa steg är att hitta vad vinkeln x motsvarar. Om vi kopplar ihop alla hörn i en polygon till cirkelns origo vet vi att varje vinkel som skapas av dessa linjer från hörnen till origo ger oss vinklar som är $\frac{2\pi}{n}$.



Däremot så vet vi att x endast är hälften av storleken av dessa vinklar som skapas. Därför får vi fram att $x = \frac{\pi}{n}$. Om vi sätter ihop allt det vi har räknat ut så får vi fram vår slutliga formel:

$$O(c_n) = n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

□

Liknande bevis kan utföras för C_n för att få fram omkretsen på n-sidig polygon utanför cirkeln med formeln:

$$O(C_n) = n \cdot \tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

För vissa n så är det väldigt enkel att räkna ut omkretsen av polygonen. Vi väljer $n = 3$ för att demonstrera. Genom att använda Pythagoras sats kan vi få fram att $\sin(60°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Sätter vi in det i vår formel får vi $O(c_3) = 3\frac{\sqrt{3}}{2}$. Genom att använda följande trigonometriska identiteter

$$\begin{aligned} \cos(x) &= \sqrt{1 - \sin^2(x)} \\ \tan(x) &= \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{aligned} \tag{3}$$

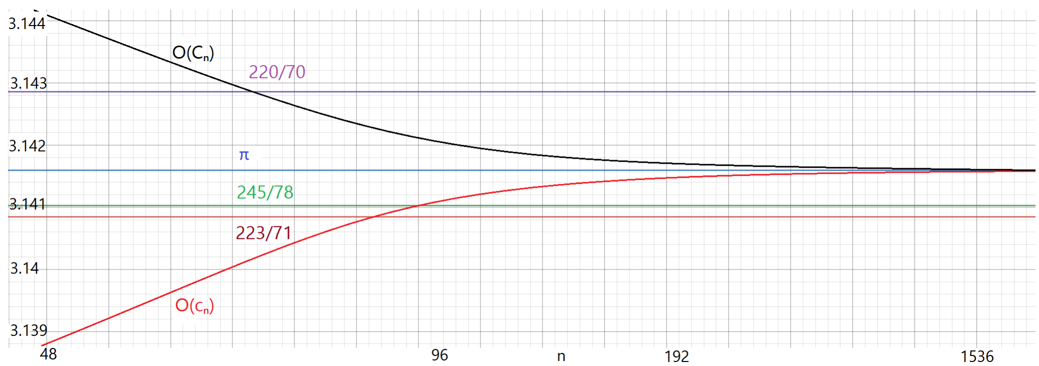
kan vi få fram $\cos(60°) = \frac{1}{2}$ och $\tan(60°) = \sqrt{3}$. Alltså får vi fram att $O(C_3) = 3\sqrt{3}$. Med denna uträkning så kan vi säga att $O(c_3) < \pi < O(C_3)$ då om vi sätter in värdena ser ut på följande sätt $2.598 < \pi < 5.196$ med tre decimaler. Nu ökar vi sidorna med dubbelt så många som vi hade innan, alltså får vi en polygon med 6 sidor. Vi behöver nu hitta värdena av $\sin(30°)$ och $\tan(30°)$ för att få omkretsen av våra nya polygoner både i cirkeln och utanför. $\cos(30°)$ kan vi få fram genom att använda oss av $\cos(60°)$ med denna trigonometriska identitet

$$\cos(x) = \sqrt{\frac{1 + \cos(2x)}{2}}. \tag{4}$$

Detta ger oss att $\cos(30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ och $\sin(30°) = \frac{1}{2}$. Vidare kan vi fortsätta med att dubbla antalet sidor på samma sätt som när vi ökade från 3 till 6 sidor. Genom att fördubbla sidorna på vår polygon vid varje steg kan vi alltid beräkna vinklarna med hjälp av formlerna $O(c_n)$ och $O(C_n)$, vilket gör det möjligt att beräkna omkretsen för C_n och c_n med våra ursprungliga formler. Vi kan nu göra en tabell upp till en 96-sidig polygon som var den polygonen Arkimedes räknade fram till som högst för hand, genom att rita och mäta.

n	$c_n = n\sin[\frac{180}{n}]$	Numerical value (Approx.)	$C_n = n\tan[\frac{180}{n}]$	Numerical value (Approx.)
3	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	2.59807621	$3\sqrt{3}$	5.19615242
6	3	3	$2\sqrt{3}$	3.46410161
12	$12\left[\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right]$	3.10582854	$12\left[\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}}\right]$	3.21539031
24	$24\left[\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}\right]$	3.13262861	$24\left[\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\right]$	3.15965994
48	$48\left[\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}\right]$	3.13935020	$48\left[\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}\right]$	3.14608622
96	$96\left[\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{2}\right]$	3.14103195	$96\left[\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}\right]$	3.14271460

Genom att analysera tabellen ovan ser vi att Arkimedes approximation av π blir allt närmare det verkliga värdet av π när antalet sidor ökar. Arkimedes lyckades räkna ut det approximation värdet av π för en 96-sidig polygon för hand, men genom användning av ekvationer kunde han faktiskt beräkna approximationer med fler sidor och närmare det verkliga värdet av π. Arkimedes bestämde att värdet av π var mellan $\frac{22}{7} = \frac{220}{70}$ och $\frac{223}{71}$. Genom att jämföra hans metod och påstående med det verkliga värdet av π i en tabell, kan vi se att om antalet sidor var tillräckligt stort så skulle hans metod potentiellt kunna approximera talet π.



Figur 1: Ovan har vi en tabell som visar Arkimedes tal som han approximerade π till, vår polygon som närmar sig talet π samt det riktiga talet π.

Vi kan se på figur 1 att omkretsen av både polygonen utanför samt inne i cirkeln konvergerar till talet π. Detta kan vi bekräfta genom att ta gränsvärdet av funktionerna till $O(c_n)$ och $O(C_n)$ när n går mot oändligheten.

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Vi kan använda substitutionen $x = \frac{1}{n}$ för att skriva om gränsvärdet som:

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x)}{x}$$

Vi vet att $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ och vi kan använda detta faktum för att skriva om gränsvärdet som:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x)}{x} \cdot \frac{\pi}{\pi} = \pi \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}.$$

Eftersom $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, så har vi:

$$\pi \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} = \pi \cdot 1 = \pi.$$

Därför är gränsvärdet för funktionen $O(c_n) = n \cdot \sin(\frac{\pi}{n})$ när n närmar sig oändligheten π.

På liknande sätt kan vi ta gränsvärdet för $O(C_n)$ när n går mot oändligheten och få samma resultat:

$$\lim_{n\to\infty} n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Vi kan använda följande identitet:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1.$$

Genom att sätta $x = \frac{\pi}{n}$ kan vi omformulera det ursprungliga gränsvärdet som:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} \cdot \pi$$

Vidare kan vi omformulera gränsvärdet till

$$\lim_{x\to 0} 1 \cdot \pi = \pi.$$

4 Approximationer till π via icke-negative integraler

I det här momentet ska vi kolla mer på approximationer av talet π. Fokus kommer att ligga på integraler. Vi kommer att undersöka felmarginaler och relaterade serier för de integraler vi använder. Till slut kommer vi att introducera generaliserade serier där vi kan erhålla valfritt antal decimaler av talet π. Genom att använda olika integraler kan vi få olika approximationer av talet π. För hela denna sektion kommer jag att använda en artikel skriven av Stephen K. Lucas [3].

4.1 Den klassiska integralen

Ett påstående är att talet π är mindre än talet $\frac{22}{7}$. För att bevisa detta kan vi använda oss av den klassiska integralen som används för att härleda en mängd olika resultat och bevis.

Sats 4.1.

$$\int_0^1 \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} dx = \frac{22}{7} - \pi, \tag{5}$$

där ekvationen särskilt leder till $\pi < \frac{22}{7}$.

Bevis: Eftersom att denna integral är icke-negativ så kommer vi att visa att π är mindre än $\frac{22}{7}$. För att förenkla integralen börjar vi med att utföra polynomdivision på integranden. Vi får:

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{x^2+1}. \tag{6}$$

Nu har vi en enklare integral att hitta en primitiv funktion till

$$\int_0^1 \left(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{x^2+1} \right) dx.$$

Vi får:

$$\int_0^1 \left(x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4 - \frac{4}{x^2+1} \right) =$$
$$\left[\frac{x^7}{7} - \frac{4}{6}x^6 + x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 4x \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{4}{x^2+1} dx.$$

Vi löser integralen med hjälp av identiteten $\int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan(x)$

$$-\int_0^1 \frac{4}{x^2+1} dx = [-4\arctan(x)]_0^1 .$$

Vi vet att $\arctan(0) = 0$, vilket gör att uttrycket försvinner när vi använder gränsen 0. Däremot behåller vi uttrycket när vi använder oss av gränsen 1, vi får alltså bara $-4\arctan(1) = \frac{4\pi}{4} = \pi$. Vi får:

$$-\pi + \left[\frac{x^7}{7} - \frac{4}{6}x^6 + x^5 - \frac{4}{3}x^3 + 4x \right]_0^1 = -\pi + \frac{1}{7} - \frac{2}{3} + 1 - \frac{4}{3} + 4 = \frac{22}{7} - \pi.$$

Tänker vi att $x \in (0,1)$ och vi studerar termerna $0 < x^4$, $0 < (1-x)^4$, $0 < x^2 + 1$ i ekvation (6) ser vi att integranden är positiv. $\square$

4.1.1 Felmarginal

Genom att använda ekvation (5) har vi visat att $\frac{22}{7} > \pi$. Däremot kan vi också använda samma ekvation för att få gränserna för felmarginalen. Genom att analysera integranden i ekvation (5), kan vi fastställa gränserna för vårt intervall. Vi vet att för alla x i intervallet $[0,1]$ gäller $0 \leq x(1-x) \leq \frac{1}{4}$. Detta kan vi se genom att analysera $x(1-x)$ som har sitt högsta värde när $x = \frac{1}{2}$ i intervallet $[0,1]$. Sätter vi in $x = \frac{1}{2}$ får vi fram att det högsta värdet $x(1-x)$ kan anta i intervallet $[0,1]$ är $\frac{1}{4}$. Om vi upphöjer båda sidorna av olikheten till 4, får vi $0 \leq x^4(1-x)^4 \leq \frac{1}{256}$. Vi vet också att $\frac{1}{1+x^2} \leq 1$ (eftersom $1 + x^2 \geq 1$). Genom att multiplicera dessa två olikheter tillsammans får vi $0 \leq \frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} \leq \frac{1}{256}$. Detta innebär att integralens värde också måste ligga mellan 0 och $\frac{1}{256}$. Vi vet också att integralen enligt ekvation (5) är lika med $\frac{22}{7} - \pi$. Detta innebär att vi kan skriva:

$$0 \leq \frac{22}{7} - \pi \leq \frac{1}{256}.$$

Vi kan nu lösa dessa olikheter för π för att få vårt intervall. För den vänstra delen av olikheten får vi:

$$\pi \leq \frac{22}{7}.$$

För den högra delen av olikheten får vi:

$$\pi \geq \frac{22}{7} - \frac{1}{256}.$$

Genom att kombinera dessa två olikheter får vi vårt intervall för π:

$$\frac{22}{7} - \frac{1}{256} < \pi < \frac{22}{7}$$

där $\frac{22}{7} - \frac{1}{256} = \frac{5625}{1792}$. Däremot kan vi hitta en bättre begränsning genom att notera att $1 < 1 + x^2 < 2$ på $0 < x < 1$, samt att $\int_0^1 x^4(1-x)^4 dx = \frac{1}{630}$. Det ger oss olikheten:

$$\frac{1}{1260} < \frac{22}{7} - \pi < \frac{1}{630}$$

som kan omformuleras till

$$\frac{1979}{630} = \frac{22}{7} - \frac{1}{630} < \pi < \frac{22}{7} - \frac{1}{1260} = \frac{3959}{1260}.$$

Alltså får vi intervallet $[\frac{1979}{630}, \frac{3959}{1260}]$ vilket har en bredd på ungefär $7.94 \cdot 10^{-4}$ vilket vi får fram genom att subtrahera kvoterna med varandra. Kvoterna ser ut som följande i sex decimaler:

$$3.141269 < \pi < 3.142063$$

Nu vet vi att π ligger någonstans i detta intervall, men vi har ännu inte kommit nära approximationen av π.

4.1.2 Serieutveckling

Målet med detta avsnitt är att närma oss talet π genom att använda serier. För att genomföra en serieutveckling av talet π kan vi använda ekvation (6).

Vi kan omformulera ekvation (6) till:

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4}{4+x^4(1-x)^4} \text{ eller } \frac{4}{1+x^2} = \frac{x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4}{1+x^4(1-x)^4/4}.$$

Detta kan vi göra på följande sätt:

$$\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2} = x^6-4x^5+4x^4-4x^2+4-\frac{4}{x^2+1}$$

addera $\frac{4}{x^2+1}$ på båda led och lägger ihop termerna i vänsterled

$$\frac{x^4(1-x)^4+4}{1+x^2} = x^6-4x^5+4x^4-4x^2+4$$

vi delar båda led med täljaren och får

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4}{4+x^4(1-x)^4}.$$

Om vi nu väljer att multiplicera båda led med 4 får vi vår andra version av ekvationen som ser ut på följande sätt

$$\frac{4}{1+x^2} = \frac{x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4}{1+x^4(1-x)^4/4}.$$

Därefter ska vi integrera båda sidorna från 0 till 1, men först behöver vi använda oss av taylorutvecklingen för $\frac{1}{1+t}$. Taylorutvecklingen för $\frac{1}{1+t}$ är

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{\infty}(-t)^k = 1-t+t^2-t^3+\mathcal{O}(t^4).$$

Vi sätter in $t = \frac{x^4(1-x)^4}{4}$ och får

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}dx = \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^1 (x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4)\left(-\frac{x^4(1-x)^4}{4}\right)^k dx$$

som kan förenklas till

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \int_0^1 (x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4)x^{4k}(1-x)^{4k} dx.$$

Vi kan multiplicera parentsen för att förenkla:

$$\begin{aligned}
\pi &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \int_0^1 (x^6 - 4x^5 + 5x^4 - 4x^2 + 4)x^{4k}(1-x)^{4k} dx \qquad (7)\\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^k \int_0^1 \Big(x^{6+4k}(1-x)^{4k} - 4x^{5+4k}(1-x)^{4k} + 5x^{4+4k}(1-x)^{4k} \\
&\qquad - 4x^{2+6k} + 4x^{4k}(1-x)^{4k} \Big) dx.
\end{aligned}$$

Därefter vill vi räkna ut talet π med hjälp av (7) och det kan vi göra genom att inse att vår integral är en summa med termer i den kända formen som heter Betafunktion som också kallas för Eulers integral av första slaget. Lucas introducerar denna funktion i sitt bevis och den kommer inte att härledas. Betafunktionen är en familj av funktioner som representeras som integraler av Gamma funktionen [5]. Den Lucas använder ser ut som följande:

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n dx.$$

Funktionen ovan fås genom att substituera så att:

$$\begin{aligned}
B(x,y) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt \\
B(m+1, n+1) &= \int_0^1 x^m(1-x)^n dx
\end{aligned}$$

Funktionen inuti integralen i ekvation (7) integreras över intervallet [0, 1] med avseende på variablerna x, m och n. Variablerna m och n bestäms av värdet på k i serien, där $m = 4k$ och $n = 4k$ och där m och n är icke-negativa tal. Integralen av denna funktion kan beräknas med hjälp av formeln som

Lucas använder sig av:

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}. \tag{8}$$

Nu applicerar vi ekvation (8) på vår förenklade ekvation (7) och får följande:

$$\pi = \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^k \left[\frac{(4k)!(4k+6)!}{(8k+7)!} - \frac{4(4k)!(4k+5)!}{(8k+6)!} + \frac{5(4k)!(4k+4)!}{(8k+5)!} - \frac{4(4k)!(4k+2)!}{(8k+3)!} + \frac{4(4k)!^2}{(8k+1)!}\right]. \tag{9}$$

Nu kan vi beräkna vår serie och se hur vi närmar oss talet π för varje term vi lägger till. Genom att sätta in värden för $k=0$, $k=1$, $\cdots$, $k=n+1$, kommer vi allt närmare talet π. Vi kan demonstrera detta med följande exempel:

$$\begin{aligned}
\pi &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^0 \left[\frac{(4\cdot 0)!(4\cdot 0+6)!}{(8\cdot 0+7)!} - \frac{4(4\cdot 0)!(4\cdot 0+5)!}{(8\cdot 0+6)!} + \frac{5(4\cdot 0)!(4\cdot 0+4)!}{(8\cdot 0+5)!} - \frac{4(4\cdot 0)!(4\cdot 0+2)!}{(8\cdot 0+3)!} + \frac{4(4\cdot 0)!^2}{(8\cdot 0+1)!}\right] = \frac{22}{7} \\
\pi &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^1 \left[\frac{(4\cdot 1)!(4\cdot 1+6)!}{(8\cdot 1+7)!} - \frac{4(4\cdot 1)!(4\cdot 1+5)!}{(8\cdot 1+6)!} + \frac{5(4\cdot 1)!(4\cdot 1+4)!}{(8\cdot 1+5)!} - \frac{4(4\cdot 1)!(4\cdot 1+2)!}{(8\cdot 1+3)!} + \frac{4(4\cdot 1)!^2}{(8\cdot 1+1)!}\right] = -\frac{19}{15015} \\
&\vdots \\
&= \frac{22}{7} - \frac{19}{15015} + \frac{543}{594914320} - \frac{77}{104187267600} + \cdots.
\end{aligned} \tag{10}$$

Resultatet är en oändlig summa och då väljer vi att analysera hur bra approximationen blir ifall vi summerar enbart ändligt många termer. När vi analyserar den oändliga serien i vår beräkning märker vi att varje påföljande term i serien är ungefär $1/1024$ av storleken jämfört med den föregående

termen. Det innebär att varje ny term bidrar betydligt mindre till det totala värdet än den föregående termen, vilket leder till att serien konvergerar snabbt.
När vi väljer att summera ändligt många termer tar vi hänsyn till ett visst antal inledande termer i serien och bortser från resten. Givet att varje påföljande term är ungefär 1/1024 av storleken jämfört med den föregående, skulle vårt fel (det vill säga skillnaden mellan det sanna värdet av π och det värde vi får från vår ändliga summa) vara mycket litet efter att ha inkluderat ett relativt litet antal termer. Detta visar hur effektivt vår metod är för att approximera π, trots att vi endast inkluderar ett ändligt antal termer från serien.
Vi kan demonstrera hur värdet ändras när vi lägger till en term på följande sätt, vi har det sanna värdet till π längst upp och termer från vår serie under:

$$\begin{aligned}
&\pi && \approx 3.14159265359 \\
&\frac{22}{7} && = 3.14285714286 \\
&\frac{22}{7} - \frac{19}{15015} && = 3.14159174159 \\
&\frac{22}{7} - \frac{19}{15015} + \frac{543}{594914320} && = 3.14159265433 \\
&\frac{22}{7} - \frac{19}{15015} + \frac{543}{594914320} - \frac{77}{104187267600} && = 3.14159265359
\end{aligned}$$

När vi studerar termerna ser vi att för varje term vi lägger till närmar vi oss till talet π med 3 decimaler. Genom att använda enbart de första två termerna kan vi forma första intervallet på följande sätt

$$\frac{22}{7} - \frac{19}{15015} \leq \pi \leq \frac{22}{7} + \frac{19}{15015},$$

som har bredden $2.53 \cdot 10^{-3}$. Detta resultat är sämre än det vi hade på föregående sektionen, alltså $7.94 \cdot 10^{-4}$. Däremot om vi använder oss av tre termer kan vi få

$$\frac{22}{7} - \frac{19}{15015} - \frac{543}{594914320} \leq \pi \leq \frac{22}{7} - \frac{19}{15015} + \frac{543}{594914320},$$

som är ett intervall med bredden $1.83 \cdot 10^{-6}$, vilket är närmre till talet π. Vidare kan vi fortsätta på detta sätt för att komma närmre talet π för varje term vi lägger till i vår serie, alltså har vi kommit till en närmre approximation till talet π.

4.2 En annan integral för approximation av π

Detta kapitel introducerar en annan integral för att förbättra approximationen av talet π. Denna integral tillhör samma familj som den klassiska integralen. Det är enklare att använda och kräver inte en alternerande serie. Kapitlet ger en grov skiss och övergripande introduktion till den nya integralen utan detaljerade beräkningar eller tillämpningar. Den integralen ser ut som följande:

$$I_n = \int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{1+x^2}dx \tag{11}$$

där n är ett positivt heltal. Vi kan betrakta integralen från ekvation (5) som I_4. Genom att använda denna integral kan vi få en approximation närmare talet π. På samma sätt som den klassiska integralen använder vi oss av den slutna formen av integranden, som introduceras av Lucas. Den slutna formen är tagen direkt från artikeln vi använder för detta bevis och kommer inte att härledas. Den lyder enligt följande

$$\begin{gathered}\frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{1+x^2} = \\ (x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4)\sum_{k=0}^{n-1}(-4x)^{n-1-k}x^{4k}(1-x)^{4k} + \frac{(-4)^n}{1+x^2}.\end{gathered} \tag{12}$$

Vi kan nu utföra samma steg som vi gjorde för den tidigare integralen. Genom att integrera högerled i (12) med hjälp av ekvation (8) får vi fram följande resultat

$$\begin{gathered}\frac{(-1)^n}{4^{n-1}}\int_0^1 \frac{x^{4n}(1-x)^{4n}}{1+x^2}dx = \\ \pi - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{2^{4-2k}(4k)!(4k+3)!}{(8k+7)!}(820k^3+1533k^2+902k+165).\end{gathered}$$

4.2.1 Serieutveckling

Precis som vi gjorde med den klassiska integralen kan vi använda oss av den slutna formen (12) av vår integral för att få en serieutveckling med ett specifikt värde för n för att få fram en approximation till talet π. Det ser ut på följande sätt

$$\pi = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(-4)^{-nm-k}\int_0^1 (x^6-4x^5+5x^4-4x^2+4)x^{4(k+nm)}(1-x)^{4(k+nm)}dx,$$

som generaliserar vår ekvation (7). Därefter kan vi nu sätta $\alpha = k + nm$ för att få en enklare variabel att arbeta med. Sätter vi in $n = 1$ får vi exakt samma expansion som ekvation (12). Därför vill vi testa vad som händer när vi sätter in $n = 2$. Först vill vi skriva ekvationen med vår nya variabel α och därefter sätter vi in $n = 2$. Vi får följande

$$\pi = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{\alpha}4^{2-\alpha}\frac{(4\alpha)!(4\alpha+3)!}{(8\alpha+7)!}(820\alpha^3+1533\alpha^2+902\alpha+165).$$

Med $n = 2$ får vi

$$\begin{aligned}\pi &= \sum_{m=0}^{\infty}4^{2-2m}\left[\frac{(8m)!(8m+3)!}{(16m+7)!}(6560m^3+6132m^2+1804m+165)\right.\\ &\qquad\left. -\frac{(8m+4)!(8m+7)!}{(16m+15)!}(1640m^3+3993m^2+3214m+855)\right]\\ &= \frac{47171}{15015}+\frac{16553}{18150270600}+\frac{64615651}{102659859353905652800}+\cdots.\end{aligned}$$

Återigen kan vi, som tidigare, undersöka vad som händer när vi lägger till en term i taget och hur nära vi kommer talet π. För att enklare observera hur nära vi kommer talet behöver vi dock fler decimaler för π:

$$
\begin{aligned}
\pi & \approx 3.141592653589793238 \\
\frac{47171}{15015} & = 3.141591741591741591 \\
\frac{47171}{15015} + \frac{16553}{18150270600} & = 3.141592653589163823 \\
\frac{47171}{15015} + \frac{16553}{18150270600} + \frac{64615651}{102659859353905652800} & = 3.141592653589793237
\end{aligned}
$$

Varje term vi lägger till förbättrar vår approximation av π. Med dessa 3 termer når vi 17 korrekta decimaler. För varje term vi lägger till på vår serie förbättras noggrannheten på ungefär 6 siffror. Vi skulle kunna fortsätta med ännu fler termer, men det skulle kräva betydligt mer arbete för att närma oss π ännu mer.

References

[1] Damini DB and Abhishek Dhar. "How Archimedes showed that π is approximately 22 by 7." At Right Angles 12 (2022): 13-19.

[2] Paul Lockhart. "Measurement." Harvard University Press (2012): 66-67.

[3] Stephen K. Lucas. "Approximations to π derived from integrals with nonnegative integrands." The American Mathematical Monthly 116.2 (2009): 166-172.

[4] Ivan Niven. "A simple proof that is irrational." Pi: A Source Book (1997): 276.

[5] Beta function (2023) Wikipedia. Tillgänglig på: https://en.wikipedia.org/wiki/Beta_function (Besökt: 20/03/2022).

[6] Pi (2021) Wikipedia. Tillgänglig på: https://sv.wikipedia.org/wiki/Pi (Besökt: 17/08/2022).

[7] Proof that π is irrational (2022) Wikipedia. Tillgänglig på: https://en.wikipedia.org/wiki/Proof_that_%CF%80_is_irrational (Besökt: 17/08/2022).