SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

En introduktion till Ramseyteorin

av

Caroline Enderin

2023 - L6

En introduktion till Ramseyteorin

Caroline Enderin

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Jörgen Backelin

2023

Sammanfattning:

Ramseyteorin handlar om hur man utifrån minsta möjliga hörnantal för en kombinatorisk graf garanterar en komplett enfärgad delgraf av m hörn i en färg eller en komplett enfärgad delgraf av n hörn i en annan färg. Hörnantalets storlek är ramseytalet och skrivs $R(m, n)$. Man kan göra ramseygrafer i fler färger men i denna uppsats kommer vi enbart beröra ramseygrafer som är tvåfärgade. I denna uppsats kommer kantfärgning av röd betecknas m och kantfärgning av blå betecknas n. Min egen del i uppsatsen handlar om grafer nära ramseytalen och om dess symmetriska egenskaper.

Innehåll

1 Mannen bakom Ramseyteorin

Figur 1: Frank Plumpton Ramsey

Frank Plumpton Ramsey 4 föddes 22:a februari i Cambridge, 1903 och dog den 19:e januari 1930, på grund av en misslyckad operation. Ramseys far arbetade som rektor på Magdalene Collage och var även han matematiker [1]. Hans mor drev kampanj för kvinnlig rösträtt och andra sociala ändamål. Ramsey var äldst av 4 syskon. Hade två systrar och en bror [2].

Ramsey fick stipendium för att studera på Kings college, Cambridge [3] . När Ramsey var 17 år hade han hunnit ta en matematikexamen. Efter ett par händelserika år med matematiska studier så flyttade han tillbaka till Cambridge för att arbeta som lärare och ta en kurs inom matematikens grunder för att senare skriva uppsatser i filosofi, matematik och ekonomi som han skulle bli känd för (Stanford rubrik "life and work") . Han publicerade många texter men det var artikeln 'On a Problem of Formal Logic' (1930), som innehåller de matematiska resultaten som nu kallas 'Ramsey's Theorems'. Under de sista åren i livet skrev Ramsey ett antal filosofiska artiklar som färdigställdes innan hans död 1929. Han var även handledare åt Wittgenstein sitt sista år i livet där de regelbundet träffades. Wittgenstein skulle senare påminna om betydelsen av dessa samtal för sin egen intellektuella utveckling i förordet till Filosofiska undersökningar. När Ramsey dog lämnade han ett stort tomrum för många som han lämnade bakom sig. I Ramseys dödsruna för Cambridge Review skrev Braithwaite som bland annat hade introducerat Ramsey till ekonomi:

> "Hans intellektuella subtilitet kombinerades med den mest förtjusande enkelhet och uppriktighet. Intolerant mot dårar

[1] MacBride, Fraser, Mathieu Marion, María José Frápolli, Dorothy Edgington, Edward Elliott, Sebastian Lutz, and Jeffrey Paris, Frank Ramsey", The Stanford Encyclopedia of Philosophy (Spring 2023 Edition), Edward N. Zalta & Uri Nodelman (eds.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2023/entries/ramsey/>, avsnitt: Life and Work.

[2] MacBride m.fl., a.a

[3] Alexander Soifer, *Ramsey Theory Yesterday, Today, and Tomorrow*, Colorado Springs, Springer New York Dordrecht Heidelberg London, 2011, s.9.

> inspirerade han andra genom sin mentala fertilitet och integritet. För åtminstone en av hans vänner är hans död som om en fyr släcktes och vi fick treva oss fram i mörkret.” [4](1930, 216)

Braithwait skrev även att Ramseys yrke var matematik, men filosofin var hans kall. Ramseys vän John Maynard Keynes (1883–1946), har skrivit om Ramseys bidrag till ekonomi [5].

Ramsey var en utomordentligt tydlig tänkare, han lyckades undvika den sortens tankeförvirring som de bästa filosoferna ansvarade för. Han hade en exceptionell förmåga att dra slutsatser av en uppsättning fakta eller vad som kan följas när han inte kunde dra slutsatser. Han hade en bra känsla för proportioner och kunde se vilka problem som var de viktigaste att lösa och vad som var mest grundläggande, och de var dessa han var mest angelägen om att lösa. [6]

Ramsey lämnade in ett dokument som blev publicerat 1930. Dokumetet bestod av en ofärdig och en färdig version som senare blev ”Ramsey teorin”[7]. Dokumenten handlade om hur en komplett oordning är omöjlig, det kommer alltid finnas en struktur som en ordnad substruktur [8]. För att vara på 1930-talet så spred Ramseyteorin snabbt, år 1933 så publicerade den store norske logikern Thoralf Albert Skolem (1887-1963) ett eget bevis av ramseyteorin, med referens till Ramseys publicering 1930 och år 1935 kom ett nytt bevis med hänvisning till Ramseyteorin. [9]

[4]MacBride m.fl., a.a
[5]MacBride m.fl., a.a.
[6]MacBride m.fl., a.a.
[7]Sofier, a.a, s.9.
[8]Sofier a.a, s.10.
[9]Soifer, a.a, s.10.

2 Introduktion

Ramseyteorin är en del i kombinatoriken, den skapades av Frank Plumpton Ramsey under 1920-talet. Ramseyteorin beskrivs vanligtvis som en studie om hur ordning uppstår slumpmässigt. Teorin används bland annat inom programmering, approximationsalgoritmer, spelteori, geometri, talteori och teoretisk datavetenskap. Teorin gällde i första hand om matematisk logik men har under åren bland annat används i datoranvändning, finans och ekonomi. [10]

Ett exempel om ramseyteorin: Vad är det minsta möjliga antalet personer som behövs för att garantera att antingen tre personer känner varandra eller tre personer inte känner varandra. Beviset för detta kommer jag ta upp längre fram. Men detta är ett exempel på hur ramseyteorin kan tillämpas.[11]

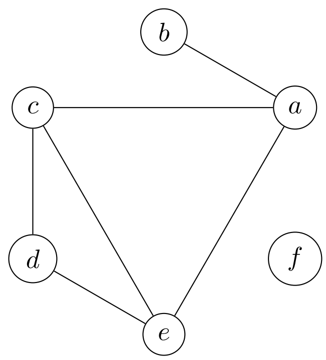
[10] Stanisław Radziszowsk, Department of Computer Science, RIT Computational Ramset Theory, 2017, URL: i https://www.cs.rit.edu/ spr/ramsey/.

[11] Hunter Rehm, Ramsey Theory Introduction,7 jan. 2021. YouTube. URL:https://www.youtube.com/watch?v=H6TCPlVP1bI

3 Definitioner

3.1 Kombinatorisk graf

En (kombinatorisk) graf G består av en ändlig mängd hörn V och en mängd kanter E som består av två-delmängder av V. En tvådelmängd är en delmängd med två element. Grafen skrivs vanligtvis $G = (V, E)$, där V är hörnmängdens storlek och E är kantmängdens storlek.[12]. I denna uppsats så betyder graf, alltid en kombinatorisk graf. Ett exempel på en graf kan se ut enligt figur 2 nedan.

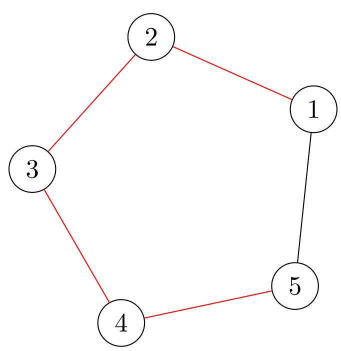


Figur 2

Där: $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ E= $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, e\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}\}$

3.2 Kantfärgläggning

En kantfärgning är en typ av graffärgning. Vi kommer bara använda oss av kantfärgning i denna uppsats. En kant E mellan två hörn V färgläggs med en färg per kant i denna uppsats.

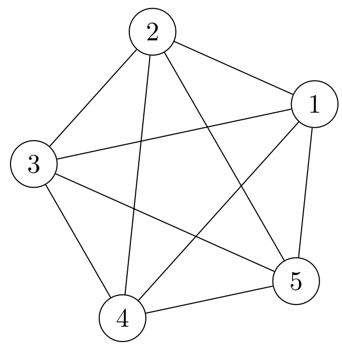


Kanterna $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}$ och $\{4, 5\}$ är alla färglagda röda, däremot är kanten $\{5, 1\}$ färglagd med svart.

[12]Norman L. Biggs, *Discrete Mathematics*, Oxford University Press, 1990. s. 178.

3.3 Komplett graf

En graf kallas komplett när varje par av hörn i grafen har en kant mellan sig.



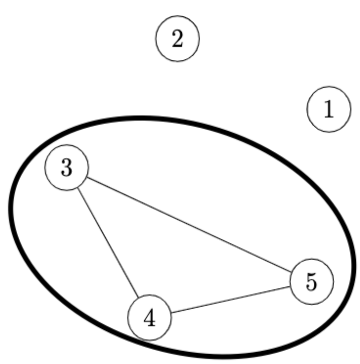
Figur 3: Exempel på komplett graf av 5 hörn

3.3.1 K_t

Vi kan även benämna en komplett graf som K_t där t är antalet hörn i grafen.

3.3.2 Delgraf

Om vi har en graf G, kan vi ta ut en delgraf H, som då är en del av den stora grafen. Exempelvis om vi i figur 3 tar ut en en delgraf H som består av hörnen $\{3, 4, 5\}$ med tillhörande kanter, ser den ut som följer:



Figur 4: Exempel på en delgraf

3.3.3 Klickar

En klick i en graf är en *komplett delgraf*. Med andra ord om man tar ut en komplett delgraf ur en graf. Om alla kanter har samma färg och alla hörn har kanter till alla dess grannar i delgrafen, kallar vi den för en enfärgad klick. En klick måste vara komplett men inte enfärgad. Men de flesta klickar vi tittar på är enfärgade. Ett exempel på en svart 3-klick är delgrafen i figur 4, där 3 står för antalet hörn klicken består av.

3.4 Ordning

Är antalet hörn i en kombinatorisk graf.

3.5 Definition av R(m,n)

m, n och är positiva heltal. Definieras av minsta antalet hörn t så att varje kantfärgläggning i två färger av K_t innehåller en m-klick som är enfärgad i första färgen eller en n-klick som är enfärgad i andra färgen.

Sats: För alla $1 \leq m, n$ existerar det ett $1 \leq t$ så att för varje tvåfärgning av K_t innehåller en enfärgad klick av ordning m i ena färgen som vi i uppsatsen kommer benämna som röd eller n som i uppsatsen kommer benämnas som blå.

3.6 Grad

Graden av ett hörn $v \in V$ är antalet kanter som utgår från hörnet i en graf G, där $G = (V, E)$. Vi använder beteckningen $\delta(v)$ för graden av v.

$$\delta(v) = |D_v|, \text{ där } D_v = \{e \in E | v \in e\}.^{13}$$

Om vi utgår från figur 2 så ser vi att hörnen i V har graderna $\delta(a) = 3$, $\delta(b) = 1$, $\delta(c) = 3$, $\delta(d) = 2$, $\delta(e) = 3$ och $\delta(f) = 0$.

Vi adderar graderna och får ut en gradsumma i grafen G. Varje kant bidrar till graden av båda dess hörn v därmed får vi ut den dubblerade summan av antalet kanter vilket skrivs:

$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2|E|.^{14} \tag{1}$$

Så när vi får ut graden för v delar vi gradsumman på 2, då få vi ut antalet kanter E.

[13] Biggs, a.a s. 181.
[14] Biggs, a.a, s. 181.

4 Värden för ramseytal

Innan vi börjar vill jag ta upp de redan kända bevisade Ramseytalen. Nedan är en tabell på ramseytal bevisade för $R(m, n)$, $m > 2$, $n > 2$ och kända övre uppskattningar av ramseytal. Bevisen har gjorts av olika personer, under olika tillfällen. Många nya bevis gjordes för den övre begränsningen av ramseytalen år 2019 av Angeltveit and McKay. [15] I tabellen är dessa färgade blå.

4.1 Ramseytal

l/k	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3	6	9	14	18	23	28	36						
4		18	25	36	49	59	73	92	102	128	138	147	158
				40	58	79	106	136	171	211	257	307	364
5			43	58	80	101	133	149	183	203	233	267	275
			48	85	133	194	282	381	511	673	861	1082	1342
6				102	115	134	183	204	262	294	347		401
				161	273	427	656	949	1352	1865	2510	3308	4342
7					205	219	252	292	405	417	511		
					497	840	1379	2134	3216	6954	10578	15263	22112
8						282	329	343	457		817		873
						1532	2683	4432	7647	16944	27485	41525	63609

I denna uppsats så bevisas de exakta värdena för $R(1, n)$, $R(2, n)$, $R(3, 3)$, $R(3, 4)$. Det finns även ett generellt bevis för en övre begränsningen. I den egna delen av uppsatsen så kommer jag visa hur några grafer ser ut nära $R(3, 5)$, $R(3, 6)$ och $R(3, 7)$.

[15] S. Radzisziwski, Small Ramsey numbers [Dynamic Survey], Electronic J. of Comb. DS1 (2021) URL: https://www.combinatorics.org/ojs/index.php/eljc/article/view/DS1/pdf, (Combinatorics.org)

5 Resultat för de små ramseytalen

5.1 Bevis av symmetriegenskapen $R(n, m) = R(m, n)$

Det spelar ingen roll vilken position parametrarna m och n har, eftersom antalet parametrar står för hur många färger grafen kan färgas i. Så om man byter plats på m och n, byter kanterna bara färg.

5.2 Beviset för $\mathrm{R}(1, n) = 1$ och $\mathrm{R}(m, 1) = 1$

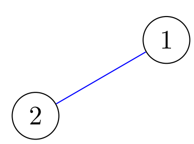
Detta uppnås genom att grafen endast har ett hörn, har vi ett hörn, har vi uppnått ett av de två fallen, det vill säga att hörnet redan är en enfärgad 1-klick, eftersom grafen inte har någon kant att färga. Därmed är beviset klart.

5.3 Beviset för $\mathrm{R}(2, n) = n$ och $\mathrm{R}(m, 2) = m$

Jag påstår att $\mathrm{R}(2, n) = n$.(På grund av symmetri behandlas $\mathrm{R}(m, 2)$ på liknande sätt). Vi betraktar en blå K_{n-1}, men denna graf innehåller inte en blå n-klick, och inte heller en röd 2-klick. Detta betyder att $\mathrm{R}(2, n) > n - 1$.

En graf med n hörn har antingen minst en röd kant och har därmed en röd 2-klick, annars är hela grafen en blå n-klick. Därmed är beviset klart, men det gick väldigt fort så jag visar med ett exempel för $\mathrm{R}(2, 3) = 3$.

Vi börjar med en graf av 2 hörn.



Figur 5: Exempel på graf av av 2 hörn

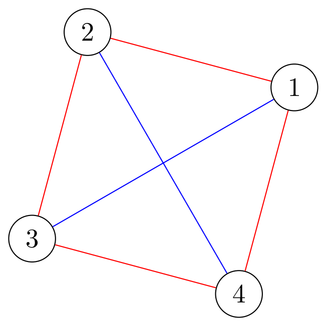
Om vi väljer en röd graf enligt figur 5, undviker vi en blå 2-klick och en röd 3-klick.

Men i en graf med 3 hörn kommer vi alltid få fram en enfärgad 2-klick eller av den andra färgen en enfärgad 3-klick. Exempelvis (a) graf och (b) graf.

(a) graf

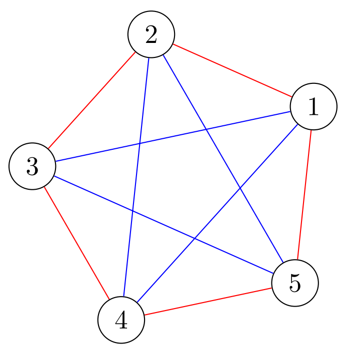
(b) graf

5.4 Beviset för $\mathrm{R}(3,3) = 6$



Figur 7: Exempel på en komplett graf av 4 hörn

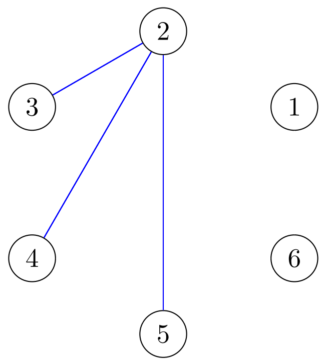
Figur 7 föreställer en graf med 4 hörn och 6 kanter. Genom att färglägga utsidan av grafen med röda kanter och insidan av grafen med blåa kanter, ser man att grafen undviker en enfärgad delgraf av tre hörn, och därför är figur 7 inte tillräcklig för ramseytalet. Detta bevisar att 4 hörn inte är tillräckligt för att garantera en enfärgad treklick, så $R(3,3) > 4$.



Figur 8: Exempel på komplett graf av 5 hörn

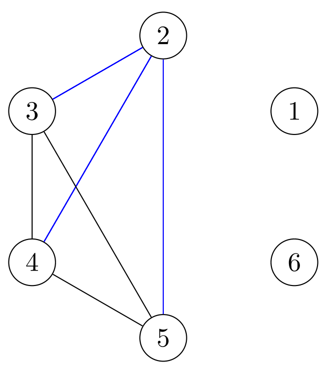
Figur 8 föreställer en graf med 5 hörn och 10 kanter. Genom att på samma sätt färglägga utsidan av grafens kanter röda och diagonal kanterna blå, ser vi att grafen inte har enfärgad komplett delgraf av storlek 3. Därmed har vi bevisat att 5 hörn inte heller garanterar en enfärgad 3-klick, så $R(3,3) > 5$.

En kantfärgning av en komplett graf av 6 hörn ska här bevisas att det garanterar en enfärgad 3-klick. I figur 9 har vi valt en godtycklig kant v, i detta fall hörn 2. För att grafen ska vara komplett har hörn 2, 5 kanter kopplade till resterande hörn i grafen. Det betyder att minst tre kanter från hörn 2 kommer har samma färg. Vi väljer färgen blå, men man kan på samma sätt bevisa detta för färgen röd.



Figur 9: Exempel på graf med tre kanter

I figur 10 har vi en svart triangel(, svart färg används endast för att visa att det är en kant men att kanten än så länge ofärgad). Där måste kanterna $\{3, 4\}$, $\{4, 5\}$ och $\{3, 5\}$ alla vara röda för att inte tillsammans med hörn 2 bilda en blå treklick. Om de svarta kanterna görs röda bildas en röd treklick men om någon av de svarta kanterna är blå bildas en blå treklick tillsammans med hörn 2. Vi kan alltså inte undvika en enfärgad 3-klick.



Figur 10: Exempel på graf med tre blå kanter och tre svartfärgade kanter

Detta bevisar att 6 hörn är tillräckligt för att garantera en enfärgad komplett delgraf på tre hörn. Vi har nu visat att $R(3, 3) > 5$ och att $R(3, 3) < 7$. Därmed är beviset klart:

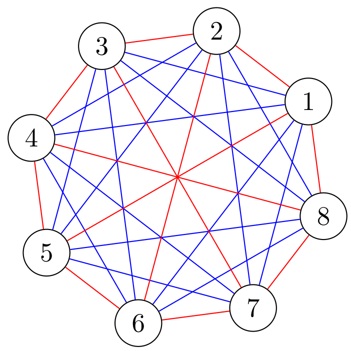
$$R(3, 3) = 6.$$

5.5 Bevis för $\mathrm{R}(3,4) = 9$

Vi bevisar först att $R(3,4) > 8$ och bevisar sedan att $R(3,4) \leq 10$ och kommer till sist bevisa att $R(3,4) = 9$.

5.5.1 Beviset för att $\mathrm{R}(3,4) > 8$

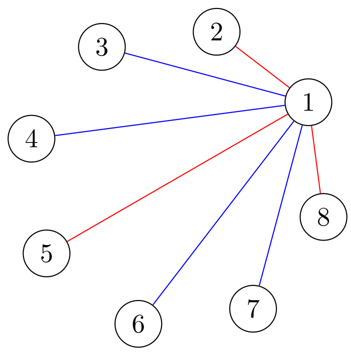
Vi börjar med att bevisa att $R(3,4) > 8$. I figur 11 visas en färgning av en K_8. I grafen finns ingen blå K_4 eller röd K_3. Detta bevisar jag genom att separera grafen, till två separata grafer.



Figur 11: Exempel på graf av 8 hörn med blå och röda kanter.

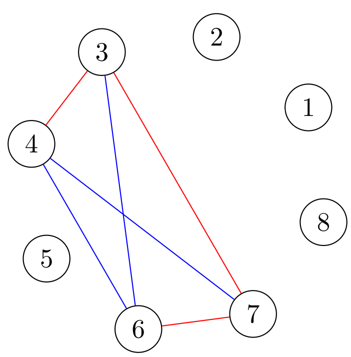
I figur 11 finns 8 över 4 sätt att välja 4-klickar, det vill säga 70 4-klickar i K_8. Men grafen i figur 11 finns ingen blå 4-klick och inte heller någon röd 3-klick. Varför ska vi gå igenom på nästa sida.

Eftersom grafen är symmetrisk, kan vi välja ut vilket hörn som helst och beviset kommer alltid hålla. Vi väljer att utgår från hörn 1 i figur 12 och tittar bara på klickar som innehåller detta hörn. Vi visar först att hörn 1 inte ingår i en blå 4-klick. Fyra av kanterna från 1 är blå, i detta fall är dessa kanter {1,3}, {1,4}, {1,6}, och {1,7}.

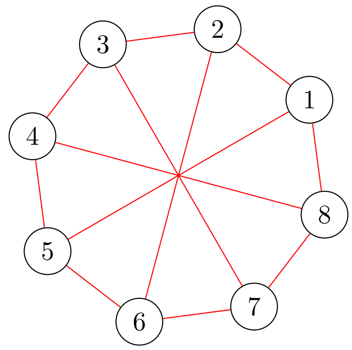


Figur 12: Kanterna som utgår från hörn 1.

Vi kan nu bland dessa 5 hörn visa att det inte finns en blå 4-klick. Oberoende på vilka 4 hörn av; 1, 3, 4, 6, 7 vi väljer så kommer det alltid finnas minst en röd kant mellan hörnen. I figur 13 finns inte en röd 3-klick och eftersom kanterna $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,6\}$ och $\{1,7\}$ är blå och eftersom det inte finns fler blå kanter (se figur 12) så finns inte en blå 4-klick i grafen. Slutsatsen blir att hörn 1 inte ligger i en blå 4-klick och på grund av symmetri gäller detta även för resterande hörn i grafen.



Figur 13



Figur 14: Den röda delgrafen i figur 11

På samma sätt kan vi i figur 14 se att en röd 3-klick inte finns. Om vi exempelvis tar hörnen {3, 2, 6} kan vi se att kanten {3, 6} är blå. Därmed bildas inte en komplett röd delgraf K_3.

Med detta exempel bevisas att $\mathrm{R}(3,4) > 8$.

5.5.2 Beviset för $\mathrm{R}(3,4) \leq 10$

För att bevisa den övre begränsningen av $R(3,4)$, så bevisas också satsen för en övre begränsning av Ramseytal. Eftersom $10 = 4 + 6 = R(2,4) + R(3,3)$ så är det påståendet ett specialfall av en allmän sats:

Sats för en övre gräns skrivs:

$$\mathrm{R}(m,n) \leq \mathrm{R}(m-1,n) + \mathrm{R}(m,n-1) = r. \tag{2}$$

Där $m \geq 2$ och $n \geq 2$.

Olikheten (2) kommer ta ett litet tag att visa.

Om vi utgår från en person Richard som benämns med R som har M kända och N okända bland övriga förutom Richard, då finns det $r-1$ personer mellan dom. Som ger att $r-1 = M+N$. Så för M och N gäller:

$$M \geq \mathrm{R}(m-1,n) \text{ eller } N \geq R(m,n-1) \tag{3}$$

För att göra satsen mer applicerbar kan man säga att om M är antalet personer R känner och N är antalet personer R inte känner. Det är totalt r personer. Om vi betraktar det som en graf kan man tänka sig att R är ett hörn, där kanterna från R till M hörn har en färg och kanterna från R till N hörn har en annan färg och r är antalet hörn totalt.

Mosägelsebevis för (3):

Anta att $M \ngeq R(m-1,n)$ och att $N \ngeq R(m,n-1)$,

Alltså

$$M \leq R(m-1,n)-1$$

och

$$N \leq R(m,n-1)-1$$

Då är

$$r-1 = M+N \leq R(m-1,n)-1+R(m,n-1)-1 = r-2$$

Alltså

$$r-1 \leq r-2$$

Vilket är en motsägelse.

Alltså är (3) visad.

Låt oss konkretisera (3) genom att säga att $m=3$ och $n=4$.

Då är

$$\mathrm{R}(m-1,n)=4$$

och

$$\mathrm{R}(m,n-1)=6$$

och

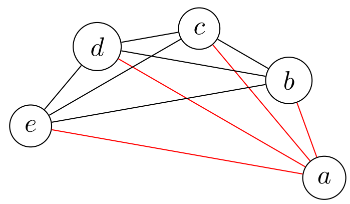
$$r=10$$

Vi har nu visat att $M \geq 4$ eller $N \geq 6$ och den övre gränsen är 10.

Vi ska nu visa (2) för specialfallet $m=3$ och $n=4$:

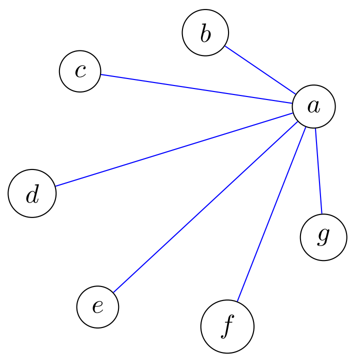
Vi betraktar alltså en godtycklig röd och blå kantfärgläggning av K_{10}. Vi väljer ett hörn a i K_{10}. Låt oss säga att M är antalet röda kanter från a och N är antalet blå kanter från a. Så från hörn a utgår 4 röda eller 6 blå kanter.

I grafen i figur 15 betraktar vi först en färgning av 4 röda kanter. Kanterna är; $\{ab\}$, $\{ac\}$, $\{ad\}$, $\{ae\}$. Om en av de svarta kanterna i figur 15 är röd, får vi en röd 3-klick, om kanterna är blå, blir delgrafen en blå 4-klick. Därmed är det bevisat att i detta fall kommer grafen garanterat ha en röd 3-klick eller är hela svarta delgrafen K_4 blå.



Figur 15

Anta att vi utgår ifrån hörn a och 6 kanter som utgår från hörn a i grafen är blå. På figur 16 har hörn a 6 blå kanter: $\{ab\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{a,e\}$, $\{a,f\}$ och $\{a,g\}$.

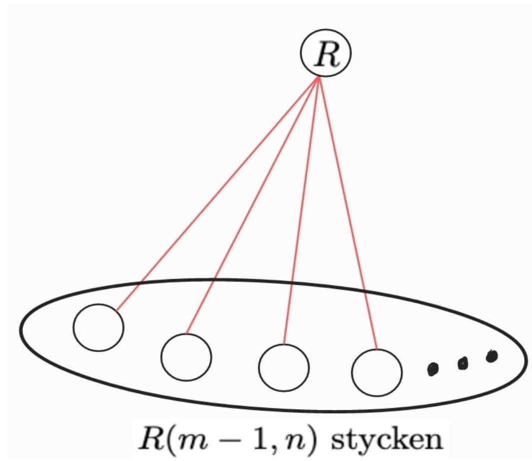


Figur 16

Om vi betraktar en komplett graf av de 6 hörnen $b-g$ i figur 16 så kommer vi enligt beviset för $R(3,3)=6$ att ha en röd K_3 eller en blå K_3 i K_6. Om vi har en röd K_3 är vi klara. Om vi har en blå K_3, bildar den tillsammans med a en blå K_4 så vi är klara. Vi har nu bevisat för en godtycklig röd eller blå kantfärgläggning av K_{10} så finns antingen en röd 3-klick eller en blå 4-klick. Vi har därför nu bevisat att

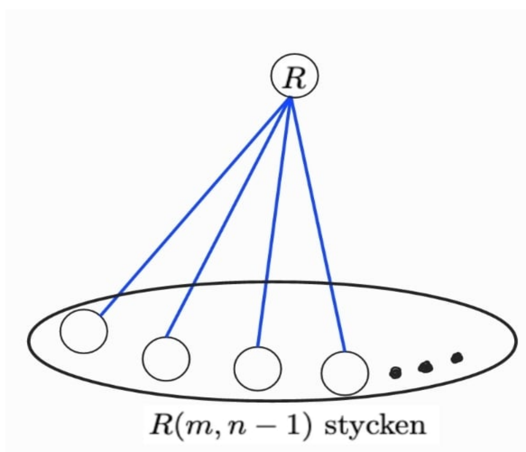
$$\mathrm{R}(3,4) \leq 10.$$

Allmänna fallet visas på liknande sätt som specialfallet. Vi betraktar en godtycklig blå och röd kantfärgning av K_r. Vi tillämpar (3) och får två fall och väljer ett hörn R:



Figur 17: En delgraf med $R(m-1, n)$ hörn med endast röda kanter till R.

Antingen finns en röd $(m-1)$-klick i den svarta cirkeln och tillsammans med R bildar dom en röd m-klick annars finns en blå n-klick.



Figur 18: En delgraf med $R(m, n-1)$ hörn med endast blå kanter till R.

Vi använder samma typ av resonemang för figur (18) som för figur (17). Antingen finns en blå $(n-1)$-klick i den svarta cirkeln och tillsammans med R bildar en blå n-klick, annars finns en röd m-klick.

Därmed bevisat att (2).

5.5.3 Beviset för $\mathrm{R}(3,4) = 9$

För att bevisa att just $\mathrm{R}(3,4) = 9$, använder jag ett motsägelsebevis.

Anta att $\mathrm{R}(3,4) > 9$. Det betyder att det finns någon färgning av K_9 där det inte finns en röd K_3 eller en blå K_4. Vi vet att varje hörn måste ha 3 röda kanter och 5 blå kanter, eftersom resterande kombinationer av kanter redan garanterar en röd 3-klick eller en blå 4-klick. Detta eftersom vi redan har bevisat att 6 blå eller 4 röda kanter inte går i 5.5.2.

Men varje kant har två hörn och när man räknar antalet kanter varje hörn har, räknas alla kanter två gånger. Alltså vet vi att $5 * 9 = 45$ och $3 * 9 = 27$, vilket är udda och skulle då betyda att vi skulle ha $22\frac{1}{2}$ blå kanter. Antagandet var alltså falskt. Alltså vet att det finns åtminstone en blå K_4 eller en röd K_3 i varje färgning av K_9. Dvs $\mathrm{R}(3,4) \leq 9$. Eftersom vi vet att $\mathrm{R}(3,4) > 8$ har vi därför bevisat att:

$$\mathrm{R}(3,4) = 9.$$

5.6 Bevis för den rekursiva identiteten för binomialkoefficienter (Pascals identitet):

Vill bevisa likheten:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \tag{4}$$

Jag skriver om vänsterledet genom att bryta ut binomialtalen till två bråktal:

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!((n-1)-k)!}$$

Jag förenklar bråken genom att förkorta fakulteterna:

$$= \frac{(n-1)...((n-1)-(k-1)+1)}{(k-1)!} + \frac{(n-1)...((n-1)-k+1)}{k!}$$

$$= \frac{(n-1)...(n-k+1)}{(k-1)!} + \frac{(n-1)...(n-k+1)(n-k)}{k!}$$

I täljaren till höger finns faktorn $(n-k)$ och på grund av att det är en fakultet så är talet innan $(n-k+1)$. Detta medför att båda täljarna innehåller $(n-k+1)$ så man gör omskrivningen:

$$= (n-1)(n-2)...(n-k+1)\left(\frac{1}{(k-1)!} + \frac{n-k}{k!}\right)$$

Vi kan förlänga med ett k i första bråket, eftersom det på grund av fakultet får bråken en gemensam nämnare.

$$= (n-1)(n-2)...(n-k+1) \cdot \frac{(k+n-k)}{k!}$$

Nu kan vi se att detta blir den likhet som vi skulle bevisa:

$$= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

Detta blir högerledet i (4).

5.7 Beviset för en övre begränsning

Ska visa sambandet mellan den övre begränsningen (2) och pascals identitet (4). Då $m \geq 1$ och $n \geq 1$

Vi ska bevisa den övre begränsingen i olikhet (5) med induktion.

$$R(m,n) \leq \binom{m+n-2}{m-1} \tag{5}$$

Vi börjar med när $m = 1$ eller $n = 1$.

Vi väljer att visa för när $n = 1$ och skrivs $R(m, 1)$.

vi vet att:

$$VL = \mathrm{R}(m,1) = 1$$

och

$$HL = \binom{m+1-2}{m-1} = \binom{m-1}{m-1} = 1 \tag{6}$$

så

$$VL = 1 \leq 1 = HL$$

(5) stämmer för $n = 1$ enligt (6). Eftersom ramseytal är symmetriska så kan vi tillämpa exakt samma argument för $R(1, n)$.

Basfall:

Vi säger att $m + n = 2$. Vad är då m och n? Notera att m och n är positiva heltal så m och n måste båda vara 1. Därmed är beviset klart enligt (6).

Nu gör vi ett induktionsantagande.

Vi antar att påståendet stämmer för $m+n = p$. Vi vill visa att (5) stämmer för alla $n \geq 1$ och $m \geq 1$ när:

$$m + n = p + 1$$

Det finns två fall. Om n eller m är 1, gäller (6). Om $m \geq 2$ och $n \geq 2$ gäller följande:

Då är

$$(m-1) + n = p$$

och

$$m + (n-1) = p.$$

Vi kan åberopa (5) för att $n-1$, n, $m-1$ och m alla är ≥ 1.

Enligt induktionsantagande gäller:

$$R(m-1,n) \leq \binom{m+n-3}{m-2} \tag{7}$$

och

$$R(m,n-1) \leq \binom{m+n-3}{m-1} \tag{8}$$

Vi vet enligt (4), att pascals identitet skrivs:

$$\binom{m+n-3}{m-2} + \binom{m+n-3}{m-1} = \binom{m+n-2}{m-1}$$

och

$$R(m,n) \leq R(m-1,n) + R(m,n-1) \tag{9}$$

(9) stämmer enligt (2).

Vi får nu att:

$$R(m,n) \leq \tag{10}$$

$$R(m-1,n)+R(m,n-1) \leq \binom{m+n-3}{m-2} + \binom{m+n-3}{m-1} = \binom{m+n-2}{m-1} \tag{11}$$

Olikheten (10) fås genom (9) och olikheten (11) med hjälp av (7) och (8).

6 Egna delen i uppsatsen

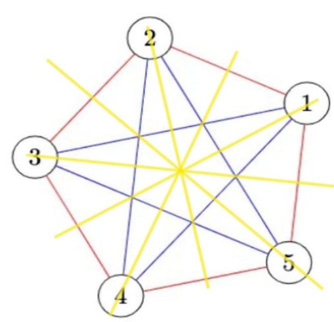
Den egna delen i uppsatsen behandla grafer nära ramseytal och dess symmetri och isomorfi. Vi kommer först ta upp vad symmetri och isomofi är, sedan ta exempel från mindre grafer, i sista delen av uppsatsen har jag även försökt finna symmetri i grafer av större ordning.

6.0.1 Vad betyder symmetri och isomorfi?

Att något är symmetriskt betyder att genom vridning eller spegling av en figur förblir figurens form oförändrad, det här gäller också för en graf. Vi ska i denna del av uppsatsen se hur pass symmeriska graferna är. Detta genom rotation och spegling av kanter och hörn. Symmetri är även isomorfi. Isomorfi kan också betyda att man förändrar utseendet genom att byta plats på hörn så att kanter följer med. I vårt fall ska kanterna även behålla sin färg. De isomorfier vi är intresserade av, är när grafen går till sig själv, som även ibland kallas automorfi, men i denna del av uppsatsen kommer vi endast använda oss av begreppet isomorfi.

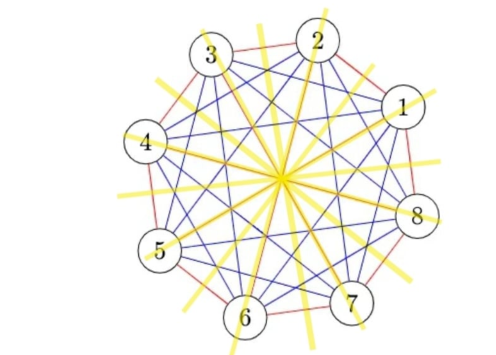
6.0.2 Jämfört med mindre grafer.

Vi har tidigare i uppsatsen tittat på en del grafer. Nu ska vi även analysera symmetrin av några av dessa grafer, vi börjar med grafen på 5 hörn som användes i exemplet för beviset av $R(3,3) > 5$ i figur 8. Den grafen går att rotera på 5 sätt eller spegla på 5 sätt. Detta kan vi illustrera genom att dra axlar genom hörn 5 och mitten av kanten {3,2}, genom hörn 2 mitten av kanten {4,5}. Se grafen i figur 19 för referens. En annan isomorfi får man om man exempelvis byter plats på hörnen från ordning 1,2,3..5, till 1,3,5,2,4, om alla kanter är svarta så håller detta argument. Men i figur 19 är det inte en symmetri, men i en annan bild av grafen kan den visas som en symmetri.



Figur 19: Exempel på komplett graf av 5 hörn

Vi ska även i grafen i figur 20 analysera dess symmetri. Denna graf kommer från beviset $R(3,4) > 8$ från figur 11 och är den största graf som inte kan garantera en blå 4-klick, eller en röd 3-klick.



Figur 20: Exempel på graf av 8 hörn med blå och röda kanter och dess olika symmetrier.

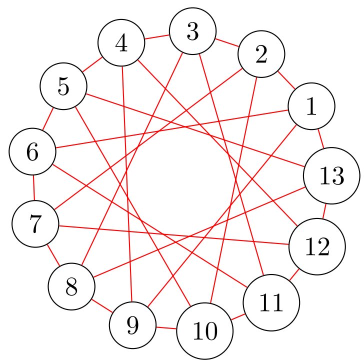
Denna graf har fler symmetrier än den föregående grafen, rättare sagt 16 symmetrier. Detta genom rotation eller spegling av grafen. Exempelvis ser man i grafen från figur 20 att spegling kring dessa axlar eller rotation kring mittpunkten ger just 16 olika symmetrier.

6.0.3 Jämför med större grafer.

Det är svårare att hitta symmetri i större grafer. Detta dels för människan med blotta ögat inte lika lätt kan hitta symmetrier i ramseygrafer, detta kan jag själv intyga efter att ha analysera grafer utan något hjälpmedel för symmetriegenskaper av grafer. Men också för att man inte funnit lika enkla symmetriska grafer som i de mindre graferna.

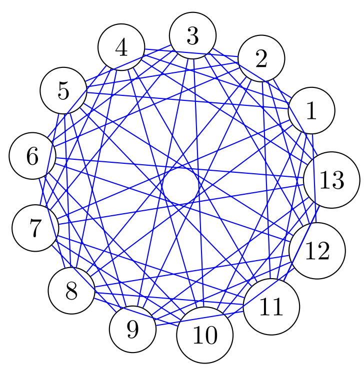
6.1 Grafer nära ramseytalet

Det första ramseytalet som ska undersökas är av storlek $R(3,5) = 14$. Den första graf som därför ska undersökas är av hörnstorlek 13. För att lättare analysera 13-grafen delas den upp i två separata grafer:



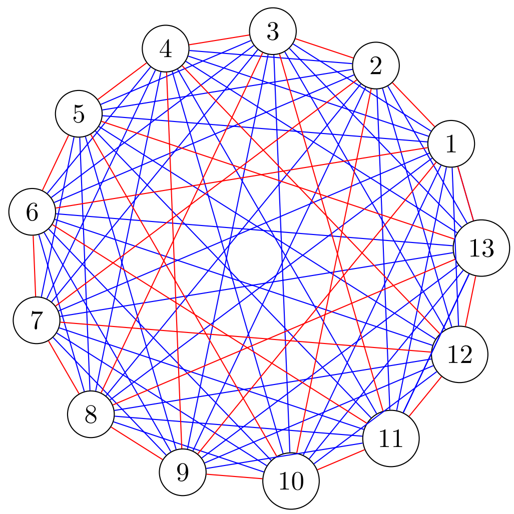
Figur 21: Exempel på graf utan en röd treklick

Eftersom grafen är symmetrisk kan vi se i figur 21 att det inte existerar en röd 3-klick. Exempelvis genom att se att kanterna $(3, 4)$ och $(4, 9)$ är röda, men det finns ingen röd kant mellan 3 och 9, då kan vi därmed utesluta någon röd 3-klick i grafen.



Figur 22: Exempel på graf utan en blå femklick.

I figur 22 kan vi se att det inte existerar någon blå femklick, detta genom att exempelvis ta kanterna $\{1, 3\}$,$\{3, 5\}$,$\{5, 7\}$,$\{7, 10\}$, och $\{10, 1\}$. Man kan se att 5 och 10 inte har någon kant mellan sig och därmed inte bildar en blå K_5 och vi kan utesluta någon övrig blå 5-klick på grund av symmetri och gör andra urval av hörn.



Figur 23: Exempel på graf utan en blå femklick eller en röd treklick.

Figur 23 är den sammansatta grafen av figur 21 och 22 och är det enda fallet när $R(3,5) > 13$. Resterande fall av en graf med 13 hörn kommer garantera en röd 3-klick och en blå 5-klick[16]

Vi kan som i de mindre graferna även se att denna graf är väl symmetrisk med 26 symmetri genom rotationer runt mittpunkten. Denna graf går att vrida på 13 sätt och spegla på 13 sätt och samtidigt behålla symmetri. Ritar inte ut dessa axlar eftersom det hade blivit väldigt plottrigt. Men det utgår från samma strategi som graferna i figur 20 och figur 19. Men det finns fler grafisomorifer. Om vi exempelvis byter ut hörnen i cirkeln från ordning 1,2,3,4...13. till ordning 1,6,11,3...9 (man hoppar fem hörn) förblir den röda grafen oförändrad. Alltså blir också den blå grafen oförändrad och detta är 26 ytterligare isomorifer, som inte är symmetrier i denna bild.

Hittills har graferna varit väl symmetriska. Nu när vi kommer upp i högre antal hörn är graferna inte lika lätta att se dess symmetri.

6.2 Graf av högre ordning

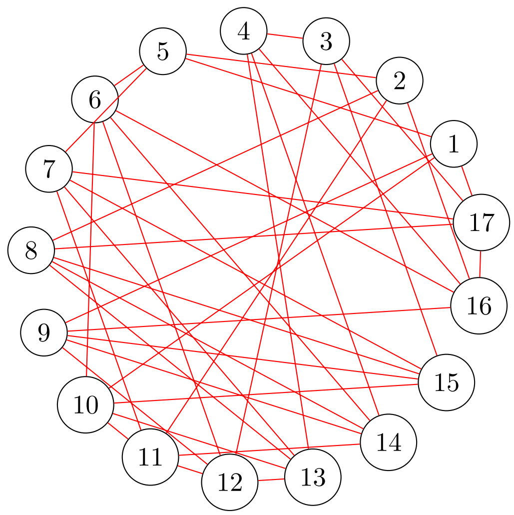
6.2.1 Grafer $(3,6)$ undvikare av ordning 17

Figur 24 är en graf av 17 hörn som inte innehåller en röd 3-klick eller en vit 6-klick bestående av de 40 röda kanterna och de 96 vita kanterna.

För att grafen inte ska bli för svår att analysera valde jag att endast ha de rödfärgade kanterna synliga i grafen, denna graf är en av flera som inte innehåller

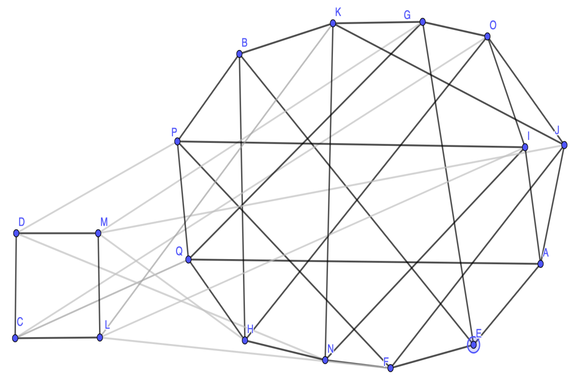
[16]Ronald L. Graham, Bruche L. Rothchild, Joel H. Spencer, Ramsey Theory, 2. uppl. Printed in the United States of America. A Wiley-interscience Publication, 1990, s.90.

en röd 3-klick eller en vit 6-klick bestående av 17 hörn.



Figur 24: En graf av 17 hörn som inte innehåller en röd 3-klick eller en vit 6 klick.

Grafen är osymmetrisk och för att lättare analysera grafen finns i figur 25 en förenklad bild av grafen där 4 av grafens hörn är placerade i en rektangel och resterande hörn i en cirkel. Man ska kunna skapas en mer symmetrisk figur av cirkeln med de resterande 13 hörnen om (som i detta fall) hörnen i den separerade rektangeln består av 2 hörn med 5 kanter och 2 hörn med 4 kanter som i sig är symmetriska. Men symmetrin i den stora cirkeln på 13 hörn har jag svårt att finna.

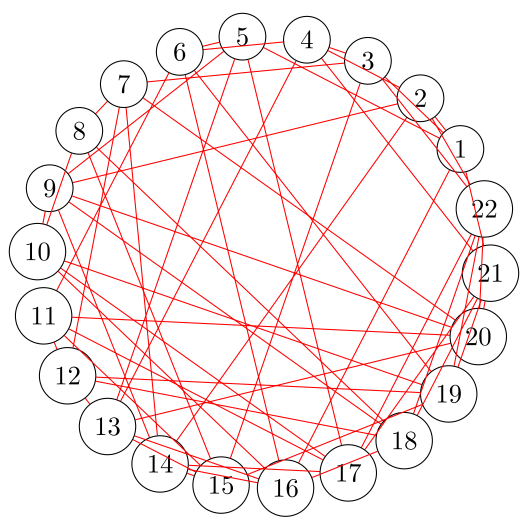


Figur 25: Graf av 17 hörn, som i försök har gjort mer symmetrisk

6.2.2 Graf $(3,7)$-undvikare av ordning 22

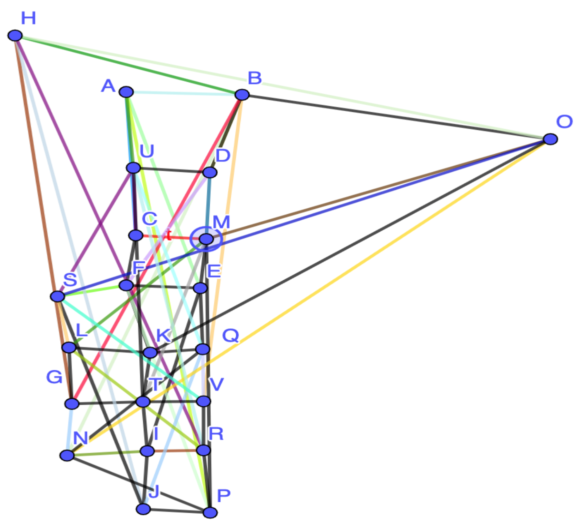
6.2.3 1:a Grafen $(3,7)$-undvikare av ordning 22

När jag analyseratgraferna för $(3,7) > 22$ har jag fått hjälp av ett datorprogram nauty som är programmerat att hittar antalet isomorfier en graf har. Figur 28 föreställer en graf av 22 hörn där kanterna är röda. För att utgöra en komplett graf är resterande kanter vita. Grafen är en av dom som har störst möjliga ordning där varken en röd 3-klick eller vit 7-klick förekommer i en graf.



Figur 26: En graf av 22 hörn, som inte innehåller av en röd 3-klick eller en vit 7-klick.

Det minsta möjliga antalet röda kanter är 60 som undviker $(7, 3)$. Precis som för grafen i figur 25 så har jag gjort om grafen i figur 26 mer symmetrisk, i grafen under, se figur 27.

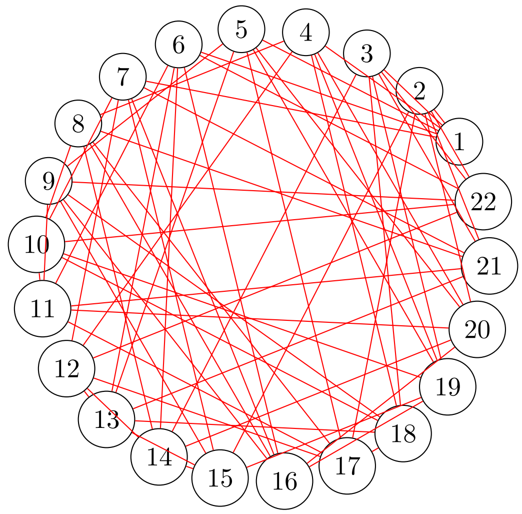


Figur 27: Graf av 22 hörn, som i försök har gjort mer symmetrisk.

Man ska kunna skapa en lång rad med rektanglar av grafen med 22 hörn. Grafen i figur 27 visar hur långt jag har kommit, men det finns förmodligen en möjlighet att göra grafen ännu mer symmetrisk.

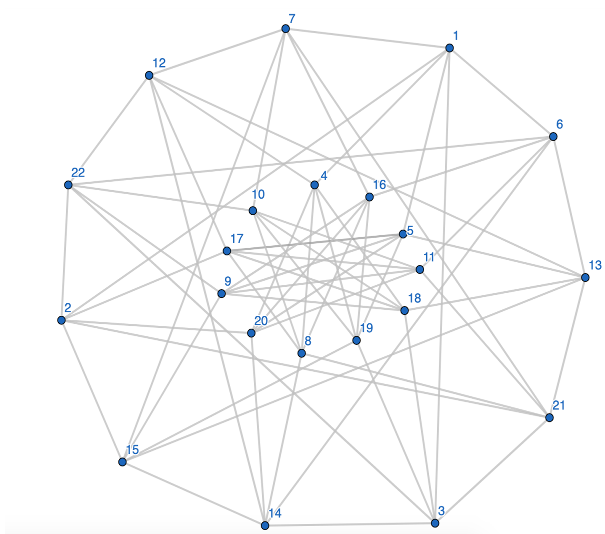
6.2.4 2:a grafen $(3, 7)$-undvikare av ordning 22

I denna graf ska det enligt programmet Nauty finnas ännu fler symmetrier närmare bestämt 22 symmetrier.



Figur 28: En graf av 22 hörn, som inte innehåller av en röd 3-klick eller en vit 7-klick.

Grafen består av totalt 231 kanter, 66 kanter är röda och resterande 165 kanter är vita. Grafen består av en ytter och en inner cirkel. Varav bägge cirklar vardera består av 11 hörn. I grafen i figur 29 har jag utifrån bästa förmåga försökt göra grafen mer symmetrisk.



Figur 29: Graf av 22 hörn, som försökt göras mer symmetrisk.