



# SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

## Moessners Sats

av

**Linus Santesson Råsten**

2023 - No L8



# Moessners Sats

Linus Santesson Råsten

---

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Håkan Granath

2023



## **Sammanfattning**

I denna uppsats kommer vi arbeta med den så kallade Moessners sats, som från början sattes på papper år 1951 av en tysk matematiker vid namn Alfred Moessner. Satsen hantarer en kombinatorisk egenskap bland de naturliga talen som resulterar i en sekvens av jämna potenser. Sedan dess har flertalet matematiker arbetat för att utveckla och hitta ytterligare egenskaper av processen som Moessner skapade. I uppsatsen kommer vi att utforska Moessners sats och först delvis bevisa den via induktion för att sedan lyfta fram och fylla ut ett fullständigt grafteoretiskt bevis.

## **Abstract**

In this essay, we will cover what is known as Moessner's Theorem, which was written in 1951 by the German mathematician Alfred Moessner. The theorem is based in, and builds upon, a characteristic of the natural numbers where adding them together in a certain way will always result in even squares. Since the finding of Moessner's Theorem, various other mathematicians have studied and added to the process therein and found additional properties of it. In the following text, we will explore the theorem and move on to first partially proving it through an inductive proof. Following this we will also look closer at, and flesh out, a complete proof using graph theory.



# 1 Introduktion

Inom matematiken kan man finna många intressanta upptäckter som gjorts genom tiden. Ofta finns det samband och egenskaper hos matematiska satser som sträcker sig långt bortom vad dess upptäckare kanske väntat sig. Just ett sådant otroligt intressant samband kommer vi arbeta med i den här uppsatsen. Moessners sats bygger på en egenskap hos kvadrater som känts till i mer än 500 år, och vad han och andra matematiker efter honom upptäckte samlar vi här. Syftet med arbetet är att på ett grundligt och pedagogiskt sätt stegvis bevisa satsen som Moessner gav sitt namn till.

Först kommer vi att introducera satsen och dess bakgrund. Sedan använder vi induktionsprincipen för att bevisa ett specifikt fall, då ett allomfattande sådant bevis skulle vara för mycket för den här uppsatsen. Just eftersom induktion är så effektiv när man arbetar med naturliga tal är detta ett bra första steg i ett bevis.

För att sedan faktiskt bevisa Moessners sats i sin helhet vänder vi oss till ett bevis skrivet av matematikern Karel Post, som använde grundläggande grafteori för att simplificera beviset. Då dennes artikel dock håller sig kort, med knappt 6 sidor av text, går vi in i mer detalj för att fylla ut och förtydliga. Vi kommer här modellera riktade grafer efter triangelformationerna som skapas av Moessners sats och sedan använda dessa för att algebraiskt bevisa den.

Slutligen tar vi upp några väldigt intressanta egenskaper hos satsen som upptäckts sedan Moessner först skrev om den. Detta för att belysa att det finns mer att finna än bara vad som hanteras i den här uppsatsen.

# 2 Moessners sats

En väldigt intressant observation inom matematiken gällande kvadrater är hur de är relaterade till udda tal. Något som känts till länge är att om man adderar de första  $n$  udda heltalen får man  $n^2$ , eller mer formellt

$$\sum_{a=1}^n (2a - 1) = n^2.$$

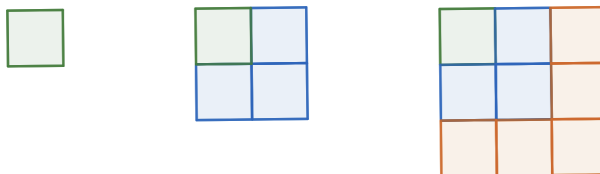
Ett sätt att presentera detta visuellt är om man tar de två första kvadraterna  $k_1$  och  $k_2$  med sidlängd 1 respektive 2. Om man använder  $k_1$  som byggstenar skulle det behövas fyra stycken  $k_1$  för att forma  $k_2$ . Men om man redan har en  $k_1$  och vill bygga ut denna för att bilda  $k_2$ ; hur många  $k_1$  behöver man då? Ser vi till formeln ovan får vi att då  $n = 2$  blir uträkningen

$$\sum_{a=1}^2 (2a - 1) = (2 - 1) + (4 - 1) = 1 + 3.$$

Med andra ord behöver man tillföra tre stycken  $k_1$  för att skapa  $k_2$ .

Det vi kommer presentera i det här avsnittet och satsen vi sedan arbetar med i uppsatsen är i stor utsträckning baserad just relationen mellan, till exempel, två på varandra följande kvadrater. Hittills har vi beskrivit hur man kan bilda en större kvadrat genom att lägga till byggstenari formen av små enhetskvadrater. I det här fallet måste dessa alltid forma en vinkel (eller L-form) och kallas på engelska en gnomon och kommer från forna grekiskan. Inom matematiken signifierar en gnomon en figur som kan läggas till eller tas bort från ett parallelogram för att skapa ett likformigt men

större eller mindre parallelogram. Gnomoner är inte begränsade till denna L-formen, utan kan ta många andra utseenden. I vårt fall behöver endast den L-formade gnomonen observeras, då varje nästföljande kvadrat i storleksordning kan skapas med hjälp av just den. Observera progressionen av kvadrater med sidlängd 1 till 3 där några olika saker kan noteras.



Först kan vi notera att oavsett hur vi placerar kvadraterna runt den föregående måste de slutligen ta formen av L-gnomonen. Dessutom kan man se att det vi förklarat om summan av udda tal, åtminstone initialt, gäller. Mer konkret kan detta skrivas som, om man till en kvadrat med en sidlängd av  $n$  tillför en gnomon bestående av  $2n + 1$  kvadrater med sidlängd 1 formar dessa en kvadrat med sidlängd  $n + 1$ .

Ett annat sätt att uttrycka att man adderar alla udda tal är att man skriver upp en serie med alla positiva heltal och sedan stryker vartannat (alla jämna) tal. Därefter upprättar man en ny serie bestående av partialsummorna  $A_n$  av serien vi strök vartannat tal ur, så

$$A_1 = 1, \quad A_2 = 1 + 3, \quad A_3 = 1 + 3 + 5, \quad \dots$$

Hädanefter skriver vi ut processen genom att först etablera serien av heltal, samt stryka över eller på annat sätt markera talen som tas bort och därefter skriva den nya serien under den första enligt

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & \cancel{2} & 3 & \cancel{4} & 5 & \cancel{6} & 7 & \cancel{8} & \dots \\ 1 & & 4 & & 9 & & 16 & & \dots \end{array} \quad (2.1)$$

Detta utgör grunden för Moessners sats, som vi kommer arbeta med i denna text. Matematikern Alfred Moessner fann alltså att man kunde bygga på detta för att skapa serier av heltalspotenser med exponenter större än 2. Vad han uppmärksammade var att om man generaliserar processen för kvadrater, som vi just gått igenom, så att den innehåller fler steg kan man få en slutgiltig serie med jämna kuber istället för kvadrater. Vad man då gör är att istället för vartannat tal, så stryker man vart tredje tal ur den initiala talföljden. När man därefter skapar talföljden  $A_n$ ,

$$A_1 = 1 \quad A_2 = 1 + 2 \quad A_3 = 1 + 2 + 4 \quad \dots,$$

får man inte några jämna kuber, vilket är vad vi söker att få fram. Om man räknar detta manuellt och formatterar det som vi gjorde i (2.1) får man

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & \cancel{3} & 4 & 5 & \cancel{6} & 7 & 8 & \cancel{9} & \dots \\ 1 & 3 & & 7 & 12 & & 19 & 27 & & \dots \end{array}$$

Så vad Moessner gjorde var att upprepa det föregående steget med skillnaden att man nu stryker vartannat tal ur den aktuella talföljden innan man räknar partialsummorna för att få

$$B_1 = A_1 \quad B_2 = A_1 + A_3 \quad B_3 = A_1 + A_3 + A_5 \quad \dots$$



som faktiskt resulterar i att alla  $B$  är jämna kuber med formen  $B_n = n^3$ . Om man sedan återigen formatterar detta som (2.1) resulterar det i vad som ser ut som block av tal i formen av trianglar, vad vi hädanefter kallar triangelblock, som vi kan se här:

1	2	<del>3</del>	4	5	<del>6</del>	7	8	<del>9</del>	10	11	<del>12</del>	13	14	<del>15</del>	16	17	<del>18</del>
1	<del>3</del>		7	<del>12</del>		19	<del>27</del>		37	<del>48</del>		61	<del>75</del>		91	<del>108</del>	...
1			8			27			64			125			216		

Man kan nu se att den nedersta raden faktiskt består av jämna kuber. Likt hur vi såg att den första uträkningen, som resulterar i en serie av kvadrater, kan betraktas geometriskt med hjälp av gnomoner kan även Moessners version som ger kuber göra det, men det återkommer vi till i ett senare avsnitt. Utöver detta fann Moessner att samma princip gäller när man stryker var fjärde, femte osv tal. Ett sista exempel vi kan visa här är:

1	2	3	<del>4</del>	5	6	7	<del>8</del>	9	10	11	<del>12</del>
1	3	<del>6</del>		11	17	<del>24</del>		33	43	<del>54</del>	...
1	<del>4</del>			15	<del>32</del>			65	<del>108</del>		
1				16				81			

Sammanfattningsvis kan vi alltså formulera satsen som Moessner beskrev i sin artikel [5] som

**Sats 2.2.** *Låt  $k$  vara ett heltal större än eller lika med 2. Låt  $A_1$  vara talföljden  $1, 2, 3, \dots$  av positiva heltal. Bilda sedan en ny talföljd  $B_1$  genom att ta bort vart  $k$ :te element från  $A_1$ , dvs stryk elementen  $k, 2k, 3k, \dots$ . Bilda sedan en ny talföljd  $A_2$  bestående av partialsummorna av elementen i  $B_1$ .*

*Gör nu motsvarande procedur med utgång från  $A_2$  men stryk vart  $(k-1)$ :e element för att bilda  $B_2$  och  $A_3$ .*

*Upprepa denna proceduren tills du får talföljden  $A_k$ . Då kommer  $A_k$  vara talföljden  $1^k, 2^k, 3^k, \dots$ .*

### 3 Induktionsbevis

Efter introduktionen av satsen kommer resten av den här uppsatsen fokusera på att bevisa den. Till att börja med tittar vi närmare på fallet av Moessners sats där man stryker stryker var tredje tal. Resultatet av detta fallet är triangelblock som mynnar ut i jämna kuber

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & T_1 & & T_2 & & T_3 & & \\
 1 & 2 & \cancel{3} & 4 & 5 & \cancel{6} & 7 & 8 & \cancel{9} & \dots \\
 1 & \cancel{2} & & 7 & \cancel{8} & & 19 & \cancel{20} & & \\
 1 & & & 8 & & & 27 & & & 
 \end{array} \tag{3.1}$$

Vi betecknar varje block som  $T_i$  där  $i$  är dess position i serien.

I detta avsnittet ska vi formulera ett induktionsbevis för detta fallet genom att bevisa en allmän struktur för ett godtyckligt triangelblock  $T_n$ .

Varje triangels översta rad består, som vi etablerade i Sats 2.2 och som framgår i (3.1), av tre positiva heltal. Med andra ord, eftersom den översta raden i  $T_1$  består av  $\{1, 2, 3\}$ , måste den översta raden i  $T_n$  bestå av talen  $\{3n - 2, 3n - 1, 3n\}$ . De tre resterande talen kallar vi  $a_n$ ,  $b_n$  och  $c_n$ , vilket betyder att  $T_n$  är uppbyggt av elementen

$$\begin{array}{ccc}
 3n - 2 & 3n - 1 & 3n \\
 a_n & b_n & . \\
 c_n & & 
 \end{array} \tag{3.2}$$

Våra tre okända tal är inte lika enkla att identifiera som den naturliga talföljden i den översta raden. Enligt Sats 2.2 är vad vi här kallar  $a_n$  en partialsumma av talföljden  $B_1$  där man tagit bort alla tal som är delbara med tre.

$$\begin{array}{cccccc}
 & & T_{n-1} & & T_n & \\
 3n - 5 & 3n - 4 & 3n - 3 & 3n - 2 & 3n - 1 & 3n \\
 a_{n-1} & b_{n-1} & & a_n & b_n & \\
 c_{n-1} & & & c_n & & 
 \end{array}$$

Betraktar man serien av trianglar kan man se att  $a_n$  är lika med summan av talet  $b_{n-1}$ , vilket är positionerat direkt till vänster, och talet direkt ovanför sig. Detta kommer sig av att  $a_n$  och  $b_{n-1}$  båda är efter varandra följande partialsummor av  $B_1$ , dvs  $a_n = b_{n-1} + 3n - 2$ . De två kvarvarande okända talen,  $b_n$  och  $c_n$ , följer samma princip. Allt sammantaget ser vi att för alla  $n \geq 2$  gäller

$$\begin{cases} a_n = b_{n-1} + 3n - 2 \\ b_n = a_n + 3n - 1 \\ c_n = c_{n-1} + a_n \end{cases} \tag{3.3}$$

Som ett alternativ till denna rekursiva formel som baseras i Moessners process introducerar vi en explicit formel för  $a_n$ ,  $b_n$  och  $c_n$  med följande resultat.

**Sats 3.4.** *Ett godtyckligt triangelblock  $T_n$  som ges av Moessners sats där  $k = 3$  tar, för alla  $n \geq 1$ , formen*

$$\begin{array}{ccc}
 3n - 2 & 3n - 1 & 3n \\
 3n^2 - 3n + 1 & 3n^2 & \\
 n^3 & . & 
 \end{array} \tag{3.5}$$

*Bevis.* Enligt påståendet i satsen ska

$$\begin{cases} a_n = 3n^2 - 3n + 1 \\ b_n = 3n^2 \\ c_n = n^3 \end{cases} \quad (3.6)$$

för alla  $n \geq 1$ . För att bevisa detta induktivt börjar vi med att se till (3.1), vilken visar att det första triangelblocket i Moessners sats,  $T_1$ , ser ut som följande:

$$\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 3 \\ & & 1 \end{array} .$$

Talen som vi finner i triangelblocket stämmer med (3.6) i fallet  $n = 1$ . Därmed har vi visat induktionsbevisets basfall.

Vi antar nu att (3.6) gäller för något tal  $n = k$  där  $k \geq 1$ . Med hjälp av (3.3) får vi då att

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= b_k + 3k + 1 \\ &= 3k^2 + 3k + 1 \\ &= 3(k+1)^2 - 3(k+1) + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= a_{k+1} + 3k + 2 \\ &= 3k^2 + 6k + 3 \\ &= 3(k+1)^2 \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= c_k + a_{k+1} \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= (k+1)^3. \end{aligned}$$

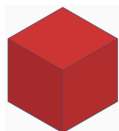
I och med detta gäller alltså (3.6) även för  $n = k + 1$ .

I och med detta har vi via induktionsprincipen visat att (3.6) gäller för alla  $n \geq 1$ .

□

## 4 Geometriskt bevis

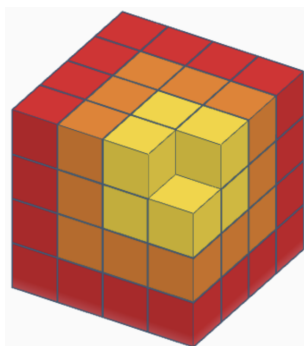
I avsnitt 2 visade vi kortfattat hur additionen av udda tal gav jämna kvadrater genom den geometriska figuren gnomon. Som nämdes i samband den förklaringen kan man även applicera det geometriska beviset på Moessners sats för kuber. Vi vet från föregående avsnitt att Moessners sats med ett  $k$ -värde av 3 resulterar i en följd av jämna kuber och att satsens process genererar en serie triangelblock. Så vad kan vi säga om kuber och sambandet mellan en kub och nästpåföljande? Till att börja med tar vi det simplaste möjliga exemplet, en kub med en sidlängd av 1, vilket även är den bästa utgångspunkten för beviset i detta avsnittet då den har en volym av 1.



Figur 1: Enhetskub med en volym av 1

I fortsättningen använder vi termen  $K_n$  för att referera till kuber med sidlängd  $n$  och vars volym då är  $n^3$ . Med andra ord är volymen ett mått för hur många  $K_1$  som skulle behövas för att bygga en kub av motsvarande storlek. För att reflektera detta inför vi begreppen enhetskub, en kub med sidlängd 1, och  $k_n$ , antalet enhetskuber som  $K_n$  består av. Följande detta skulle då kuben  $K_2$  bestå av  $k_2 = 8$  enhetskuber.

Hur många enhetskuber behöver alltså tillföras till  $K_2$  för att bygga  $K_3$ ? Vi kan likna det med hur vi gjorde med kvadraterna i avsnitt 2, men vi måste såklart lägga till en dimension nu när vi arbetar med kuber. En gnomon, som vi beskrev i avsnitt 2, refererar inte bara till en tvådimensionell figur, då det finns en motsvarighet i tredimensionell geometri. Gemensamt för båda sorterna av gnomoner är att om de läggs till en existerande figur bildas en större likformad figur. I vårt aktuella fall formar gnomonen vad man kan se som ett hölje som täcker tre av den existerande kubens sidor.

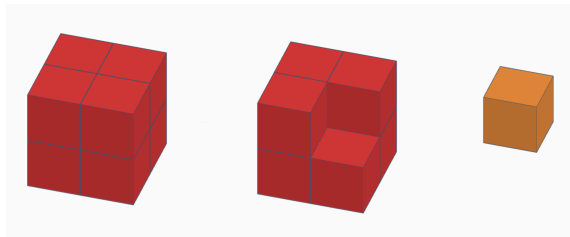


Figur 2: Tre gnomoner lagda i varandra

För att förklara steg för steg hur gnomonen vi arbetar med formas och ser ut börjar vi med en godtycklig kub. På denna väljer man tre till varandra angränsande sidor. Gnomonen består av tre

plan som är parallella och av samma sidlängd som de tre valda sidorna och därmed ortogonala gentemot varandra. Dessa tre plan sammanfogas längs varje delad kant samt i hörnet där de möts.

Frågan är nu om dessa gnomoner finns representerade i Moessners triangelblock. Låt oss första anta att det existerar en gnomon  $G_n$  sådan att  $K_n = K_{n-1} \cup G_n$  för alla  $n \geq 1$ . Likt hur vi gjorde med kuberna inför vi termen  $g_n$  för att beteckna antalet enhetskuber en gnomon  $G_n$  består av.



Figur 3: Exempel av  $K_n$ ,  $G_n$  och  $K_{n-1}$  där  $n = 2$

Till att börja med undersöker vi hur kuber och gnomoner hänger samman. Med definitionen av  $G_n$  kan vi nu istället se  $K_n$  som en sammansättning av gnomon och kub, där gnomonen täcker en mindre kub på tre sidor som ett hölje. Av detta följer att  $K_n$  består av

$$k_n = k_{n-1} + g_n \tag{4.1}$$

enhetskuber.

Vad är då  $g_n$  för de första jämna kuberna? Vi har att  $1^3 = 1$ ,  $2^3 = 8$  och  $3^3 = 27$ , vilket betyder att gnomonerna för dessa är:

$$\begin{aligned} g_2 &= 8 - 1 = 7 \\ g_3 &= 27 - 8 = 19 \end{aligned}$$

Sist kvarstår frågan om  $g_1$ , vilken måste uppfylla  $k_1 = k_0 + g_1$ , dvs  $g_1 = 1$ .

Målet med detta kapitlet är att visa att  $g_n$  inte bara kan återfinnas i Moessners sats, utan att satsen kan bevisas med hjälp av gnomoner. Vi betecknar de okända elementen i ett godtyckligt triangelblock på samma sätt som i (3.2) och får den nu välkända

$$\begin{array}{ccccc} & & T_n & & \\ 3n-2 & 3n-1 & 3n & & \\ a_n & & b_n & & \\ c_n & & & & \end{array}$$

för alla  $n \geq 1$ .

Nu, eftersom vi tagit reda på de tre första gnomonerna kan vi undersöka Moessners triangelblock och se om det finns några element inom dem som uppfyller funktionen av en gnomon. Om vi kan hitta tal som motsvarar  $g_1, g_2$  och  $g_3$  på samma position i de tre första trianglarna kan vi börja formulera en hypotes angående relationen mellan gnomoner och Moessners sats.

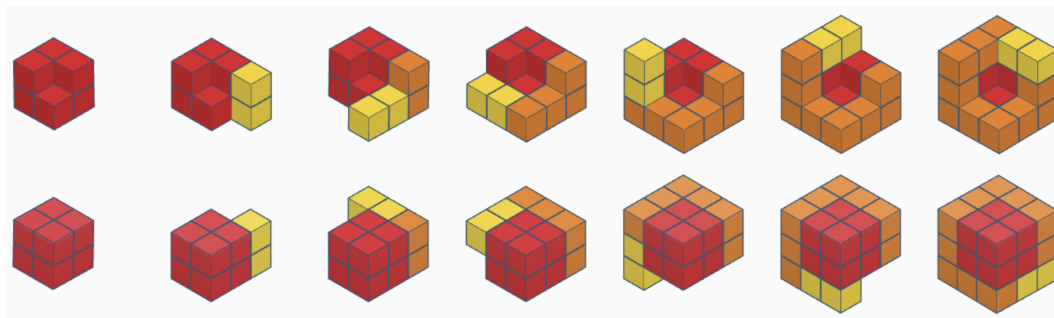
$$\begin{array}{cccccccccccc} & & T_1 & & T_2 & & T_3 & & & & T_n & & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & & 3n-2 & 3n-1 & 3n \\ \frac{1}{2} & 3 & & \frac{7}{2} & 12 & & \frac{19}{2} & 27 & & \dots & \frac{a_n}{2} & & b_n \\ 1 & & & 8 & & & 27 & & & & c_n & & \end{array}$$

I samma position av de tre första trianglarna finner vi tal som överensstämmer med  $g_1$ ,  $g_2$  och  $g_3$ . Dessa är understrukna för att lättare kunna identifiera dem. Det verkar alltså som att det kan finnas en koppling mellan  $g_n$  och  $a_n$ . Vi kan alltså formulera en hypotes där

$$a_n = g_n \tag{4.2}$$

för alla  $n \geq 1$ . Denna kommer vi nu vända oss till att bevisa, och vårt första steg blir att etablera huruvida det finns en rekursiv formel som definierar  $g_n$ .

Till att börja med vet vi att skillnaden mellan  $g_1$  och  $g_2$  är 6 enhetskuber, samt att skillnaden mellan  $g_2$  och  $g_3$  är 12 enhetskuber. Låt oss illustrera processen att addera enhetskuber till en gnomon stegvis.



Figur 4: Påbyggnad av  $g_2$  för att skapa  $g_3$

Sett från två sidor lägger vi här alltså till 2 stycken enhetskuber 6 gånger till  $G_2$  för att skapa  $G_3$ . Att vi valde att lägga till just 2 kuber åt gången är på grund av att vi började med  $G_2$ , som alltså har sidlängd 2. Hade vi istället börjat med  $G_3$  skulle vi ha lagt till 3 enhetskuber 6 gånger med samma resultat, vilket enkelt kan kontrolleras. Då detta naturligt måste vara sant för alla  $n \geq 1$  får vi att

$$g_n = g_{n-1} + 6(n - 1) \tag{4.3}$$

då  $n \geq 1$ .

Nu när vi har definierat basfallet  $g_1$  och en rekursiv formel för  $g_n$  kan vi gå vidare med att undersöka den andra halvan av vår hypotes (4.2). Nästa steg är då att undersöka  $a_1$  och en eventuell rekursiv formel för  $a_n$ . Enligt dess definition i Sats 2.2 är  $a_n$ , tillsammans med alla tal i talföljden  $A_2$ , summan av all icke-strukna tal i  $A_1$  upp till och med  $3n - 2$ . Jämför vi detta med  $a_{n-1}$  får vi att

$$a_n - a_{n-1} = 3n - 4 + 3n - 2 = 6(n - 1).$$

Detta blir tydligare om man tittar på  $T_{n-1}$  och  $T_n$  bredvid varandra

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & T_{n-1} & & T_n & & \\
 3n - 5 & 3n - 4 & \cancel{3n - 3} & 3n - 2 & 3n - 1 & \cancel{3n} & \\
 a_{n-1} & \cancel{b_{n-1}} & & a_n & \cancel{b_n} & & \\
 c_{n-1} & & & c_n & & & 
 \end{array}$$

Nu vet vi alltså den rekursiva formel som  $a_n$  följer och med hjälp av (3.1) får vi att

$$\begin{cases} g_1 = 1 \\ g_n = g_{n-1} + 6n - 6 \end{cases}$$

och

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = a_{n-1} + 6n - 6. \end{cases}$$

Alltså kan vi konstatera att då  $a_1 = g_1$  och de uppfyller samma rekursiva formel måste

$$a_n = g_n \tag{4.4}$$

för alla  $n \geq 1$ , vilket bevisar vår hypotes.

Då målet med denna sektionen är att bevisa att Moessners sats resulterar i kuber via geometriska figurer kvarstår nu att visa att kuben  $k_n$  har en motsvarighet i Moessners triangelblock. För att göra det tar vi en ny titt på  $k_n$ :s egenskaper. Vi vet att  $k_n$  är antalet enhetskuber som behövs för att forma  $K_n$ , eller med andra ord volymen av  $K_n$ . Av detta får vi att  $k_1 = 1$ . Slutligen har vi definitionen (4.1) av  $k_n$  som ger den rekursiva formel  $k_n$  uppfyller. Allt sammantaget får vi att, för alla  $n \geq 1$ , gäller

$$\begin{cases} k_1 = 1 \\ k_n = k_{n-1} + g_n. \end{cases} \tag{4.5}$$

När vi nu har etablerat fallet för  $k_n$  vänder vi oss till att hitta en motsvarighet i Moessners sats. I praktiken har vi endast en sannolik kandidat, nämligen  $c_n$ . Eftersom talföljden  $A_3$  enligt Sats 2.2 ska bestå av jämna kuber, och baserat på hur man formaterar (2.1) serien av triangelblock, bör elementet på den nedersta raden i  $T_n$  vara vad vi söker. Därför undersöker vi i första hand just  $c_n$  för att se om det matchar vårt  $k_n$ .

Först tar vi basfallet  $c_1$ , vilket vi identifierat i (3.1) som 1. Därefter kan vi med hjälp av (3.3) få en rekursiv formel för  $c_n$ , vilket ger

$$\begin{cases} c_1 = 1 \\ c_n = c_{n-1} + a_n. \end{cases} \tag{4.6}$$

Givet (4.4) och (4.5) gäller alltså att  $c_n = k_n$  för alla  $n \geq 1$ . Utifrån detta följer att vår geometriska tolkning av kuber och gnomoner,  $k_n = k_{n-1} + g_n$ , finner representation i Moessners sats genom

$$\begin{cases} g_n = a_n \\ k_n = c_n, \end{cases}$$

för alla  $n \geq 1$ .

Alltså har inte bara kuber och gnomoner motsvarigheter i Moessners sats, utan även elementen för att bygga ut gnomonen finns representerade. Vi har visat att Moessners sats, i det grundläggande fallet av  $k = 3$ , kan visas geometriskt med hjälp av gnomoner. Efter att vi definierade gnomonernas form och rekursiva formel fann vi att denna överensstämmer med elementet  $a_n$  i Moessners sats. Alltså är det inte bara delar av satsen som kan visas geometriskt, utan varje element i Moessners process har en motsvarighet i kombinationen av kub och gnomon.

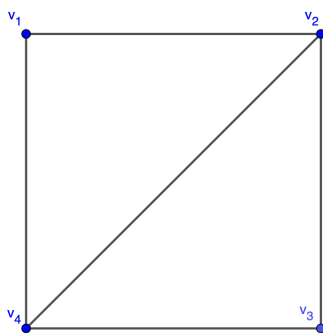
## 5 Moessners sats och riktade grafer

Karel Post, följd av andra [2], har närmat sig ett bevis av Moessners sats från en annan vinkel. Vad Post gjorde var att applicera grafteori på Moessners serie av triangelblock, samt att så smått vidareutveckla själva satsen. Innan vi tar oss an Posts bevis och försöker bevisa hans teori behöver vi kortfattat förklara två viktiga termer som kommer användas flitigt.

### 5.1 Grafteori

Grafteori som studieämne började i stort sett som logiska tankenötter för matematiker att arbeta med, och ett av de mest kända grundläggande texterna skrevs av Leonhard Euler [6]. Historien bakom uppsatsen är känd och berättas vanligtvis alltid som en introduktion till grafteorin. Kortfattat ville Euler se om man, på en kontinuerlig promenad, kunde passera sju broar i staden Königsberg som förbinder 4 områden utan att använda samma bro två gånger. Detta, fastställde Euler, är omöjligt, och hans insikter lade grunden för framtida arbeten med grafer och hur de visualiseras.

I grafteori hanterar man, som namnet indikerar, grafer. Dessa grafer skiljer sig från den sort som används för att representera en funktion i ett koordinatsystem. Istället består en grafteoretisk graf av noder och kanter som sammanbinder dem. Dessa två beståndsdelar är mängder sådana att  $G = (V, E)$  där  $V$  är en mängd av noder och  $E$  en mängd kanter som leder mellan dem. Startpunkten för att studera grafteori är just uppbyggnaden av grafer och de vägar som man kan dra inom dem. Självfallet finns det fler applikationer av grafteori som inte kan summeras i några få meningar, men de flesta av dessa behöver vi inte gå in närmare på här.



Figur 5: Exempelgraf med fyra noder.

Att förflytta sig från nod till nod längs kanter på en graf kallas att vandra från en nod till en annan. Detta kan göras fritt, utan kriterier, varpå det kallas en vandring, och man får besöka samma nod och följa samma kant flera gånger. Man kan se en vandring som en följd bestående av noderna som vandringen har passerat i ordning från start till slut. Ett exempel på detta är

$$v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_2 - v_1.$$

Om en vandring istället uppfyller kriteriet att kanter endast passeras en gång kallas det för en väg, men här bör noteras att samma nod fortfarande får besökas flera gånger, som t.ex.

$$v_1 - v_2 - v_3 - v_4 - v_2.$$



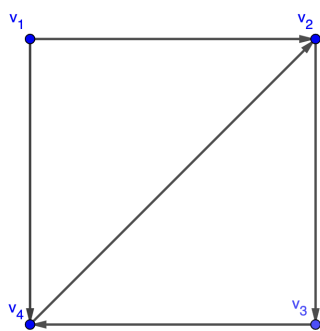
Slutligen har vi att om en väg inte passerar samma nod mer än en gång, som

$$v_1 - v_2 - v_3 - v_4,$$

kallas denna för en stig.

Ovannämnda gäller för generella, så kallade “oriktade grafer”. På dessa inskränks inte vägvalet för vandringar med undantag för vilken sorts vandring som utförs. Det finns även riktade grafer inom grafteorin vars kanter fungerar lite annorlunda från den grundläggande sorts graf vi illustrerat hittills. Kanter i en riktad graf har en riktning associerad med sig och i en vandring får man endast gå med denna riktning och aldrig emot den.

Riktningen indikeras med pilar istället för linjer mellan noder när man ritat grafen, så om grafen i figuren ovan var riktad skulle den kunna se ut som



Figur 6: Riktade grafer identifieras av pilar istället för linjer längs kanterna.

I Posts bevis av Moessners sats används en riktad graf som ersättning för triangelblocken. I samband med grafen kommer även antalet unika stigar i grafen vara av vikt.

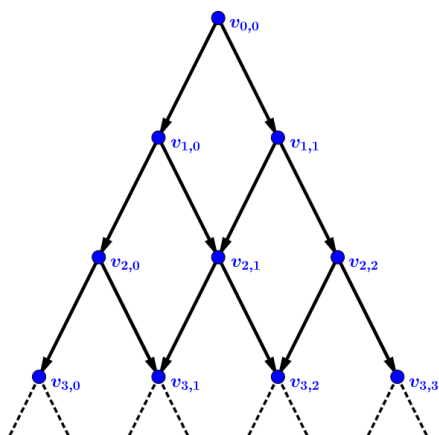
## 5.2 Stigar och Binomialkoefficienten

Stigar är en grundläggande del av grafteorin och att räkna antalet som existerar i en enkel graf som Figur 6 kan göras för hand. Så för att räkna antalet stigar som existerar i en graf får man helt enkelt se hur många stigar det finns med start i varje nod. Tar vi Figur 6 som exempel har denna 16 stycken olika möjliga stigar. Det finns såklart mer effektiva metoder för att räkna stigar än att skriva ner varje möjlig stig, men dessa är inte relevanta för detta arbetet. En fråga som är mer relevant för Posts bevis är hur många stigar det finns med början i en specifik nod, som till exempel  $v_1$ . Detta kan snabbt räknas till att vara 7 stycken

$v_1$   
 $v_1 - v_2$   
 $v_1 - v_2 - v_3$   
 $v_1 - v_2 - v_3 - v_4$   
 $v_1 - v_4$   
 $v_1 - v_4 - v_2$   
 $v_1 - v_4 - v_2 - v_3$ .

I nästa steg kommer vi fortsätta räkna stigar med en given startnod, som vi just gjorde, och arbeta fram en metod för att göra det enklare. Vi börjar med att introducera grafen  $P$ :

**Definition 5.1.** Låt  $P$  vara en riktad graf bestående av oändlig mängd rader, numrerade från 0. På rad  $n$  finns  $n + 1$  stycken noder. Dessa noder betecknas som  $v_{n,k}$  där  $n$  står för raden och  $k$  för positionen på raden, räknat från vänster med början i  $k = 0$ . Ledande från varje nod till de två närmaste noderna på raden nedanför finns två riktade kanter.



Figur 7: Graf  $P$

Denna graf innehåller en oändlig mängd noder så att räkna antalet stigar i grafen för hand är inte längre rimligt. Istället ställer vi frågan hur många stigar som leder från  $v_{0,0}$  till en godtycklig nod i grafen  $v_{n,k}$ .

Om  $k = 0$  eller  $k = n$  måste  $v_{n,k}$  ligga på någon av triangelns ytterkanter. I det fallet är svaret på hur många stigar som leder till den 1 oavsett hur långt ner på grafen noden är placerad. Befinner sig  $v_{n,k}$  istället i grafens inre kommer dock antalet stigar öka. Låt oss titta på några exempel.

Vi kallar härnäst antalet stigar med start i  $v_{0,0}$  till en målnod för

$$V_{n,k} \tag{5.2}$$

där  $n, k$  är målnodens index.

Till att börja med har vi den kortaste möjliga vandringen från  $v_{0,0}$  till  $v_{0,0}$ , som naturligtvis endast har en stig. De två nästkommande målnoderna har även de endast en stig till sig, vilket ger att  $V_{1,0} = 1$  och  $V_{1,1} = 1$ . vidare har vi noderna i rad  $n = 2$ , vilken har den första noden,  $v_{2,1}$ , som inte ligger på grafens yttre kant och därmed måste ha fler än en stig som leder till sig.. Ställer vi upp de möjliga stigarna som leder från  $v_{0,0}$  till  $v_{2,1}$  får vi

$$\begin{aligned} v_{0,0} - v_{1,0} - v_{2,1} \\ v_{0,0} - v_{1,1} - v_{2,1}, \end{aligned}$$

som alltså ger oss att  $V_{2,1} = 2$ .

Det finns naturligtvis mönster i uträkningen av  $V_{n,k}$  som vi kommer ta upp snart, men först räknar vi ut antalet stigar som leder till nästa rads noder. Som tidigare behöver vi endast titta på antalet stigar till de inre noderna  $v_{3,1}$  och  $v_{3,2}$ , vilka är

$$\begin{array}{ll} v_{0,0} - v_{1,0} - v_{2,0} - v_{3,1} & v_{0,0} - v_{1,0} - v_{2,1} - v_{3,2} \\ v_{0,0} - v_{1,0} - v_{2,1} - v_{3,1} & v_{0,0} - v_{1,1} - v_{2,1} - v_{3,2} \\ v_{0,0} - v_{1,1} - v_{2,1} - v_{3,1} & v_{0,0} - v_{1,1} - v_{2,2} - v_{3,2}, \end{array}$$

som då visar att  $V_{3,1} = V_{3,2} = 3$ .

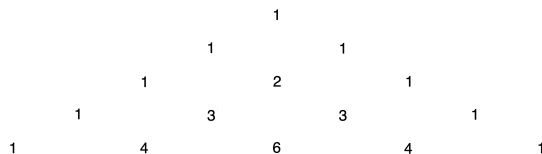
Vid den här punkten börjar ett intressant mönster framgå. Nämligen att  $V_{2,1} = V_{1,0} + V_{1,1}$  och  $V_{3,1} = V_{2,0} + V_{2,1}$  osv. Det är så att antalet stigar till varje nod är lika med antalet stigar till de två närmaste noderna i raden ovanför. Detta måste gälla eftersom varje nod som mest kan ha två kanter som leder till sig och alla stigar som leder till den måste passera endera av dessa kanter samt noderna de leder från. Utifrån det kan vi konstatera att när  $0 < k < n$  är

$$V_{n,k} = V_{n-1,k-1} + V_{n-1,k}. \tag{5.3}$$

Åter till räkningen av stigar i vår riktade graf. Det finns en känd formel som motsvarar  $V_{n,k}$  och är enklare än det något tidskrävande tillvägagångssättet av stigräkning. För att visa detta radar vi upp resultaten av  $V_{n,k}$  för rad 0 till 4

$$\begin{array}{cccccc} V_{0,0} = 1 & & & & & \\ & V_{1,0} = 1 & & & & \\ & & V_{2,0} = 1 & & & \\ & & & V_{3,0} = 1 & & \\ & & & & V_{4,0} = 1 & \\ & & & & & V_{4,1} = 4 \\ & & & & & & V_{4,2} = 6 \\ & & & & & & & V_{4,3} = 4 \\ & & & & & & & & V_{4,4} = 1 \end{array}$$

Detta är onekligen binomialkoefficienter. Vad vi räknat ut hittills överensstämmer med  $V_{n,k} = \binom{n}{k}$  för  $0 \leq k \leq n$  och  $0 \leq n \leq 4$ . Att binomialkoefficienten dyker upp här tillsammans med att antalet stigar som leder till en nod är lika med summan av antalet stigar som leder till de två föregående noderna för oss till Pascals triangel, som man bör känna igen.



Figur 8: Pascals Triangel

Pascals triangel är en intressant geometrisk tolkning av binomialkoefficienterna. I denna inordnas binomialkoefficienternas värden likt i vår riktade graf, där både  $n$  och  $k$  har samma innebörd. En känd egenskap hos Pascals triangel är just att varje siffra är summan av de två ovanstående talen

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}. \quad (5.4)$$

Då detta är samma formel som [5.3](#) för  $V_{n,k}$  och

$$\begin{cases} V_{0,0} = \binom{0}{0} \\ V_{1,0} = \binom{1}{0} \\ V_{1,1} = \binom{1}{1} \end{cases}$$

måste det följa att  $V_{n,k} = \binom{n}{k}$  för alla  $n, k$  större än eller lika med noll.

I och med detta har vi visat:

**Sats 5.5.** *Antalet stigar som leder från  $v_{0,0}$  till  $v_{n,k}$  i den riktade grafen  $P$  är lika med  $\binom{n}{k}$ .*

När vi nu gått igenom grunderna för riktade grafer, stigar, samt gått igenom några grundläggande aspekter av beviset har vi allt vi behöver för att ta oss an Posts grafteoretiska bevis av Moessners sats.

### 5.3 Posts grafteoretiska bevis

I sin artikel [4] förklarar Post att han, till skillnad från tidigare bevis av Moessners sats, vill förenkla beviset till den grad att man kan förklara det för en gymnasieelev. Till att börja med modifierar han satsen [2.2] genom att lägga till ett *steg 0* där man skriver den första raden som en talföljd bestående av 1:or istället för den vanliga följderna av positiva heltal. Tidigare har vi skrivit Moessners process som att man stryker vart  $k$ :te element från talföljden  $A_1$  och efter ett steg i mellan upprättar en ny serie  $A_2$ . Med Posts steg 0 börjar man då istället med att skapa talföljden  $A_0$  bestående av 1:or och börjar med att stryka var  $(k + 1)$ :a element för att bilda  $B_0$ . Därefter följer Moessners process som vanligt där de resulterande talföljderna  $\{A_n\}_{n=0}^k$  skrivs under den föregående och formar triangelblocken. Resultatet av att inkludera steg 0 är den nu igenkännbara serien av trianglar, men med en liten förskjutning och en rad 1:or överst

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & \cancel{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & \cancel{1} & 1 & 1 & 1 & 1 & \cancel{1} \\
 1 & 2 & 3 & \cancel{4} & & 5 & 6 & 7 & \cancel{8} & & 9 & 10 & 11 & \cancel{12} & \\
 1 & 3 & \cancel{6} & & & 11 & 17 & \cancel{24} & & & 33 & 43 & \cancel{54} & & \dots \\
 1 & \cancel{4} & & & & 15 & \cancel{32} & & & & 65 & \cancel{108} & & & \\
 1 & & & & & 16 & & & & & 81 & & & & 
 \end{array} \tag{5.6}$$

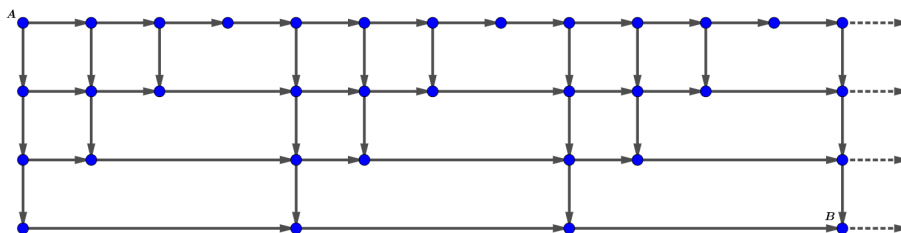
I och med det får vi Moessners modifierade sats

**Sats 5.7.** *Låt  $k$  vara ett heltal större än eller lika med 2. Låt  $A_0$  vara talföljden  $1, 1, 1, \dots$ . Bilda sedan en ny talföljd  $B_0$  genom att ta bort vart  $k + 1$ :a element från  $A_0$ , dvs stryk elementen  $k + 1, 2(k + 1), 3(k + 1), \dots$ . Bilda sedan en ny talföljd  $A_1$  bestående av partialsummorna av elementen i  $B_0$ .*

*Gör nu motsvarande procedur med utgång från  $A_1$  men stryk vart  $k$ :te element för att bilda  $B_1$  och  $A_2$ .*

*Upprepa denna proceduren tills du får talföljden  $A_k$ . Då kommer  $A_k$  vara talföljden  $1^k, 2^k, 3^k, \dots$*

Vad Post sedan gjorde var att upprätta en riktad graf där noderna är placerade så de motsvarar elementen i Moessners triangelblock. Från varje nod leder två kanter; En till höger och en nedåt. På denna riktade graf utses noden  $A$  längst upp till vänster som utgångspunkt, från vilken stigar kommer räknas till en godtycklig annan nod  $B$ .



Figur 9: Posts riktade graf,  $k = 3$

Post visade att talet som varje nod motsvarar är lika med antalet unika stigar som kan dras till den från nod  $A$ . Det är av denna anledningen vi gått igenom stigar i grafteorin, då vårt bevis av Post kommer vara baserat i räknandet av stigar. Vi har tidigare [4.6] visat att ett element i Moessners

sats är lika med summan av dess två grannar till vänster och uppåt. Denna formel är densamma som vårt arbete med den triangulära riktade grafen (5.3), vilket kommer användas senare när vi fyller ut Posts bevis.

Den riktade grafen och införandet av steg 0 är alltså grunden för Posts grafteoretiska bevis av Moessners sats. Vad Post fann var att om man med början i övre vänstra hörnet av grafen räknar antalet unika stigar till valfri annan nod är detta lika med talet i Moessners process som noden motsvarar. Det enda kriteriet när man räknar stigarna från nod  $A$  till målnoden  $B$  är att grafen, som nämnt, är riktad och vandringar längs grafens kanter därmed endast får göras åt höger eller nedåt, aldrig uppåt eller vänster.

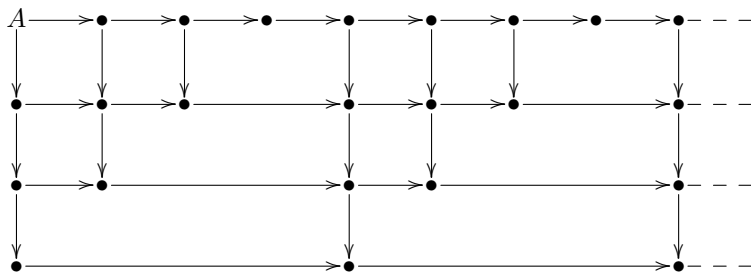
Vi börjar med att bevisa att Posts riktade graf faktiskt ger samma tal som ett fall av Moessners sats. Som vi såg i (5.6) passar Posts steg 0 in väl i Moessners sats, och talföljden  $A_1$  som vanligtvis är startpunkten för Moessner bildas utan problem. Alltså måste vårt bevis från avsnitt 3 också vara giltigt för den modifierade versionen av Moessners sats. Så i det här beviset håller vi oss till den modifierade Moessners sats där  $k = 3$ , eftersom vi redan bevisat den.

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 1 & 2 & 3 & & 4 & 5 & 6 & & 7 & 8 & 9 & \\
 1 & 3 & & & 7 & 12 & & & 19 & 27 & & \dots \\
 1 & & & & 8 & & & & 27 & & & 
 \end{array} \tag{5.8}$$

I Moessners sats har vi att varje element, bortsett från den översta raden, är en partialsumma. Av den anledningen får vi då att två på varandra följande element  $a_n$  och  $b_n$  är summor av samma element, men att den senare av de två  $b_n$  innehåller ytterligare ett element från raden ovan. På så sätt följer att varje tal i Moessners sats är lika med summan av talet till vänster om sig och talet ovanför sig.

**Sats 5.9.** *Antalet stigar i den riktade grafen  $G$  med start i noden  $A$ , ledande till målnoden  $B$ , är lika med elementet i Moessners trianglar vars position som motsvarar  $B$ .*

*Bevis.* Vi bildar en graf  $G$  enligt Figur 9, där varje nod är placerad för att efterlikna serien av modifierade Moessnertrianglar. I denna kan vi räkna antalet stigar från startnoden  $A$  till andra noder i grafen.

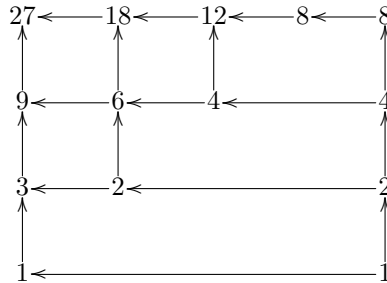


Vi ger varje nod ett värde enligt antalet stigar som leder från nod  $A$  till den. Startnod  $A$  har endast en unik stig som leder till sig, vilket betyder att  $A$  har värdet 1. Då varje nod i  $G$  har två riktade kanter som leder från sig, en till höger och en nedåt, kan ingen stig som



triangelblocken. I Moessners triangelblock finns det, som vi gått igenom mycket hitintills, mönster och formler som kan förklara de olika elementen som dyker upp, men dessa är inte omedelbart uppenbara. Nu när Post vänt på den riktade grafen kan vi omedelbart se tydliga strukturer. Kolumnen längst till vänster i triangelblocken består nu av serier av potenser enligt  $n^0, n^1, n^2, n^3, \dots$ , där  $n$  är triangelblockets index. Dessutom blir det väldigt tydligt hur antalet stigar som leder till varje nod är lika med summan av de två föregående noderna. Detta diskuteras ytterligare i nästa avsnitt, där vi kommer försöka bevisa Posts teori om den omvända grafen.

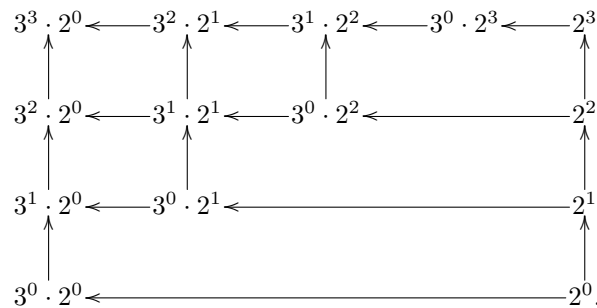
Låt oss titta närmare på  $T_3$  och inkludera den sista kolumnen från det föregående triangelblocket.



Vi kan observera något intressant om vi tittar på diagonalerna. Som nämnt består kolumnen som nu är till höger av potenserna  $2^0, 2^1, 2^2, \dots$ , vilket innebär att även diagonalen i följande triangel består av dessa. I nästa diagonal hittar vi inte längre någon följd av potenser, men något annat kan noteras. Nämligen att med start i det nedersta talet har vi talföljden

$$3, 6, 12 = 3 \cdot 2^0, 3 \cdot 2^1, 3 \cdot 2^2.$$

Liknande mönster dyker även upp i följande diagonaler. Skriver vi om talen till produkter av potenser ser grafen ut som



Så talen som dyker upp i den omvända grafen är onekligen lättare att hantera. Medan de fortfarande följer en snarlik rekursiv formel som elementen i Moessners triangelblock (3.3) är resultatet av den omvända grafen tal med en mycket enklare struktur.

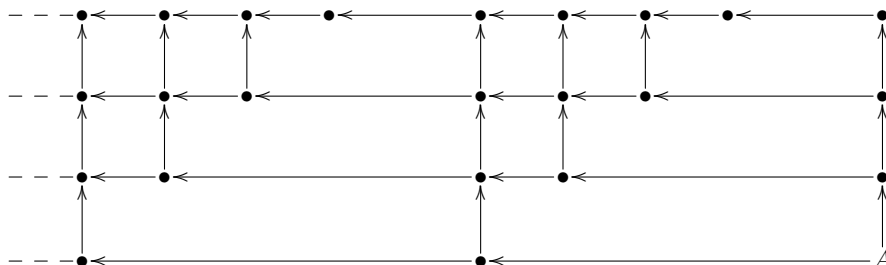
Dock lämnar Post [4] beviset av denna omvända grafen lite upp till läsaren att förstå på egen hand, då han ritar en graf med alla ingredienser som behövs för ett induktivt bevis men inte utvecklar det längre än så.

I nästa avsnitt skall vi fylla i alla detaljer för att få ett fullständigt bevis.



## 5.4 Posts bevis

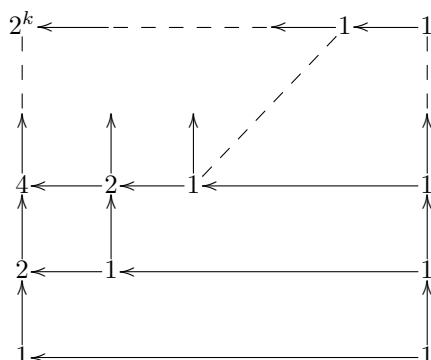
Låt oss, till att börja med, bilda en ny riktad graf  $H$  som är identiskt med  $G$  men alla kanter har sina riktningar vända åt andra hållet. Vi kallar noden i det nedre högra hörnet för  $A$ , detta är vår startnod. I  $H$  räknar vi stigar med start i  $A$ .



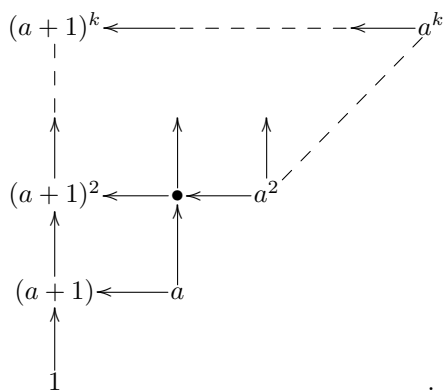
I grafen ovan använder vi, som tidigare,  $k = 3$ . Däremot bör noteras att  $G$  är en godtycklig graf som kan appliceras på alla möjliga  $k$ -värden och i beviset nedan ämnar vi att visa att det gäller för alla  $k$ . Nästa steg är att bevisa Moessners sats i sin helhet med hjälp av denna omvända riktade grafen.

*Bevis av Sats 5.7.* Vi börjar med att observera  $H$  och omgivningen kring startnoden  $A$ . Följer vi pilarna från denna ser vi att man endast dra en stig till noderna i samma kolumn som, som alla då kommer vara 1:or. Från dessa tittar vi på noderna i diagonalen på triangelblocket direkt till vänster. Även dessa har endast en stig som leder till sig, då de endast har en kant vardera som gör det och denna leder från noder som är 1:or. I nästa diagonal finner vi att varje nod har två kanter som leder till sig, och dessa börjar i noder som är 1:or. Då det alltså endast finns en stig som leder fram till vardera av de två föregående noderna följer att antalet stigar som leder till den aktuella noden är  $1 + 1 = 2$ . Detta betyder att alla tal i den andra diagonalen måste vara 2:or.

Eftersom noderna på varje diagonal innanför den yttersta har två kanter som leder till sig, och dessa båda har sitt ursprung i diagonalen innan, kommer antalet stigar som leder till dessa dubblas. Med andra ord, om vi numrerar diagonalerna från 0 till  $k$ , kommer varje nod i diagonal  $t$  där  $0 \leq t \leq k$  ha  $2^t$  stigar som leder till sig. Kolumnen längst till vänster i triangelblocket innehåller ett element från vardera diagonal och kommer därmed bestå av potenser av 2.

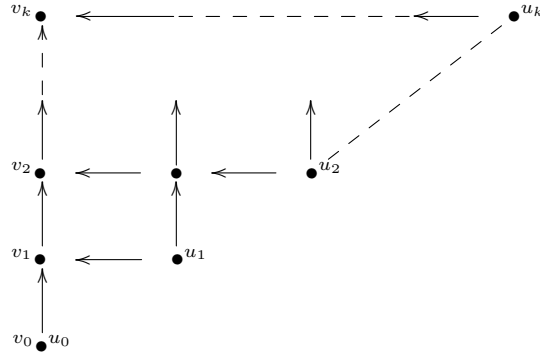


När man kommer till nästa triangelblock finner vi igen att det endast finns en kant som leder till vardera nod, vilket resulterar att dessa är lika med talen i kolumnen till höger. Låt oss byta ut potenserna av 2:or till en följd av potenser av ett godtyckligt tal  $a$ . Vårt mål nu är att, likt ett induktionsbevis, visa att Posts omvända riktade graf resulterar i



$$(5.12)$$

Vad som är relevant för oss i detta skedet är i första hand diagonalen i ett godtyckligt triangelblock, som består av potenserna  $a^0, a^1, a^2, \dots, a^k$ . Vi kallar noderna i diagonalen för  $u_n$ , där  $n$  är raden noden befinner sig på med start i rad 0. Därefter kallar vi noderna i kolumnen, som vi vill visa att den består av potenser av  $(a + 1)$ , för  $v_n$  där  $n$  har samma innebörd som för  $u_n$ . Detta betyder att  $u_0 = v_0$ , då det alltid endast kommer finnas en väg som leder från startnoden längs den nedre kanten av grafen.



Tidigare (5.2) introducerade vi beteckningen  $V_{n,k}$  som antalet stigar från en startnod till en given annan nod i samma graf. För vårt bevis etablerar två snarlika termer  $V_t$  och  $U_s$ . Termen  $V_t$  räknar antalet stigar till noden  $v_t$  där  $0 \leq t \leq k$ , och på samma sätt räknar  $U_s$  antalet stigar till  $u_s$  där  $0 \leq s \leq k$ .

Då det endast finns en kant som leder till varje nod i diagonalen av vårt triangelblock måste det vara exakt samma antal stigar som leder till  $u_s$  som noden innan. Enligt vårt antagande (5.12) måste alltså

$$U_s = a^s \quad (5.13)$$

där  $0 \leq s \leq k$ .

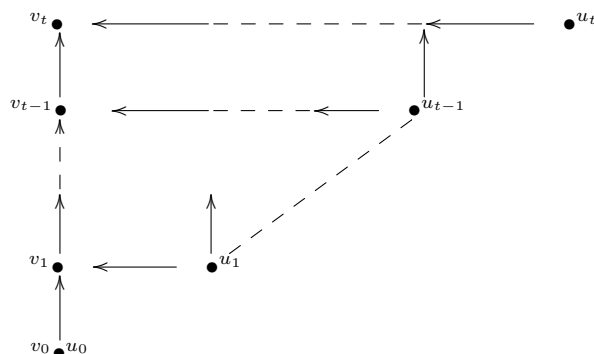
Eftersom vi nu har definierat  $U_s$  kvarstår att undersöka  $V_t$ . Vi vet att varje stig som leder till  $v_t$  måste leda genom exakt en nod  $u_m$  på triangelblockets diagonal där  $0 \leq m \leq t$ . Att  $m$  är begränsat av  $t$  kommer sig av att det per grafens definition inte finns några kanter som är riktade nedåt och därmed kan inte en nod på en rad ovanför målnoden innefattas i en stig som leder till den. Från (5.13) vet vi att antalet stigar som leder till  $u_m$  är lika med  $U_m$ .

För att räkna antalet stigar som leder till  $v_t$  via  $u_m$  får vi ta antalet stigar som leder till  $u_m$  och multiplicera med antalet stigar som leder därifrån till målnoden. Vi kallar antalet stigar mellan delmålnoden och målnoden för  $A_{v_t, u_m}$ , vilket ger oss att antalet stigar som leder till målnoden via  $u_m$  är  $A_{v_t, u_m} \cdot U_m$ . Då  $V_t$  är det totala antalet stigar som leder till målnoden måste vi räkna in alla möjliga  $u_m$  och får därför

$$V_t = \sum_{m=0}^t A_{v_t, u_m} \cdot U_m.$$

Vad kan vi nu säga om  $A_{v_t, u_m}$ ? Det representerar antalet stigar från en nod i ett triangelblocks diagonal till en nod i den vänstra kolumnen. Eftersom  $0 \leq m \leq t$  kan vi ignorera alla rader ovanför

rad  $t$  och isolera den nedre spetsen av  $T_n$ .



(5.14)

Vad vi har nu är en triangelformad graf med lika många noder längst varje sida. Denna formen liknar grafen  $P$  från 5.5, med skillnaden att  $P$ 's kanter var riktade åt andra hållet och den var vriden lite medurs. Sats 5.2 ger oss att antalet stigar som leder från  $v_{0,0}$  till  $v_{n,k}$  är lika med  $\binom{n}{k}$ . Vidare vet vi från Lemma 5.10 att antalet stigar i en graf inte förändras om man vänder riktningen av kanterna. Det följer från detta att i en omvänd  $P$  är antalet stigar från  $v_{n,k}$  till  $v_{0,0}$  lika med  $V_{n,k} = \binom{n}{k}$ . Eftersom 5.14 är kongruent med en omvänd  $P$  måste även  $A_{v_t, u_m}$  vara en binomialkoefficient.

Då diagonalerna i triangelblocket i praktiken är samma som raderna i  $P$  får vi att  $t$  motsvarar vårt  $n$ . På samma sätt representerar  $m$  positionen på diagonalen, som då motsvarar  $k$ . Från det kan vi nu slå fast antalet stigar från  $u_m$  till  $v_t$  som

$$A_{v_t, u_m} = \binom{t}{m}. \quad (5.15)$$

Vi har återigen funnit en koppling till binomialkoefficienten, men vid det här laget är det kanske att vänta sig. Så nu när vi har funnit både  $A_{v_t, u_m}$  och  $U_m$  kan vi skriva om uttrycket för  $V_t$ . Med 5.13 och 5.15 får vi nu

$$V_t = \sum_{m=0}^t \binom{t}{m} a^m = (a+1)^t. \quad (5.16)$$

Den sista likheten följer av binomialsatsen. Vi har nu gått hela varvet runt från Pascals triangel till binomialkoefficienten till binomialsatsen och visat att  $V_t = (a+1)^t$ . Efter att ha visat att  $T_1$ 's vänstra kolumn består av följderna  $2^0, 2^1, 2^2, \dots, 2^k$  och via 5.16 bevisat att  $V_k = (a+1)^k$  har vi bevisat att Posts omvända riktade graf faktiskt resulterar i jämna potenser.

Vi vet att antalet stigar från  $A$  till  $v_k$  är lika med  $(a+1)^k$ , där  $(a+1)$  är numret på triangelblocket som  $v_k$  befinner sig i. Enligt 5.10 är antalet stigar från  $v_k$  till  $A$  lika med  $V_k$  om vi vänder riktningen på grafen  $H$ . Alltså följer det att Posts första riktade graf  $G$  alltid ger jämna potenser på den sista raden, oavsett hur många rader den innehåller. För noden  $v_k$  motsvarar  $k$  Moessners  $k$ -värde, och som vi visade i Sats 5.9 kommer värdet för varje nod i  $G$  motsvara sin motpart i Moessners triangelblock. Alltså har vi visat att Moessners sats alltid kommer resultera i en talföljd bestående av potenser för alla värden av  $k \geq 1$ .  $\square$

Medan vi i den här texten har gått in djupare i grafteori kan man onekligen förklara Moessners sats på detta sättet för elever på gymnasienivå. Den grafteoretiska delen, medan den är viktig för vårt bevis, behöver inte förstås på djupet av den potentiella eleven för att de ska kunna följa logiken i beviset.

## 6 Generaliseringar av satsen

Hittills har vi arbetat med att bevisa satsen som Moessner presenterade i 1951, där man stryker var  $k$ :te tal. I satsen och bevisen vi arbetat med i den här texten är  $k$ -värdet konstant och oförändrat genom hela processen. Men vad skulle hända om  $k$  ändrades och växte med varje strykning, så att varje steg inte var exakt lika långt. Med steg menar jag i detta fallet distansen mellan strukna element på den naturliga tallinjen och inte stegen som innefattas i Moessners sats [2.2](#). Utöver att steglängden inte måste vara konstant behöver den däremot vara icke-avtagande, så att  $k_n \leq k_{n+1}$ . Skulle den inte vara det införs möjligheter som inte går att hantera med de bevis vi har tillgängliga.

För att kunna genomföra Moessners process med ökande  $k$ -värden behöver vi dock först generalisera den. Om en senare triangel är större än den första så kommer den behöva fler omgångar av strykning och summering för att avslutas. I det fallet fungerar inte längre den etablerade processen från satsen. Därför justerar vi så att strykandet av tal i stegen efter det första görs per triangel.

**Definition 6.1.** Låt  $k_n$  vara det  $n$ :te strukna elementet från den översta raden i processen, där  $n > 0$ . Kalla intervallet mellan  $k_{n-1}$  och  $k_n$  för  $t_n$ , där  $t_1$  är intervallet från 1 till  $k_1$  på den naturliga tallinjen. I varje följande rad tillhör varje element som är positionerat under  $t_n$  också intervallet. När man stryker tal under resten av processen stryker man alltid det sista elementet i varje interval.

En väldigt intressant egenskap av satsen visas om man börjar processen med att stryka triangeln. Dvs att  $k_1 = 1, k_2 = 3, k_3 = 6, \dots$ . Det är oklart vem som först upptäckte detta, men Paasche [\[7\]](#) täcker det i sin artikel *En Generalisering av Moessners Sats* (översatt från tyska). I artikeln börjar Paasche med att stryka triangeln i det första steget av Moessners process, inte inräknat Posts steg 0 då detta var innan Posts tid. Efter att ha gjort Moessners process av partialsummor och strykningar får man

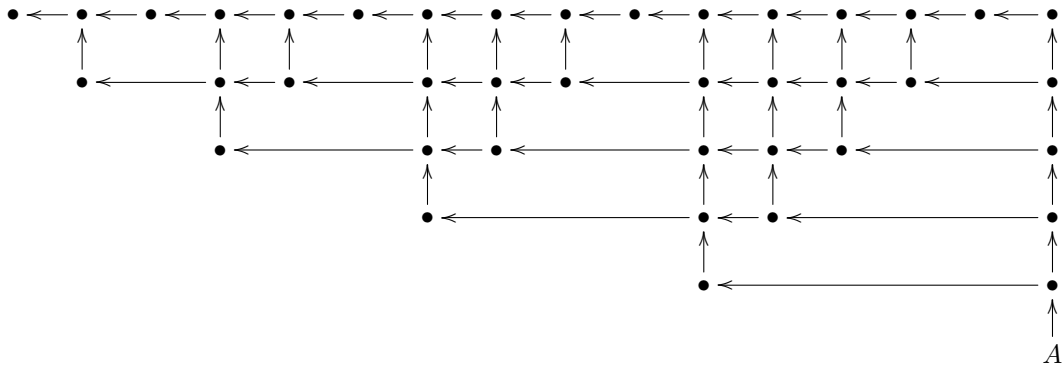
$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 \cancel{1} & 2 & \cancel{3} & 4 & 5 & \cancel{6} & 7 & 8 & 9 & \cancel{10} & 11 & 12 & 13 & 14 & \cancel{15} \\
 & & & 6 & \cancel{11} & & 18 & 26 & \cancel{35} & & 46 & 58 & 71 & \cancel{85} & \\
 & & & & 6 & & & 24 & \cancel{50} & & 96 & 154 & \cancel{225} & & \dots \\
 & & & & & & & 24 & & & 120 & \cancel{274} & & & \\
 & & & & & & & & & & 120 & & & & 
 \end{array} \tag{6.2}$$

Tittar vi nu närmare på talet i spetsen av varje triangel, där den första anses vara 1:an som stryks i första raden, finner vi 1, 2, 6, 24, 120. Vad som är intressant här är att dessa är de första fem fakulteterna  $1!, 2!, 3!, 4!, 5!$ . Det här mönstret fortsätter där en godtycklig triangel  $T_n$ :s nedersta tal är  $n!$ , vilket ger oss följande sats.

**Sats 6.3.** Låt  $A_1$  vara den positiva naturliga talföljden. Stryk sedan triangeln från  $A_1$ . Genomför sedan stegen i Moessners sats och skapa slutligen en talföljd  $B$  bestående av det första talet i varje talföljd  $A$ .  $B$  kommer då bestå av  $1!, 2!, 3!, \dots$

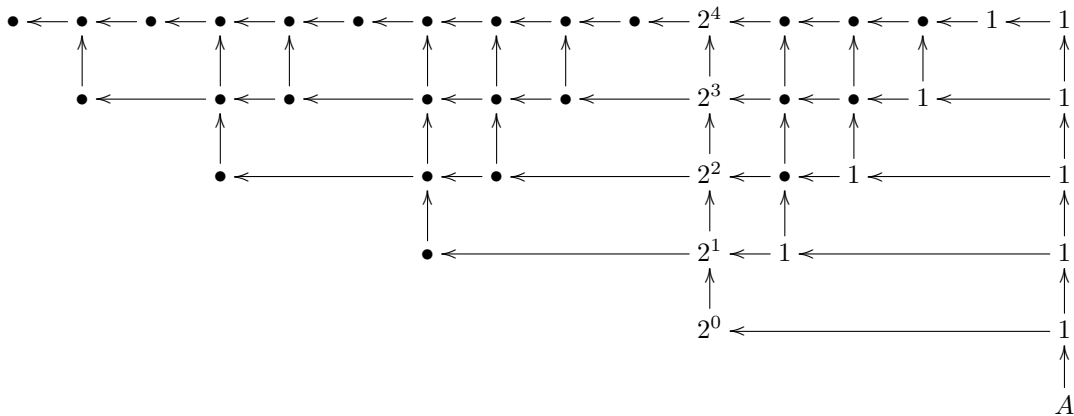
*Bevis.* För det här beviset använder vi samma metod som Posts bevis. Vi kommer däremot inte visa ett allmänt bevis, utan fokusera på de första 5 triangelblocken då man från detta enkelt kan se att satsen stämmer.

Först etablerar vi då en riktad graf  $G$  baserat på (6.2), där man i det första steget strukit triangel-talen. Till denna har vi också lagt till Posts steg 0 för att kunna använda dennes grafteoretiska bevis. Vi fortsätter med att etablera  $H$ , som är den omvända versionen av  $G$ .



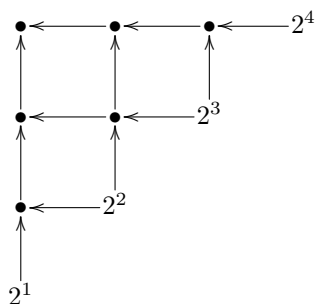
I  $H$  ger vi varje nod ett värde enligt hur många stigar som leder till den från nod  $A$ . Den första triangeln känner vi igen från beviset av Sats 4.12, och matematiken följer samma logik. Dock, eftersom  $k$ -värdet minskar ett steg för varje triangel har noden längst upp till vänster i  $T_2$  värdet  $2^{k-1}$ .

Låt oss ta grafen  $H$  som motsvarar de första 5 triangelarna som exempel för vårt bevis. I denna bör alltså värdet av den sista noden vara  $5!$ .



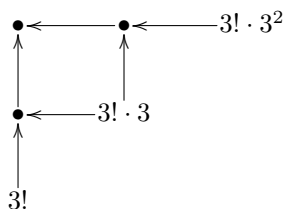
Som nämnt ovan är  $T_2$  självklar, men i efterkommande trianglar får vi inte längre samma resultat som i Posts tidigare grafer. Tar vi  $T_3$  som exempel, med moderna utbytta för sina värden, skulle

den se ut som

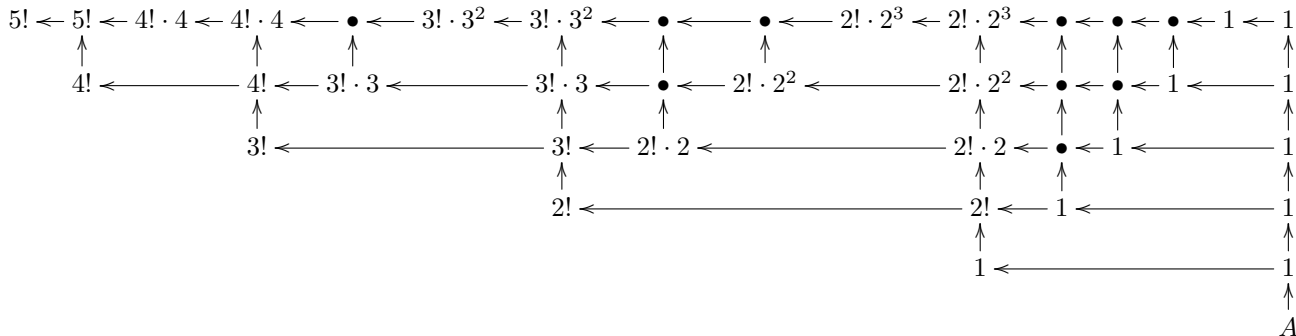


Vad vi kan göra i detta läget är att bryta ut  $2!$  från varje nods värde i triangeln. Gör man det ser man att talen som är kvar följer uträkningen i [5.11](#) vilken vi redan bevisat ger potenserna  $3^0, 3^1, 3^2, \dots$  i den vänstra kolumnen. Inräknat  $2!$  som vi bröt ut blir talen i kolumnen då  $2!, 3!, 3! \cdot 3, 3! \cdot 3^2$ .

Eftersom alla noder utom den nedersta har en kant som leder till nästa triangel kommer alltså diagonalen i  $T_4$  alla innehålla  $3!$ .



På samma sätt som i den föregående triangeln kan vi nu bryta ut  $3!$  från alla noders värden. Grafen följer då återigen standarduträkningen av Posts omvända graf och med fakulteten inräknad består då den vänstra kolumnen av  $3!, 4!, 4! \cdot 4$ . Den sista triangeln löses på samma sätt, genom att bryta ut fakulteten, och den sista noden kommer då ha  $5! = 120$  stigar som leder till sig.



Nu när vi visat att strykningen av triangelantal genererar fakulteter i den omvända grafen  $H$  följer från [5.10](#) att om det är sant för den omvända grafen måste det även vara sant i grafen  $G$ , vilken i sin tur reflekterar Moessners trianglar. Därmed har vi visat att satsen gäller för de första 5 triangelblocken.

Som blir tydligt i beviset är att mönstret av att tjäna en fakultet i varje triangelblock som sedan förs vidare och blir basen för nästa fortsätter oavsett hur många trianglar man går igenom. Detta eftersom den nedersta noden i varje triangel inte följer med till nästa. Därför kommer alltid värdet från den näst nedersta noden från ett givet triangelblock  $T_n$  vara värdet på den nedersta i  $T_{n+1}$ . Från det får vi en växande fakultet som förs över till varje triangel, vilket alltså ger oss följden  $1!, 2!, 3!, \dots$  i Moessners process när man stryker triangelnummerna i första steget.  $\square$

## 6.1 Input och Output

Nu när vi börjat visa att det finns ytterligare samband mellan talen man stryker och talen man får ut kanske tankarna går till vilka regler, om det finns några, som gäller. Mycket riktigt finns sådana mönster som matematiker har hittat, men låt oss börja med att försöka visa det baserat på vad vi redan bevisat i det här arbetet.

Till att börja med definierar vi två talföljder; en för talen som initialt stryks i Moessners process och en bestående av talen längst ner i varje resulterande triangelblock. Vi kallar dessa följder  $A$  respektive  $B$ , där  $A = (a_1, a_2, a_3, \dots)$  och  $B = (b_1, b_2, b_3, \dots, b_n)$  där  $b_n$  är det nedersta elementet i triangelblock  $n$ .

Låt oss som ett första exempel ta fallet vi hanterade i avsnitt 3, där vi strök tal utan att ändra steglängden och  $k = 3$ . Här kan vi då se att  $A$  består av multipler av 3,  $A = (3, 6, 9, 12, \dots)$ , och som vi vet genererar processen jämna kuber, så  $B = (1, 8, 27, 64, \dots)$ . Formulerar vi oss lite annorlunda får vi att med ett konstant  $k$ -värde är

$$A = (1k, 2k, 3k, 4k, 5k, \dots)$$

och

$$B = (1^k, 2^k, 3^k, 4^k, 5^k, \dots).$$

Än så länge är detta i stort sett repetition, men låt oss ta ett exempel till. Denna gången tittar vi på fallet där vi har en ökande steglängd och börjar med att stryka triangelnummerna. Som vi vet genererar processen då fakulteterna, men låt oss bryta ner följderna så mycket som möjligt

$$\begin{aligned} A &= (1, 3, 6, 10, 15, \dots) \\ &= (1, (2 + 1), (3 + 2 + 1), (4 + 3 + 2 + 1), \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= (1, 2, 6, 24, 120, \dots) \\ &= (1, (2 \cdot 1), (3 \cdot 2 \cdot 1), (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1), \dots) \end{aligned}$$

Än så länge kanske det känns som att resultaten är väldigt olika och eventuella samband inte är så tydliga. Faktum är att alla pusselbitarna nu finns och vi behöver bara få dem på plats.



Hur kan vi då ändra definitionen av  $A$  och  $B$  för att omfatta våra två exempel som har så olika värden? Låt  $(k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$  vara en sekvens av tal där

$$\begin{cases} k_1 > 0 \\ k_n \geq 0, \text{ då } n > 1. \end{cases}$$

Vi kallar denna sekvens vår inputsekvens, då den används för att bestämma vilka tal som stryks under Moessners process. Inputsekvensen är alltså basen för talföljden  $A$  och vi kan definiera

$$\begin{cases} a_1 = 1k_1 \\ a_n = nk_1 + (n-1)k_2 + \dots + 1k_n. \end{cases}$$

För att relatera detta till vårt första exempel skulle inputsekvensen för ett statisk  $k$ -värde vara  $k_1 = k$  och  $k_{n>1} = 0$ , vilket ger  $A = (k, (2k+0), (3k+0+0), \dots)$ . I det fall då vi stryker triangelnumren är  $k_n = 1$  och följaktligen blir  $A = (1, (2+1), (3+2+1), \dots)$ . Alltså har vi en formel som täcker våra exempel och länkar dem. Som sagt kommer vi inte bevisa formeln för inputsekvensen i den här texten, men den är känd sedan länge och Long [3] skriver om den redan i sin artikel från 1982.

Hur relaterar då inputsekvensen till talen vi får ut i  $B$ ? Vi tittar på våra exempel igen och använder  $x$  för våra  $k$ -värden. Till att börja med tar vi som vanligt på fallet med konstant  $k$ ,

$$\begin{aligned} A &= (1k_1, 2k_1 + 1k_2, 3k_1 + 2k_2 + 1k_3, 4k_1 + 3k_2 + 2k_3 + 1k_4) \\ &= [K_j = 0 \text{ då } j > 1] \\ &= (1k_1, 2k_1, 3k_1, 4k_1) \\ &= (1x, 2x, 3x, 4x) \\ B &= (1^x, 2^x, 3^x, 4^x) \\ &= (1^{k_1}, 2^{k_1}, 3^{k_1}, 4^{k_1}). \end{aligned}$$

Här kan vi se ett närmast logaritmiskt samband där  $a_n = nx$  blir till  $b_n = n^x$ . Dessutom kan man nog redan ana hur  $B$  kommer att se ut när man stryker triangelnumren, men vi går igenom det oavsett. När  $k_n = 1$  för alla  $n$  får vi

$$\begin{aligned} B &= (1, 2!, 3!, 4!) \\ &= (1^1, (2 \cdot 1)^1, (3 \cdot 2 \cdot 1)^1, (4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)^1) \\ &= (1^1, (2^1 \cdot 1^1), (3^1 \cdot 2^1 \cdot 1^1), (4^1 \cdot 3^1 \cdot 2^1 \cdot 1^1)) \\ &= (1^{k_1}, (2^{k_1} \cdot 1^{k_2}), (3^{k_1} \cdot 2^{k_2} \cdot 1^{k_3}), (4^{k_1} \cdot 3^{k_2} \cdot 2^{k_3} \cdot 1^{k_4})). \end{aligned}$$

Vad vi kan se är alltså en tydlig och direkt formel för hur inputsekvensen i Moessners sats bestämmer outputsekvensen. I och med det kan vi definiera våra två sekvenser.

**Definition 6.4.** Låt  $K = (k_1, k_2, k_3, \dots, k_n)$  vara en talföljd där  $1 \leq k_1$  och  $0 \leq k_n$  och  $A$  vara en följd så att  $A = (k_1, 2k_1 + k_2, \dots, nk_1 + (n-1)k_2 + \dots + k_n)$ . Stryker man i steg 1 av Moessners sats talen från  $A$  får man den slutgiltiga följden  $B$ , som består av det nedersta talet i varje resulterande triangelblock.  $B$  definieras som outputsekvensen för  $K$  och det går att bevisa att  $B = (1^{k_1}, 2^{k_1} 1^{k_2}, \dots, n^{k_1} (n-1)^{k_2} \dots 1^{k_n})$ .

Detta är en förenkling av vad som skrivs i [3], då beviset av det är invecklat. För den intresserade läsaren kan beviset hittas i [7].

Flertalet matematiker har noterat denna relation mellan inputsekvensen och outputsekvensen men beskriver den på varierande nivåer av komplexitet. Här har vi med grund i Mathologers video förklarat den i så enkla termer som möjligt. Med detta i ryggen tar vi upp ett sista fynd som gjorts angående just detta.

Antag att vi har två separata inputsekvenser  $K_1$  och  $K_2$  samt de motsvarande outputsekvenserna  $B_1$  och  $B_2$ . Vi har etablerat att det för varje  $K$  existerar ett unikt  $B$ , så vad händer om vi adderar två inputsekvenser? Om vi säger att summan  $K_1 + K_2 = K_a$ , där varje element i  $K_a$  är summan av motsvarande element i  $K_1$  och  $K_2$ , måste såklart  $B_a$  existera. Vad som observerats är att  $B_a$  i detta fallet är relaterat till outputsekvenserna  $B_1$  och  $B_2$  enligt

$$\begin{cases} K_a = K_1 + K_2 \\ B_a = B_1 \cdot B_2. \end{cases}$$

Addition av inputsekvenser leder alltså till multiplikation av outputsekvenserna. Utan tvekan kan vi säga att Moessners process är länkad till logaritmiska transformationer där summor blir till produkter och produkter till exponenter.

Slutligen tar vi upp en medföljande räkneregler för sekvenserna, nämligen subtraktion. Här behöver vi dock åter belysa att för att processen ska fungera behöver den slutgiltiga  $K_a$  bestå av icke-negativa tal, då steglängden inte får minska. Denna regeln speglar hur addition fungerar i och med att om man subtraherar en inputsekvens från en annan, och den resulterande sekvensen inte har några negativa termer, gäller följande samband:

$$\begin{cases} K_a = K_1 - K_2 \\ B_a = \frac{B_1}{B_2}. \end{cases}$$

Vi får alltså kvoten av outputsekvenserna.

Någon som tar upp dessa två intressanta räkneregler är Long [\[3\]](#), men han väljer också att inte explicit bevisa dem. Anledningen att jag belyser dem är att hur de, åtminstone för mig, väcker nyfikenhet angående vilka ytterligare regler och samband som kan gömma sig i Moessners sats.

## 7 Sammanfattning

Nu kan vi förhoppningsvis påstå att Moessners sats presenterats utförligt nog att en läsare fått en ordentlig grund att stå på inom ämnet. Vi har diskuterat vart satsen fått sin början och sedan i flertalet steg bevisat både specifika fall och en generell form. Med detta har jag förhoppningsvis förmedlat, åtminstone till någon nivå, bredden och djupet som finns dold bakom denna till synes enkla sats.

För att ha sin början i något så simpelt som  $\sum_{m=1}^n (2m-1) = n^2$  har en elegant process växt fram. Den berör allt från enkel algebra till kombinatorik till matriser och mer därtill. När vi fördjupat oss i mekaniken bakom satsen för att bevisa den har vi upptäckt kopplingar till binomialsatsen och en tydlig parallell med Pascals triangel tillsammans med en rad andra mönster som framträder. Och detta är som sagt inte allt satsen har att erbjuda. Avslutningsvis gick vi igenom två räkneregler som i sig öppnar för fler frågor kring satsen.

## 8 Ytterligare Läsning

För de som finner sig sugna på att fördjupa sig i Moessners sats finns många intressanta arbeten att hitta. Först och främst rekommenderas både Long och Post som refererats till i denna texten. Utöver det arbete av Long som jag använt som referens skrev han några år senare ytterligare en text titlad *A Note on Moessner's Process*, där han tar upp diverse intressanta aspekter av satsen. Slutligen finns en artikel av Archy Will He som skrev ett mer systematisk och djupgående dubbelinduktivt bevis som både är utförligt och lärorikt.

## Referenser

- [1] Wikipedia, *Gnomon (Figure)*, [https://en.wikipedia.org/wiki/Gnomon\\_\(figure\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Gnomon_(figure)) (2022)
- [2] Mathologer, *The Moessner Miracle. Why wasn't this discovered for over 2000 years?*, <https://www.youtube.com/watch?v=rGlypFHfMgI&t=120s> (2021)
- [3] C. T. Long, *Strike it out - Add it up*, The Mathematical Gazette 66.438, 273-355 (1982)
- [4] K. A. Post, *Moessnerian theorems. How to prove them by simple graph theoretical inspection*, Elemente der Mathematik 45, 46-51 (1990)
- [5] A. Moessner, *Eine Bemerkung über die Potenzen der natürlichen Zahlen*, Sitzungsber. Math.-Naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 29 (1951)
- [6] N. L. Biggs, E. K. Lloyd, R. J. Wilson, *Graph Theory, 1736-1936*, Oxford University Press, (1986)
- [7] I. Paasche, *Eine Verallgemeinerung des Moessnerschen Satzes*, Composito Mathematica 12, 263-270 (1954)