SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Punkten och linjen enligt Charlotte Angas Scott

av

Tilde Runnquist

2023 - No L9

Punkten och linjen enligt Charlotte Angas Scott

Tilde Runnquist

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Sofia Tirabassi

2023

Abstract

The purpose of this thesis is to mediate the essence of a part in Charlotte Angas Scotts *An Introductory Account of Certain Modern Ideas And Methods in Plane Analytical Geometry* (1894). The book is written in a mathematical context very different from the one students learn analytical geometry and linear algebra in today and my aim is to rephrase Scotts work so that modern day students can have easier access to it.

The part that will be dissected in this thesis is about the so-called *primary element* in the plane. Scott is comparing the point and the line by adapting a three-coordinate-system where the similarites between the two is (arguably) visible. In the distance lies the topic *duality.* Scott says that duality is the underlying principle manifested by the correspondence of the point and the line. Here we are going to interpret Scotts reasoining by re-placing said correspondence in our mathematical context.

Referat

Syftet med denna uppsats är att förmedla den innehålssmässiga kärnan av Charlotte Angas Scotts resonemang *An Introductory Account of Certain Modern Ideas And Methods in Plane Analytical Geometry* (1894). Boken är skriven i en matematisk kontext väldigt annorlunda från den i vilken vi lär oss linjär algbra och analytisk geometri idag och jag ämnar att omformulea Scotts arbete så att moderna studenter har enklare tillgång till det.

Delen i Scotts bok som kommer analyseras här är om så kallade *primära element* i planet. Scott jämför punkten och linje genom att konstruera ett korrdinatsystem med tre koordinater, istället för de nödvändiga två, där likheterna mellan elementen synliggörs. I horisonten ligger ämnet *dualitet.* Scott menar att dualitetn är den underliggande principen vilken åskådliggörs i samverkan mellan punkt och linje. I detta arbete ska vi tolka Scotts resonemang genom att applicera denna samverkan i en mer bekant matematisk kontext.

Innehåll

1

Inledning

1.1 Introduktion

Efter inledning och ett kort bakgrundskapitel tar kapitlet som delar namn och underrubriker med Charlotte Angas Scotts första kapitel i *An Introductory Account of Certain Modern Ideas And Methods in Plane Analytical Geometry* vid. Som nämnt i referatet är syftet med denna uppsats att förmedla Scotts ämnesmässiga kärna i det valda underlaget (se begränsningar, avsnitt 1.4). Vi ska se att arbetets främsta resultat är synliggörandet av punkten och linjens relation och likheter i koordinatsystem med punkten respektive linjen som utgångspunkt. Denna relation beskrivs bäst med följande uttryck:

$$s_1pd_1 + s_2qd_2 + s_3rd_3 = 0$$

Uttrycket beskriver föreningen av en punkt och en linje i ett punkt- respektive linjesystem. Ämnet som denna insikt sedan ligger till grund för är, som referatet avslöjar, *dualitet.*

För att komma till ovan nämnda slutsats inleder Scott och så även vi, om än på olika sätt, i avsnitt 3.2 med att konstruera ett system i vilket vi kan beskriva en punkt med tre koordinater. Detta gör vi i ett linjesystem där vi ser att tre icke-konkurrenta linjer bildar en triangel vars area kan beskrivas med triangelns sidor och avståndet från respektive linje till en punkt, d_1, d_2, d_3. En särskilt viktig definition för detta samband, och i längden arbetets slutsatser, är den om *teckengivna avstånd.* Med hjälp av vektorprodukten mellan en vektor från punkten vinkelrät mot linjen och en vektor längs linjen (i en förbestämd riktning) kan vi ge avstånden från punkten till linjerna tecken - en förutsättning för att areasambandet ska gälla för samtliga positioner i systemet. I delavsnittet 3.2.2 kan vi, med grund i koordinaterna som kan konstrueras utifrån areasambandet, beskriva en linje i linjesystemet med en ekvation.

Denna ekvation, $d_4 = fd_1 + gd_2 + hd_3 = 0$, ligger sedan till grund för konstruktionen av en slags linjekoordinater i punktsystemet i avsnitt 3.3. Om vi istället ser till tre icke-kolinjära punkter (eller de icke-konkurrenta linjernas skärningspunkter - triangelns vertex) kan vi konstruera ett relationssamband mellan f, g, h, avståndet mellan punkterna (eller triangelns sidor) och avstånden från punkterna till linjen - p, q, r. Härifrån kan vi säga att linjens position bestäms av dessa avstånd.

Med grund i ovan nämnda relationssamband kan vi i delavsnitt se 3.3.2 vi att om $fd_1 + gd_2 + hd_3 = 0$ så $s_1pd_1 + s_2qd_2 + s_3rd_3 = 0$ och konstruera ett uttryck för sambandet mellan de två systemen. Genom att också konstruera en ekvation för punkten i punktsystemet kan vi slutligen (avsnitt 3.4) formulera vår variant av det Scott kallar för *unity in position* - uttryck för en punkt på en linje i ett linjesystem respektive en linje genom punkter i ett punktsystem.

När vi gjort uttryck för hur en linjes ekvation i ett linjesystem bestäms av punktkoordinater och en punkts ekvation i ett punktsystem bestäms av linjekoordinater kan vi i arbetets sista avsnitt 3.4.1 med linjära system och determinanter konstruera sätt att hitta en linje- respektive punkt-ekvation i ett linje-respektive punkt-system. Vi ser att processerna i detalj speglar varandra och visar på hur linjen och punkten som element speglar varandra i respektive koordinatsystem.

Till slut kommer vi till punkten då ämnet *dualitet* kan introduceras. Och det är där vårt arbete stannar. Ett uttryck för sambandet mellan punkt och linje i ett linje- respektive punktsystem leder oss in på projektiva plan och symmetrin mellan punkt och linje i dem. Charlotte Angas Scott skriver:

> The underlying principle manifested in this correspondence is known as the Principle of Duality. The meaning of the name, the importance of the principle, and the utility of the correspondence, will appear more plainly in the following chapters.[1]

1.2 Bakgrund

Även om Charlotte Angas Scott och hennes gärningar av flera anledningar är minnesvärda är de inte anledningen till detta arbetes existens. Punkten och linjen är fenomen som i min och andra nutida matematikstudenters utbildning förmodligen

[1] Scott, Charlotte Angas (1894). An introductory account of certain modern ideas and methods in plane analytical geometry. London: Macmillan and co., s.15. Hämtad från: https://archive.org/details/introductoryacco00scot/page/14/mode/2up?ref=olview=theater.

inte tagit någon större plats. I sammanhanget som vi lär oss linjär algebra och plangeometri i är de redan antagna och självklara. En punkt är en punkt och en linje är en linje. Men i kontexten som *An Introductory Account of Certain Modern Ideas And Methods in Plane Analytical Geometry* skrevs var den matematiska diskursen en annan. När jag började läsa Scotts avhandling visste jag vad en punkt var och jag visste vad en linje var. Jag visste till och med vad koordinater var. Ändå förstod jag snudd på ingenting av kapitlet vars namn är *Point and Line Coordinates.* Ett skifte i hur man förmedlar matematik verkar ha skett någonstans mellan Scotts och min samtid. Till exempel kan tyckas att varken definitioner, satser eller bevis över huvud taget existerar i *An Introductory Account of Certain Modern Ideas And Methods in Plane Analytical Geometry.* Men ändå märker man, när man läst om en eller flera gånger, att hon ju på något sätt definierar, påstår och bevisar. Och så hade detta arbetes existens fått en anledning - att *förstå* och *förmedla* Charlotte Angas Scott.

1.3 Arbetsgång

Detta arbete har i mycket varit ett översättningsarbete som gått i intervall om *läsning, fördjupning* och *omskrivning* med fokus på en paragraf åt gången. I *läsnings*-delen av arbetet skulle inget ord gå 'o-förstått'. Texten skulle i sin helhet översättas och tolkas. I *fördjupnings*- arbetet skulle essensen av paragrafen räknas på och uttryckas i en kontext som är mer i enlighet med min och mina medstuderandens förståelse av linjär algebra och i viss mån plangeometri. *Omskrivningen* innebar att uttrycka essensen i enlighet med den formella struktur som matematisk text har idag: *definition, sats, bevis.* De definitioner, satser och bevis som görs i denna rapport återfinnes alltså inte i *An Introductory Account of Certain Modern Ideas And Methods in Plane Analytical Geometry.* Denna rapport är resultatet av *omskrivnings*-fasen och syftet med uppsatsen i sin helhet var således inte att förstå själva matematiken som förmedlas i slutfasen av arbetet. Det är snarare att med den moderna förståelsen av linjär algebra och plangeometri i ryggen göra adekvata tolkningar av Scotts avhandling för att sedan kunna förmedla dess essens i en modern kontext. Arbetets rapport-del har samma namn som kapitlet som jag arbetat med (fast översatt på svenska). Underrubrikerna likaså. Jag har med andra ord följt Scotts struktur i meningen att vi tar upp de olika temana i samma ordning.

1.4 Begränsningar

Arbetet har begränsats till en del av ett kapitel i avhandlingen av två anledningar: *omfattning* och *kunskapsnivå.* Givet är att en hel avhandling inte kan redogöras för i ett arbete som omfattar 15 högskolepoäng. Arbetets första begränsning gjordes därför vid ett av Scotts kapitel. Det första valdes på grund av dess inledande karaktär - ingenting i kapitlet är beroende av något som beskrivits tidigare i avhandlingen. Arbetets andra begränsning gjordes vid ämnet *dualitet.* Hade tid funnits kanske uppsatsen skulle kunnat fungera som min personliga språngbräda in i kunskap om ämnet. Men arbetet med omskrivningen var så pass omfattande att det utgjorde en grund för ett arbete i sig självt. Till grund för detta arbete ligger alltså delen om relationen mellan *punkten* och *linjen* i Charlotte Angas Scotts resonemang som senare landar i en redogörelse för *dualitet.*

2

Charlotte Angas Scott och 1800-talets matematiska diskurs

Charlotte Angas Scott (1858-1931) var en brittisk matematiker med de flesta av hennes verksamhetsår i USA. Hennes gärningar inom matematiken var många. Hon var till exempel den första brittiska kvinnan som doktorerade i matematik.[2] Hon var den första kvinnan som, med särskilt tillstånd, skrev *Cambridge Mathematical Tripos Exam* vilket sedan ledde till att kvinnor i allmänhet fick göra provet.[3] Hon har således på flera sätt spelat en stor roll för kvinnor inom matematiska studier och forskning. Det måste därför ses om lämpligt att hennes arbete, via arbeten som detta, lever vidare i generationer efter henne.

2.1 An Introductory Account of Certain Modern Ideas And Methods in Plane Analytical Geometry (1894)

Studieobjektet för detta arbete publicerades 1894 och beskrivs som ett väl använt verk av såväl nya studenter som forskare. Matematikern Frank Nelson Cole recenserade verket 1896 och gav bland annat Scott beröm för hennes förmåga att skilja på generella och partikulära fenomen i bevisföringen.[4] Trots Coles beröm är detta arbetes ansats att korrigera och modernisera Scotts bevisföring. Vi kan alltså se att mycket har hänt sedan Scotts samtid. Till exempel har Alexandre Grothendieck

[2]Lorenat, Jemma, 'Certain Modern Ideas and Methods: "Geometric Reality" in the Mathcematics of Charlotte Angas Scott, Cambridge University Press, 2019. Hämtad från: https://www.cambridge.org/core/journals/review-of-symbolic-logic/article/abs/certain-modern-ideas-and-methods-geometric-reality-in-the-mathematics-of-charlotte-angas-scott/BB4A8502614C46AB95CCA22EABA87A8A.

[3]Clark Kenshaft, Patricia, 'Charlotte Angas Scott (1858-1931), Women of Mathematics: A Bio-bibliographic Sourcebook, 1987, s.242.

[4]Cole Nelson, Frank. 'An introductory Account of Certain Modern Ideas and Mathods in Plane Analytic Geometry (1894), by Charlotte Angas Scott', Bull. Amer. Marh. Soc. 2, 1896, 265-271. Hämtad från: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Scott$_books/$.

revolutionerat den algebraiska geometrin med en vinkel som Hyman Bass, University of Michigan, beskriver som 'cosmically genereall'.[5] Detta arbete blir på vis en uppdatering av Scotts verk.

[5] Jackson, Allyn, *Comme Appelé du Néant*-As If Summoned from the Void: The Life of Alexandre Grothendieck, Notices of the AMS Volume 51, No.4 (1038-1056), 2004, s.1038. Hämtad från: http://www.ams.org/notices/200409/fea-grothendieck-part1.pdf.

3

Punkt- och linjekoordinater

3.1 Den generella idén bakom koordinater

I kapitlets inledande del berörs fler punkter än de jag ämnar behandla här. Scott nämner till exempel olika typer av koordinater - *dipolära* och *konfokala.* Dessa kommer jag lämna där hän. Vad som dock för detta arbetes syfte är värt att behandla är Scotts inledande dikussion om så kallade *primära-* och *sekundära element.* Scott skriver att vi återkommande kommer ha andledning att studera relationen mellan de två geometriska teorierna om huruvida vi ser *punkten som det primära elementet definierat av två sekundära element - linjer,* eller *linjen som det primära elementet definierat av två sekundära punkter.* När vi studerar planet menar Scott att det inte finns ett givet element att betrakta i planet - även om punkten för oss kan tyckas vara given (detta kan, särskilt för den moderna läsaren, diskuteras...).

En annan diskussionspunkt vi kommer behandla är den om hur många koordinater vi vill använda när vi beskriver ett elements position i (i detta fall) planet. Scott använders sig av begreppet *frihetsgrader* (en direktöversättning av det egentliga begreppet ´degrees of freedom´) och menar att de *nödvändiga* antalet koordinater bestäms av hur många sätt elementet kan röra sig i det avsedda rummet. På en linje kan en punkt röra sig horisontellt - därför har den en frihetsgrad. Men i planet kan den röra sig horisontellt *och* diagonalt - två frihetsgrader. På tallinjen räcker det med en koordinat att beskriva en punkts position, i planet behövs två. Scott menar dock att det i många fall kan vara bekvämt att använda fler koordinater än nödvändigt - till exempel i en studie av relationen mellan punkten och linjen.

Det främsta ämnet Scott behandlar i arebtet som här ska analyseras är alltså det om relationen mellan punkten och linjen. Ämnet kan sammanfattas med följande frågeställningar:

Fråga. Hur beskrivs och bestäms det *primära elementet* inom de två geometriska teorierna?

Fråga. Vilken relation har punkten och linjen i linje- respektive punktsystemet?

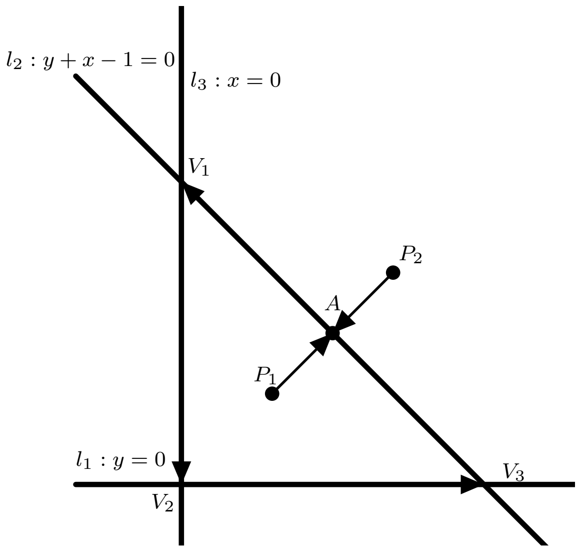
3.2 Homogena punktkoordinater

I denna del av kapitlet följer Scott upp tidigare nämnda påstående att vi, trots att planet är tvådimensionellt, kan beskriva ett element med tre koordinater i relation till varandra. Detta visar hon bland annat med hjälp av *signed distances* som vi översätter till *teckengivna avstånd.*

I diskussionen som följer nedan vill vi använda avstånd från en punkt till linje för att definiera koordinater. Eftersom att vi vill att våra koordinater ska kunna vara både positiva och negativa fixerar vi en orientering till linjerna genom att konstruera vektorer längs dem.

Definition 3.1. Det *teckengivna avståndet* från en punkt **P** till en riktad linje l_i ges av *vektorproduktens tecken* av vektorn som kan konstrueras längs den vinkelräta linjen från punkten **P** till linjen l_i och en vektor längs l_i. Som en följd av det *teckengivna avståndet* d_1 blir också *arean* av parallellogrammet vars bas och höjd utgörs av vektorernas längder, d_i och $|\vec{AB}|$, *teckengiven.*

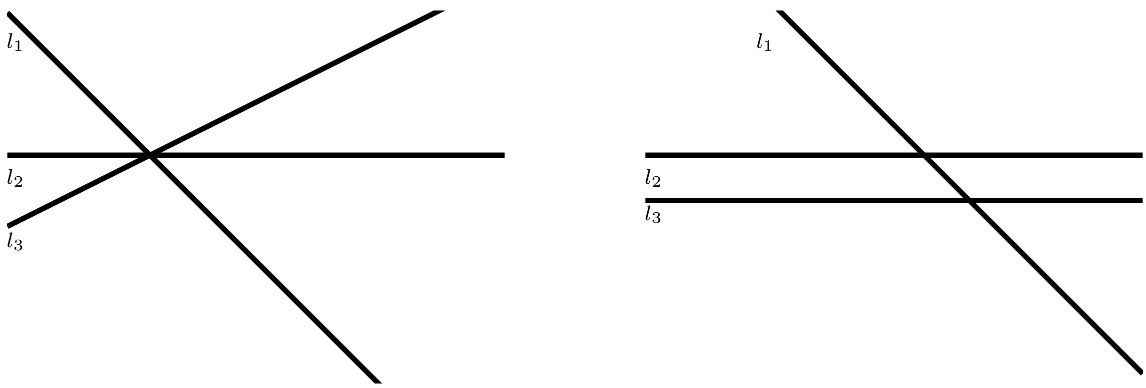
Exempel 3.2. Se figur 1. Låt de riktade linjerna $l_1 : y = 0, l_2 : x + y - 1 = 0$ och $l_3 : x = 0$ ges av vektorerna mellan linjernas skärningspunkter V_1, V_2 och V_3. Linjernas riktningar ges av $\vec{V_2V_3}$, $\vec{V_3V_1}$ och $\vec{V_1V_2}$. Högerhandsregeln ger oss att det teckengivna avståndet d_{21} från P_1 till l_2 är positivt då vektorprodukten $\vec{P_1A} \times \vec{V_3V_1}$ är positiv. Avståndet d_{22} är med samma logik negativt.



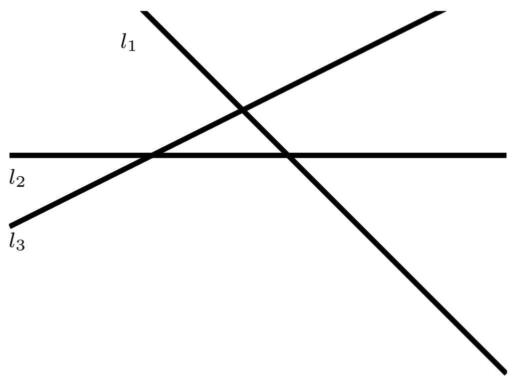
Figur 1

Har vi två icke-parallella riktade linjer kan vi med teckengivna avstånd beskriva alla punkter, detta känner vi igen från koordinatsystemet med $x-$ och $y-$axeln. Scott menar att det ibland kan vara gynnsamt att använda fler koordinater än två och visar på en punkt i det två-dimensionella planet kan beskrivas med tre koordinater. Utöver *teckengivna avstånd* använder sig Scott av geometriska egenskaper så kallade *non concurrent lines*, dessa direktöversätter vi till *icke-konkurrenta linjer.*

Definition 3.3. Tre *Icke-konkurrenta linjer* är parvis icke-parallella och skär endast varandra parvis i samma punkt.



Figur 2: Konkurrenta linjer



Figur 3: Icke-konkurrenta linjer

Exempel 3.4. Se figur 2. Linjerna i är konkurrenta på olika vis. Till vänster skär alla tre i samma punkt, till höger är två av linjerna parallella. I figur 3 ser vi tre icke-konkurrenta linjer. Observera att de bildar en triangel.

3.2.1 Att beskriva en punkt med tre koordinater

Tre icke-konkurrenta linjer l_1, l_2 och l_3 bildar en triangel $V_1V_2V_3$ där vertex V_i ligger mittemot l_i. Vi fixerar orienteringar för linjerna givna av vektorerna $\vec{V_1V_3}, \vec{V_3V_2}$ och $\vec{V_2V_1}$. Med de fixerade riktningarna kan vi nu beskriva en punkt $\mathbf{P}$ med koordinaterna (d_1, d_2, d_3) där d_i är det *teckengivna avståndet* från P till l_i.

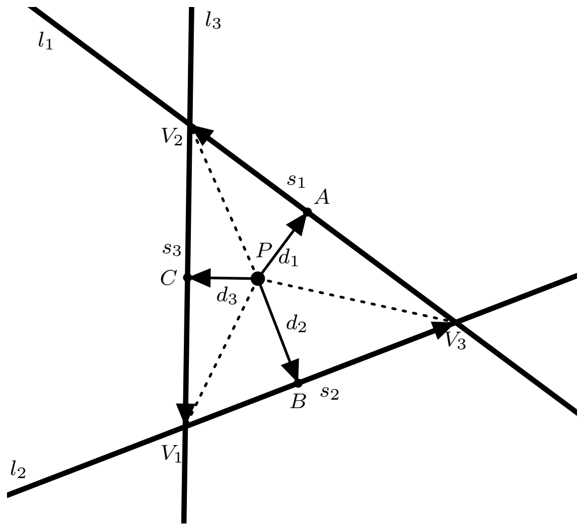
Sats 3.5. *Låt sidorna av triangeln $V_1V_2V_3$ betecknas s_1, s_2 och s_3 och arean av den $\Delta V_1V_2V_3$. Vi har då:*

$$s_1d_1 + s_2d_2 + s_3d_3 = 2\Delta V_1V_2V_3,$$

***P**s position bestäms således av relationen*

$$d_1 : d_2 : d_3.$$

Bevis av sats 3.5. Betrakta planet $z = 0$ i $\mathbb{R}^3$. Vi använder oss av standardbasen (e_1, e_3, e_3). I fallet då $\mathbf{P}$ ligger i triangeln $V_1V_2V_3$ får vi:



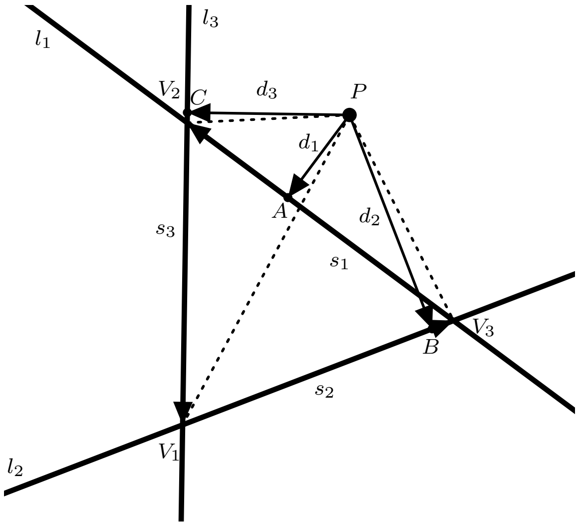
Figur 4: **P** ligger i triangeln.

$$s_1d_1 + s_2d_2 + s_3d_3 = 2\Delta PV_2V_3 + 2\Delta PV_1V_3 + 2\Delta PV_1V_2.$$

Vi applicerar resonemanget i vektorstrukturen och ser att $2\Delta PV_2V_3e_3 + 2\Delta PV_1V_3e_3 + 2\Delta PV_1V_2e_3 = \vec{PA} \times \vec{V_3V_2} + \vec{PB} \times \vec{V_1V_3} + \vec{PC} \times \vec{V_2V_1}$. Vektprodukten ger oss att

$$\vec{PA} \times \vec{V_3V_2} + \vec{PB} \times \vec{V_1V_3} + \vec{PC} \times \vec{V_2V_1} = 2\Delta V_1V_2V_3.$$

Vektorstrukturen kan ovan tyckas överflödig. Vi ser att de vinkelräta linjerna med längd d_i delar upp triangeln i tre delar och kan snabbt dra slutsatsen att arealikheten stämmer. Vi ska dock se att de givna orienteringarna är nödvändiga i nästföljande fall.



Figur 5: **P** ligger utanför triangeln.

I fallet då **P** är *utanför* triangeln börjar vi bakifrån:

$$2\Delta V_1V_2V_3 = -2\Delta PV_2V_3 + 2\Delta PV_1V_3 + 2\Delta PV_1V_2,$$

vilket ger oss

$$2\Delta V_1V_2V_3e_3 = -2\Delta PV_2V_3e_3 + 2\Delta PV_1V_3e_3 + 2\Delta PV_1V_2e_3.$$

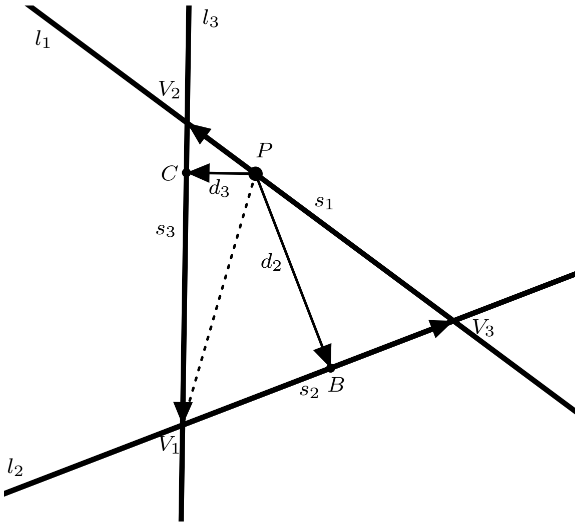
Vi observerar, med hjälp av högerhandsregeln, att $\vec{PA} \times \vec{V_3V_2}$ är negativ:

$$-2\Delta PV_2V_3e_3 + 2\Delta PV_1V_3e_3 + 2\Delta PV_1V_2e_3 = \vec{PA} \times \vec{V_3V_2} + \vec{PB} \times \vec{V_1V_3} + \vec{PC} \times \vec{V_2V_1}.$$

Och vi får:

$$= s_1d_1 + s_2d_2 + s_3d_3.$$

Scott nämner inte fallet då punkten är på någon eller några av linjerna l_1, l_2, l_3. Men vi ska se att relationen stämmer även då.



Figur 6: **P** ligger på någon av linjerna.

Om **P**, som i figuren, ligger på en av linjerna har vi att någon av d_1, d_3 eller $d_3 = 0$. Låt $d_1 = 0$. Då har vi:

$$s_1 d_1 + s_2 d_2 + s_3 d_3 = 0 + 2\Delta PV_1V_3 + 2\Delta PV_1V_2$$

vilket är lika med

$$\vec{PB} \times \vec{V_1V_3} + \vec{PC} \times \vec{V_2V_1} = 2\Delta V_1V_2V_3.$$

Om **P** ligger i någon av skärningspunkterna har vi att *två* av d_1, d_2 eller $d_3 = 0$. Låt $d_1, d_2 = 0$:

$$s_1 d_1 + s_2 d_2 + s_3 d_3 = 0 + 0 + s_3 d_3 = \vec{PC} \times \vec{V_2V_1} = 2\Delta V_1V_2V_3.$$

Till sist observerar vi att fallet då $d_1, d_2, d_3 = 0$ inte är möjligt på grund av linjernas icke-konkurrenta karaktär. Alla möjliga fall tillfredsställer satsen. Vi har alltså att om $s_1 d_1 + s_2 d_2 + s_3 d_3 = 2\Delta$ så

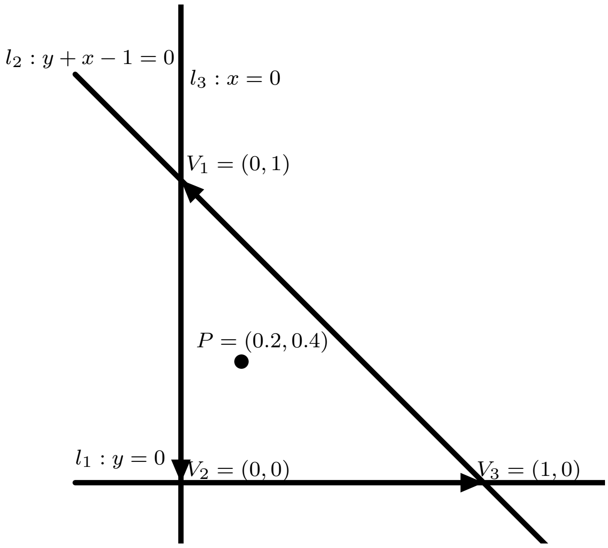
$$d_1 \frac{s_1}{2\Delta} + d_2 \frac{s_2}{2\Delta} + d_3 \frac{s_3}{2\Delta} = 1.$$

Med grund i detta kan vi konstatera att **P**s position bestäms av relationen mellan avstånden: $d_1 : d_2, d_2 : d_2$. Detta implicerar den tredje relationen $d_1 : d_3$. $\square$

Exempel 3.6. Areasambandet ger oss att om $s_1d_1 + s_2d_2 + s_2d_3 = 2\Delta V_1V_2V_3$ så

$$d_1\frac{s_1}{2\Delta V_1V_2V_3} + d_2\frac{s_2}{2\Delta V_1V_2V_3} + d_3\frac{s_3}{2\Delta V_1V_2V_3} = 1.$$

Samtliga variabler är oss givna om vi 1. vet vilken punkt eller vektor, (x_1, y_1), vi vill beskriva, 2. vet vilka linjer, $ax + by + c = 0$, vi utgår ifrån. Vi återvänder till vårt exempelsystem av linjerna $l_1 : y = 0, l_2 : y + x - 1 = 0$ och $l_3 : x = 0$.



Figur 7

I figur 7 ser vi triangeln $V_1V_2V_3$ med arean $1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Alltså har vi att $2\Delta V_1V_2V_3 = 1$. Avstånden från l_1 respektive l_3 till $\mathbf{P}$ är oss givna då vi ser att de går längs $x-$ respektive $y-$axeln. Vi ser att $d_1 = \frac{2}{5}$ och $d_3 = \frac{1}{5}$. Vidare påminner vi oss om att avståndet från en punkt (x_1, y_1) till en linje $ax + by + x = 0$ kan beräknas:

$$\frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2.}}$$

Avståndet från $l_2 : x + y - 1 = 0$ till $P = (0.2, 0.4), d_2$, beräknas då:

$$\frac{|1 \cdot 0.2 + 1 \cdot 0.4 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|-0.4|}{\sqrt{2}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{5}.$$

Till sist ser vi avstånden på sidorna av triangeln: $s_1, s_2, s_3 = 1, \sqrt{2}, 1$. Vi har:

$$s_1d_1 + s_2d_3 + s_3d_3 = 1 \cdot \frac{1}{5} + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{5} + 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{5}{5} = 1.$$

I vårt koordinatsystem kan vi nu säga:

$$P = (d_1, d_2, d_3) = \left(\frac{2}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{1}{5}\right).$$

För att summera kan vi i det fixerade linjesystemet $l_1 : y = 0, l_2 : y + x - 1 = 0, l_3 : x = 0$ (som vi kommer använda oss av i samtliga exempel framöver) konstruera ett sätt att transformera våra punktkoordinater, (x, y), till Scotts punktkoordinater, (d_1, d_2, d_3). Eftersom $s_1 d_1 + s_2 d_2 + s_3 d_3 = 1, d_1 = y, d_3 = x$ och $s_1, s_2 s_3 = 1, \sqrt{2}, 1$ i det fixerade systemet kan vi säga att om $\sqrt{2} \cdot d_3 = 1 - 1 \cdot y - 1 \cdot x$ så är $d_3 = \frac{1-y-x}{\sqrt{2}}$. I de exempel som framöver kommer göras i systemet $l_1 : y = 0, l_2 : y + x - 1 = 0, l_3 : x = 0$ är således koordinaterna (x, y) översättbara till (d_1, d_2, d_3) på följande vis:

$$\left(y, \frac{1 - y - x}{\sqrt{2}}, x\right) = (d_1, d_2, d_3).$$

3.2.2 Linjens ekvation

För en punkt på linjen l_i gäller att $d_i = 0$. Således är ekvationen för varje linje $l_i : d_i = 0$. I följande resonemang kommer ovan beskrivna vektorstruktur inte visas. Vi antager den dock och hänvisar till beviset av sats 3.5 i frågor kring dess verkan.

Sats 3.7. *Låt avstånden från en punkt* $\boldsymbol{P}$ *till fyra icke-konkurrenta linjer* l_1, l_2, l_3 *och* l_4 *betecknas* d_1, d_2, d_3 *och* d_4. *Låt sidorna av trianglarna som bildas,* $V_1 V_2 V_3$ *och* $V_1' V_2' V_3$, *betecknas* s_1, s_2, s_3 *respektive* s_1'', s_2'', s_4. *Vi kan då uttrycka linjen* l_4 *på följande vis:*

$$d_4 = f d_1 + g d_2 + h d_3 = 0.$$

Bevis av sats 3.7. Från sats 3.5 vet vi om figur 8 att:

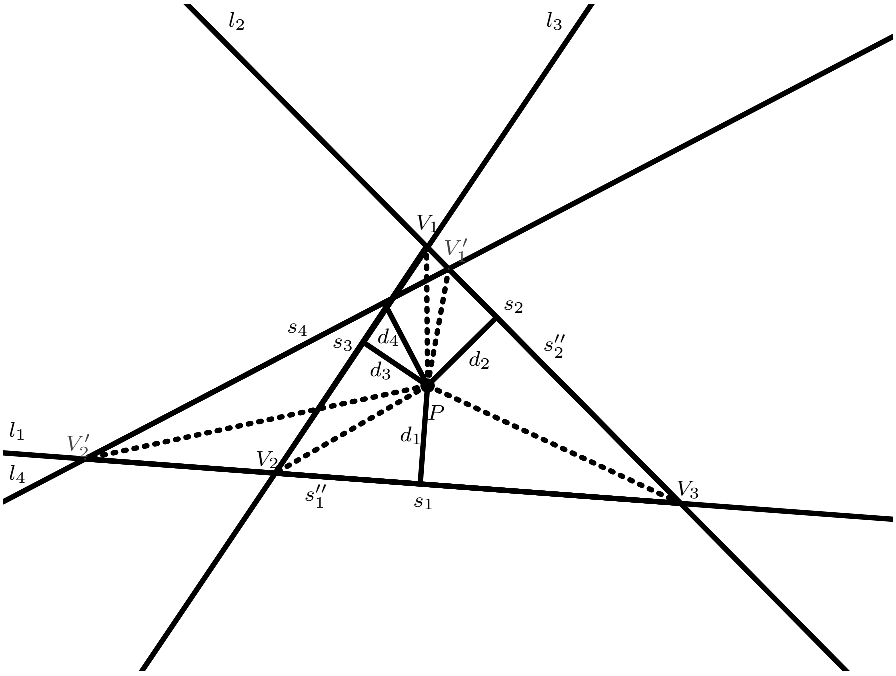
$$d_1 \frac{s_1}{2\Delta V_1 V_2 V_3} + d_2 \frac{s_2}{2\Delta V_1 V_2 V_3} + d_3 \frac{s_3}{2\Delta V_1 V_2 V_3} = 1$$

och

$$d_1 \frac{s_1''}{2\Delta V_1' V_2' V_3} + d_2 \frac{s_2''}{\Delta V_1' V_2' V_3} + d_4 \frac{s_4}{2\Delta V_1' V_2' V_3} = 1.$$

Låt nu s_1', s_2', s_3' beteckna $\frac{s_1}{2\Delta V_1 V_2 V_3}, \frac{s_2}{2\Delta V_1 V_2 V_3}, \frac{s_3}{2\Delta V_1 V_2 V_3}$ och s_1''', s_2''', s_4' beteckna $\frac{s_1''}{2\Delta V_1' V_2' V_3}, \frac{s_2''}{\Delta V_1' V_2' V_3}, \frac{s_4}{\Delta V_1' V_2' V_3}$. Då får vi:

$$d_1 s_1' + d_2 s_2' + d_3 s_3' = d_1 s_1''' + d_2 s_2''' + d_4 s_4',$$



Figur 8: l_1, l_2 och l_3 skapar triangeln $V_1V_2V_3$ med sidorna s_1, s_2 och s_3. En fjärde linje l_4 skapar en ny triangel $V_1'V_2'V_3$ med nya sidor s_1'', s_2'' och s_4. Avstånden till samtliga linjer l_i från $\mathbf{P}$ betecknas d_1.

vilket leder till att

$$d_1(s_1' - s_1''') + d_2(s_2' - s_2''') + d_3s_3' - d_4s_4' = 0.$$

Och vi får:

$$d_4 = d_1\frac{s_1' - s_1'''}{s_4'} + d_2\frac{s_2' - s_2'''}{s_4'} + d_3\frac{s_3'}{s_4'.}$$

Vi har nu uttryckt d_4 som en ekvation för linjen l_4. Vi kan beteckna variablerna med f, g och h och får:

$$l_4 : d_4 = fd_1 + gd_2 + hd_3 = 0.$$

$\square$

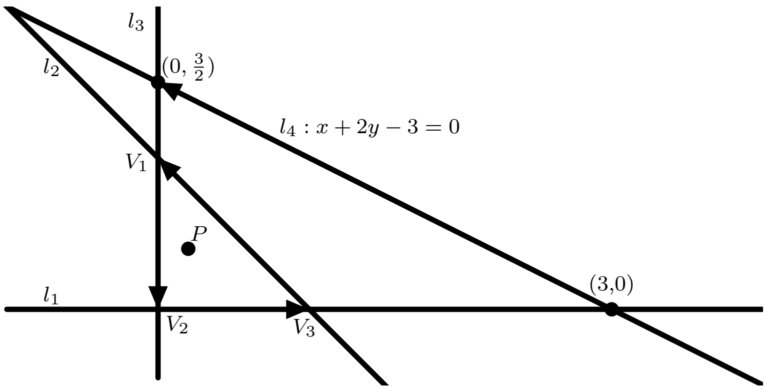
Relationen mellan våra punktkoordinatmängder ger oss att om $d_1 : d_2 : d_3$ så $ld_1 : md_2 : nd_3$, där l, m, n är godtyckliga skalärer $\in \mathbb{R}$. Låt nu 2Δ beteckna arean som de godtyckliga icke-konkurrenta linjerna l_1, l_2 och l_3 bildar. Vi säger att $x, y, z = ld_1, md_2, nd_3$. Vi har då:

$$2\Delta = s_1d_1 + s_2d_2 + s_3d_3 = \frac{s_1}{l}x + \frac{s_2}{m}y + \frac{s_3}{n}z$$

vilket betyder att

$$\frac{s_1}{2\Delta l}x + \frac{s_2}{2\Delta m}y + \frac{s_3}{2\Delta n}z = 1,$$

som vi kan skriva om till $ax+by+cz = 1$. Av detta följer för varje godtycklig linje l_4 att $fd_1 + gd_2 + hd_3 = 0$ kan skrivas om som $f'x + g'y + h'z = 0$. Denna omskrivning kommer vi få användning av lite senare, men för vår exemplifiering håller vi oss till $l_4 : fd_1 + gd_2 + hd_3 = 0$.



Figur 9

Exempel 3.8. I vårt exempelsystem $l_1 : y = 0, l_2 : y + x - 1 = 0, l_3 : x = 0$ inför vi en fjärde linje $l_4 : x+2y-3 = 0$. Denna vill vi uttrycka i Scotts koordinater. Vi vet, på grund av punktens koordinater, $P = \left(\frac{2}{5}, \frac{\sqrt{2}}{5}, \frac{1}{5}\right)$ att $d_1 = \frac{2}{5}, d_2 = \frac{\sqrt{2}}{5}$ och $d_3 = \frac{1}{5}$. Vi vet också att $s_1 = 1, s_2 = \sqrt{2}$ och $s_3 = 1$ och som en följd av det att $\Delta V_1V_2V_3 = \frac{1}{2}$ Om vi i enlighet med sats 3.7 vill uttrycka l_4 i Scotts koordinater måste vi ta reda på d_4 och sidorna s_1'', s_3'', s_4 i den nya triangeln V_1', V_2, V_3'. Vi ser i figur 9 att om $s_1'' = x$ då $y = 0, x + 2 \cdot 0 - 3 = 0$ så $x = 3 = s_1''$. Och om $s_3'' = y$ då $x = 0, 0 + 2y - 3 = 0$ $y = \frac{3}{2} = s_3''$. Och nu kan vi med Pythagoras sats räkna ut s_4 :

$$s_4 = \sqrt{s_1''^2 + s_3''^2} = \sqrt{\frac{45}{4}} = \frac{3\sqrt{5}}{2},$$

samt arean på den nya triangeln: $\Delta V_1'V_2V_3' = \frac{3\frac{3}{2}}{2} = \frac{9}{4}$.

Låt nu s_1', s_2', s_3' beteckna

$$\frac{s_1}{2\Delta V_1V_2V_3}, \frac{s_2}{2\Delta V_1V_2V_3}, \frac{s_3}{2\Delta V_1V_2V_3}$$

och s_1''', s_3''', s_4' beteckna

$$\frac{s_1''}{2\Delta V_1'V_2V_3'}, \frac{s_3''}{\Delta V_1'V_2V_3'}, \frac{s_4}{\Delta V_1'V_2V_3'}.$$

Då får vi att om $d_1s_1' + d_2s_2' + d_3s_3' = d_1s_1''' + d_3s_3''' + d_4s_4'$ så

$$d_1(s_1' - s_1''') + d_2s_2' + d_3(s_3' - s_3''') - d_4s_4' = 0.$$

Vilket ger oss att

$$d_4 = d_1\frac{s_1' - s_1'''}{s_4'} + d_2\frac{s_2'}{s_4'} + d_3\frac{s_3' - s_3'''}{s_4'.}$$

Vi har nu uttryckt d_4 som en ekvation för linjen l_4. Vi kan beteckna variablerna med f, g och h och får:

$$l_4 : d_4 = d_1f + d_2g + d_3h = 0.$$

Vi räknar ut f, g och h och får att

$$f = \frac{2}{9\sqrt{5}}, g = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}, h = \frac{4}{9\sqrt{5}},$$

alltså gäller följande för l_4 :

$$l_4 : d_4 = \frac{2}{9\sqrt{5}}d_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}d_2 + \frac{4}{9\sqrt{5}}d_3 = 0.$$

Linjens ekvation kan förenklas och skrivas:

$$l_4 : d_4 = d_1 + 3\sqrt{2}d_2 + 2d_3 = 0.$$

Vi vill nu återigen finna ett sätt att konvertera 'vår' typ av linje, $l_4 : ax+by+x = 0$, till Scotts typ av linje - iallafall i det fixerade linjesystemet $l_1 : y = 0, l_2 : y+x-1 = 0, l_3 : x = 0$. Vi vet sedan tidigare att vi kan uttrycka koordinaterna (d_1, d_2, d_3) som $\left(y, \frac{1-y-x}{\sqrt{2}}, x\right)$ vilket ger oss att vi kan skriva $ax + by + c = 0$ som $ad_3 + bd_1 + c = 0$. Vidare vet vi att $d_1 + \sqrt{2}d_2 + d_3 = 1$ i vårt exempelsystem och kan skriva om linjens ekvation på följande vis:

$$ad_3 + bd_1 + c \cdot 1 = ad_3 + bd_1 + c(d_1 + \sqrt{2}d_2 + d_3) = 0.$$

Och vi får att:

$$(b+c)d_1 + c\sqrt{2}d_2 + (a+c)d_3 = 0,$$

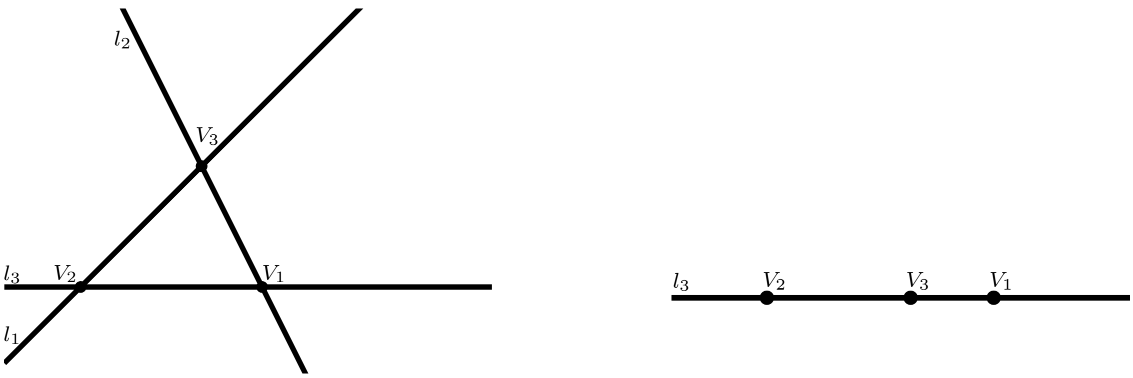
vilket ger oss ett sätt att skriva om $ax + by + c = 0$ till $fd_1 + gd_2 + hd_3$. Observera att vi inte kan sätta likhetstecken mellan f, g, h och $(b+c), c\sqrt{2}, (a+c)$. I ovan förda exempel får vi: $b+c = -1 \neq f = 1, c\sqrt{2} = -3\sqrt{2} \neq g = 3\sqrt{2}$ och $a+c = -2 \neq g = 2$. Vi kan däremot säga: $(f, g, h) = k(b+c, c\sqrt{2}, a+c)$ där $k \in \mathbb{R}$. Oavsett värdet på k blir linjerna som respektive ekvation representerar lika.

3.3 Homogena linjekoordinater

I detta avsnitt utreder Scott det andra av systemen ur vilka vi kan se på det så kallade *primära elementet* i planet. Härifrån ska vi betrakta *linjen* från fixerade *icke-kolinjära punkter.*

Definition 3.9. En punktmängd är *icke-kollinjär* om punkterna *inte* ligger på samma linje.

Exempel 3.10. Observera figur 10. Till vänster ser vi *Icke-kollinjära punkter.* Till höger - *kollinjära punkter*, linjerna l_1, l_2 och l_3 sammanfaller. Observera att tre *icke-kolinjära* punkter utgör varsitt vertex av triangeln som bildas av tre *icke-konkurrenta* linjer.



Figur 10

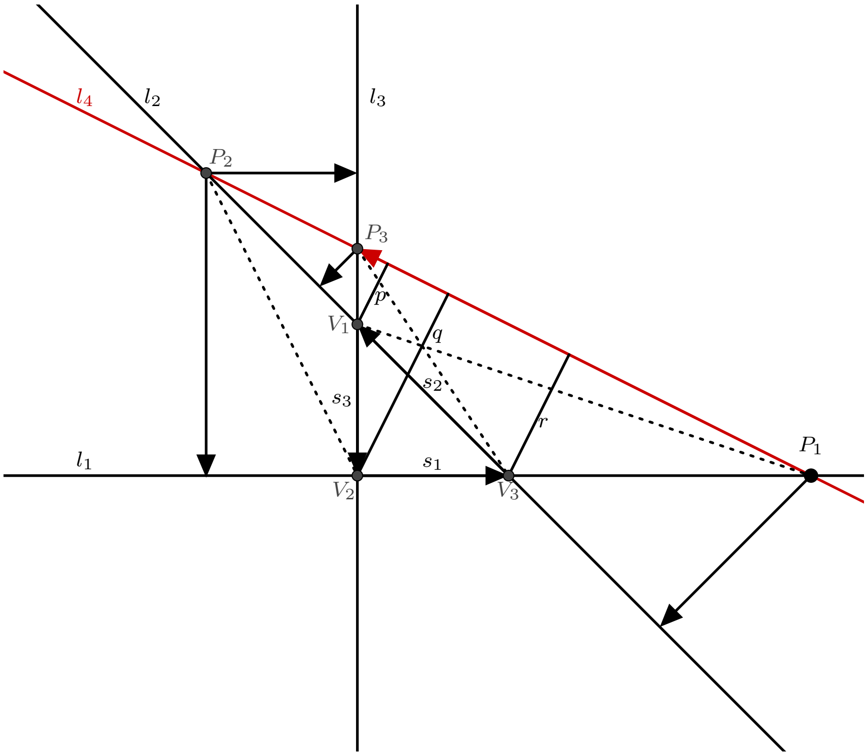
3.3.1 Att beskriva en linje med tre koordinater

Betrakta nu tre *icke-kolinjära punkter* V_1, V_2 och V_3. Dessa utgör varsitt vertex i triangeln som bildas av tre *icke-konkurrenta linjer* l_1, l_2, l_3. Låt avstånden till en ytterligare linje l_4 från punkterna V_1, V_2, V_3 betecknas p, q, r. På grund av punkternas icke-kolinjära egenskaper (och de genomgående linjernas icke-konkurrens som en följd) gäller för samtliga linjer l_i i ovan nämnda system att för minst två punkter P_i på l_i att d_1, d_2 eller $d_3 = 0$. Avstånden mellan punkterna betecknas som vanligt s_1, s_2, s_3 Linjen l_4 kan i enlighet med sats 3.7 beskrivas med ekvationen $d_4 = d_1 f + d_2 g + d_3 h$.

Sats 3.11. *Emellan avstånden från punkterna till och avstånden mellan punkterna V_1, V_2 och V_3 råder följande korrelation:*

$$f : g : h = s_1 p : s_2 q : s_3 r.$$

Linjen bestäms således av relationen $p : q : r$.



Figur 11: l_4 är icke-konkurrent mot samtliga linjer som bildar triangeln $V_1V_2V_3$. Observera att d_i inte är utmärkta, och riktningarna på vektorera längs avstånden är bara utmärkta i fall då de inte går längs l_1, l_2 eller l_3.

Bevis av sats 3.11. Låt figuren illustrera fallet då l_4 är icke-konkurrenta med samtliga linjer som går igenom punkterna V_1, V_2 och V_3. Punkten P_1 har koordinaterna

$d_{1_1}, d_{2_1}, d_{3_1}$, vi ser i 11 att $d_{1_1} = 0$. Alltså gäller för l_4 att $gd_{2_1} + hd_{3_1} = 0$. Vi ser på grund av likformighet att:

$$q : r = V_2P_1 : V_3P_1 = \Delta P_1V_1V_2 : \Delta P_1V_1V_3.$$

Som en följd av areasambandet, sats 3.5, vet vi att (observera att avstånden fortfarande är teckengivna - d_{2_1} är negativt):

$$q : r = s_3d_{3_1} : -s_2d_{2_1}$$

vilket ger oss

$$s_2q : s_3r = d_{3_1} : -d_{2_1},$$

och eftersom $gd_{2_1} + hd_{3_1} = 0$ får vi att $d_{3_1} : -d2_1 = g : h$. Alltså är

$$s_2q : s_3r = g : h.$$

På samma vis kan vi visa att $s_1p : s_2q = f : g$ genom att utgå från $P_2 = (d_{1_2}, d_{2_2}, d_{3_2})$ där $d_{3_2} = 0$ och l_4 kan beskrivas med $fd_{1_2} + gd_{2_2} = 0$. Detta ger oss slutligen:

$$f : g : h = s_1p : s_2q : s_3r.$$

I fallet då l_4 är parallell med någon av linjerna observerar vi att den fortfarande kommer skära de andra två och två förhållanden som implicerar det tredje kommer ändå kunna bevisas, likt ovan. Observera att i figuren hade vi kunnat visa förhållandet $r : p$ utifrån figuren och *inte* via implikationen. □

Exempel 3.12. I detta fall utgörs vårt exempelsystem av punkterna där exempellinjerna $l_1 : y = 0, l_2 : x + y - 1 = 0$ och $l_3 : x = 0$ skär i varadra: $(0, 0), (1, 0)$ och $(0, 1)$. Vi räknar ut p, q, r genom att beräkna avståndet från V_1, V_2 och V_3 till $l_4 : x + 2y - 3 = 0$ och får:

$$p = \frac{|0 + 2 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

$$q = \frac{|0 + 0 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}},$$

$$r = \frac{|1 + 0 - 3|}{\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5.}}$$

Linjens koordinater i punktsystemet kan således beskrivas

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}} : \frac{3}{\sqrt{5}} : \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = (1, 3, 2).$$

Med lite räkning ser vi nu att:

$$f = \frac{1}{3\sqrt{2}} g, s_1 p = \frac{1}{3\sqrt{2}} s_2 q.$$

Då kan vi säga att $f : g = s_1 p : s_2 q$, och:

$$g = \frac{3}{\sqrt{2}} h, s_2 q = \frac{3}{\sqrt{2}} s_3 r.$$

Detta betyder att $g : h = s_2 q : s_3 r$. vi får:

$$f : g : h = s_1 p : s_2 q : s_3 r.$$

Vi ser att formuleringen av linjen i punktsystemet i hög grad är beroende av formuleringen av punkten i linjesystemet. Detta ska vi se är av stor vikt för denna studies slutsats. Punkt-koordinaterna kunde vi härleda ur ett areasamband. Linje-koordinaterna härleds ur ett samband mellan linjens ekvation i linjesystemet och avståndet från linjesystemets tre vertex. I vårt exempelsystem, förut refererat till som $l_1 : y = 0, l_2 : x + y - 1 = 0$ och $l_3 : x = 0$ och nu som $V_1 = (0, 1), V_2 = (0, 0)$ och $V_3 = (1, 0)$, gäller, med grund i sats 3.7 och efterföljande exempel, att:

$$f : g : h = (b + c) : c\sqrt{2} : (a + c) = 1 \cdot p : \sqrt{2} q : 1 \cdot r.$$

Detta betyder att en linje $l : ax + by + c = 0$ bestäms av relationen $p : q : r = (b + c) : c : (a + c)$ i exempelsystemet $V_1 = (0, 1), V_2 = (0, 0)$ och $V_3 = (1, 0)$.

3.3.2 Punkten och linjen - förenade i position

Betrakta nu punkten (d_1, d_2, d_3) på en linje l. Då gäller för l att $fd_1 + gd_2 + hd_3 = 0$. Men om vi istället ser linjen som bestämd av p, q, r - avstånden från bestämda punkter, har vi att om $fd_1 + gd_2 + hd_2 = 0$ borde även $s_1 pd_1 + s_2 qd_2 + s_3 rd_3 = 0$, eftersom vi just bevisat att $f : g : h = s_1 p : s_2 q : s_3 r$. Detta är vad Scott kallar att *punkten* och *linjen* är förenade i position. Låt oss uttrycka detta på ett mer lätthanterligt vis. I avsnit 2.2.2 såg vi att varje godtycklig linje $l_4 : d_1 f + d_2 g + d_3 h = 0$

kan skrivas om som $f'x + g'y + h'z = 0$ genom att först sätta

$$x, y, z = ld_1, md_2, nd_3.$$

Då får vi att

$$d_1 = \frac{1}{l}x, d_2 = \frac{1}{m}y, d_3 = \frac{1}{n}z$$

och vi kan säga att $f' = f \cdot \frac{1}{l}$ och så vidare. På samma vis kan vi nu välja $\varepsilon, \eta, \zeta = \lambda p, \mu q, \nu r$ vilket ger oss att

$$p = \frac{1}{\lambda}\varepsilon, q = \frac{1}{\mu}\eta, r = \frac{1}{\nu}\zeta.$$

Då har vi att

$$s_1 pd_1 + s_2 qd_2 + s_3 rd_3 = \frac{s_1}{l\lambda}x\varepsilon + \frac{s_2}{m\mu}y\eta + \frac{s_3}{n\nu}z\zeta.$$

Eftersom λ, μ och ν i likhet med l, m och n är godtyckliga skalärer kan vi välja dem så att

$$\frac{s_1}{l\lambda} = \frac{s_2}{m\mu} = \frac{s_3}{n\nu}$$

vilket i sin tur ger oss att om $s_1 pd_1 + s_2 qd_2 + s_3 rd_3 = 0$ så är $x\varepsilon + y\eta + z\zeta = 0$. Då kan vi slutligen säga att punkten x, y, z och linjen ε, η, ζ är *förenade i position* om $x\varepsilon + y\eta + z\zeta = 0$.

Exempel 3.13. Vi vet sedan innan (se figur 9) att punkten $(3, 0)$ - eller i Scotts system: $\left(0, -\sqrt{2}, 3\right)$, ligger på linjen $l_4 : x + 2y - 3$, eller $d_4 = \frac{2}{9\sqrt{5}}d_1 + \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}d_2 + \frac{4}{9\sqrt{6}}d_3 = 0$ i vårt exempelsystem. Men vi kan också se på linjen som bestämd av $(p, q, r) = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ - avstånden från V_1, V_2, V_3. Vi ska nu välja l, m, n och λ, μ, ν så att

$$\frac{s_1}{l\lambda} = \frac{s_2}{m\mu} = \frac{s_3}{n\nu}.$$

Vi har att $s_1, s_2, s_3 = 1, \sqrt{2}, 1$ och vi bestämmer $l, m, n = 1, 1, 1$ samt $\lambda, \mu, \nu = 1, \sqrt{2}, 1$. Detta ger oss att

$$\frac{s_1}{l\lambda} = \frac{s_2}{m\mu} = \frac{s_3}{n\nu} = 1$$

$x, y, z = ld_1, md_2, md_3 = 0, -\sqrt{2}, 3$ och $\varepsilon, \eta, \zeta = \lambda p, \mu q, \nu r = \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}$. Slutligen får vi att

$$x\varepsilon + y\eta + z\zeta = 0 - \frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{6}{\sqrt{5}} = 0.$$

Punkten $(0, -\sqrt{2}, 3)$ och linjen $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ är förenade i position.

3.3.3 Punktens ekvation

Vi såg i avsnitttet ovan att linjens koordinatrelation i punktsystemet härleddes direkt ur linjens ekvation i linjesystemet. Här kan vi härleda punktens ekvation i punksystemet ur dess koordinater i linjesystemet. Båda härledningar görs med grund i relationen $f : g : h = s_1 p : s_2 p : s_3 r$. Låt oss exemplifiera genom att en sista gång göra en generalisering i vårt exempelsystem $V_1 = (0,1), V_2 = (0,0), V_3 = (1,0)$.

Vi vet att punkten sedan tidigare $P(x,y)$ har koordinaterna $\left(y, \frac{1-y-x}{\sqrt{2}}, x\right) = (d_1, d_2, d_3)$. Med grund i ovan förda resonemang kan vi också säga att om $fd_1 + gd_2 + hd_3 = 0$ så $s_1 pd_1 + s_2 qd_2 + s_3 rd_3 = 0$ vilket i vårt exempelpunktsystem system ger punkten ekvationen

$$py + q(1 - y - x) + rx = 0.$$

3.4 De två systemens relation

När vi nu redogjort för punkten och linjens ekvationer i respektive system kan vi i likhet med Scott framöver beskriva linjens ekvation med uttrycket $fx + gy + hz = 0$ och punktens ekvation med $f\varepsilon + g\eta + h\zeta = 0$. Med grund i relationen

$$l\lambda : m\mu : n\nu = s_1 : s_2 : s_3$$

menar Scott att oavsett om vi bestämmer värdena på l, m, n eller λ, μ, ν kommer det ena påverka det andra. På grund av detta härleds direkt vårt system av *linjekoordinater* när vi bestämmer vårt system av *punktkoordinater* och vice versa. Därför är uttrycket $x\varepsilon + y\eta + z\zeta = 0$ av av stor vikt för slutsatserna som kan dras från ovan förda resonemang. Den visar ju på kopplingen mellan punkt och linje i planet. Scott skriver att om vi gör uttryck för f, g, h i ε, η, ζ kan vi säga att *om en linjes ekvation är $fx + gy + hz = 0$, är linjens koordinater f,g,h.* Detta gör att vi kan röra oss från att beskriva en linje med *punktkoordinater* till *linjekooordinater.* Men samtidigt kan vi säga *linjen med koordinater ε, η, ζ går igenom punkten x, y, z om* $x\varepsilon + y\eta + z\zeta = 0$. Vi har avslutat varje avsnitt genom att genrealisera Scotts resonemang i exempelsystem. Här ska vi snarare göra egna uttryck för Scotts *förenade i position* och exemplifiera ytterligare. Vi uttrycker följdsatser för att på vårt vis belysa Scotts mening med *förenade i position.*

Följdsats 3.14. *I ett linjesystem ligger en punkt* $\boldsymbol{P}$ *med koordinaterna* (x, y, z) *på linjen* $l : fd_1 + gd_2 + hd_3 = 0$ *om och endast om*

$$fx + gy + hz = 0.$$

Följdsats 3.15. *I ett punktsystem går en linje* $\boldsymbol{l}$ *med koordinaterna* $(\varepsilon, \eta, \zeta)$ *genom punkten* $fp + gq + hr = 0$ *om och endast om*

$$f\varepsilon + g\eta + h\zeta = 0.$$

3.4.1 Systemens samspel, dualitet

När vi nu redogjort för punkten respektive linjens egenskaper i linje- respektive punktsystemet ska vi se att egenskaperna, med grund i ovan bevisade följdsatser, att konstruktionen av det ena elementets ekvation speglar den andras. Min, såväl som Scotts, poäng är att vi kan se linjen som bestämd av punkten eller punkten som bestämd av linjen. Vi ska nu synliggöra symmetrin som i längden utgör bryggan (som vi ej ska bestiga) till ämnet *dualitet*. Vi börjar med linjen,

Sats 3.16. *I ett linjesystem* l_1, l_2, l_3 *bestäms ekvationen till en linje som går igenom två distinkta punkter* $P_1 = (d_{11}, d_{21}, d_{31})$ *och* $P_2 = (d_{12}, d_{22}, d_{32})$ *av*

$$\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \end{vmatrix} = d_1 \begin{vmatrix} d_{21} & d_{31} \\ d_{22} & d_{32} \end{vmatrix} - d_2 \begin{vmatrix} d_{11} & d_{31} \\ d_{12} & d_{32} \end{vmatrix} + d_3 \begin{vmatrix} d_{11} & d_{21} \\ d_{12} & d_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Bevis av sats 3.16. Vi vet sedan tidigare att en linjens ekvation i linjesystemet kan uttryckas $fd_1 + gd_2 + hd_3 = 0$ för $(f, g, h) \neq (0, 0, 0)$ och att om P_1 och P_2 ligger på linjen har vi att

$$fd_{11} + gd_{21} + hd_{31} = 0$$
$$fd_{12} + gd_{22} + hd_{32} = 0.$$

Om en punkt $P = (d_1, d_2, d_3)$ också ligger på linjen har vi ett linjärt system med en icke-trivial lösning

$$\begin{pmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

vilket ger oss att

$$\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ d_{11} & d_{21} & d_{31} \\ d_{12} & d_{22} & d_{32} \end{vmatrix} = 0$$

och vi kan skriva linjens ekvation som

$$d_1 \begin{vmatrix} d_{21} & d_{31} \\ d_{22} & d_{32} \end{vmatrix} - d_2 \begin{vmatrix} d_{11} & d_{31} \\ d_{12} & d_{32} \end{vmatrix} + d_3 \begin{vmatrix} d_{11} & d_{21} \\ d_{12} & d_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

□

Exempel 3.17. Betrakta, i vårt exempelsystem $l_1 : y = 0, l_2 : x + y - 1 = 0$ och $l_3 : x = 0$, punkterna $P_1 = (0, 0, 1)$ och $P_2 = \left(1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$. Vi introducerar en tredje punkt, (d_1, d_2, d_3), som ligger på linjen och räknar ut följande determinant:

$$\begin{vmatrix} d_1 & d_2 & d_3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{vmatrix} = d_1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 1 \end{vmatrix} - d_2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + d_3 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} d_1 + d_2 = 0.$$

Vi ser att detta är i enlighet med vad vi hade kommit fram till om vi 'översatt' linjen $x - 1 = 0$, vilken i 'vårt' system enligt avsnitt 9 är linjen som går igenom P_1 och P_2, :

$$(b + c)d_1 + c\sqrt{2}d_2 + (a + c)d_3 = (0 - 1)d_1 + (-1)\sqrt{2}d_2 + (1 - 1)d_3$$

$$= -d_1 - \sqrt{2}d_2 = 0.$$

Vi ser att om $-d_1 - \sqrt{2}d_2 = 0$, så $\frac{1}{\sqrt{2}}d_1 + d_2 = 0$.

Sats 3.18. *Betrakta punktsystemet V_1, V_2, V_3 och låt två distinkta linjer med koordinaterna (p_1, q_1, r_1) och (p_2, q_2, r_2) vara givna. Skärningspunktens ekvation ges av*

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = p \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} - q \begin{vmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{vmatrix} + r \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Bevis av sats 3.18. Sedan tidigare vet vi att om linjerna (p_1, q_1, r_1) och (p_2, q_2, r_2)

går igenom punkten $fp + gq + hr = 0$ har vi att

$$fp_1 + gq_1 + hr_1 = 0$$
$$fp_2 + gq_2 + hr_2 = 0.$$

Om vi introducerar tredje linje (p, q, r) som också går igenom punkten har vi, som i fallet i punktsystemet, en icke-trivial lösning till följande:

$$\begin{pmatrix} p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \\ h \end{pmatrix}$$

och

$$\begin{vmatrix} p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Detta ger oss att vi kan uttrycka skärningspunktens ekvation på följande vis:

$$p \begin{vmatrix} q_1 & r_1 \\ q_2 & r_2 \end{vmatrix} - q \begin{vmatrix} p_1 & r_1 \\ p_2 & r_2 \end{vmatrix} + r \begin{vmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{vmatrix} = 0.$$

□

Exempel 3.19. Betrakta, i vårt exempelsystem $V_1 = (0, 1), V_2 = (0, 0)$ och $V_3 = (1, 0)$ linjerna $l_1 = (0, 1, 1)$ och $l_2 = (1, 1, 0)$. Vi introducerar en tredje linje, (p, q, r), som också går igenom linjernas skärningspunkt och räknar på determinanten

$$\begin{pmatrix} p & q & r \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.$$

Vi får

$$p \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - q \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + r \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix},$$

vilket ger oss skärningspunktens ekvation

$$-p + q - r = 0.$$

Vi har visat på en korrespondens mellan linje- respektive punktsystemet. Detta arbete stannar där Charlotte Angas Scott inleder en ny del av sin bok. Hon skriver:

> The underlying principle manifested in this correspondence is known as the Principle of Duality. The meaning of the name, the importance of the principle, and the utility of the correspondence, will appear more plainly in the following chapters.[6]

[6] Scott 1894, s.15.

4

Litteraturförteckning

Källtext

Scott, Charlotte Angas. *An Introductory Account of Certain Modern Ideas and Methods in Plane Analytical Geometry*, London: Macmillan and Co, 1894. Hämtad från: https://archive.org/details/ introductoryacco00scot/page/ 14/mode/2up?ref=olview=theater.

Referenslista

Clark Kenshaft, Patricia. ”Charlotte Angas Scott (1858-1931).” i Grinstein, Louise S. Campbell, Paul J. (red.), *Women of Mathematics: A Bio-bibliographic Sourcebook.*, 1987.

Cole Nelson, Frank. ”An Introductory Account of Certain Modern Ideas and Methods in Plane Analytic Geometry (1894), by Charlotte Angas Scott.” i *Bulletin of the American Mathematical Society 2*, 1896: 265-271. Hämtad från: https://mathshistory.standrews.ac.uk/Extras/Scottbooks/.

Jackson, Allyn. "Comme Appelé du Néant-As If Summoned from the Void: The Life of Alexandre Grothendieck."i *Notices of the AMS Volume 51,* No.4 (1038-1056), 2004. Hämtad från: http://www.ams.org/notices/200409/fea-grothendieck-part1.pdf

Lorenat, Jemma. "Certain Modern Ideas and Methods: ’Geometric Reality’ Mathematics of Charlotte Angas Scott."i *Cambridge University Press.* 2019. Hämtad från: https://www.cambridge.org/core/journals/review-of-symbolic-logic/article/abs/certain-modern-ideas-and-methods-geometric-reality-in-the-mathematics-of-charlotte-angas-scott/BB4A8502614C46AB95CCA22EABA87A8A