



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

**Diskret geometri:
Incidensgeometri och alternativt synsätt på
Kakeya-problemet**

av

Daniel Prosianik

2024 - No K13

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Diskret geometri:
Incidensgeometri och alternativt synsätt på
Kakeya-problemet

Daniel Prospanik

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Olof Sisask

2024

Sammanfattning

Denna uppsats ger insyn i diskret geometri, genom att analysera två intressanta problem: vad är det minsta antalet korsningar för grafer ritade i planet och användningen av polynommetoden på Kakeyamängder över ändliga kroppar. Uppsatsen presenterar korsningsnummerolikheten - en central sats inom incidensgeometrin som anger det minsta antalet korsningar som en graf ritad i planet kan erhålla. Denna sats tillämpas sedan på Szemerédi-Trotters sats om minsta antalet incidenser mellan punkter och linjer. Vidare undersöker vi hur polynommetoden kan användas för att lösa problemet med Kakeyamängder över ändliga kroppar, och ger även en bakgrund till det klassiska Kakeya problemet. Genom att tillämpa polynommetoden utforskar vi dess potential som ett problemlösningsverktyg, och erbjuder ett alternativt synsätt på Kakeya problemet.

Abstract

This thesis provides insights into discrete geometry by analyzing two interesting problems: the minimum number of crossings in a graph drawn in the plane and application of the polynomial method on finite field Kakeya problem. This thesis begins by presenting the crossing number inequality - an important theorem in the incidence geometry field, that determines the least amount of crossings a graph can have when drawn in the plane. We then apply this inequality to the Szemerédi-Trotter theorem, which is about the possible number of incidences between lines and points. Finally, we explore the polynomial method in the context of the finite field Kakeya problem, as well as a background to the original Kakeya problem. By applying the polynomial method, we demonstrate its potential in future usage and provide an alternative perspective on the Kakeya problem.

Tacksamhet

Jag vill rikta ett stort tack till min handledare Olof Sisask för hans stöd under arbetet och bidrag till min kunskapsutveckling. Jag vill även tacka Rasmus Abrahamsson och Erik Ginell för deras hjälp med korrekturläsning av uppsatsen. Sist men inte minst - vill jag tacka min mor, Julia, för hennes ovärderliga stöd och uppmuntran.

Innehåll

1	Introduktion	9
2	Incidensgeometri	10
2.1	Grafer	10
2.1.1	Delgrafer	12
2.1.2	Speciella typer av grafer	13
2.2	Grafer ritade i planet	13
2.2.1	Ritning av en graf	13
2.2.2	Grafens regioner	14
2.2.3	Korsningsnumret av en ritad graf	14
2.3	Sannolikhet	15
2.4	Eulers formel	16
2.5	Korsningsnummersolikheten	19
2.5.1	Teori bakom korsningsnummersolikheten	19
2.5.2	Bevis av korsningsnummersolikheten	21
2.5.3	Applikation av korsningsnummersolikheten	23
2.5.4	Det förmodade korsningsnumret för en komplett graf	24
2.5.5	Utvecklingen av konstanten i korsningsnummersolikheten	25
2.6	Szemerédi-Trotters sats	25
2.6.1	Incidenser mellan punkter och linjer	25
2.6.2	Bevis av Szemerédi-Trotters sats med hjälp av korsningsnummersolikheten	27
2.6.3	Szemerédi-Trotters sats jämfört med den triviala begränsningen	28
3	Takeya	29
3.1	Introduktion av polynommetoden	29
3.2	Historien bakom Takeya problemet: Diskret och kontinuerligt	29
3.2.1	Takeya problemet	29
3.2.2	Takeya problemet över ändliga kroppar	30
3.2.3	Dvir löser Takeya problemet över ändliga kroppar	31
3.2.4	Exempel på ändlig Takeya	31
3.3	Grundläggande definitioner inför polynommetoden	33
3.3.1	Polynom	35
3.3.2	Notation	36
3.3.3	Linjär avbildning och dimensionssatsen	36
3.4	Polynommetoden	37
3.4.1	Dvirs banbrytande lösning av ändlig Takeya med polynommetoden	41
3.4.2	Sammanfattning av beviset	42
4	Slutsats	42
	Referenser	44

1 Introduktion

Enkla problem kan vid första anblick verka självklara. Vår intuition kan dock bedra oss, och vår mänskliga förmåga att överskatta vår kunskap kan leda till att vi underskattar komplexiteten i vissa frågor. Diskret geometri är ett sådant område. Ta till exempel problemet med att bestämma det minsta antal korsningar en graf ritad i planet kan ha. Vi kanske tror oss veta vad svaret är intuitivt, men vid djupare undersökning visar det sig att svaret inte är lika självklart.

Diskret geometri är en gren av matematiken som studerar strukturer och egenskaper som är diskreta snarare än kontinuerliga. Ett delområde av diskret geometri är incidensgeometri, som bland annat intresserar sig för relationen mellan punkter och linjer. Ett särskilt intressant problem inom incidensgeometrin är crossing number inequality, eller korsningsnummersolikheten på svenska. Detta problem handlar om det minsta antal korsningar som kan uppstå när en graf ritas i planet, där grafens noder och kanter kan tänkas vara punkter respektive linjer.

Korsningsnummersolikheten kan användas för att tackla andra matematiska problem, som bland annat Szemerédi–Trotters sats. Denna sats talar om antalet möjliga incidenser mellan punkter och linjer i det euklidiska planet.

Ett annat intressant problem som inte ursprungligen hörde hemma i den diskreta geometrin är Kakeya problemet. Frågan den ställer sig lyder: givet att man roterar en nål 360 grader, vad är den minsta arean som kan innesluta nålen? Detta kan ses som att man har en linje i varje riktning. Kakeya problemet transformerades senare till den diskreta geometrin genom att anta ett nytt perspektiv, där Wolff undrade om man såg Kakeya problemet över ändliga kroppar.

Det skulle behövas nya verktyg och metoder för att kunna tackla Kakeyas problem över ändliga kroppar. Med mycket möda kom man fram till den briljanta tanken: polynommetoden. Polynommetoden användes för att bevisa hypotesen om Kakeyas problem över ändliga kroppar. Vilket inte bara gav ett nytt verktyg för att lösa matematiska problem, utan även en ny synvinkel.

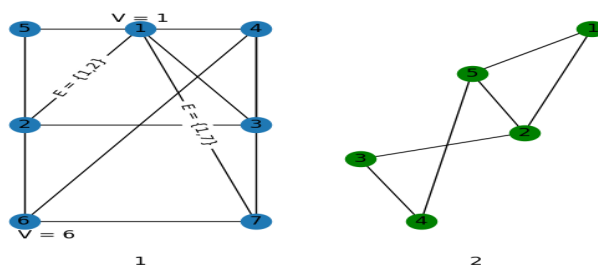
I denna uppsats kommer vi utforska korsningsnummersolikheten, liksom ge bakgrundsfakta om några fascinerade genombrott för korsningsnummersolikheten och annat. Vi kommer att påvisa dess roll i beviset av Szemerédi–Trotters sats. En kort bakgrund till det ursprungliga Kakeya problemet för att avsluta med Kakeya problemet över ändliga kroppar med polynommetoden, och verktygen som behövs för den.

2 Incidensgeometri

2.1 Grafer

För att få fullständig förståelse för uppbyggnaden av korsningsnummersolikheten redogörs användbara definitioner, satser och annat.

Definition 2.1 (Graf). En **graf** G är ett par $G = (V, E)$, där V är mängden **noder** (hörn), och E är mängden **kanter** (bågar). Mängden E består av oordnade par $\{u, v\}$ av noder där $u, v \in V$ och $u \neq v$.



Figur 1: Illustration av två grafer

En graf $G = (V, E)$ är ett matematiskt objekt, där V är grafens noder och E är grafens kanter. Det vanligaste sättet att illustrera en graf är genom att rita noder v som punkter, sedan sammanbinda två punkter med ett linjestycke för att bilda en kant e [12]. Ritningen av en graf kan avvika, ty budskapet förblir detsamma. Självaste ritningen är inte av en stor betydelse, viktigaste är att information gällande noder och kanter förmedlas på samma sätt. En kant $\{u, v\}$ skrivs vanligtvis som uv eller vu . De grafer som presenteras i denna uppsats kommer att vara enkla.

Ovan illustreras exempel på hur två grafer kan ritas.

Example 2.2. Graf 1 i Figur 1:

består av noderna

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

och kanterna

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{1, 7\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{2, 6\}, \{3, 4\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{6, 7\}\}.$$

$|V| = 7$ och $|E| = 12$, här kan vi alltså utläsa att det finns 7 stycken noder och 12 stycken kanter på graf nummer 2.

Example 2.3. Graf 2 i Figur 1:

består av noderna

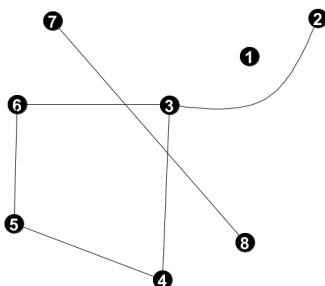
$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

och kanterna

$$E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{5, 6\}, \{3, 5\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}\}.$$

Antalet noder är $|V| = 5$ och antalet kanter är $|E| = 6$. Med andra ord så finns fem stycken noder och 6 kanter.

Example 2.4. Figur 2. har $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ och $E = \{\{7, 8\}, \{2, 3\} \{3, 6\} \{3, 4\} \{4, 6\} \{5, 6\}\}$. $|V| = 8$ och $|E| = 6$.



Figur 2: Alternativ illustration av en graf

Definition 2.5. (Enkel graf) En graf G är **enkel** om den uppfyller:

(i) Inga **öglor**: om det för varje $v \in V$ gäller att $\{v, v\} \notin E$. Vi vill inte ha $\overset{\curvearrowright}{1} \text{ --- } 2 \overset{\curvearrowleft}{}$

(ii) Inga **multikanter**: om det för varje ordnat par noder $u, v \in V$ gäller att det finns högst en kant mellan u och v . Vi vill inte att $3 \overset{\frown}{\text{---}} 4$

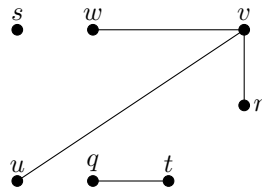
Definition 2.6.

- Två noder $u, v \in V$ kallas **närliggande noder** eller **grannar** om $\{u, v\} \in E$ och $u \neq v$.
- om $\{u, v\} \in E$ då är u **granne** till v .
- En nod $v \in V$ och en kant $e \in E$ kallas **incidenta** om $v \in e$.
- Två noder incidenta med en kant kallas **ändpunkter**.
- Två kanter $e, e' \in E$ kallas incidenta om $e \cap e' \neq \emptyset$. Om $e \neq e'$ kallas de två kanterna **närliggande kanter**, givet att de har en gemensam ändpunkt.

Example 2.7. Låt $G = (V, E)$ var en graf så att $V = \{u, v, w, r, s, t, q\}$ och $E = \{\{u, v\}, \{v, w\} \{v, r\}, \{t, q\}\}$.

Då u, v är närliggande noder liksom v, w och v, r medan s inte är närliggande med någon annan nod. Observera att bland annat noderna u och v är incidenta med kanten uv eftersom $u, v \in E$, och att de är ändpunkterna till uv . Däremot är noden s inte incident med någon kant på grund av att $s \notin E$.

Kanterna $\{u, v\}$ och vr är närliggande kanter av den orsaken att de har en gemensam nod v , det vill säga $uv \cap vr \neq \emptyset$. Å andra sidan så har kanten qt inga närliggande kanter, emedan $qt \cap e = \emptyset$ för varje kant $e \in E \setminus qt$ samt $e \neq qt$. Slutligen, v har grannarna u, w och r , samtidigt som s inte har några grannar.



Definition 2.8. (Gradtal) **Gradtal** eller **valens** för en nod v i en graf G är antalet grannar till v , och skrivs som $\delta(v)$.

Example 2.9. Anta att $G = (V, E)$ är en graf, låt

$$V = \{u, v, w, r, s\}$$

och

$$E = \{\{u, v\}, \{v, w\}, \{v, r\}, \{s, v\}, \{r, u\}, \{s, r\}\}.$$

Då får vi att gradtalet är:

x	Grannar till x	$\delta(x)$
u	r, v	2
v	u, w, r, s	4
w	v	1
r	v, u, s	3
s	v, r	2

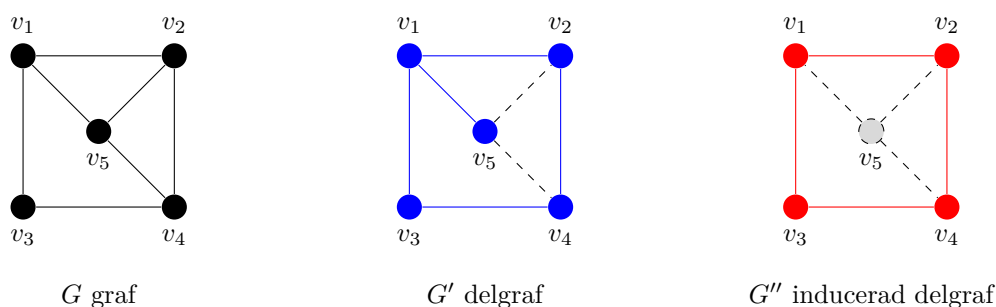
Definition 2.10. (Väg) En **väg** i en graf G kan beskrivas som en följd av noder $v_1, v_2, \dots, v_{k+1} \in V$, där $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$ för alla $i = 1, 2, \dots, k + 1$. En väg kan skrivas som $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_k$, där v_1 kallas **startnod** och v_k kallas **slutnod** för vägen. En väg $v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_{k+1}$ är **sluten** om $v_1 = v_{k+1}$, annars är vägen **öppen**. För en sådan sluten väg om $k \geq 3$ och $v_1 = v_n$, då kallas det för en **cykel**. Om G saknar cykler kallas G **acyklisk**. En **enkel väg** är en väg bestående av unika noder så att $v_i \neq v_j$ och där $i \neq j$.

Definition 2.11. (Sammanhängande graf) En graf G är en **sammanhängande graf** om det för varje par av noder $u, v \in G$, existerar en väg i G från en nod u till en nod v . Annars kallas G för en **osammanhängande graf**.

2.1.1 Delgrafer

Definition 2.12. (Delgraf) En graf $G' = (V', E')$ är en **delgraf** till grafen $G = (V, E)$ om $\emptyset \neq V' \subseteq V$ och $E' \subseteq E$. Vi säger också att G är en **supergraf** till G' , och skriver $G' \subseteq G$.

Definition 2.13. (Inducerad delgraf) Låt $G' = (V', E')$ vara en delgraf till $G = (V, E)$, om E' innehåller alla kanter $\{u, v\} \in E$ när $u, v \in V'$, då kallas G' en **inducerad delgraf** av G .



2.1.2 Speciella typer av grafer

Definition 2.14. (Skog, träd, blad)[11] En acyklisk graf G (se definition 2.10 för mer information) kallas en **skog**. En sammanhängande skog kallas ett **träd**. Noderna i ett träd med $\delta(v) = 1$ kallas ett **blad**, medan de övriga kallas **inre noder**.

Definition 2.15 (Komplett Graf). En **komplett graf** är en graf sådan att varje par av noder har en kant som sammanbinder dem. Den kompletta grafen med $|V| = n$ noder betecknas K_n och består av $|E| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ kanter.

2.2 Grafer ritade i planet

Vi definierar nu mer exakt vad vi menar med en ritning i planet med följande definition.

2.2.1 Ritning av en graf

Definition 2.16. (Ritning i planet) En **ritning** av en graf $G = (V, E)$ i planet \mathbb{R}^2 associerar varje nod $v \in V$ med en unik punkt $f(v) \in \mathbb{R}^2$. Varje kant $\{u, v\} \in E$ representeras av en kurva som är bilden av en injektiv kontinuerlig avbildning $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, så att ändpunkterna $g(0) = f(u)$ och $g(1) = f(v)$ sammanbinds (se också definition 2.19 för mer om kurvor).

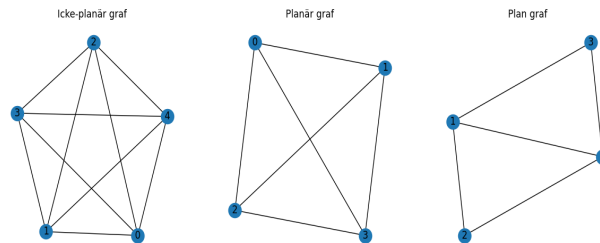
Vi antar även att två kurvor som mest kan ha en gemensam punkt, antingen en ändpunkt eller korsningspunkt, men inte flera.

Varje ändlig graf kan ritas på planet, genom att placera ut noderna på en godtycklig position och därefter rita kanter som en kurvad eller rak linje från den ena punkten till den andra.

En **korsning** i ritningen R av grafen är en punkt x och två par av ritade kanter e_R och e'_R , så att $x \in e_R \cap e'_R$ samt att e_R och e'_R inte har en gemensam ändpunkt.

Definition 2.17. En graf G är **planär** om den kan ritas i planet sådan att två kanter aldrig korsar varandra. En sådan ritning kallas för en **plan inbäddning** eller **plan ritning** av G . Vi säger att en **plan graf** är en ritad planär graf så att inga kanter korsar varandra.

Example 2.18. Här illustrerar vi tre stycken olika fall. Grafen K_5 är en icke-planär graf på grund av att hur man än ritar om den så kommer den alltid ha minst en korsning. Grafen K_4 är en planär graf eftersom man kan rita den på ett sådant sätt att den inte har någon korsning. Slutligen, den sista grafen är en plan graf av den anledningen att ritning inte korsas i någon punkt.



Figur 3: Illustrerar icke-plan, planär och plan graf

2.2.2 Grafens regioner

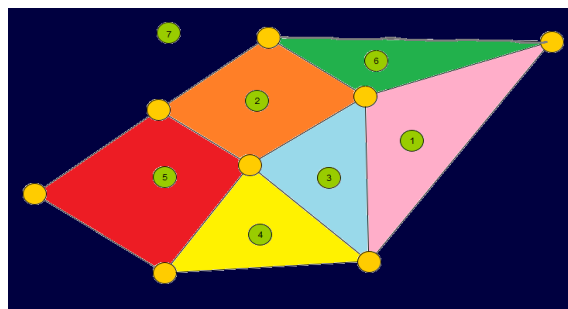
Definition 2.19. (Kurva) En **kurva** är en mängd $\Gamma \subset \mathbf{R}^2$ på formen $\{\gamma(t) : t \in [0, 1]\}$, där $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ är en kontinuerlig avbildning. Funktionen $\gamma(t)$ är en parametrisering av Γ . Punkterna $\gamma(0)$ och $\gamma(1)$ är kurvans ändpunkter.

En kurva är **sluten** om $\gamma(0) = \gamma(1)$. En kurva är **enkel** om den är injektiv på $[0, 1]$, förutom ändpunkterna $\gamma(0) = \gamma(1)$. Om kurvan är både enkel och sluten kallas kurvan en **Jordan kurva**

Sats 2.20 (Jordans kurvsats[8]). *Låt C vara en Jordan kurva i planet \mathbf{R}^2 . Då kommer dess komplement $\mathbf{R}^2 \setminus C$ bestå av två sammanhängande komponenter. Där ena komponenten är begränsad (det interna) och den andra obegränsad (det externa). Kurvan C avgränsar båda dessa två komponenter.*

Definition 2.21. (Region) I en ritning R av en graf G i planet, så består $\mathbf{R}^2 \setminus R$ av ändligt många ytor som kallas **regioner** (områden). En yta är obegränsad och kallas den **yttre regionen**, medan de övriga ytorna kallas **inre regioner** och är begränsade. En regions rand är en delgraf av alla noder och kanter som innesluter den.

Till exempel skulle denna ritning av en graf anses ha 7 regioner.



Figur 4: 7 stycken olika regioner

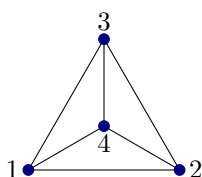
2.2.3 Korsningsnumret av en ritad graf

Definition 2.22. (Korsningsnummer) **Korsningsnumret** av grafen $G = (V, E)$, betecknat som $cr(G)$, är det minsta heltalet k för vilket det finns en ritning av G i planet med k korsningar.

Remark 2.23. Antalet korsningar förväntas öka om vi fixerar noderna och ökar antalet kanter. Likaså förväntas antalet korsningar minska om vi ökar antalet noder och fixerar kanterna.

Proposition 2.24. [19] *En graf G är en planär graf om och endast om $cr(G) = 0$.*

Example 2.25. Om vi tittar på den kompletta grafen K_4 , så har den $cr(K_4) = 0$, alltså får vi att K_4 är en planär graf. En ritning av K_4 utan korsningar visas i figur 5.



Figur 5: En ritning av K_4 utan någon korsning

2.3 Sannolikhet

Definition 2.26. (Stokastisk variabel) En **stokastisk variabel \mathbf{X}** är en funktion $\mathbf{X} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ från utfallsrummet Ω till de reella talen \mathbb{R} .

Example 2.27. Låt oss illustrera en diskret stokastisk variabel med ett enkelt exempel. Anta att vi kastar ett mynt två gånger. Låt $\mathbf{X} = \{\text{Antalet klavar}\}$ vara en slumpvariabel, där vårt utfallsrum är $\Omega = \{\{\text{krona,klave}\}, \{\text{klave,klave}\}, \{\text{krona,krona}\}, \{\text{klave,krona}\}\}$. Så

- $X(\text{krona,krona}) = 0$,
- $X(\text{krona,klave}) = 1$,
- $X(\text{klave,krona}) = 1$,
- $X(\text{klave,klave}) = 2$.

Vi definierar en **sannolikhetsfördelning** på utfallen på följande vis:

$$\mu : P(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \text{ med } \mu(\Omega) = 1.$$

Detta ger att sannolikheten för de olika utfallen är:

- $\mu(\text{krona,krona}) = \frac{1}{4}$,
- $\mu(\text{krona,klave}) = \frac{1}{4}$,
- $\mu(\text{klave,krona}) = \frac{1}{4}$,
- $\mu(\text{klave,klave}) = \frac{1}{4}$.

Vi får därför att

$\mathbf{X} = \mathbf{x}$	$p(X = x)$
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

Definition 2.28. (Väntevärde)

Låt \mathbf{X} vara en diskret stokastisk variabel (eller slumpvariabel) med de möjliga utfallen x_1, x_2, \dots, x_n , och motsvarande sannolikheter $P(\mathbf{X} = x_1), P(\mathbf{X} = x_2), \dots, P(\mathbf{X} = x_n)$. **Väntevärdet** av \mathbf{X} kan skrivas som $\mathbb{E}[\mathbf{X}]$, och definieras som:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n x_i \cdot P(\mathbf{X} = x_i),$$

där den stokastiska variabeln \mathbf{X} antar värdena x_i med sannolikheten $p_i \in [0, 1]$ och $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

Definition 2.29 (Linjäriteten av väntevärde). Låt $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$ vara slumpvariabler, där $\mathbf{X} = c_1\mathbf{X}_1, \dots, c_n\mathbf{X}_n$ och $c \in \mathbb{R}$. Då säger **linjäriteten av väntevärde** att

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}) = c_1\mathbb{E}(\mathbf{X}_1) + \dots + c_n\mathbb{E}(\mathbf{X}_n).$$

Styrkan hos principen om linjäriteten av väntevärde kommer från att det inte finns några restriktioner på \mathbf{X}_i , oavsett om den är beroende eller oberoende [7].

Example 2.30. Anta att jag singlar slant 1000 gånger, vad är väntevärdet av $\mathbf{X} =$ antalet klavar?

Lösningen: Vi låter \mathbf{X} vara den stokastiska variabeln som representerar antalet gånger man får klave när man utför 1000 myntkast. Anta dessutom att myntet är rättvist.

Utfallsrummet: $\Omega = \{(\text{krona}, \text{klave})^{1000}\}$.

Observera att $\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{1000} \mathbf{Z}_i$ beror på variabeln \mathbf{Z}_i som är det i :te myntkastet.

$$\mathbf{Z}_i = \begin{cases} \text{klave} \mapsto 1, & p = \frac{1}{2}, \\ \text{krona} \mapsto 0, & p = \frac{1}{2}, \text{ där } i = 1, 2, \dots, 1000. \end{cases}$$

$$\mathbb{E}(\mathbf{Z}) = \sum_{i=0}^1 x_i P(x_i) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Väntevärdet av \mathbf{X} blir således $\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{1000} \mathbb{E}(\mathbf{Z}_i)$. Genom att använda oss av linjäriteten av väntevärde (se definition 2.29) får vi att väntevärdet kan skrivas som

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{1000} \mathbb{E}(\mathbf{Z}_i) = \mathbb{E}(\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \dots + \mathbf{Z}_{1000}) = \mathbb{E}(\mathbf{Z}_1) + \mathbb{E}(\mathbf{Z}_2) + \dots + \mathbb{E}(\mathbf{Z}_{1000}) = \frac{1000}{2} = 500.$$

Det vill säga: väntevärdet av antalet klavar efter 1000 myntkast är 500.

2.4 Eulers formel

Lemma 2.31. Om $G = (V, E)$ är ett sammanhängande träd, då gäller att

$$|E| = |V| - 1. \tag{1}$$

Bevis. Vi visar detta med hjälp av induktion på antalet noder $|V|$.

Basfallet, betrakta antalet kanter $|V| = 1$, insättning i (1) ger $1 = 1 - 1 = 0$, detta stämmer

eftersom G är ett sammanhängande träd.

Anta att formeln gäller för ett träd med högst $|V| = n$ noder. Detta innebär att en sådant träd enligt (1) har $|E| = |V| - 1 = n - 1$ kanter. Vi vill nu visa att formeln gäller för $n + 1$ noder.

Låt T vara ett träd med $n + 1$ noder, välj nu ett blad; ett sådant kan hittas genom att välja en godtycklig nod t som startpunkt, rör dig nu i en riktning från noden utan att besöka samma granne igen. T saknar cykler (se definition 2.31). Det följer då att man inte kan passera samma nod mer än en gång, och denna nod är ett blad, alltså måste vi vid någon nod s så småningom stanna, i och med att grafen är sammanhängande. Ta nu bort bladet s ; med den försvinner även en kant, vilket skapar ett nytt träd $T'(V', E')$ (se figur 6).

Ur detta följer att vi kan skriva ett samband mellan T och T' som

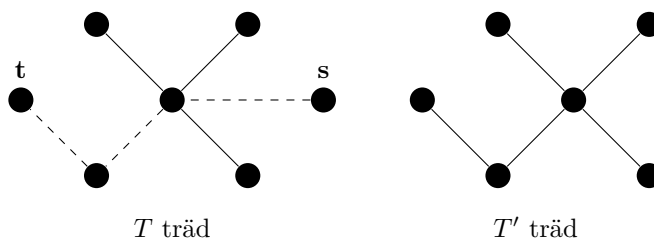
$$|E'| = |E| - 1; \quad |V'| = |V| - 1.$$

Om vi nu gör en omskrivning: $|E'| + 1 = |E|$ och $|V'| + 1 = |V|$. Enligt vårt induktionsantagande så får vi att T' :s noder $|V'| = n$ och kanter $|E'| = n - 1$. Därmed om vi sätter in dessa i uttrycket, ser vi att

$$n + 1 = |V|; \quad n = |E|.$$

Sålunda, enligt induktionsprincipen håller formeln i satsen för alla möjliga antal noder $|V|$.

□



Figur 6: Två sammanhängande träd: T och T'

Sats 2.32 (Eulers formel). *Anta att $G = (V, E)$ är en sammanhängande planär graf, och låt R vara en ritning i planet med $|V|$ noder, $|E|$ kanter och $|F|$ regioner. Då gäller att*

$$|V| - |E| + |F| = 2. \tag{i}$$

Bevis. Med induktion på antalet kanter $|E|$ på grafen $G = (V, E)$.

Basfall, om antalet kanter $|E| = 0$, då gäller att grafen endast består av en nod eftersom grafen är sammanhängande och endast består av det obegränsade området. Vi får att $|V| - |E| + |F| = 1 - 0 + 1 = 2$, vilket stämmer överens med i.

Anta att formeln är sann för alla grafer med $|E| = n$ kanter. Vi vill nu visa att formeln även gäller för en graf med $|E| = n + 1$ kanter.

Detta ger två möjliga utfall:

Fall 1:

Grafen $G = (V, E)$ är acyklisk. Erinna om att en sammanhängande acyklisk graf kallas ett träd och alltid endast kommer att bestå av en region, ty i enlighet med Jordans kurvsats (se sats 2.20) formas inte en extern och intern yta på grund av att ett träd saknar cykler. Därför omsluts ett träd endast av ett område; det obegränsade området (se definition 2.21), alltså får vi $|F| = 1$. Eulers formel blir då

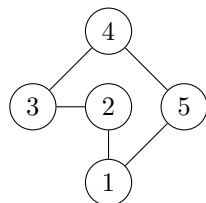
$$|V| - |E| = 1 \iff |E| = |V| - 1.$$

Detta vet vi stämmer enligt lemma 2.31.

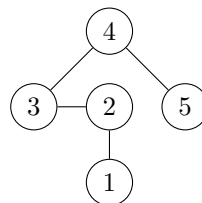
Fall 2:

Grafen $G = (V, E)$ innehåller minst en cykel.

Låt oss välja en godtycklig kant e som ligger på en cykel. Ta bort e från G för att bilda en ny graf G' . Eftersom cykler i enlighet med Jordans kurvsats separerar områdena i två distinkta ytor, så när e tas bort sammanfogas de två ytorna till ett område. Helt enkelt har grafen G' även ett mindre område än G efter att kanten tagits bort, alltså är även G' planär. Den nya grafen G' förblir dessutom sammanhängande, av den anledningen att när vi tar bort en kant från en cykel, så kan man fortfarande finna en väg mellan noderna (se figur 7).



En graf med en cykel



en graf utan cykel

Figur 7: Två sammanhängande grafer: med cykel och utan cykel

Följaktligen, G' har n kanter och (i) gäller enligt vårt induktionsantagande. Vi kan då uttrycka G' med Eulers formel på följande sätt

$$|V'| - |E'| + |F'| = 2. \quad (\text{ii})$$

Om vi nu jämför de två graferna G' och G , så kan vi se att antalet noder är oförändrat, men G' har en färre kant och en färre region än G . Vi får då följande samband mellan dessa två grafer:

$$|V'| = |V|; \quad |E'| = |E| - 1; \quad |F'| = |F| - 1.$$

Om vi substituerar in dessa i (ii) så erhålls att

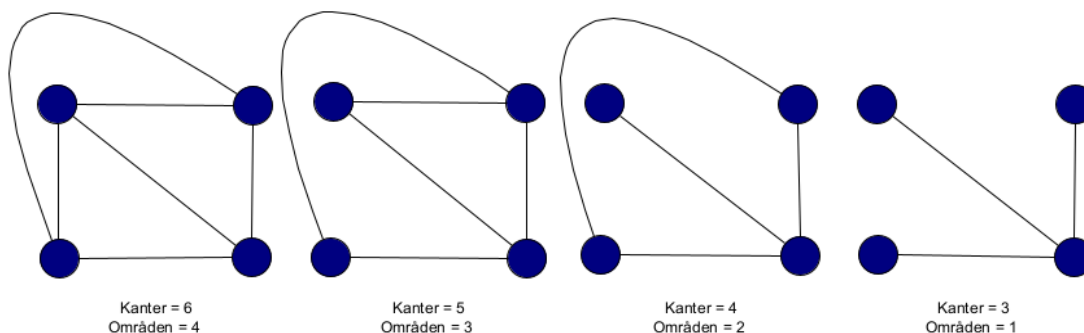
$$2 = |V| - (|E| - 1) + (|F| - 1) = |V| - |E| + |F|.$$

Enligt induktionsprincipen kan vi konkludera att formeln gäller för samtliga sammanhängande

planära grafer.

□

För att illustrera beviset går vi igenom det i ett exempel:



Figur 8: En ritning av K_4

Example 2.33. Betrakta en ritning av K_4 i planet. Låt oss nu ta bort en kant från en cykel i ritningen - i samband med kanten försvinner även en region. Vänsterledet i Eulers formel ändras inte.

$$|V'| - |E'| + |F'| = |V| - (|E| - 1) + (|F| - 1) = |V| - |E| + 1 + |F| - 1 = |V| - |E| + |F|.$$

Om denna procedur upprepas tills tillräckligt många kanter tagits bort så att det endast kvarstår en region. Antalet regioner blir $|F| = 1$, och Eulers formel kan då skrivas som

$$|V| - |E| + 1 = 2 \iff |V| = |E| + 1.$$

Vilket enligt lemma 2.31 var relationen mellan kanter och noder för ett sammanhängande träd.

2.5 Korsningsnummersolikheten

2.5.1 Teori bakom korsningsnummersolikheten

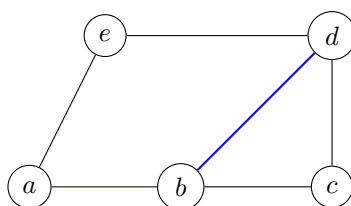
Proposition 2.34. Låt $G = (V, E)$ vara en sammanhängande planär graf med $|E| \geq 2$ kanter, och låt R vara en plan ritning (se definition 2.17) av G med $|F|$ områden. Då gäller att

$$3|F| \leq 2|E|.$$

Bevis. Om vi gör en plan inbäddning av G så kan vi observera att varje område angränsas av minst tre kanter.

Denna observation ser ut att leda till olikheten $|E| \geq 3|F|$. Det är dock viktigt att lägga märke till att varje kant angränsas av exakt två regioner. Detta leder till att varje kant räknas dubbelt. Med hänsyn till detta behöver vi justera vår olikhet på följande vis

$$|E| \geq \frac{3}{2}|F|,$$



vilket i sin tur medför $3|F| \leq 2|E|$. □

Korollarium 2.35. Anta att $G = (V, E)$ är en sammanhängande planär graf med $|E| \geq 2$ kanter och $|V|$ noder. Då gäller att

$$|E| - 3|V| \leq -6.$$

Bevis. Genom att använda oss av proposition 2.34 i kombination med Eulers formel (se sats 2.32) så uppnås det eftersökta resultatet: Enligt proposition 2.34 kan vi skriva en olikhet mellan en sammanhängande planärs graf regioner och kanter:

$$3|F| \leq 2|E| \tag{i}$$

Vi gör nu en omskrivning av Eulers formel så att antalet $|E|$ kanter och antalet $|V|$ noder är på samma sida av ekvationen:

$$|V| - |E| + |F| = 2 \iff |F| = 2 - |V| + |E|.$$

Om vi sätter in detta i (i), leder det till

$$3(2 - |V| + |E|) \leq 2|E| \iff |E| - 3|V| + 6 \leq 0$$

□

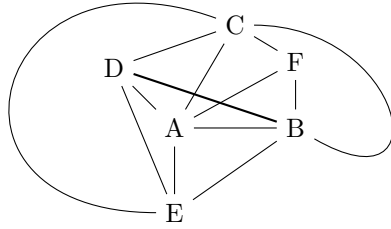
Proposition 2.36. Anta att $G = (V, E)$ är en graf (gäller även för icke-planära och osammanhängande grafer). Korsningsnumret av G är då

$$cr(G) \geq |E| - 3|V| + 6.$$

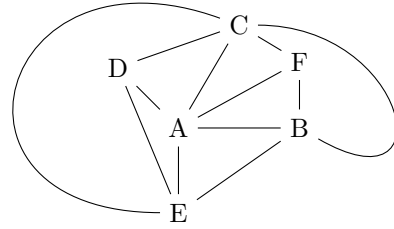
Bevis. Låt $cr(G)$ vara korsningsnumret av grafen G . Utför nu en plan inbäddning av G i planet med $cr(G)$ korsningar. Genom att ta bort högst $cr(G)$ kanter från G , kan vi säkerställa resultatet i $G'(V', E')$ är en plan graf. Av den anledning att det kan finnas fall där vi endast behöver ta bort en korsning, eftersom en godtycklig kant e kan bidra med fler än en korsning. Om vi till exempel tittar på figur 9, så kan vi notera att endast kanten BD behövs tas bort för att få en plan graf, även fast det finns två korsningar. Detta leder således till att G' har minst $|E'| \geq |E| - cr(G)$ kanter och $|V'| \leq |V|$ noder. Enligt Korollarium (2.35) kan vi uttrycka G' som

$$0 \geq |E'| - 3|V'| + 6 \geq |E| - cr(G) - 3|V| + 6 \iff cr(G) \geq |E| - 3|V| + 6.$$

□



Plan inbäddning av G



G' , kanten BD har tagits bort

Figur 9: Jämförelse mellan plan inbäddning av G och G' där kanten BD har tagits bort.

2.5.2 Bevis av korsningsnummersolikheten

Sats 2.37 (Korsningsnummersolikheten). *Låt $G = (V, E)$ vara en graf (gäller även för icke-planära och osammanhängande grafer) med $|E| \geq 4|V|$, då följer att*

$$cr(G) \geq \frac{|E|^3}{64|V|^2}.$$

Bevis. Låt $G = (V, E)$ vara en graf med $|E| \geq 4|V|$, och $p \in [0, 1]$ vara en parameter; värdet på p väljs senare. Låt V' vara en slumpmässig delmängd av V , där varje val av $v \in V'$ sker oberoende av varandra med sannolikheten p .

Låt $G' = (V', E')$ vara den inducerade delgrafan av G som spänns upp av V' (se definition 2.13). Applicera nu Korollarium 2.35 på G' , låt dessutom $|V'|$, $|E'|$ och $cr(G')$ vara slumpvariabler som beräknar antalet noder, kanter och minsta antalet korsningar (se definition 2.16) i en ritning av G' .

Kvantiteten $cr(G') - |E'| + 3|V'| \geq 0$ för alla G' , enligt Prop 2.36. Om vi tar väntevärdet får vi alltså

$$\mathbb{E}(cr(G') - |E'| + 3|V'|) \geq 0.$$

Därefter genom att utnyttja linjäriteten av väntevärde (se definition 2.29) kan vi skriva om uttrycket för att få det nya sambandet

$$\mathbb{E}(cr(G')) \geq \mathbb{E}(|E'|) - 3\mathbb{E}(|V'|). \quad (1)$$

Definiera nu en indikatorfunktion för noder.

$$\mathbf{1}_{V'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \in V', \\ 0 & \text{om } x \notin V'. \end{cases}$$

Då kan vi skriva om väntevärdet av $|V'|$ med hjälp av indikatorfunktionen: om $V = \{v_1, \dots, v_{|V|}\}$ så är

$$\mathbb{E}(|V'|) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{V'}(v_1) + \mathbf{1}_{V'}(v_2) + \dots + \mathbf{1}_{V'}(v_{|V|})).$$

Genom att återigen utnyttja linjäriteten av väntevärde så är detta helt enkelt lika med

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{V'}(v_1)) + \mathbb{E}(\mathbf{1}_{V'}(v_2)) + \dots + \mathbb{E}(\mathbf{1}_{V'}(v_{|V|})).$$

Varje nod $v \in V$ har sannolikheten p att sluta upp i V' och $1 - p$ att inte sluta upp $v \notin G'$. Därför blir väntevärdet av att en godtycklig nod v_k slutar upp i G' .

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{V'}(v_k)) = p \cdot 1 + (1 - p) \cdot 0 = p.$$

Slutligen så kan vi uttrycka väntevärdet av V' som

$$\mathbb{E}(V') = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{V'}(v_1)) + \mathbb{E}(\mathbf{1}_{V'}(v_2)) + \dots + \mathbb{E}(\mathbf{1}_{V'}(v_{|V|})) = p + p + \dots + p = p|V|. \quad (\text{i})$$

För E' gäller att eftersom G' är en inducerad delgraf bestäms kanterna helt av noderna V' . Varje kant $e \in E$ kommer ha sannolikheten p^2 att finnas med i G' : anledningen till detta är att konstruktionen av en kant beror på valet av två olika noder; inklusion av dessa två noder i V' är dessutom oberoende.

Definiera nu en indikatorfunktion för kanter.

$$\mathbf{1}_{E'}(x) = \begin{cases} 1 & \text{om } x \in E', \\ 0 & \text{om } x \notin E'. \end{cases}$$

Vi kan med hjälp av detta skriva det förväntade antalet kanter i G' som

$$\mathbb{E}(|E'|) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{E'}(e_1) + \mathbf{1}_{E'}(e_2) + \dots + \mathbf{1}_{E'}(e_{|E|})) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{E'}(e_1)) + \mathbb{E}(\mathbf{1}_{E'}(e_2)) + \dots + \mathbb{E}(\mathbf{1}_{E'}(e_{|E|})),$$

igen genom linjäriteten av väntevärdet.

Varje term här kan beräknas enligt definitionen 2.28 av väntevärde. Således får vi att

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_{E'}(e_k)) = p \cdot p \cdot 1 + (1 - p) \cdot (1 - p) \cdot 0 + p \cdot 1 \cdot (1 - p) \cdot 0 + (1 - p) \cdot 0 \cdot p \cdot 1 = p^2.$$

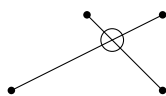
Alltså får vi då

$$\mathbb{E}(E') = \mathbb{E}(\mathbf{1}_{E'}(e_1)) + \mathbb{E}(\mathbf{1}_{E'}(e_2)) + \dots + \mathbb{E}(\mathbf{1}_{E'}(e_{|E|})) = p^2 + p^2 + \dots + p^2 = p^2|E|. \quad (\text{ii})$$

Därmed får vi från (i) och (ii) att

$$\mathbb{E}(|V'|) = p|V|; \quad \mathbb{E}(|E'|) = p^2|E|. \quad (2)$$

Vi betraktar nu en ritning R' av G' som induceras av en ritning av G med $cr(G)$ korsningar. Varje korsning består av exakt fyra olika noder (se definition för 2.16) och sannolikheten för att korsningen ska hamna i R' är således p^4 .



Inför en sista indikatorfunktion för att en korsning ska hamna i R' :

$$\mathbf{1}_{R'}(k) = \begin{cases} 1 & \text{om } k \in R', \\ 0 & \text{om } k \notin R'. \end{cases}$$

Vi kan uttrycka det förväntade antalet korsningar i grafen G' som

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{1}_{R'}(k)) &= (p \cdot p \cdot p \cdot p \cdot 1^4) \cdot \binom{4}{4} + ((1-p) \cdot 0 \cdot p \cdot p \cdot p \cdot 1^3) \cdot \binom{4}{3} + (p \cdot p \cdot 1^2 \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot 0^2) \cdot \binom{4}{2} + \\ &+ (p \cdot 1 \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot 0^3) \cdot \binom{4}{1} + ((1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot 0^4) \cdot \binom{4}{0} = p^4. \end{aligned}$$

Väntevärdet av antalet korsningar i R' är därmed $p^4 cr(G)$. Här uppstår det en olikhet eftersom $\mathbb{E}(cr(G'))$ är minsta antalet korsningar bland alla ritningar av G' , medan en ritning R' av G' inte nödvändigtvis behöver det minsta antalet korsningar. Med andra ord, den partikulära ritningen R' av G' kanske inte är den mest optimala. Alltså är

$$p^4 cr(G) \geq \mathbb{E}(cr(G')). \quad (3)$$

Om vi nu sätter ihop (1), (2) och (3) så får vi

$$p^4 cr(G) \geq p^2 |E| - 3p |V| \iff cr(G) \geq p^{-2} |E| - 3p^{-3} |V|.$$

Detta gäller oavsett $p \in [0, 1]$. Genom att sedan välja $p := \frac{4|V|}{|E|}$ fås

$$cr(G) \geq \frac{|E|^3}{64|V|^2}.$$

□

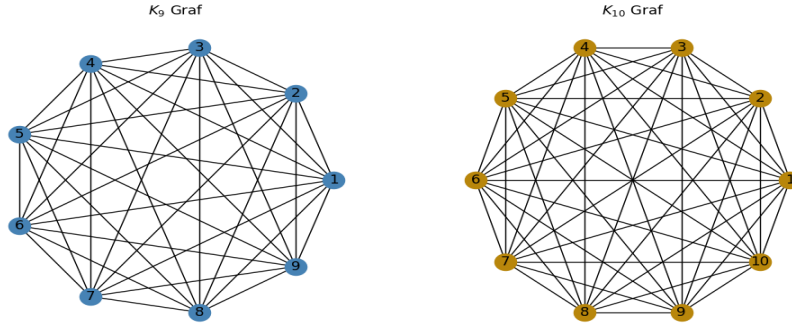
Remark 2.38. Notera att i detta bevis tog vi bort konstanten -6 från 2.36 och använde oss av olikheten: $cr(G) \geq |E| - 3|V|$ istället.

2.5.3 Applikation av korsningsnummersolikheten

Låt oss nu undersöka det minsta antalet korsningar för två olika grafer genom att använda korsningsnummerolikheten.

Vi applicerar korsningsnummerolikheten på två kompletta grafer: K_9 och K_{10}

Example 2.39. K_9 grafen har $|V| = 9$ och antalet kanter för en komplett graf fås med formeln $|E| = \frac{|V|(|V|-1)}{2} = 9 \cdot \frac{8}{2} = 36$. För att kunna använda korsningsnummerolikheten måste $|E| \geq 4|V|$ gälla, om vi sätter in våra värden så kan olikheten skrivas om till $36 \geq 4 \cdot 9 = 36 \geq 36$. Sålunda,



Figur 10: Två stycken kompletta grafer

kan vi använda korsningsnummerolikheten.

$$cr(K_9) \geq \frac{1}{64} \cdot \frac{|E|^3}{|V|^2} = \frac{1}{64} \cdot \frac{36^3}{9^2} \geq \frac{36^3}{64 \cdot 81} = 9.$$

Med andra ord så har varje ritning av K_9 i planet åtminstone 9 stycken korsningar.

Example 2.40. K_{10} grafen har $|V| = 10$ noder och kanter $|E| = \frac{|V|(|V|-1)}{2} = 10 \cdot \frac{9}{2} = 45$. För att kunna använda oss av korsningsnummersolikheten så måste $|E| \geq 4|V|$ gälla. Om vi implementerar våra värden vi fick för kanterna respektive noderna så kan olikheten skrivas om till $45 \geq 4 \cdot 10 = 40 \geq 40$. Alltså, kan vi använda korsningsnummersolikheten.

$$cr(K_{10}) \geq \frac{1}{64} \cdot \frac{|E|^3}{|V|^2} = \frac{1}{64} \cdot \frac{45^3}{10^2} = \frac{45^3}{64 \cdot 100} = 14.23828125.$$

Så $cr(K_{10} \geq 15)$.

Generellt kan korsningsnummersolikheten för en komplett graf K_n skrivas som

$$cr(K_n) \geq \frac{1}{64} \frac{\left[\frac{|V|(|V|-1)}{2}\right]^3}{|V|^2} = \frac{1}{64 \cdot 8} \frac{[|V|(|V|-1)]^3}{|V|^2} = \frac{|V|(|V|-1)^3}{512} = \frac{n(n-1)^3}{512},$$

givet att $n \geq 9$.

Om vi nu testar formeln för K_9 , får vi att

$$cr(K_9) \geq \frac{9 \cdot 8^3}{512} = 9 \cdot \frac{512}{512} = 9.$$

2.5.4 Det förmodade korsningsnumret för en komplett graf

I en artikel från 1972 spekulerade Richard K [18]. Guy att korsningsnumret för en komplett graf kan bestämmas av följande formel:

$$cr(K_n) = \frac{1}{4} \left\lfloor \frac{|V|}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{|V|-1}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{|V|-2}{2} \right\rfloor \left\lfloor \frac{|V|-3}{2} \right\rfloor.$$

För udda V kan vi skriva $cr(K_n) = \frac{1}{64}(|V| - 1)^2(|V| - 3)^2$. Emellertid finns det ännu inget bevis för det generella fallet. Denna formel visade Guy gällde för $|V| \leq 10$. Senare lyckades man även visa desamma för $|V| = 11$ och $|V| = 12$. Resterande fall återstår att upptäckas [10].

Om vi nu jämför vad korsningsnummersolikheten säger, ställt mot det förmodade faktiska korsningsnumret får vi att

$$cr(K_9) = \frac{1}{64}(9 - 1)^2(9 - 3)^2 = 36.$$

Och för

$$cr(K_{10}) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 10 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 8 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = 78.$$

Å andra sidan fick vi att korsningsnummersolikheten för $cr(K_9) \geq 9$ och $cr(K_{10}) \geq 15$.

2.5.5 Utvecklingen av konstanten i korsningsnummersolikheten

Om vi nu återvänder till korsningsnummersolikheten så tog den form år 1973 när Paul Erdős och Richard K. Guy [14] ställde sig frågan om vad det minsta antalet korsningar i mer generella grafer är [6], vilket resulterade i hypotesen $cr(G) \geq c \frac{|E|^3}{|V|^2}$. Det dröjde till 1982, nästan ett decennium efter publiceringen av den förmodade korsningsnummersolikheten, innan två oberoende bevis presenterades samtidigt, vilket var ett rent sammanträffande. Det ena av Frank Thomas Leighton [20] som fastställde $cr(G) \geq \frac{|E|^3}{375|V|^2}$ där $c = \frac{1}{375}$, utan någon kännedom om att Erdős och Guy hade publicerat sitt antagande ett decennium tidigare. Det andra beviset, av Miklós Ajtai, Václav Chvátal, Monty Newborn och Endre Szemerédi [2], specificerade $c = \frac{1}{100}$.

Senare i ett mejlutbyte mellan Bernard Chazelle, Micha Sharir och Emo Welzl kunde konstanten förfinas till $c = \frac{1}{64}$ [4]. Deras bevis var dessutom baserat på den probabilistiska metoden, och är grunden för beviset presenterat här.

Janos Pach och Géza Tóth publicerade en ny begränsning med $\frac{1}{33.75} \geq c \geq 0.09$ [21]. I början av 2000-talet konstaterade János Pach, Joel H. Spencer och Géza Tóth att den nedre gränsen $c = \frac{1}{33.75}$ gällde om $|E| \geq 7.5|V|$ [23].

År 2006 förbättrade Janos Pach, Radoš Radoičić, Gábor Tardos och Géza Tóth konstanten till $c = \frac{1024}{31827} \approx \frac{1}{31.08}$ under förutsättningarna att $|E| \geq \frac{103}{16}|V|$ [22].

Den hittills bästa nedre begränsningen presenterades av Eyal Ackerman 2019 med $c = \frac{1}{29}$ givet att villkoret $|E| \geq 6.95|V|$ är uppfyllt [1].

2.6 Szemerédi-Trotters sats

2.6.1 Incidenser mellan punkter och linjer

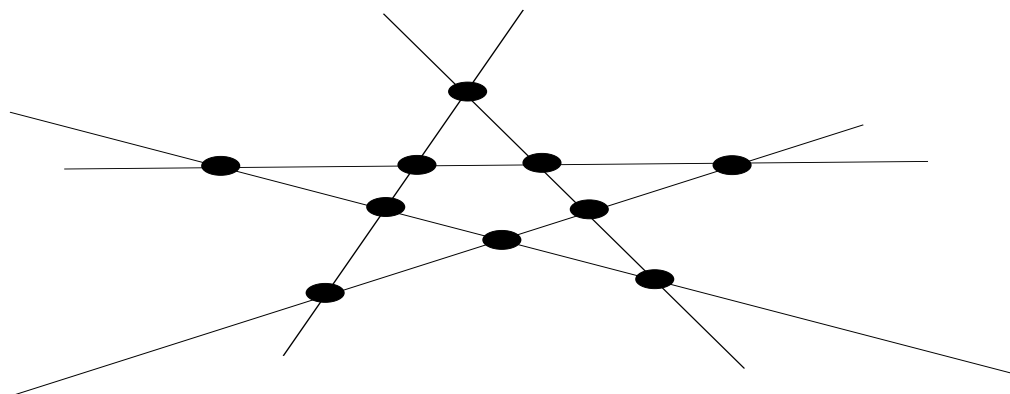
Definition 2.41. Givet en ändlig samling av punkter P och linjer L i planet \mathbb{R}^2 låt

$$I(P, L) := |\{(p, l) \in P \times L : p \in l\}|,$$

vara antalet incidenser mellan P och L .

En intressant följdfråga som uppstår är: vad är det maximala antalet incidenser mellan dessa punkter och linjer [29]? Frågan om det minimala antalet är inte av lika stort intresse, eftersom att man utan några större svårigheter ser att svaret blir 0. För att återvända till frågan som är av intresse; försök maximera $I(P, L)$ för ett visst antal $|P|$ och $|L|$. En övre begränsning hade kunnat vara $I(P, L) \leq |P||L|$. Låt oss nu undersöka några incidenser mellan punkter och linjer för att få en bättre känsla för hur det kan se ut.

Example 2.42. Vad är incidenser mellan punkter och linjer för ett pentagram ritat i planet? (se figur 11)



Figur 11: Ett pentagram

Vid varje skärningspunkt mellan två linjer uppstår det en punkt, varav denna punkt ligger på bägge linjerna. Det finns totalt tio stycken skärningar mellan alla linjer, så vi får att $I(P, L) = 20$. Av den orsaken att $2 \cdot 10 = 20$ för att vid en skärning så är punkten incident med två linjer. Om vi jämför med den triviala begränsningen får vi att den är

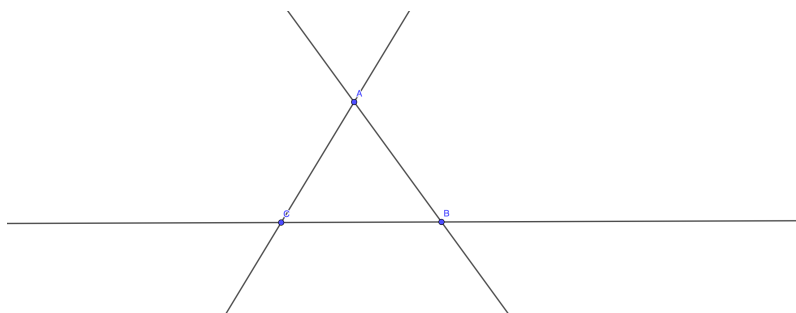
$$|P| \cdot |L| = 5 \cdot 10 = 50.$$

Szekely insåg år 1997 att korsningsnummersolikheten är ett kraftfullt verktyg för att underlätta bevisen av många svåra olikheter inom kombinatorisk incidensgeometri [26]. Detta ledde i sin tur till att beviset av Szemerédi-Trotters sats kunde förenklas med hjälp av korsningsnummersolikheten. Szemerédi-Trotters sats är en fundamental sats inom incidensgeometrin som talar om en övre begränsning för antalet incidenser mellan en ändlig samling punkter och linjer i planet.

Example 2.43. Om vi ställer samma fråga som tidigare, fast för en triangel ritat i planet? (se figur 12)

Liksom det tidigare exemplet så kan vi se att när två linjer är incidenta bildas en punkt. Denna punkt kommer att vara incident med bägge linjerna, eftersom det är totalt tre stycken skärningar får vi att $I(P, L) = 2 \cdot 3 = 6$. Om vi även här jämför med den triviala begränsningen får vi att

$$|P| \cdot |L| = 3 \cdot 3 = 9.$$



Figur 12: En triangel

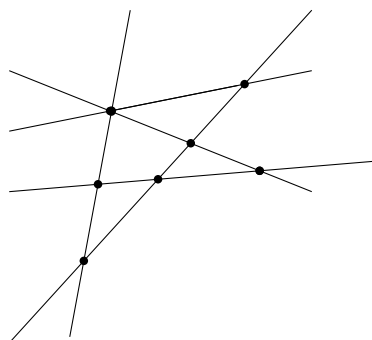
2.6.2 Bevis av Szemerédi-Trotters sats med hjälp av korsningsnummersolikheten

Sats 2.44 (Szemerédi-Trotter). *Låt P vara en ändlig mängd punkter och låt L vara en ändlig mängd linjer i planet.*

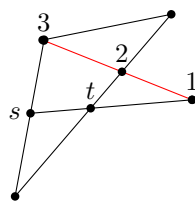
Då följer:

$$I(P, L) \leq 4|P|^{\frac{2}{3}}|L|^{\frac{2}{3}} + 4|P| + |L|$$

Bevis. Vi kan börja med att ta bort linjerna $l \in L$ som inte är incidenta med någon punkt i P , av den orsaken att de inte bidrar något till $I(P, L)$. Låt oss därför anta att varje linje i L är incident med minst en punkt i P . Betrakta nu en graf $G = (P, E)$ där grafens noder är punkterna i P , och två punkter s och t är bildar en kant om och endast om det öppna linjesegmentet från s till t ligger på någon linje i L och inte är incident med någon punkt i P .



Figur 13: Punkterna \mathcal{P} och linjerna \mathcal{L}



Figur 14: Grafen $G = (P, E)$

Vi använder oss nu av dubbelräkning på antalet kanter $|E|$. **Dubbelräkning** innefattar att man kan beräkna något på två olika sätt och komma fram till samma resultat. Just i detta fall kan vi observera att om en linje $l \in L$ är incident med $k \geq 1$ punkter i P , då bidrar l med $k - 1$ kanter till E .

Betrakta exempelvis punkterna 1, 2 och 3 på den röda linjen där $k = 3$ i figur 14. Vi får då två kanter, eftersom det finns två linjesegment; ett för vardera intervall.

Summera nu över alla linjer i L , då kan vi uttrycka antalet kanter som

$$|E| = I(P, L) - |L|.$$

Rita nu G i planet så att noder är motsvarande punkter och kanter är motsvarande linjesegment. Eftersom varje korsning i ritningen är en skärning mellan två linjer, och två linjer kan skära varandra i högst en punkt, eftersom detta överensstämmer med definitionen av korsningsnumret (se definition 2.16), så gäller $cr(G) \leq \binom{|L|}{2} \leq |L|^2$. Enligt korsningsnummersolikheten gäller att den kan appliceras om $|E| \geq 4|V|$, då följer att antingen: $|E| \leq 4|P|$, vilket kan skrivas som $I(P, L) \leq 4|P| + |L|$, eller så är $|E| \geq 4|P|$ och då gäller

$$|L|^2 \geq cr(G) \geq \frac{|E|^3}{64|P|^2} = \frac{(I(P, L) - |L|)^3}{64|P|^2},$$

vilket medför

$$I(P, L) \leq 4|L|^{\frac{2}{3}}|P|^{\frac{2}{3}} + |L|.$$

I bägge fallen gäller

$$I(P, L) \leq 4|P|^{\frac{2}{3}}|L|^{\frac{2}{3}} + 4|P| + |L|.$$

□

2.6.3 Szemerédi-Trotters sats jämfört med den triviala begränsningen

Låt oss nu illustrera en tillämpning av Szemerédi-Trotters sats

Example 2.45. Anta att vi har några linjer l och punkter p i planet, där vi vill undersöka antalet incidenser mellan dessa. Vi har att antalet linjer $|L| = 16$ och antalet punkter $|P| = 27$. Om vi nu tillämpar Szemerédi-Trotters sats får vi att

$$I(P, L) \leq 4 \cdot 27^{\frac{2}{3}} 16^{\frac{2}{3}} + 4 \cdot 27 + 16 \approx 352.$$

Sålunda, får vi att det högst kan förekomma 352 incidenser mellan punkterna och linjerna. Medan om vi istället hade estimerat med den triviala begränsningen, så får vi att $|L| \cdot |P| = 432$.

Example 2.46. Anta nu att vi vill beräkna antalet incidenser mellan punkter och linjer där $|P| = |L| = n$. Om vi först låter den övre begränsningen vara den triviala, det vill säga: $I(P, L) \leq |P| \cdot |L|$. Då får vi att

$$|P| \cdot |L| = n \cdot n = n^2,$$

därmed ser vi att den växer kvadratisk (som n^2).

Å andra sidan, om vi använder Szemerédi-Trotters sats så får vi att den övre begränsningen blir

$$I(P, L) \leq 4|P|^{\frac{2}{3}}|L|^{\frac{2}{3}} + 4|P| + |L| = 4n^{\frac{2}{3}}n^{\frac{2}{3}} + 4n + n = 4n^{\frac{4}{3}} + 5n.$$

Vi ser således att $n^{\frac{4}{3}}$ kommer dominera när n blir stort, alltså växer Szemerédi-Trotters övre begränsning som $n^{\frac{4}{3}}$.

3 Makeya

3.1 Introduktion av polynommetoden

Polynommetoden är en problemlösningsteknik för att lösa problem av kombinatoriskt slag, genom att påkalla hjälp från linjär algebra. Idéen bakom polynommetoden är att använda sig av egenskaper som polynom besitter för att sedan dra nytta av dessa egenskaper i diverse problem.

En överskådlig bild av polynommetoden är att vi betraktar ett vektorrum av polynom i n variabler över en kropp \mathbb{F} , där polynomen har grad högst $D > 0$. Vi intresserar oss nu för en mängd punkter $S \subset \mathbb{F}^n$. Vi försöker nu att hitta ett polynom p av så låg grad som möjligt som försvinner på S . Slutligen, i det sista steget utnyttjar man p i problemlösningen.

3.2 Historian bakom Makeya problemet: Diskret och kontinuerligt

3.2.1 Makeya problemet

År 1917 ställde Sōichi Makeya frågan: Vilken är den minsta möjliga storleken/arean/måttet på en mängd i ett plan så att en nål med längden 1 kan roteras 360° [5]? En mängd $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kallas en Makeyamängd om den är en kompakt mängd i \mathbb{R}^n , som innehåller en rät linje med längden 1 i varje möjlig riktning.

Med $S^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ betecknar vi enhetssfären. En kompakt mängd $K \subseteq \mathbb{R}^n$ är då en Makeyamängd om det för varje $v \in S^{n-1}$ finns ett $u \in \mathbb{R}^n$ så att $l := \{u + tv : t \in [0, 1]\} \subseteq K$.

Låt oss nu illustrera några Makeyamängder med hjälp av några geometriska figurer (se figur 15).

Example 3.1. Cirkeln med diameter 1 är en Makeyamängd i \mathbb{R}^2 , med arean:

$$A(r) = \pi r^2 = \pi \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4} \approx 0.785.$$

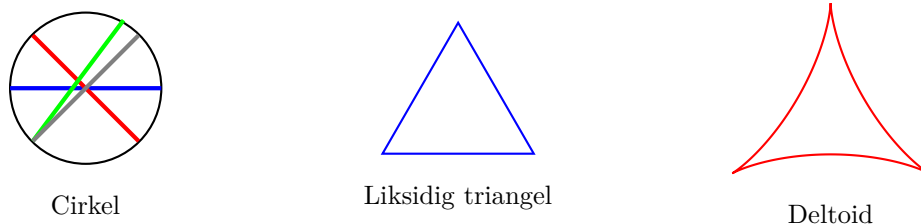
Example 3.2. En liksidig triangel med höjd 1 är en Makeyamängd i \mathbb{R}^2 , med arean:

$$A(b, h) = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577.$$

Example 3.3. En deltoid (även kallad 'tricuspid') är en Makeyamängd i \mathbb{R}^2 , med arean:

$$\frac{\pi}{8} \approx 0.393$$

Utifrån dessa exempel kan vi dra slutsatsen att deltoiden har den minsta arean, hälften av cirkelns. Medan den liksidiga triangeln har mindre area än cirkeln, men större än deltoiden.



Figur 15: Geometriska figurer

Vid samma tid som Sōichi Kakeyas problem började ta plats i världen, fokuserade en rysk matematiker vid namn Abram Samoilovitch Besicovitch sin uppmärksamhet mot ett helt annat problem. Detta problem skulle senare visa sig ha ett nära relaterat släktskap med Kakeya problemet, utan att Besicovich hade någon kännedom om Kakeya problemets existens [9].

Besicovitch avlade examen 1912 vid Sankt Petersburgs universitet, där han studerade under Andrey Andreyevich Markov[30]. Hans första publicerade arbete handlade om sannolikhetsteori. År 1917 utsågs han till professor i Perm (som senare döptes om till Molotov). Under inbördeskriget 1919 låg universitetet i ruiner. År 1920 återvände han till Leningrad (nu Sankt Petersburg) där han fortsatte sin karriär som professor och föreläsare.

År 1917 ville han bekanta sig med matematisk logik, men på grund av bristande tillgång på material i Perms bibliotek; lade han fokus på ett analytiskt problem. Mer specifikt hade följande problem fångat hans intresse. Om $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ är Riemannintegrerbar, måste det finnas ortogonala koordinataxlar sådant att Riemannintegralen $\int f(x, y)dx$ existerar för varje y och på ett sådant vis att $\int f(x, y)$ är Riemannintegrerbar som en funktion av y [15]? Detta problem publicerade han i sitt papper "Sur deux questions d'intégrabilité" år 1920[9]. Besicovitch kom senare med ett motexempel genom att konstruera en mängd med noll mått i planet bestående av linjesegment av längd 1 i varje riktning. År 1919 hade Besicovitchs lyckats konstruera en sådan mängd, som senare skulle uppkallas efter honom [16]. När Besicovitch blev medveten om Kakeyaproblmet i Euklidiska planet publicerade han en lösning i Mathematische Zeitschrift år 1928, vilket både var fascinerade och gav upphov till märkvärdiga figurer [9].

3.2.2 Kakeya problemet över ändliga kroppar

Thomas Wolff presenterade 1999 en alternativ syn på Kakeya problemet. Istället för att undersöka problemet i ett euklidiskt rum, föreslog han att man skulle utforska det över ändliga kroppar \mathbb{F}_q [5].

Låt \mathbb{F}_q vara en ändlig kropp, och låt $n \geq 1$.

Definition 3.4. [25] En **linje** i \mathbb{F}_q är en mängd $l \subset \mathbb{F}_q^n$ på formen $\{u + tv : t \in \mathbb{F}_q\}$. Där $u \in \mathbb{F}_q^n$ är en punkt på linjen och $v \in \mathbb{F}_q^n \setminus \{0\}$ är linjens riktningsvektor.

Definition 3.5. [25] En mängd $K \subset \mathbb{F}_q^n$ är en Kakeyamängd om det för varje $u \in \mathbb{F}_q^n$, finns minst en linje l med riktningsvektorn v .

Wolff frågade sig om minsta begränsningen för en Kakeyamängd var

$$|K| \geq c_n q^n,$$

där konstanten c endast beror på n .

3.2.3 Dvir löser Kakeya problemet över ändliga kroppar

2008 publicerade Zeev Dvir 'On the size of Kakeya sets in finite fields', vilket bekräftade den framlagda hypotesen [13].

Dvir använde polynommetoden för att visa på en motsägelse i sitt bevis. Längre hade man trott att det ändliga Kakeyaproblemet var av lika svår grad som Kakeya i det euklidiska rummet [17].

3.2.4 Exempel på ändlig Kakeya

För att illustrera några fall av ändlig Kakeya, låt oss titta på de ändliga kropparna \mathbb{F}_2^2 och \mathbb{F}_3^2 .

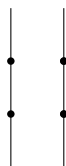
Example 3.6. Låt oss undersöka hur en Kakeyamängd $K \subset \mathbb{F}_2^2$ över en ändlig kropp kan se ut. En linje l kan skrivas som $\{u + tv : t \in \mathbb{F}_2\}$ där $u \in \mathbb{F}_2^2$ är en punkt och $v \in \mathbb{F}_2^2 \setminus \{0\}$ är riktningsvektorn. Vi får då följande möjliga element

$$u \in \{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}; \quad v \in \{(0,1), (1,0), (1,1)\}; \quad \mathbb{F}_2 = \{0,1\}.$$

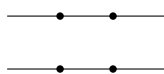
Detta ger oss att linjerna kan skrivas som:

$$l_1 : (0,0) + t(1,1); \quad l_2 : (1,0) + t(1,1); \quad l_3 : (1,0) + t(1,0);$$

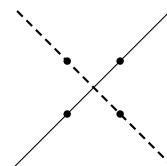
$$l_4 : (0,1) + t(1,0); \quad l_5 : (1,0) + t(0,1); \quad l_6 : (0,1) + t(0,1).$$



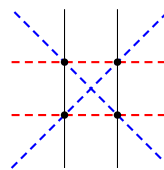
Figur 16: l_5 och l_6



Figur 17: l_3 och l_4



Figur 18: l_1 och l_2



Figur 19: l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 och l_6

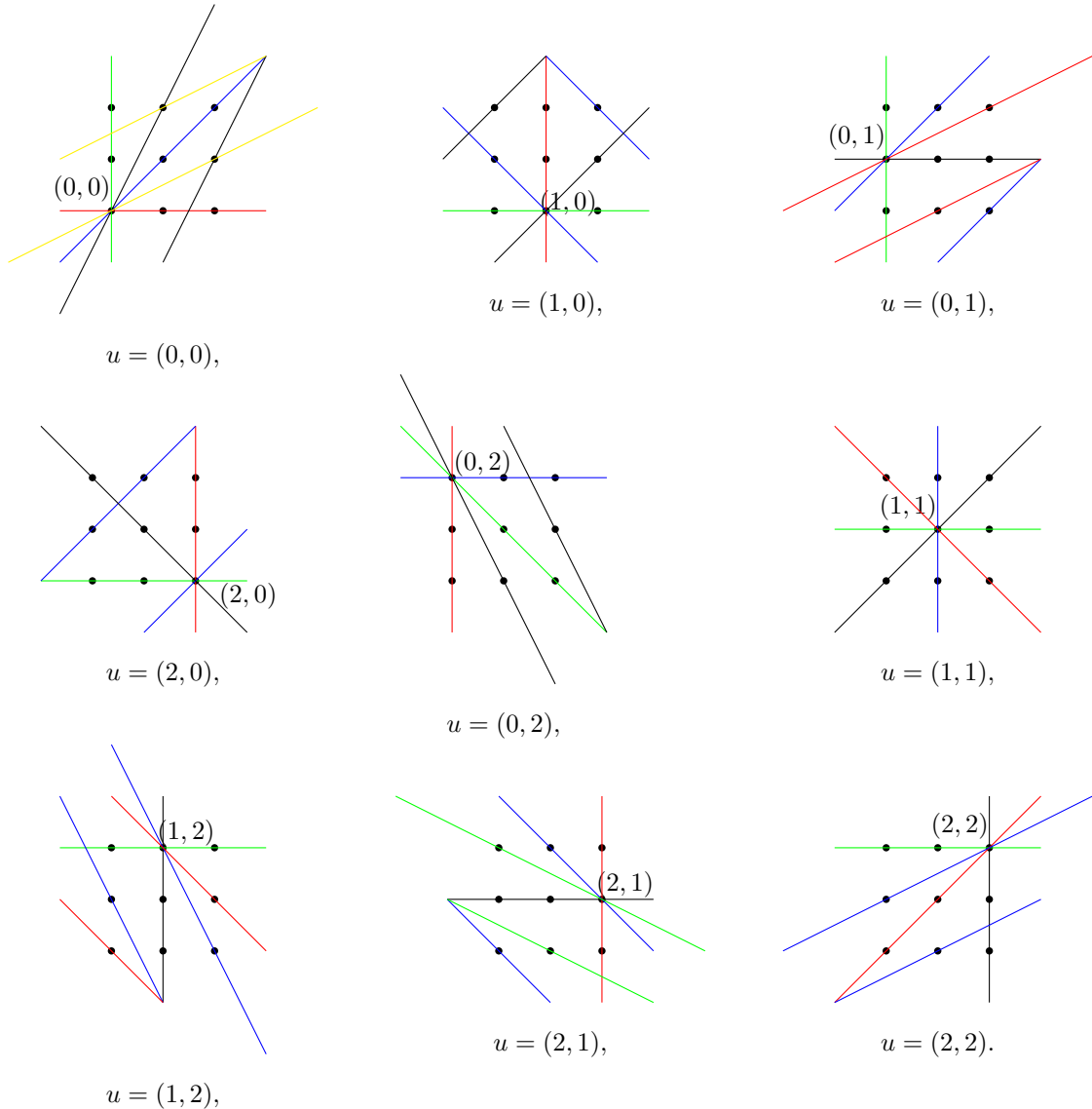
Vi får således att följande linjer bildar en Kakeyamängd $K = \{l_2, l_3, l_5\}$ över den ändliga kroppen \mathbb{F}_2^2 . Lägga märke till att konstruktionen av Kakeyamängden kunde sett annorlunda ut. Vi kunde till exempel valt att inkludera $l_1 := (1,1) + t(1,1)$, istället för l_2 .

Example 3.7. Låt oss undersöka hur en Kakeyamängd $K \subset \mathbb{F}_3^2$ kan konstrueras. En linje l kan skrivas som $\{u + tv : t \in \mathbb{F}_3\}$ där $u \in \mathbb{F}_3^2$ är en punkt och $v \in \mathbb{F}_3^2 \setminus \{0\}$ är riktningsvektorn. Vi får då följande möjliga element

$$u \in \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (2, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2)\};$$

$$v \in \{(1, 0), (0, 1), (2, 0), (0, 2), (1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2)\}; \quad \mathbb{F}_3 = \{0, 1, 2\}.$$

Vi får då att de möjliga linjerna för varje punkt u är:

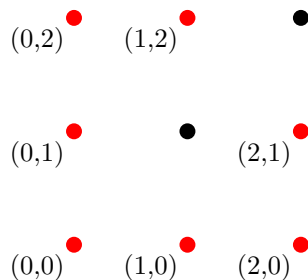


Figur 20: Alla möjliga linjer

Låt oss nu bilda en Kakeyamängd. En Kakeyamängd i \mathbb{F}_3^2 kommer bestå av linjer i fyra olika riktningar. Om vi utgår från figur 20 så kan vi välja en mängd punkter så att vi får en linje i varje riktning. Exempel på punkter dessa linjer passerar genom är:

- Riktning $(1, 2)$ med utgångspunkten $(0, 0)$ ger punkterna: $\{(0, 0), (1, 2), (2, 1)\}$.
- Riktning $(1, 1)$ med utgångspunkten $(0, 1)$ ger punkterna: $\{(0, 1), (1, 2), (2, 0)\}$.
- Riktning $(1, 0)$ med utgångspunkten $(0, 0)$ ger punkterna: $\{(0, 0), (1, 0), (2, 0)\}$.
- Riktning $(0, 1)$ med utgångspunkten $(0, 0)$ ger punkterna: $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2)\}$.

Sålunda, ser vi att dessa punkter ligger på en linje i varje riktning, och utgör därför en Kekeya-mängd.



Figur 21: Punkterna linjerna passerar igenom

3.3 Grundläggande definitioner inför polynommetoden

Definition 3.8 (Binär operator). Låt X vara en mängd. En binär operator \circ på X är en funktion

$$\circ : X \times X \rightarrow X$$

Definition 3.9 (Grupp). (G, \circ) är en grupp om mängden G utrustad med en binär operator \circ uppfyller:

- Associativitet: För alla $x, y, z \in G$; gäller $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.
- Identitet: Det existerar ett $e \in G$ så att $e \circ x = x \circ e = x$ för alla $x \in G$. Vi säger att e är ett identitets-element av mängden G
- Invers: För alla $x \in G$; existerar det ett $y \in G$ så att $x \circ y = y \circ x = e$.

Gruppen G kallas Abelsk om den dessutom uppfyller:

- Kommutativitet: För alla $x, y \in G$, gäller $x \circ y = y \circ x$

Definition 3.10 (Kropp). En kropp är en mängd \mathbb{K} utrustad med två binära operatorer, addition $(+)$ och multiplikation (\cdot) och de två unika elementen $0, 1$ som uppfyller:

- $(\mathbb{K}, +)$ är en abelsk grupp med identitets-elementet 0
- $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ är en abelsk grupp med identitets-elementet 1
- Distributivitet: För alla $x, y, z \in \mathbb{K}$; gäller $a \cdot (a + b) = a \cdot b + a \cdot c$

En konsekvens av definitionen är att för alla $x \in \mathbb{K}$, $0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$.

Definition 3.11. Vi säger att en funktion $f : A \rightarrow B$ på mängderna A och B är

- Injektiv om $f(a_1) = f(a_2)$ medför att $a_1 = a_2$
- Surjektiv om för varje $b \in B$ existerar ett $a \in A$ sådant att $f(a) = b$
- Bijektiv om f är injektiv och surjektiv.

Definition 3.12 (Ändlig kropp). Vi betecknar \mathbb{F}_q som en ändlig kropp av ordningen q . Ordningen är antalet element i kroppen.

Proposition 3.13. [24] *Det finns en ändlig kropp av ordningen q om och endast om $q = p^r$, för något primtal p och en konstant $r \geq 1$.*

Definition 3.14 (Vektorrum). Ett **vektorrum** V över en kropp \mathbb{F} är en mängd tillsammans med två operationer: addition och skalärmultiplikation. Dessa operationer är sådana att för varje par av element $v, u \in V$; existerar det ett unikt element $v + u \in V$ och för varje $a \in \mathbb{F}$; existerar ett unikt element $av \in \mathbb{F}$ som uppfyller följande axiom:

- Kommutativitet: För alla $v, u \in V$; gäller att $v + u = u + v$.
- Associativitet: För alla $u, v, w \in V$; gäller att $(v + u) + w = v + (u + w)$.
- Nollelement: Det finns ett element $\vec{0} \in V$ sådan att $v + \vec{0} = \vec{0} + v = \vec{0}$ för varje element $v \in V$ ($\vec{0}$ kallas nollvektorn/nollelementet).
- För varje element $v \in V$ finns det ett element $(-v) \in V$ sådan att $v + (-v) = \vec{0}$.
- För varje $v \in V$; gäller att $1 \cdot v = v \cdot 1 = v$.
- För varje $v \in V$ och $a, b \in \mathbb{F}$; gäller att $a(bv) = (ab)v$.
- För varje $v, u \in V$ och $a \in \mathbb{F}$; gäller att $a(v + u) = av + au$.
- För varje $v \in V$ och $a, b \in \mathbb{F}$; gäller att $(a + b)v = av + bv$.

Definition 3.15 (Affint delrum). Låt V vara ett vektorrum över \mathbb{F} , $U \subseteq V$ och $U \neq \emptyset$ samt $\vec{v} \in V$. En mängd på formen

$$U + \vec{v} := \{\vec{u} + \vec{v} : \vec{u} \in U\}$$

kallas för ett **affint delrum**. Då kallas U ett **delrum** om det för alla $x, y \in U$ och $t \in \mathbb{F}$ gäller att

- $\vec{u} + \vec{v} \in S$.
- $t\vec{u} \in S$.

Definition 3.16. Låt \mathbb{F}_q^n beteckna ett vektorrum av dimension n över en ändlig kropp \mathbb{F} :

$$\mathbb{F}_q^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{F}_q\}.$$

Example 3.17. Låt oss ta vektorrummet \mathbb{F}_2^3 som består av elementen

$$\{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}.$$

Om vi adderar två element i vektorrummet får vi att

$$(1, 1, 1) + (1, 0, 1) = (2, 1, 2) = (0, 1, 0).$$

3.3.1 Polynom

Definition 3.18 (Polynom). Ett polynom $p(x)$ av grad n , där n är ett icke-negativt heltal, definieras som en funktion uttryckt på formen

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

där koefficienterna $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ och $a_n \neq 0$. Termen a_n kallas för polynomets ledande koefficient, om $a_n = 1$ kallas polynomet moniskt.

Polynomets grad betecknas med $\deg(p) = n$.

Definition 3.19. Mängden av samtliga polynom, i en variabel x betecknas $K[x]$.

Definition 3.20. Mängden av samtliga polynom i flera variabler x_1, x_2, \dots, x_n betecknas $K[x_1, \dots, x_n]$.

Låt $p \in K[x_1, \dots, x_n]$ vara ett **flervariabelspolynom** med koefficienter i kroppen K . Vi skriver då ett flervariabelspolynom som:

$$p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i_1, \dots, i_n \geq 0: i_1 + \dots + i_n \leq d} a_{i_1, \dots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n},$$

där $a_{i_1, \dots, i_n} \in K$ och endast ett ändligt antal är nollskilda. Vi skriver graden av ett flervariabelspolynom som $\deg(p) := \max\{i_1 + \dots + i_n : a_{i_1, \dots, i_n} \neq 0\}$ (illustreras med ett exempel nedan).

Example 3.21. Exempel på tre polynom p , q och r .

- $p(x) = 4x^4 + 2x^3 + x^2 + 3$ är ett polynom i en variabel med $\deg(p) = 4$.
- $q(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ är ett polynom i en variabel med $\deg(p) = 3$.
- $r(x, y) = xy^3 + x^2 + yx$ är ett flervariabelspolynom med $\deg(r) = 4$.

Definition 3.22 (Homogent polynom). Ett **homogent polynom** är ett polynom där alla nollskilda termer har samma grad

Example 3.23. Följande polynom är ett homogent polynom $3x^5 + x^2y^2z + y^4z$

Definition 3.24 (Monom). Ett **monom** kan skrivas på formen $x_1^{D_1} x_2^{D_2} \cdots x_n^{D_n}$, där $D_j \in \mathbb{N}_{\geq 0}$. Den totala graden D av alla termer definieras som

$$D = D_1 + D_2 + \dots + D_n.$$

Definition 3.25 (Försvinnande polynom). Låt $p \in \mathbb{F}[x_1, \dots, x_n]$ och låt $S \subset \mathbb{F}^n$. Vi säger att p **försvinner** på S om $p(a) = 0$ för varje $a \in S$. Nollpolynomet räknas som ett försvinnande polynom av sig själv.

3.3.2 Notation

Definition 3.26 (Multi-index notation). Vi inför ny notation (till senare).

- $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$.
- $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$.
- $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$.
- $\deg(x^\alpha) = |\alpha|$.
- $p(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\alpha: |\alpha| \leq d} a_\alpha x^\alpha$ (inte alla 0).

Example 3.27. För att göra det tydligare om $\alpha = 5$, där $\alpha = (2, 3)$, så får vi att $x^\alpha = x_1^2 \cdot x_2^3$ och $|\alpha| = 2 + 3 = 5$.

3.3.3 Linjär avbildning och dimensionssatsen

Två viktiga definitioner som vi kommer att använda i konstruktion av polynommetoden är: linjär avbildning och dimensionssatsen. Dessa ger oss insyn i polynomets egenskaper. Med andra ord, med hjälp av dessa kommer vi att kunna hitta ett nollskilt polynom som försvinner på en mängd. Låt oss därför definiera dessa.

Definition 3.28 (Linjär avbildning). Låt V och W vara två vektorrum där bägge är definierade över samma kropp \mathbb{F} . En **linjär avbildning** $T : V \rightarrow W$ är en funktion från V till W som uppfyller:

$$T(v + u) = T(v) + T(u) \text{ för alla } u, v \in V \tag{i}$$

$$T(av) = aT(v) \text{ för alla } a \in \mathbb{F} \text{ och för alla } v \in V \tag{ii}$$

Sats 3.29 (Dimensionssatsen). [31] Låt $T : V \rightarrow W$ vara en linjär avbildning där V är av en ändlig dimension, då följer att:

$$\dim(V) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)),$$

där **nollrummet (kärnan)** av T är $\text{Ker}(T) := \{\vec{v} \in V : T(\vec{v}) = 0\}$ och **bildrummet** av T är $\text{Im}(T) := \{T(\vec{v}) : \vec{v} \in V\}$

Example 3.30. Anta att vi har en linjär avbildning $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Då är $\dim(V) = 3$, och enligt dimensionssatsen får vi följande uttryck:

$$\dim(V) = \dim(\text{Ker}(T)) + \dim(\text{Im}(T)).$$

Eftersom $\text{Im}(T) \subseteq \mathbb{R}^2$ så följer att $\dim(\text{Im}(T)) \leq 2$, därav måste dimensionen av kärnan vara $\dim(\text{Ker}(T)) \geq 1$.

3.4 Polynommetoden

För att kunna använda oss av polynommetoden, behöver vi två kraftfulla verktyg: parameterräkningsargumentet och försvinningslemmat. Jag kommer nu att beskriva polynommetoden för det ändliga Kakeya problemet, baserat på Larry Guths bok 'Polynomial Method' [17].

Definition 3.31. Låt $P_D(\mathbb{F}^n)$ vara vektorrummet av polynom i n variabler med koefficienter från kroppen \mathbb{F} , med grad högst D . Om det finns n variabler x_1, \dots, x_n så är $P_D(\mathbb{F}^n) \subset F[x_1, \dots, x_n]$ bestående av polynom av grad högst D . Om $D = -1$, så gäller att $P_{-1}(\mathbb{F}) := \{0\}$, för $n \geq 1$. Man kan kolla att $P_D(\mathbb{F}^n)$ uppfyller definition av ett vektorrum \mathbb{F} (se definition 3.14).

Anta att $S \subset \mathbb{F}^n$ är en ändlig mängd av punkter. Vi vill nu undersöka huruvida det möjligtvis finns ett nollskilt polynom $p(x) \in P_D(\mathbb{F}^n)$ som försvinner på S .

Proposition 3.32. Om $\dim(P_D(\mathbb{F}^n)) > |S|$, då finns det ett polynom $p(x) \in P_D(\mathbb{F}^n)$, där $p(x)$ inte är nollpolynom, som försvinner på S .

Bevis. Låt $\alpha_1, \dots, \alpha_{|S|}$ vara punkterna som tillhör S . Låt E representera en evalueringsavbildning:

$$E : P_D(\mathbb{F}^n) \rightarrow \mathbb{F}^{|S|}; \quad p(x) \mapsto (p(\alpha))_{\alpha \in S},$$

det vill säga $E(q(x)) = (q(\alpha_1), \dots, q(\alpha_{|S|}))$. Evalueringsavbildningen tar ett polynom $q(x)$, och utvärderar polynomet i varenda punkt $\alpha_1, \dots, \alpha_{|S|}$. Till exempel skulle en evalueringsavbildning på polynomet $k(x, y) = x^2 + y^3$ med mängden $A = \{(1, 2), (2, 2), (5, 3)\}$ avbildas som

$$E(k(x, y)) = (1 + 2^3, (2^2 + 2^3), (5^2 + 3^3)) = (9, 12, 52).$$

Evalueringsavbildningen är en linjär avbildning (se definition 3.28). Det följer då att nollrummet $\text{Ker}(E) \subset P_D(\mathbb{F}^n)$ består av dem polynom i $P_D(\mathbb{F}^n)$ som försvinner på S . Vi antog dessutom att $\dim(P_D(\mathbb{F}^n)) > |S|$, vilket innebär att kärnan av E , enligt dimensionssatsen 3.29 är icke-trivialt, alltså $\dim(\text{Ker}(E)) \geq 1$. Sålunda, finns det ett icke-nollpolynom som försvinner på S . \square

En naturlig följdfråga är: Vad är dimensionen av $P_D(\mathbb{F}^n)$? Monomen $x_1^{D_1} \dots x_n^{D_n}$, där $D_1, \dots, D_n \geq 0$ och $D_1 + \dots + D_n$ utgör en bas för $P_D(\mathbb{F}^n)$. Genom att räkna antalet monom via 'stars and bars', så kan vi beräkna dimensionen av $P_D(\mathbb{F}^n)$. Vi får därför följande lemma:

Lemma 3.33. Dimensionen av $P_D(\mathbb{F}^n)$ är $\binom{D+n}{n}$.

Bevis. Fixera D och n . Vi konstruerar ett monom $x_1^{D_1} \dots x_n^{D_n}$ med strängen som består av D \star :or och n $|$:ar. Genom att placera ut så många \star or som D_i är. Exempelvis om $D_2 = 2$ placerar vi ut $\star\star$. Efter stjärnorna placerar vi ut en $|$. Vi upprepar denna procedur tills den sista $D_n \star$:arn och n :te $|$:en är utplacerad. Slutligen, placerar vi $D - \sum_i D_i \star$:or. Denna uppställning skapar en bijektion mellan strängarna bestående av \star :or och $|$:ar med alla monomen i $P_D(\mathbb{F}^n)$ (för en illustration se nästa exempel). Därmed, får vi att antalet monom kan uttryckas som $\binom{D+n}{n}$ eftersom vi behöver placera ut n stycken $|$ på $D + n$ möjliga platser. \square

Example 3.34. Låt oss betrakta vektorrummet $P_2(\mathbb{F}^2)$, som består av polynom i två variabler med grad högst 2 över en kropp \mathbb{F} . För att hitta dimensionen till $P_2(\mathbb{F}^2)$ tillämpar vi lemma 3.33, då får vi att graden kan beräknas med $\binom{D+n}{n}$. Vi får att $D = 2$ och $n = 2$, insättning i formeln ger att

$$\binom{2+2}{2} = \binom{4}{2} = 6.$$

och vi får då att dimensionen är

$$\dim(P_2(\mathbb{F}^2)) = 6.$$

Om vi istället gör genom uppställning med stjärnor och stolpar:

$$\begin{aligned} x_1^2 x_2^0 &\longleftrightarrow \star \star |, \\ x_1^0 x_2^2 &\longleftrightarrow | \star \star, \\ x_1^0 x_2^0 &\longleftrightarrow || \star \star, \\ x_1^1 x_2^1 &\longleftrightarrow \star | \star |, \\ x_1^1 x_2^0 &\longleftrightarrow \star | \star, \\ x_1^0 x_2^1 &\longleftrightarrow | \star | \star. \end{aligned}$$

Vi ser här hur monomen är i bijektion med \star och $|$ strängarna. Därmed får vi även här att dimensionen är 6.

Lemma 3.35 (Parameterräkning.1). *Om $S \subset \mathbb{F}^n$ och $|S| < \binom{D+n}{n}$, då finns det ett icke-nollpolynom $P \in P_D(\mathbb{F}^n)$ som försvinner på S .*

Bevis. Kombinera Prop 3.32 och 3.33. □

Lemma 3.36 (Parameterräkning.2). *För varje $n \geq 1$ och ändlig mängd $S \subset \mathbb{F}^n$, existerar det ett icke-nollpolynom $p \in P_D(\mathbb{F}^n)$ som försvinner på S med grad $D \leq n|S|^{\frac{1}{n}}$.*

Bevis. Välj D som det största heltalet så att $D \leq n|S|^{\frac{1}{n}}$. Med hjälp av formeln för beräkning av dimensionen av $P_D(\mathbb{F}^n)$, kan vi skriva

$$\binom{D+n}{n} = \frac{(D+n)(D+n-1) \cdots (D+1)D!}{n!D!} = \frac{(D+n)(D+n-1) \cdots (D+1)}{n!}.$$

Fortsättningsvis kan vi observera att

$$\frac{(D+n)(D+n-1) \cdots (D+1)}{n!} \geq \frac{(D+1)(D+1) \cdots (D+1)}{n!} = \frac{(D+1)^n}{n!}.$$

Vi valde D som det största heltalet som uppfyllde olikheten ovan, alltså måste $D+1 > n|S|^{\frac{1}{n}}$. Detta leder således till

$$\frac{(D+1)^n}{n!} > \frac{(n|S|^{\frac{1}{n}})^n}{n!} = \frac{n^n |S|}{n!}.$$

Om vi nu undersöker $\frac{n^n |S|}{n!}$ för några n .

n	$\frac{n^n S }{n!}$
1	$ S $
2	$\frac{2 \cdot 2 S }{2 \cdot 1}$
3	$\frac{3 \cdot 3 \cdot 3 S }{3 \cdot 2 \cdot 1}$
4	$\frac{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 S }{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Det gäller alltså att $\frac{n^n}{n!} \geq 1$, eftersom

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdot n \cdots n}{n(n-1)(n-2) \cdots 1}$$

så $\frac{n^n |S|}{n!} \geq |S|$. Om vi nu lägger ihop allt, får vi att

$$\binom{D+n}{n} \geq \frac{(D+1)^n}{n!} > \frac{n^n |S|}{n!} \geq |S|,$$

därför får vi $\binom{D+n}{n} > |S|$. Nu kan vi med hjälp av föregående lemma 3.35, konkludera att det finns ett $P \in P_D(\mathbb{F}^n)$ som försvinner på S . \square

Sats 3.37 (Polynomdivisionsalgoritmen). Om $D \geq 0$ och $p(x) \in P_D(\mathbb{F})$ är ett polynom i en variabel och $a \in \mathbb{F}$ då kan vi skriva polynomet $p(x)$ som

$$p(x) = (x - t)p_1(x) + r,$$

där $p_1(x) \in P_{D-1}(\mathbb{F})$ och $r \in \mathbb{F}$

Bevis. Vi genomför beviset genom att utföra induktion på D .

Basfall $D = 0$ ger att $p(x) = c$, där c är en konstant, vilket innebär att $c = r$, alltså är $p(x) = r$.

Anta att påståendet gäller för $D - 1$. Jag vill nu visa att påståendet stämmer för D .

Inför polynomet $p(x) = \sum_{i=0}^D a_i x^i$, så att $p(x) \in P_D(\mathbb{F}^n)$. Bilda nu polynomet

$$q(x) = p(x) - (x - t)(a_D x^{D-1}),$$

observera att x^D i $q(x)$ subtraheras till noll, q har därför grad högst $D - 1$.

Enligt induktionsantagande kan vi skriva

$$q(x) = (x - t)q_1(x) + r,$$

där $q_1(x) \in P_{D-2}(\mathbb{F})$ och $r \in \mathbb{F}$. Detta ger oss följande ekvation

$$p(x) - (x - t)(a_D x^{D-1}) = q(x) = (x - t)q_1(x) + r \iff p(x) = (x - t)(a_D x^{D-1} + q_1(x)) + r.$$

Om vi nu sätter $k(x) = (a_D x^{D-1} + q_1(x))$ så kan vi skriva

$$p(x) = (x - t)k(x) + r.$$

Enligt principen om matematisk induktion gäller alltså påståendet för alla $D \geq 0$. □

Lemma 3.38 (Faktorsatsen). *Om $p(x) \in P_D(\mathbb{F})$ är ett polynom över kroppen \mathbb{F} och $p(a) = 0$ för något $a \in \mathbb{F}$, då gäller att $p(x) = (x - a)p_1(x)$ för något polynom $p_1 \in P_{D-1}(\mathbb{F})$*

Bevis. Enligt lemma 3.37 kan vi skriva polynomet på formen $p(x) = (x - a)p_1(x) + r$. Sätt $p(a) = 0$, då blir $r = 0$. Därmed, får vi att $p(x)$ kan skrivas som $p(x) = (x - a)p_1(x)$. □

Lemma 3.39. *Låt $D \geq 0$. Om polynomet $p(x) \in P_D(\mathbb{F})$ och $p(x)$ försvinner på $D+1$ olika punkter, då är $p(x)$ nollpolynom.*

Bevis. Vi utför induktion på D . Basfallet $D = 0$ ger $D + 1 = 0 + 1 = 1$. Polynomet $p(x) \in P_D(\mathbb{F})$ är en konstant, på grund av att $D = 0$. Vi vet dessutom att $p(x)$ försvinner på en punkt, ur detta följer att $p(x) = 0$ och därför måste vara nollpolynom.

Låt nu $D \geq 1$ och låt oss anta att påståendet stämmer för $D - 1$ punkter.

Anta att $p(x) \in P_D(\mathbb{F})$ och $p(x)$ försvinner på $D + 1$ unika punkter x_1, \dots, x_{D+1} . Enligt föregående lemma 3.38, existerar det ett $p(x) \in P_{D-1}(\mathbb{F})$ så att

$$p(x) = (x - x_{D+1})p_1(x).$$

Enligt vårt induktionsantagande vet vi att $p_1(x)$ försvinner på x_1, \dots, x_D , därför följer det att $p_1(x) = 0$. Därmed blir $p(x) = (x - x_{D+1}) \cdot 0 = 0$.

Sålunda, ser vi att $p(x) = 0$ är nollpolynom. □

En linje $l \subset \mathbb{F}^n$ är ett endimensionellt affint delrum (se definition 3.15)

Lemma 3.40. *Om $p \in P_D(\mathbb{F}^n)$ och p försvinner på $D + 1$ punkter på en linje l , då försvinner p på varje punkt på l .*

Bevis. Parametrisera linjen l med avbildningen $\gamma : \mathbb{F} \rightarrow \mathbb{F}^n$ på formen $\gamma(t) = at + b$ för vektorerna $a, b \in \mathbb{F}^n$ och $a \neq 0$. Låt $q(t) = p(\gamma(t)) = p(at + b)$. Vi får att $q(t)$ är ett polynom i en variabel med $\deg(q) \leq D$. Utifrån vårt antagande får vi att p försvinner på $D + 1$ punkter på l , alltså försvinner $q(t)$ på $D + 1$ värden för t . Enligt lemma 3.39 är q nollpolynom, vilket leder till att p försvinner på varje punkt på l . □

Lemma 3.41. *Låt q vara ett primtal och anta att $p \in P_{q-1}(\mathbb{F}_q^n)$. Om p försvinner på varje punkt i \mathbb{F}_q^n , då är p nollpolynom.*

Bevis. Vi utför induktion på n .

Låt $n = 1$, vi ser att p försvinner på q punkter i \mathbb{F}_q , och eftersom $\deg(p) < q$, så följer enligt lemma 3.39 att p är nollpolynom.

Låt nu $n \geq 2$ och anta att påståendet är sant för $n - 1$. Då följer att om $p \in P_{q-1}(\mathbb{F}_q^{n-1})$ försvinner i varje punkt i \mathbb{F}_q^{n-1} , så måste p vara nollpolynom.

Låt x_1, x_2, \dots, x_n vara variablerna och vi uttrycker p som

$$p(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{q-1} p_i(x_1, \dots, x_{n-1})x_n^i.$$

I denna formel så är p_i polynom i variablerna x_1, x_2, \dots, x_{n-1} och $\deg(p_i) \leq q-1$. Låt oss nu fixera x_1, \dots, x_{n-1} , men låt x_n variera. Vi har ett polynom i x_n , med graden $\leq q-1$, som försvinner för alla $x_n \in \mathbb{F}_q$. Det följer då ur lemma 3.39 att eftersom detta är ett polynom av en variabel, som försvinner för alla punkter att detta är nollpolynom. Sålunda, resulterar detta i att $p_i(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0$ för alla i och för alla $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{F}_q^{n-1}$. Enligt vårt induktionsantagande, har vi att varje p_i är nollpolynom, därmed följer det att p också måste vara nollpolynom. \square

3.4.1 Dvirs banbrytande lösning av ändlig Kakeya med polynommetoden

Definition 3.42. En mängd $K \subset \mathbb{F}_q^n$ kallas en Kakeyamängd om mängden innehåller en linje i varje riktning.

Huvudsats 1 ([13]). *En Kakeyamängd $K \subset \mathbb{F}_q^n$ har åtminstone $c_n q^n$ element, där $c_n = (10n)^{-n}$.*

Bevis. Detta argument är konstruerat som ett bevis via motsägelse, med utgångspunkt i Guths bevis [17].

Anta att $K \subset \mathbb{F}_q^n$ är en Kakeyamängd med $|K| < (10n)^{-n} q^n$. Enligt parameterräkningsargumentet, lemma 3.36 finns det ett icke-nollpolynom p som försvinner på K , där $\deg(p) \leq n|K|^{\frac{1}{n}} < q$. Vi uttrycker nu polynom p med grad $D = \deg(p)$ som en summa: $p = p_D + m$. Den första delen av summan, p_D , är homogena monom av graden D , lägg dessutom märke till $p_D \neq 0$. Det andra polynom m är sådant att $\deg(m) < D$.

Låt $a \neq \vec{0}$ vara en godtycklig vektor i \mathbb{F}_q^n , eftersom K utgör en Kakeyamängd väljer vi $b \in \mathbb{F}_q^n$ så att linjen $\{at + b : t \in \mathbb{F}_q\}$ är innesluten i K . Definiera nu ett polynom $r(t) := p(at + b)$ i en variabel. Polynom $r(t)$ försvinner för varje $t \in \mathbb{F}_q$. Eftersom $\deg(r) \leq D < q$, så försvinner $r(t)$ på $D+1$ stycken punkter, vilket enligt lemma 3.39 innebär att $r(t)$ är nollpolynom. Alla koefficienter i $r(t)$ måste således vara 0. Koefficienten för t^D i r är exakt $p_D(a)$: För att illustrera detta inför använder vi oss av multi-index notation (se definition 3.26). Vi kan skriva r som

$$r(t) = p(a_1 t + b_1, \dots, a_n t + b_n) = p_D(a_1 t + b_1, \dots, a_n t + b_n) + \underbrace{m(a_1 t + b_1, \dots, a_n t + b_n)}_{\deg(m) < D}.$$

Med multi-index notation (se definition 3.26) så får vi att

$$p_D(at + b) = \sum_{\alpha: |\alpha| \leq D} c_\alpha (at + b)^\alpha$$

Ifall vi sedan expanderar $(at + b)^\beta$ med hjälp av binomialsatsen, ges följande

$$(at + b)^\beta = a^\beta t^\beta + a^{\beta-1} t^{\beta-1} b + \dots + at b^{\beta-1} + b^\beta.$$

Så

$$p_D(at + b) = \sum_{\alpha: |\alpha|=D} c_\alpha a^\alpha t^{|\alpha|} + \text{termer av lägre grad} = p_D(a)t^D + \text{termer av lägre grad}.$$

Vi ser därför att $p_D(a) = 0$ för alla $a \in F^n \setminus \{0\}$. Givet att p_D är ett homogent polynom av grad $D \geq 1$ så följer det att p_D också försvinner på 0. Sålunda, försvinner p_D för alla punkter i \mathbb{F}_q^n . Eftersom $D < q$ säger lemma 3.41 att p_D är nollpolynomet, vilket är oförenligt med vårt antagande om att p inte var nollpolynomet; på så sätt får vi en motsägelse. □

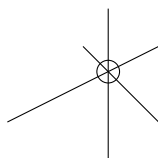
3.4.2 Sammanfattning av beviset

Som vi kan se bygger detta bevis på polynommetoden som använts genom att först anta att $K \subset \mathbb{F}_n^q$ är en ytterst liten Kakeyamängd. Därefter enligt 3.36 finns det ett icke-nollpolynom p med $\deg(p) < q$. Eftersom en Kakeyamängd består av linjer l i varje riktning, innebär det att $P(l) = 0$ för en linje i varje riktning. Sedermera försvinner p i q punkter enligt lemma 3.39. Detta innebär dock att polynomet försvinner på allt för många punkter, eftersom $\deg(p) < q$, därmed måste p vara nollpolynomet, vilket leder till en motsägelse.

4 Slutsats

För att nu knyta ihop säcken kan vi se den centrala rollen korsningsnummersolikheten spelar för incidensgeometrin, och dess spegling i den verkliga världen. Korsningsnummersolikheten lyfter fram en mycket grundläggande fråga om strukturer hos system. Detta ger i sin tur upphov till förståelse och nya frågeställningar.

Denna uppsats har fokuserat enbart på enkelt sammanhängande grafer, likaså har jag valt att betrakta en korsning i en graf när två linjer är incidenta. Om man exempelvis betraktar figur 22, så räknas det som två korsningar i mitt fall, men man skulle även kunna argumentera för att det endast är en. Därav finns det mer att utforska.



Figur 22: Alternativ syn på korsningar

Användningen av korsningsnummersolikheten i bevisföringen för Szemerédi-Trotters sats, påvisar en underliggande dynamik mellan dessa två. Bättre precision på korsningsnummersolikheten leder till att Szemerédi-Trotters sats också förbättras. Således om korsningsnummersolikheten förbättras kommer även bevis som har den i sitt arsenal att förfinas. Vi kan sammanfatta detta som att det finns väldigt mycket mer att utforska vad gäller korsningsnummersolikheten, och att detta är

endast är en del av incidensgeometrin.

Polynommetoden är ett innovativt och kreativt sätt att använda egenskaper hos polynom och ta hjälp av linjär algebra, för att sedan kunna tackla svåra problem. Terence Tao nämner i sin artikel: '*Algebraic combinatorial geometry: the polynomial method in arithmetic combinatorics, incidence combinatorics, and number theory*', att det inte finns något bevis av Kakeyamängder på ändliga kroppar som inte använder sig av polynommetoden [27]. Detta understryker polynommetodens stora inflytande för Kakeyamängder över ändliga kroppar.

För den som är intresserad av att fördjupa sig ytterligare rekommenderas läsning av Guths bok '*The polynomial method*' [17], som lyfter fram fler aspekter av polynommetoden än de jag tog upp. En annan bok är den en relativt nypublicerad '*Polynomial Methods and Incidence Theory*' av Adam Sheffer [25]. Boken lyfter även fram incidensgeometri och korsningsnummersolikheten. Bevisföringen av ändlig Kakeya är annorlunda, vilket kan bidra med ytterligare perspektiv. Terence Taos blogg är också en väldigt värdefull resurs för den nyfikne, där han skriver om väldigt många olika ämnen, inklusive Kakeya-problemet, korsningsnummersolikheten och Szemerédi-Trotters sats [28].

Sammanfattningsvis erbjuder både korsningsnummersolikheten och polynommetoden betydelsefulla verktyg för framtiden inom diskret geometri. Deras fulla potential är ännu inte helt realiserad - det återstår mycket att utforska och upptäcka.

Källförteckning

Referenser

- [1] Ackerman, E. (2019). *On topological graphs with at most four crossings per edge*. Computational Geometry, 85, 101574. <https://doi.org/10.1016/j.comgeo.2019.101574>
- [2] Ajtai M., Chvátal, V., Newborn, M. M., & Szemerédi, E. (1982). *Crossing-Free Subgraphs*. North-Holland, 60, 9-12. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304020808734844>
- [3] Aigner, M., & Ziegler, G. M. (2018). *Proofs from THE BOOK* (6th ed.). Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-57265-8>
- [4] Aigner, M., & Ziegler, G. M. (2018). *Probability makes counting (sometimes) easy*. In M. Aigner & G. M. Ziegler (Eds.), *Proofs from THE BOOK* (6th ed., pp. 45–54). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-57265-8_45
- [5] Aigner, M., & Ziegler, G. M. (2018). *The finite Kakeya problem*. In M. Aigner & G. M. Ziegler (Eds.), *Proofs from THE BOOK* (6th ed., pp. 123–134). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-662-57265-8_35
- [6] Alavi, Y., Lick, D. R., & White, A. T. (1972). *Graph Theory and Applications*. Springer, p. 122.
- [7] Alon, N., & Spencer, J. H. (2015). *The Probabilistic Method* (4th ed.). John Wiley & Sons, Inc., Chapter 2, pp. 19-29.
- [8] Berg, G., Julian, W., Mines, R., & Richman, F. (1975). *THE CONSTRUCTIVE JORDAN CURVE THEOREM*. The Rocky Mountain Journal of Mathematics, 5(2), 225–236. <http://www.jstor.org/stable/44236427>
- [9] Besicovitch, A. S. (1963). *The Kakeya Problem*. The American Mathematical Monthly, 70(7), 697–706. <https://doi.org/10.2307/2312249>
- [10] Clancy, K., Haythorpe, M., & Newcombe, A. (2019). *A survey of graphs with known or bounded crossing numbers*. College of Science and Engineering, Flinders University. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1901.05155>
- [11] Diestel, R. (2017). *Graph Theory* (5th ed.). Springer. Page 13.
- [12] Diestel, R. (2017). *Graph Theory* (5th ed.). Springer. Page 2.
- [13] Dvir, Z. (2008). *On the size of Kakeya sets in finite fields*. Journal of the American Mathematical Society, 22(4), 1093–1097. <https://doi.org/10.1090/S0894-0347-08-00607-3>
- [14] Erdős, P., & Guy, R. K. (1973). *Crossing number problems*. The American Mathematical Monthly, 80(1), 52–58.
- [15] Fox, J. (2021). *An REU Paper*. University of Chicago. Page 1. <https://math.uchicago.edu/may/REU2021/REUPapers/Fox.pdf>

- [16] Falconer, K. J. (1985). *Besicovitch and Kakeya sets*. In K. J. Falconer (Ed.), *The Geometry of Fractal Sets* (pp. 95–112). Cambridge University Press. <https://doi.org/10.1017/17B072D078DB08F019DBADB6AC05E456>
- [17] Guth, L. (2016). *Polynomial Methods in Combinatorics*. In *Chapter 2* (pp. 9–17). American Mathematical Society.
- [18] Guy, R. K. (1972). *Crossing numbers of graphs*. In Y. Alavi, D. R. Lick, & A. T. White (Eds.), *Graph Theory and Applications*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 303. Springer. <https://doi.org/10.1007/BFb0067363>
- [19] Jingbin, B. (2005). *Geometric Combinatorics*. MIT OpenCourseWare. Retrieved from https://ocw.mit.edu/courses/18-319-geometric-combinatorics-fall-2005/56cbbda57c42b36ec995b8a5d5a55d56_jingbin.pdf
- [20] Leighton, F. T. (1983). *Complexity Issues in VLSI: Optimal Layouts for the Shuffle-Exchange Graph and Other Networks*. MIT Press, Cambridge, MA, USA. ISBN: 0262121042.
- [21] Pach, J., & Tóth, G. (1997). *Graphs drawn with few crossings per edge*. *Combinatorica*, 17, 427–439. <https://doi.org/10.1007/BF01215922>
- [22] Pach, J., Radoicic, R., & Tardos, G. (2006). *Improving the Crossing Lemma by Finding More Crossings in Sparse Graphs*. *Discrete Comput Geom*, 36, 527–552. <https://doi.org/10.1007/s00454-006-1264-9>
- [23] Pach, J., Spencer, J., & Tóth, G. (2000). *New Bounds on Crossing Numbers*. *Discrete Comput Geom*, 24, 623–644. <https://doi.org/10.1007/s004540010011>
- [24] Niederreiter, H., & Xing, C. (2009). *Finite Fields and Function Fields*. In *Algebraic Geometry in Coding Theory and Cryptography* (pp. 1–29). Princeton University Press. <https://doi.org/10.2307/j.ctvdtphcs.4>
- [25] Sheffer, A. (2022). *Polynomial Methods in Finite Fields*. In A. Sheffer (Ed.), *Polynomial Methods and Incidence Theory* (pp. 76–94). Cambridge University Press.
- [26] Székely, L. A. (1997). *Crossing Numbers and Hard Erdős Problems in Discrete Geometry*. *Combinatorics, Probability and Computing*, 6(3), 353–358. <https://doi.org/10.1017/S0963548397002976>
- [27] Tao, T. (2014). *Algebraic combinatorial geometry: the polynomial method in arithmetic combinatorics, incidence combinatorics, and number theory*. <https://doi.org/10.48550/arXiv.1310.6482>
- [28] Tao, T. (n.d.). *What’s new*. from <https://terrytao.wordpress.com/>
- [29] Tao, T., & Vu, V. H. (2006). *Additive Combinatorics*. Cambridge University Press, Chapter 8, pp. 308–325.
- [30] Taylor, S. J. (1975). Abram Samoilovitch Besicovitch. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 7(2), 191–210. <https://doi.org/10.1112/blms/7.2.191>

- [31] Waldron, A., Cherney, D., & Denton, T. (n.d.). *Kernel, range, nullity, rank*. LibreTexts. Retrieved from [https://math.libretexts.org/Bookshelves/Linear_Algebra/Map%3A_Linear_Algebra_\(Waldron_Chерney_and_k](https://math.libretexts.org/Bookshelves/Linear_Algebra/Map%3A_Linear_Algebra_(Waldron_Chерney_and_k)