SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Asymptotiska Metoder

av

Elis Rislund

2024 - No K14

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Asymptotiska Metoder

Elis Rislund

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Rikard Bögvad

2024

Sammanfattning

I denna rapport ges en introduktion till asymptotiska metoder inom analys. Rapporten börjar med en kort beskrivning av asymptotiska serier och därefter studeras Laplaceintegralers och Fourierintegralers asymptotiska beteenden med hjälp av Laplaces metod och Kelvin-Stokes metod av konstant fas. Speciellt ges en härledning av Stirlings formel. Rapporten avslutas med några konkreta tillämpningar av Riemanns metod för blandade integraler.

Abstract

This report gives an introduction to asymptotic methods in analysis. The report begins with a short description of asymptotic series and then continues with a study of the asymptotic behaviour of Laplace-integrals and Fourierintegrals with the help of Laplace's method and Kelvin-Stokes' method of constant phase. In particular we give a derivation of Stirling's formula. The report ends with a few concrete applications of Riemann's method for mixed integrals.

Förord

Jag vill tacka min handledare Rikard Bögvad för att han rekommenderade ett mycket intressant ämne och för den feedback jag fått under arbetets gång. Jag vill även tacka Matilda Galmar för att hon hjälpte till med att korrekturläsa rapporten.

Innehåll

1 Introduktion

1.1 Ett inledande exempel

Tänk dig följande situation: Du är en vetenskapsman på slutet av 1700-talet som har studerat något fysikaliskt fenomen. Efter att ha formulerat problemet matematiskt har du efter vissa beräkningar funnit att svaret ges av följande integral

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t} dt.$$

Här är lösningen en funktion av den positiva parametern x som exempelvis skulle kunna stå för tid, kraft eller avstånd. Tyvärr är lösningen inte skriven på någon särskilt tillfredsställande form, utan ett naturligt nästa steg vore att försöka räkna ut integralen, åtminstone approximativt. Det visar sig mycket svårt att hitta en primitiv funktion till integranden (det råkar saknas en sådan i elementär form), så vi får istället försöka med någon annan lite mer exotisk metod. Vi testar oss fram med lite formella manipulationer. Först serieutvecklar vi $1/(1+t)$ som

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 \pm ...$$

vilket vi använder för att skriva om integranden. Med denna omskrivning och med hjälp av termvis integration kan vi skriva om integralen som

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} (-1)^n e^{-tx} t^n dt$$

och genom upprepad partiell integration förenklar vi ovanstående summa och finner att

$$I(x) = \frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} \mp ...$$

Nu kan vi räkna ut approximativa värden på $I(x)$, vilket vi gör i sedvanlig ordning. Eftersom vi i praktiken inte kan summera oändligt många termer så trunkerar vi serien och approximerar den med en vanlig summa. Som sista steg bör vi naturligtvis kontrollera att svaret verkar stämma. Vi gör därför några observationer för några olika värden på x och jämför det med värdet på den trunkerade serien. Tack och lov verkar värdena stämma överens med våra observationer och med det sagt har vi funnit en fullt tillfredsställande lösning till vårt problem.

Det finns ett par problem med vår lösning.Vår lösningsmetod speglar ett typiskt arbetssätt för många 1700-tals matematiker där man behandlar oändliga processer formellt utan att göra någon tolkning deras av egentliga innebörd. Giltigheten av de resultat som man i slutändan erhåller varierade från fall till fall - ibland blev svaren vettiga men ibland blev svaren onekligen fel eller rent av paradoxala. På tidigt 1800-tal började därför matematiker som Abel (1802-1829) och Cauchy (1789-1857) att försöka bygga upp matematiken från början så att den stod på en mer solid grund. Med definitioner kunde man precisera innebörden av ens formella beräkningar samt ge rigorösa bevis för att rättfärdiga dem. En grupp sammanhängande definitioner och satser skulle man kunna kalla för ett teoretiskt ramverk, och ett exempel på ett sådant teoretiskt ramverk är den teori som presenteras i en kurs i analysens grunder. Där går man igenom begrepp som exempelvis funktionsföljder, konvergenta serier och likformig kontinuitet. Men vid en närmare inspektion verkar inte våra formella manipulationer passa in i detta ramverk: vi serieutvecklar $1/(1+t)$ långt utanför dess konvergensradie och slutresultatet av våra beräkningar bli en överallt divergent serie. Divergenta serier har en lång historia och användes flitigt av matematiker som Laplace (1749-1827) och Euler (1707-1783). Men när 1800-tals matematikerna försökte placera matematiken på en mer solid grund så införde man det ramverk som vi återfinner i analysens grunder. I detta ramverk spelar konvergensbegreppet en central roll, och divergenta serier kommer därför av naturliga skäl inte passa i detta ramverk. 1800-tals matematikerna hade därför mycket svårt att få ett bra grepp om divergenta serier. År 1826 skrev Abel till sin gamle lärare Bernt Holmboe (1795-1850) att

"Divergente Rækker ere i det Hele noget Fandensskab, og det er en Skam at man vover at grunde nogen Demonstration derpaa. Man kan faae frem hvad vil nar man bruger dem, og det er dem som har gjort saa megen Ulykke og saa mange Paradoxer." [11]

Divergenta serier var så pass svåra att hantera att man under en period mer eller mindre bannlyste dem från all seriös matematik. Men denna syn kan tyckas vara lite väl pessimistisk. Visserligen kan vi inte rättfärdiga våra beräkningar som serieutvecklingen av integraden eller den termvisa integrationen, men det behöver inte betyda att svaret ska förkastas. Om vi trunkerar serietvecklingen.

$$\frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} \mp ...$$

efter den sjätte termen och räknar ut det exakta värdet då $x = 10$ får vi svaret 0.09152. Om vi istället ber WolframAlpha räkna ut integralen numeriskt matar den ut approximationen 0.0915633 (här får vi naturligtvis hoppas på att WolframAlphas numeriska beräkningar inte bygger på samma metod som vi använder oss av). Istället för att förkasta serien verkar det alltså mer rimligt att försöka hitta ett nytt ramverk för dessa divergenta serier och betrakta våra formella operationer under ett nytt ljus.

1.2 Asymptotiska metoder

Problemet med de divergenta serierna som ändå gav vettiga svar tog ett långt tag att lösa. Legendre (1752-1833) var nära när han på 1820-talet pratade om demikonvergenta serier, vilket var en serie åt en funktion sådan att felet som uppstod när man approximerade funktionen med dem första termerna i serien var i storleksordning begränsad i magnitud av den första trunkerade termen. Namnet demikonvergenta serier är dock lite olyckligt valt eftersom det egentligen inte har något med konvergens att göra. Den moderna teorin för dessa serier introducerades av Poincaré (1854-1912) år 1886 [5]. Poincaré kallade dessa serier för asymptotiska serier, vilket idag räknas som en del av det större ämnet asymptotiska metoder. Det finns ingen exakt definition av vad asymptotiska metoder är för något, men man skulle kunna beskriva det som ett paraplybegrepp för en samling metoder för att hitta analytiska approximationer genom utnyttjandet av mycket små eller mycket stora parametrar. Vid förekomsten av mycket små eller mycket stora parametrar brukar standardmetoder ofta bli obrukliga på grund av dålig precision, instabilitet, eller ineffektivitet. Idén bakom asymptotiska metoder är att då istället vända denna knepiga sits till vår fördel genom att konstruera metoder vars precision och effektivitet blir bättre och bättre i takt med att de små parametrarna blir mindre och de stora större. Man skulle kunna uttrycka det som att precisionen och effektivitet i asymptotiska metoder växer i proportion till deras nödvändighet. Men innan vi kan börja utveckla några systematiska metoder så måste vi införa några begrepp.

1.3 Ordokalkyl

En central aspekt av asymptotiska metoder är att kunna kategorisera och rangordna funktioner i termer av deras storleksordningar. Vi gör det med hjälp av ordokalkylens lilla o och stora O. Notationen infördes av Bachmann (1837-1920) och Landau (1877-1938). Bokstaven O står för det tyska ordet Ordnung, vilket betyder ordning på svenska.

Definition 1.1. Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara två komplexvärda funktioner definierade på delmängden D av de reella talen. Vi skriver att

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \in D)$$

om det existerar något tal M sådant att

$$|f(x)| \leq M|g(x)|$$

för alla $x \in D$.

Definition 1.2. Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara två komplexvärda funktioner definierade på den uppåt obegränsade delmängden D av de reella talen. Vi skriver att

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to +\infty)$$

om det existerar något tal M sådant att

$$|f(x)| \leq M|g(x)|$$

för alla tillräckligt stora reella tal i D.

Kommentar. Notera att notationen

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to +\infty)$$

gömmer viss information. Den säger att det *existerar* någon konstant M sådant att

$$|f(x)| \leq M|g(x)|$$

för alla *tillräckligt* stora värden på x. Detta är analogt med hur notationen

$$\lim_{n \to +\infty} p_n = p$$

inte visar hur fort konvergensen sker.

Definition 1.3. Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara två komplexvärda funktioner definierade på den uppåt obegränsade delmängden D av de reella talen. Vi skriver att

$$f(x) = o(g(x)) \quad (x \to +\infty)$$

om det existerar någon funktion $h(x)$ sådan att

$$f(x) = h(x)g(x)$$

där

$$h(x) \to 0$$

då $x \to +\infty$.

Kommentar. I definition 1.2 och 1.3 kan vi notera att givet att funktionen $g(x)$ är nollskilld för alla tillräckligt stora $x \in D$ så är $f(x) = O(g(x))$ och $f(x) = o(g(x))$ ekvivalent med att funktionen $f(x)/g(x)$ är begränsad för alla tillräckligt stora x respektive går mot noll då $x \to +\infty$.

Vi kan även införa några andra varianter av dessa definitioner för ackumuleringspunkter x_0 istället för $+\infty$.

Definition 1.4. Låt $f(x)$ och $g(x)$ vara två komplexvärda funktioner definierade på delmängden D av de reella talen. Låt x_0 vara en ackummuleringspunkt till D. Vi skriver att

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \to x_0)$$

om det existerar ett tal M och en radie $r > 0$ sådana att

$$|f(x)| \leq M|g(x)|$$

för alla $x \in D$ sådana att $|x - x_0| \leq r$.

Kommentar. Notera att vi i definition 1.4 aldrig antar att $x_0 \in D$, bara att det är en ackumuleringspunkt till D.

Vi kan även införa många analoga definitioner för liknande situationer. Om vi exempelvis skriver att $x \to x_0^+$ betyder det att vi enbart betraktar punkter $x \in D$ till höger om x_0, och om vi skriver att $n \to +\infty$ är det underförstått att variabeln n är ett heltal.

Ibland används notationen $f(x) << g(x)$ istället för $f(x) = o(g(x))$. Denna notation är mer suggestiv än lilla o eftersom den verkligen betonar det väsentliga: $f(x)$ är betydligt mindre än $g(x)$. Dock så är den ofta räknemässigt otymplig. I många fall så använder man ordokalkyl för att hitta övre begränsningar på fel som uppstår vid approximationer. I härledningen av en slutgiltig approximation så har man ofta gjort många små approximationer längs vägen och därför vill man ofta kunna skriva saker som $o(x) + o(x^2)$ eller $f(x) = h(x) + o(g(x))$. Att göra det med notationen $f(x) << g(x)$ är mycket svårt. För att kunna begripa oss på vad saker som $o(x) + o(x^2)$ ska betyda så börjar vi med att betrakta den formella symbolen $o(g(x))$ för sig. Vi kommer att tolka uttryck som $o(g(x)$ och $O(g(x))$ som klasser av funktioner. Att säga att $f(x) = o(g(x))$ betyder således att funktionen $f(x)$ är ett element i klassen $o(g(x))$. Uttryck som $o(g_1(x)) + o(g_2(x))$ ska tolkas som klassen som består utav alla funktioner $f_1(x) + f_2(x)$ där $f_1(x) = o(g_1(x))$ och $f_2(x) = o(g_2(x))$. Ett uttryck som $f(x) = h(x) + o(g(x))$ ska tolkas som att funktionen $f(x)$ kan skrivas som en summa $f(x) = h(x) + w(x)$ där $w(x) = o(g(x))$. Om vi skriver att $o(g_1(x)) = O(g_2(x))$ ska det tolkas som att klassen $o(g_1(x))$ är en delklass av klassen $O(g_2(x))$, med andra ord om $f(x) = o(g_1(x))$ så ska det per automatik medföra att $f(x) = O(g_2(x))$. Det ska noteras att vår notation är lite ful eftersom den verkar antyda att om $o(g_1(x)) = o(g_2(x))$ så går det att vända på likheten och dra slutsatsen att $o(g_2(x)) = o(g_1(x))$, men så är inte fallet. Till exempel har vi att

$$o(x) = o(x^2) \quad (x \to +\infty)$$

men

$$o(x^2) \neq o(x) \quad (x \to +\infty).$$

Med detta i åtanke kan man tycka att $f(x) \in o(g(x))$ och $o(g_1(x)) \subseteq o(g_2(x))$ hade varit en bättre notation. Denna notation hade dock också blivit lite räknemässigt otymplig.

1.4 Asymptotiska serier

Målet med asymptotiska metoder är att hitta goda analytiska approximationer till komplicerade funktioner. Asymptotiska serier är en stor klass av sådana approximationer. Det finns två olika sätt att definiera asymptotiska serier på. En av definitionerna är aningen mer generell medan den andra är något lättare att använda. Vi väljer den lite mer lätthanterliga men restriktiva definitionen.

Definition 1.5. Låt $f(x)$ vara en komplexvärd funktion definierad på den uppåt obegränsade delmängden D av de reella talen. Låt $\{\phi_k(x)\}$ vara en oändlig följd av funktioner definierade på D med egenskaperna att

$$\phi_{k+1}(x) = o(\phi_k(x)) \quad (x \to +\infty),$$

för alla möjliga k. Detta kan också på ett lite mer suggestivt sätt uttryckas som

$$\phi_0(x) >> \phi_1(x) >> \phi_2(x) >> \phi_3(x)...$$

Låt $\{c_k\}$ vara en oändlig följd av komplexa tal. Vi säger att den formella serien

$$c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + c_2\phi_2(x) + ...$$

är en asymptotisk serie till funktionen $f(x)$, vilket vi skriver som

$$f(x) \sim c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + ... \quad (x \to +\infty),$$

om det till varje heltal $n \geq 0$ gäller att

$$f(x) = c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + ... + c_n\phi_n(x) + O(\phi_{n+1}(x)) \quad (x \to +\infty).$$

Ekvivalent betyder det att felet

$$\varepsilon_n(x) := f(x) - \left[c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + ... + c_n\phi_n(x)\right]$$

i approximationen

$$f(x) \approx c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + ... + c_n\phi_n(x)$$

är av storleksordning

$$\varepsilon_n(x) = O(\phi_{n+1}(x)) \quad (x \to +\infty).$$

Vi kan på ett helt analogt sätt definiera asymptotiska serier i de fall följderna $\{\phi_k(x)\}$ och $\{c_k\}$ är ändliga.

Definition 1.6. Låt funktionen $f(x)$ och följderna $\{\phi_k(x)\}$ och $\{c_k\}$ vara definierade som ovan men där följderna istället är ändliga med $m+1 < +\infty$ element. Vi säger då att

$$f(x) \sim c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + ... + c_m\phi_m(x) \quad (x \to +\infty),$$

om det till varje heltal n sådant att $0 \leq n < m$ gäller att

$$\varepsilon_n(x) := f(x) - \left[c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + ... + c_n\phi_n(x)\right] = O(\phi_{n+1}(x)) \quad (x \to +\infty)$$

samt att

$$\varepsilon_m(x) := f(x) - \left[c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x) + ... + c_m\phi_m(x)\right] = o(\phi_m(x)) \quad (x \to +\infty).$$

Kommentar. Notera att det gäller att $\varepsilon_m(x) = o((\phi_m(x))$ och inte $O(\phi_{m+1}(x))$. Vi behöver alltså inte definiera någon ny funktion $\phi_{m+1}(x)$ bara för att kunna säga att $\phi_m(x) = o(\phi_{m+1}(x))$ och $\varepsilon_m(x) = O(\phi_{m+1}(x))$.

Specialfallet $n = 1$ i definition 1.6 har ett särskilt namn. Om $f(x) \sim c_0\phi_0(x)$ då $x \to +\infty$ så säger man att $f(x)$ och $c_0\phi_0(x)$ är *asymptotiskt ekvivalenta.* Att två funktioner $f(x)$ och $g(x)$ är asymptotiskt ekvivalenta då $x \to +\infty$ betyder att $f(x)/g(x) \to 1$ då $x \to +\infty$ (förutsatt att $g(x)$ är nollskilt för alla tillräckligt stora x).

Vi kan också definiera asymptotiska serier då $x \to x_0$ där x_0 är någon ackumuleringspunkt till mängden D. Funktionsföljden $\{\phi_k(x)\}$ kallas för en *skala* och den första termen $c_0\phi_0(x)$ i en asymptotisk serie kallas för den *ledande* eller den *dominerande termen.*

Hur ska vi tolka en asymptotisk serie? Om vi har en asymptotisk serie med många termer så ger den oss flera olika sätt att approximera funktionen $f(x)$ på. Vi har dels approximationen

$$f(x) \approx c_0\phi_0(x)$$

och dels approximationen

$$f(x) \approx c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x).$$

Dessa approximationer har fel av storleksordningen

$$\varepsilon_0(x) = f(x) - c_0\phi_0(x) = O(\phi_1(x)) \quad (x \to +\infty)$$

och

$$\varepsilon_1(x) = f(x) - \big[c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x)\big] = O(\phi_2(x)) \quad (x \to +\infty).$$

Vi antog att $\phi_2(x) = o(\phi_1(x))$ då $x \to +\infty$, vilket speciellt betyder att $\phi_2(x) = O(\phi_1(x))$ samt att $\phi_1(x) \neq O(\phi_2(x))$ då $x \to +\infty$. Detta visar att $O(\phi_2(x)) = O(\phi_1(x))$ men $O(\phi_1(x)) \neq O(\phi_2(x))$. Vi ser alltså att felet i approximationen $f(x) \approx c_0\phi_0(x) + c_1\phi_1(x)$ är storleksmässigt en ordning strikt mindre än felet i approximationen $f(x) \approx c_0\phi_0(x)$, och i den meningen är det en bättre approximation. En asymptotisk serie kan alltså betraktas som en instruktionsbok för hur man kan analytiskt approximera en funktion. Nedanstående sats ger oss ett exempel på en stor klass av asymptotiska serier.

Sats 1.1. *Antag att den reellvärda funktionen $f(x)$ har en potensutveckling i en punkt x_0 med nollskild konvergensradie. Då är potensutvecklingen en asymptotisk utveckling av $f(x)$ då $x \to x_0$. Det vill säga om $f(x)$ har potensutvecklingen*

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ...$$

i någon öppen boll centrerad i x_0 så har den också den asymptotiska utvecklingen

$$f(x) \sim a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... \quad (x \to x_0).$$

Bevis. För enkelhetens skull betraktar vi bara fallet då $x_0 = 0$. Övriga fall kan reduceras till detta fall genom ett variabelbyte. Vad är det som vi ska visa? Vi ska visa två saker. Det första är att funktionsföljden $\{\phi_k(x)\} = \{x^k\}$ är en skala, det vill säga att $x^{k+1} = o(x^k)$ då $x \to 0$. Detta är enkelt att se då $x^{k+1}/x^k = x \to 0$ då $x \to 0$. Det andra som vi ska visa är

$$\varepsilon_n(x) = f(x) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n) = O(x^{n+1}) \quad (x \to 0)$$

för alla positiva heltal n. Vi börjar med att notera att

$$f(x) - (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k = x^{n+1} \sum_{k=0}^{\infty} a_{(n+1)+k} x^k.$$

Från teorin för potensserier vet vi att funktionen

$$h(x) := \sum_{k=0}^{\infty} a_{(n+1)+k} x^k$$

är en kontinuerlig funktion i $x_0 = 0$ och att $h(0) = a_{n+1}$. Speciellt betyder det att $h(x)$ är begränsad i en liten omgivning till punkten $x_0 = 0$. Detta visar att

$$\varepsilon_n(x) = O(x^{n+1}) \quad (x \to 0).$$

■

Sats 1.1 säger att alla konvergenta potensserier också är asymptotiska potensserier. Låt oss nu istället betona några skillnader mellan asymptotiska serier och vanliga konvergenta serier. För det första är inte alla konvergenta serier också asymptotiska serier. Till exempel så kommer inte funktionen

$$f(x) := \sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + ...$$

att ha en asymptotisk serie

$$f(x) \sim \sin(x) - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + ...$$

eftersom funktionsföljden $\{\sin(kx)\}$ inte är en skala. Sinusfunktionerna i följden skiljer sig visserligen åt i frekvenser, men de skiljer sig inte i magnitud. En annan kvalitativ skillnad mellan asymptotiska serier och konvergenta serier är frågan om konvergens. För vanliga serier så fixerar vi något värde på x och undersöker vad som händer då $n \to +\infty$ (konvergerar följden av partialsummor eller ej?). För asymptotiska serier är situationen den omvända: vi fixerar ett värde på n och undersöker vad som händer då $x \to +\infty$ (har vi en asymptotisk approximation av $f(x)$ eller ej?). En asymptotisk serie är en instruktionsbok för hur man kan asymptotiskt approximera en funktion $f(x)$ med olika ändliga summor, så konvergens hos den asymptotiska serien är inte något som vi i allmänhet kommer att vara intresserade av. Faktum är att en asymptotisk serie inte behöver vara konvergent någonstans.

Sats 1.2. *Låt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

vara en formel potensserie med komplexa konstanter. Då existerar det en funktion $f(x)$ sådan att

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (x \to x_0)$$

Bevis. För enkelhets skulle betraktar vi bara fallet $x_0 = 0$, övriga fall kan som vanligt reduceras till detta fall genom ett lämpligt variabelbyte. Vi konstruerar en funktion $f(x)$ med de sökta egenskaperna. För att göra detta börjar vi med att notera att emedan vi inte kan summera ett *oändligt* antal termer $a_n x^n$ (eftersom serien kan vara divergent) så går det dock bra att summera ett *ändligt* antal. Vi kan därför tänka oss att definiera en funktion $f(x)$ som för stora $|x|$ är lika med a_0, för något mindre värden $a_0 + a_1 x$, för något ännu mindre $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ och så vidare. Det enda som vi behöver se till är att x konvergerar mot 0 fortare än vi lägger till fler termer. Vi definierar

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n x^n \delta_n(x) \right]$$

där

$$\delta_n(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq \alpha_n \\ 0 & \text{annars} \end{cases}$$

och $\{\alpha_n\}$ är en följd av strikt positiva avtagande tal sådana att $|a_n \alpha_n| \leq 1$ och $\alpha_n \to 0$ då $n \to +\infty$. Funktionen $f(x)$ är väldefinierad eftersom för varje fixt $x \neq 0$ är ovanstående serie bara en ändlig summa; för varje $x \neq 0$ så existerar det ett heltal m sådant att

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[a_n x^n \delta_n(x) \right] = \sum_{n=0}^{m} a_n x^n.$$

Vi kan därför dels betrakta $f(x)$ som en väldefinierad ändlig summa (inte divergent) och dels som en serie vars koefficienter asymptotiskt är $\{a_n\}$.

Speciellt verkar det mycket troligt att

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (x \to 0).$$

För att visa att så är fallet så måste vi visa att

$$\varepsilon_m(x) = O(x^{m+1})$$

för varje heltal $m \geq 0$. Vi börjar med att notera

$$|\varepsilon_m(x)| = \left| f(x) - \sum_{n=0}^{m} a_n x^n \right| = \left| \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n x^n \delta_n(x) \right|$$

för alla $|x| \leq \alpha_m$. Då $f(x)$ per definition måste vara absolutkonvergent ser vi att

$$\left| \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n x^n \delta_n(x) \right| \leq \sum_{n=m+1}^{\infty} \left| a_n x^n \delta_n(x) \right|.$$

Vi delar upp serien med

$$\sum_{n=m+1}^{\infty} |a_n x^n \delta_n(x)| = |a_{m+1} x^{m+1} \delta_{m+1}(x)| + \sum_{n=m+2}^{\infty} |a_n x^n \delta_n(x)|.$$

Den första termen är trivialt $O(x^{m+1})$. För att visa att den andra termen också är $O(x^{m+1})$ börjar vi med att notera att

$$|a_n x^n \delta_n(x)| \leq |x^{n-1}|.$$

Detta är självklart för alla $|x| > \alpha_n$ eftersom det då gäller att $\delta_n(x) = 0$. Om $|x| \leq \alpha_n$ så följer det av $\delta_n(x) = 1$ och olikheten $|\alpha_n a_n| \leq 1$:

$$|a_n x^n \delta_n(x)| = |a_n x^n| = |a_n x||x^{n-1}| \leq |a_n \alpha_n||x^{n-1}| \leq |x^{n-1}|.$$

Detta visar att

$$\sum_{n=m+2}^{\infty} |a_n x^n \delta_n(x)| \leq \sum_{n=m+2}^{\infty} |x|^{n-1} = O(x^{m+1}) \quad (x \to 0).$$

■

Kommentar. I beviset ovan ser vi att $f(x)$ kommer att bli en diskontinuerlig funktion eftersom $\delta_n(x)$ gör ett abrupt hopp från 0 till 1. Om vi däremot istället hade definierat $\delta_n(x)$ så att den inte hoppar från 0 till 1 utan växer kontinuerligt från 0 till 1 på något litet intervall så skulle $f(x)$ ha blivit en kontinuerlig funktion.

Vi har nu sett att asymptotiska serier inte nödvändigtvis behöver vara konvergenta. Något annat uppseendeväckande är att när en asymptotisk serie faktiskt är konvergent så behöver inte serien konvergera mot den funktion som den är en asymptotisk serie åt. Eftersom

$$e^{-x} = o(x^{-n}) \quad (x \to +\infty)$$

för alla heltal $n \geq 0$ följer det att

$$f(x) \sim \frac{0}{x} + \frac{0}{x^2} + \frac{0}{x^3} + \frac{0}{x^4} + ... \quad (x \to +\infty).$$

Om vi betraktar serien

$$\frac{0}{x} + \frac{0}{x^2} + \frac{0}{x^3} + \frac{0}{x^4} + ...$$

som en vanlig serie så ser vi att den är identisk med 0 överallt. Men eftersom exponentialfunktionen är strikt positiv överallt så kommer ovanstående serie alltså aldrig konvergera mot e^{-x}. Om en funktion $f(x)$ har en asymptotisk serieutveckling med bara nollor som koefficienter så säger vi att $f(x)$ är *asymptotiskt obetydlig* (med avseende på den aktuella skalan). Funktionerna i skalan $\{\phi_k(x)\} = \{x^k\}$ är exempel på så kallade *algebraiska* funktioner, medan funktionen e^{-x} är en så kallad *transcendental* funktion. I många andra sammanhang inom matematiken så använder man också begreppen transcendentala och algebraiska funktioner. Då definierar man exempelvis en transcendental funktion som en funktion som inte satisfierar någon polynomekvation. Detta är inte den definition som man använder inom asymptotiska metoder. Inom asymptotiska metoder används begreppen för att informellt förklara om en funktion växer eller avtar fortare än varje möjlig rationell funktion eller om den växer eller avtar ungefär som en rationell funktion. Funktionen e^{-x} är transcendentalt liten då $x \to +\infty$ eftersom den avtar fortare än alla möjliga rationella funktioner. Funktionen x^{10} är algebraisk eftersom det är en heltalspotens av x. Funktionen $(1 + \cos(x))x^{10}$ växer algebraiskt fort då $x \to +\infty$. Dessa begrepp kan tyckas vara lite luddiga, men det verkar vara lite av poängen med dem. Begreppen används inte i bevis utan istället bara informellt i heuristiska argument. Många asymptotiska metoder bygger på att försumma asymptotiskt obetydliga termer, vilket i många fall betyder att man försummar transcendentala termer och behåller dem algebraiska, eller tvärtom. Om $f(x) = o(g(x))$ säger vi att $g(x)$ *dominerar* $f(x)$ eller att $f(x)$ är *subdominant* med avseende på $g(x)$.

1.5 Operationer på asymptotiska serier

För konvergenta potensserier finns det satser som visar hur de kan adderas, multipliceras, integreras och differentieras. Vi ska nu se några analoga satser för asymptotiska serier. Vi börjar med att visa att asymptotiska serier är entydigt bestämda.

Sats 1.3. *Givet en fix skala $\{\phi_k(x)\}$ är koefficienterna i en asymptotisk serie entydigt bestämda.*

Bevis. Antag att vi har en funktion $f(x)$ som har två asymptotiska utvecklingar:

$$f(x) \sim a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + ...$$

och

$$f(x) \sim b_0\phi_0(x) + b_1\phi_1(x) + ...$$

Vi börjar med att visa att $a_0 = b_0$. Från definitionen av en asymptotisk serie följer det att

$$f(x) - a_0\phi_0(x) = o(\phi_0(x))$$

samt

$$f(x) - b_0\phi_0(x) = o(\phi_0(x)).$$

Speciellt ser vi att

$$(a_0 - b_0)\phi_0(x) = o(\phi_0(x)).$$

Om $a_0 - b_0 \neq 0$ så implicerar detta att

$$\phi_0(x) = o(\phi_0(x)),$$

vilket är en motsägelse. Detta visar att $a_0 - b_0 = 0$ det vill säga att $a_0 = b_0$. För övriga koefficienter så fortsätter man med induktion. ∎

Kommentar. Att $\phi_0(x) = o(\phi_0(x))$ är en omöjlighet är enbart en sanning med modifikation. Det är sant att $\phi_0(x) = o(\phi_0(x))$ om och endast om $\phi_0(x)$ är identiskt lika med 0 i en liten omgivning till x_0. Men då ämnet asymptotiska metoder är mycket praktiskt inriktat verkar man inte vara så intresserade av den sortens småsaker. En skala som innehåller en sådan funktion $\phi_0(x)$ skulle vara totalt värdelös och eftersom målet med asymptotiska metoder inte är att utveckla en matematiskt vacker och stringent teori utan att istället utveckla metoder för att lösa verkliga problem så verkar all litteratur förbise sådana tekniska detaljer.

Likt i fallet med vanliga konvergenta serier är addition av asymptotiska serier enkelt medan multiplikation, division, integration, och differentiering är betydligt mer komplicerat. Man kan enkelt bevisa att addition sker termvis oberoende av val av skala, men i övriga fall kommer vi för enkelhetens skull att begränsa oss till skalan $\phi_k(x) = x^k$. Då bevisen är i stort sätt bara slentrianmässiga beräkningar och inte något vidare upplysande så vi står över dem.

Sats 1.4. *Antag att $f(x)$ och $g(x)$ har asymptotiska utvecklingar*

$$f(x) \sim a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + ...$$

och

$$g(x) \sim b_0\phi_0(x) + b_1\phi_1(x) + ...$$

och låt c ett godtyckligt komplext tal. Då har vi följande asymptotiska utvecklingar:

$$f(x) + g(x) \sim (a_0 + b_0)\phi_0(x) + (a_1 + b_1)\phi_1(x) + ...$$

och

$$c \cdot f(x) \sim (c \cdot a_0)\phi_0(x) + (c \cdot a_1)\phi_1(x) + ...$$

Sats 1.5. *Antag att $f(x)$ och $g(x)$ har asymptotiska utvecklingar*

$$f(x) \sim a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...$$

och

$$g(x) \sim b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ...$$

då $x \to 0$. Då har $f(x) \cdot g(x)$ en asymptotisk utveckling

$$f(x) \cdot g(x) \sim c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + ...$$

där

$$c_k = a_k b_0 + a_{k-1} b_1 + ... + a_0 b_k.$$

Om vi dessutom antar att $a_0 \neq 1$ så har $1/f(x)$ en asymptotisk utveckling

$$1/f(x) \sim d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + ...$$

där koefficienterna $\{d_k\}$ är lösningen till ekvationssystemet för koefficienterna som ges av ekvationen $1/f(x) \cdot f(x) = 1$, det vill säga

$$d_0 a_0 = 1$$
$$d_0 a_1 + a_0 d_1 = 0$$
$$d_0 a_2 + d_1 a_1 + d_2 a_0 = 0$$
$$...$$

Ovanstående satser har naturliga motsvarigheter inom teorin för potensfunktioner. Precis samma sak gäller för integration och differentiering av asymptotiska potensserier.

Sats 1.6. *Låt $f(x)$ vara en komplexvärd integrerbar funktion på det reella intervallet $[a, b]$. Låt x_0 vara en punkt i (a, b) och anta att $f(x)$ har asymptotisk serie*

$$f(x) \sim a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... \quad (x \to x_0).$$

Då gäller det att funktionen

$$F(x) := \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

har den asymptotiska serien

$$F(x) \sim a_0(x - x_0) + \frac{a_1}{2}(x - x_0)^2 + \frac{a_2}{3}(x - x_0)^3 + ... \quad (x \to x_0)$$

Vi erhåller alltså den asymptotiska serien för $F(x)$ genom att formellt integrera den asymptotiska serien för $f(x)$ termvis.

Sats 1.7. *Låt $f(x)$ vara en komplexvärd deriverbar funktion på det reella intervallet (a, b). Antag att $f(x)$ och $f'(x)$ har asymptotiska serieutvecklingar*

$$f(x) \sim a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... \quad (x \to x_0).$$

och

$$f'(x) \sim b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + ... \quad (x \to x_0).$$

Då gäller det att $b_n = (n+1)a_{n+1}$ för alla heltal $n \geq 0$. Vi erhåller alltså den asymptotiska serien för $f'(x)$ genom att formellt derivera den asymptotiska serien för $f(x)$ termvis.

Dessa satser har som sagt välbekanta motsvarigheter inom teorin för potensserier. Låt oss dock poängtera en viss skillnad. Vanliga potensserier är ett *absolut* koncept. Om vi vet att funktionen $f(x)$ kan potensserieutvecklas så kan vi genom att enbart studera potensserien härleda egenskaper som integrerbarhet eller differentierbarhet hos $f(x)$. Vi behöver därför aldrig anta att $f(x)$ *både* är integrerbar och kan potensserieutvecklas, det räcker med det sistnämnda. Asymptotiska serier är å andra sidan ett *relativt* koncept. Enligt sats 1.2 kommmer varje formel potensserie vara en asymptotisk serie åt någon funktion $f(x)$, och kommer vidare faktiskt alltid att vara en sådan till oändligt många olika funktioner. Vi kan därför inte använda den asymptotiska serien för att härleda egenskaper som integrerbarhet eller differentierbarhet hos $f(x)$. Därför måste vi exempelvis i sats 1.6 anta att funktion $f(x)$ har en asymptotisk serie *och dessutom* är integrerbar.

1.6 En asymptotisk utveckling av I(x)

Låt oss nu återvända till integralen

$$I(x) = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t} dt.$$

Tidigare fann vi att integralen formellt kunde serieutvecklas som

$$I(x) = \frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} \mp ...$$

men att ovanstående serie var divergent. Anledningen till att den trunkerade serien

$$I(x) \approx \frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}$$

ändå gav goda approximationer av $I(x)$ är eftersom

$$I(x) \sim \frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} \mp ... \quad (x \to +\infty)$$

det vill säga vår formella serie är i själva verket en asymptotisk serie till $I(x)$. Låt oss bevisa detta. Vi börjar med att notera att funktionsföljden $\{\phi_k(x)\} = \{1/x^{k+1}\}$ är en skala eftersom $\phi_{k+1}(x)/\phi_k(x) = 1/x \to 0$ då $x \to +\infty$. Kvar återstår att visa att för varje heltal $n \geq 0$ så måste

$$\varepsilon_n(x) = I(x) - \left[\frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} \mp ... + (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}\right] = O(1/x^{n+1}).$$

Att visa att $\varepsilon_n = O(1/x^{n+1})$ betyder att vi kan hitta någon konstant M sådan att $|\varepsilon_n(x)| \leq M|1/x^{n+1}|$ för alla tillräckligt stora värden på x. Eftersom

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 \mp +(-1)^{n-1}t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$$

så ser vi att

$$\varepsilon_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{(-1)^n t^n}{1+t} e^{-xt} dt.$$

Vi kan inte explicit beräkna denna integral, men det behöver vi inte heller göra, det räcker att hitta någon övre begränsning av den. Exempelvis så fungerar

$$|\varepsilon_n(x)| \leq \int_0^{+\infty} \left|\frac{(-1)^n t^n}{1+t} e^{-xt}\right| dt \leq \int_0^{+\infty} t^n e^{-xt} dt = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

I det sista steget använde vi upprepad partiell integration. Detta visar att $\varepsilon_n(x) = O(1/x^{n+1})$ då $x \to +\infty$. Vi ser att i vårt fall så fungerar konstanten $M = n!$, men det kan inte uteslutas att ännu mindre tal M också hade fungerat.

Om vi nu blickar tillbaka till vår tidigare diskussion i inledningen så kan vi konstatera att vi nu har funnit ett teoretiskt ramverk som gör så att vi kan tolka vår formella serieutveckling. Det formella resultatet

$$I(x) = \frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} \mp ...$$

kan betraktas som en asymptotisk serieutveckling

$$I(x) \sim \frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} \mp ... \quad (x \to +\infty).$$

För varje heltal $n \geq 0$ har vi approximationen

$$I(x) \approx \frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} \mp ... + (-1)^n \frac{(n-1)!}{x^n},$$

med felet

$$\varepsilon_n(x) = I(x) - \left(\frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - ... + (-1)^n \frac{(n-1)!}{x^n}\right) = O(1/x^{n+1})$$

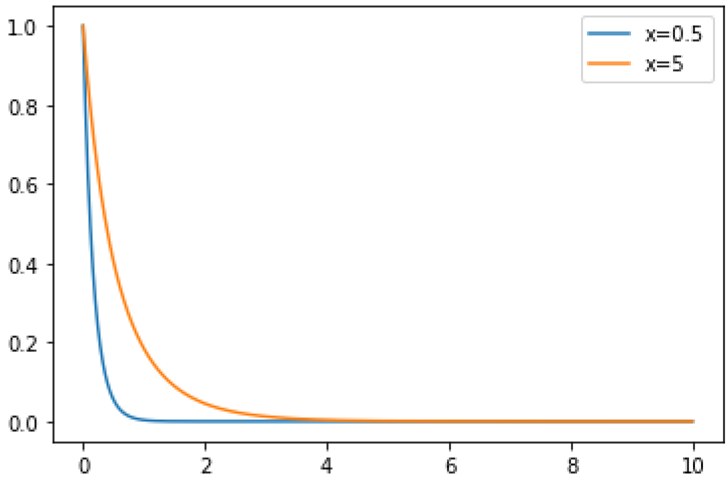
då $x \to +\infty$. Detta är visserligen en helt matematiskt korrekt lösning men kan upplevas som något torftig. Vad är det som vi egentligen har gjort bortom alla tekniska beräkningar? Finns det någon bakomliggande idé? Det kritiska steget i vår metod är utvecklingen

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 \mp + (-1)^{n-1} t^{n-1} + \frac{(-1)^n t^n}{1+t}$$

och för att förstå varför denna är så viktig så börjar med vi med att förstå hur integraden till $I(x)$ beter sig som en funktion på $t \in [0, +\infty)$ för olika värden på x. Integranden är funktionen

$$e^{-tx} \cdot \frac{1}{1+t}$$

och består alltså av två komponenter, dels exponentialfunktion med parametern x och dels faktorn $1/(1+t)$ som är oberoende av x. Vi kan förstå integrandens beteende som en funktion av x och t genom att plotta den.



Figur 1.1: Integranden till I(x)

I figur 1.1 plottas integranden på intervallet $t \in [0, 10]$ då $x = 0.5$ och $x = 5$. Eftersom faktorn $1/(1+t)$ är mycket liten i förhållande till exponentialfunktionen e^{-xt} så ser vi att integranden avtar exponentiellt på intervallet $[0, 10]$.

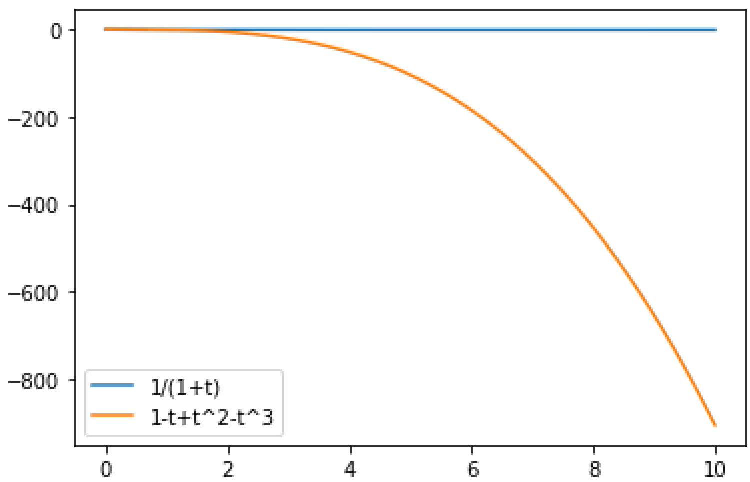
Speciellt kan vi notera att svansen till integralen är väldigt tunn, och därför kommer det huvudsakliga bidraget till integralen att komma från en liten omgivning av $t = 0$. I ovanstående fall hade ett exempel på en omgivning varit $[0, 4]$. Vidare ser vi att då x blir större kommer exponentialfunktionen e^{-xt} att avta fortare. Detta innebär att ju större x blir desto smalare blir svansen och desto mindre blir den omgivning runt $t = 0$ där integralen $I(x)$ får sitt huvudsakliga tillskott. Till exempel kan vi notera att emedan omgivning $[0, 4]$ hade gett en god approximation för båda $I(0.5)$ och $I(5)$ så hade vi kunnat approximera $I(5)$ genom ett betydligt mindre intervall, säg $[0, 1]$. Speciellt verkar det rimligt att för varje $\delta > 0$ så kommer approximationen

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{1}{1+t} dt \approx \int_0^{\delta} e^{-xt} \frac{1}{1+t} dt$$

vara bra så länge som vi betraktar tillräckligt stora värden på x. Eftersom integranden är svårhanterlig så vore det bra om vi kunde approximera den med någon snällare och mer lätthanterlig funktion. Vi testar med approximationen

$$\frac{1}{1+t} \approx 1 - t + t^2 - t^3. \tag{1}$$

och plottar den.

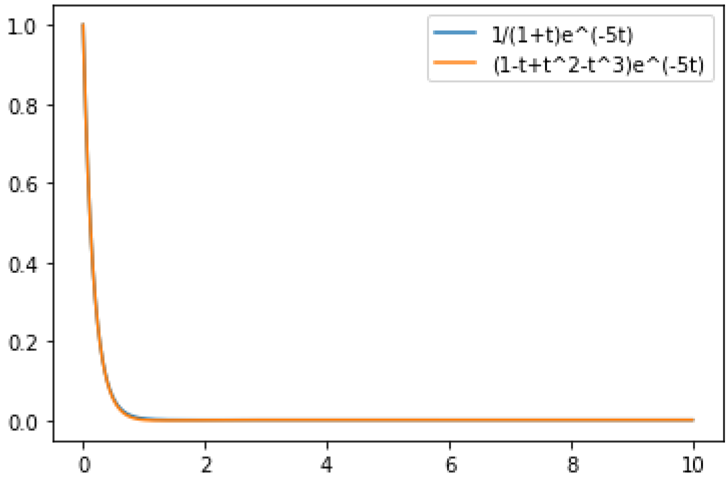


Figur 1.2: Approximationer av integranden

I figur 1.2 visas $1/(1 + t)$ och approximationen $1 - t + t^2 - t^3$ på intervallet $t \in [0, 10]$. Från figuren ser vi att approximationen i (1) är mycket god i en liten omgivning runt $t = 0$, men att den för stora värden på t snabbt blir mycket dålig. Speciellt kan vi se att $1/(1 + t) \to 0$ då $t \to +\infty$ men att $1 - t + t^2 - t^3 \to -\infty$ då $t \to +\infty$. Men, om vi inkluderar faktorn e^{-xt} och approximerar

$$e^{-xt} \cdot \frac{1}{1+t} \approx e^{-xt}(1-t+t^2-t^3) \tag{2}$$

så händer något.



Figur 1.3: Approximationer av integranden

Genom att inkludera exponentialfunktionen blir approximationen mycket god på hela intervallet $[0, 10]$. Att approximationen i (2) är god i en liten omgivning till $t = 0$ är självklart från figur 1.2, men det är lite förvånande att approximation också blir bra på hela intervallet. Att det blir så beror på att både $1/(1+t)$ och $1-t+t^2-t^3$ är mycket små (algebraiska) i förhållande till exponentialfunktionen e^{-5t} (transcendental). Skillnaden $1/(1+t) - (1 - t + t^2 - t^3)$ kommer därför att bli obetydligt på $[0, 10]$ då den slås ut av exponentialfunktionen. Från figur 1.1 så såg vi att vi kunde approximera

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{1}{1+t} dt \approx \int_0^{\delta} e^{-xt} \frac{1}{1+t} dt$$

eftersom integralen har en så pass tunn svans. Figur 1.2 visar att om $\delta > 0$ är litet nog så kan vi i sin tur approximera

$$\int_0^{\delta} e^{-xt} \frac{1}{1+t} dt \approx \int_0^{\delta} e^{-xt}(1-t+t^2-t^3) dt.$$

Från figur 1.3 så följer det sedan att vi återigen kan justera den övre integrationsgränsen med

$$\int_0^{\delta} e^{-xt}(1-t+t^2-t^3) dt \approx \int_0^{+\infty} e^{-xt}(1-t+t^2-t^3) dt.$$

Den sista integralen kan explicit beräknas:

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}(1-t+t^2-t^3)dt = \frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4}.$$

Sammanfattningsvis har vi funnit approximationen

$$I(x) \approx \frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4}$$

som vi erhöll genom att approximera $1/(1+t)$ med dess Taylorpolynom av grad 3. Eftersom graden var helt godtyckligt vald verkar detta antyda på en asymptotisk utveckling

$$I(x) \sim \frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} \mp ... \quad (x \to +\infty).$$

1.7 Numeriska approximationer

Asymptotiska serier kan naturligtvis användas för att numeriskt approximera funktioner. Här ska man dock höja ett varnande finger. Tidigare fann vi den asymptotiska serien

$$I(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t} dt \sim \frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} \mp ...$$

då $x \to +\infty$. Man kan därför tänka sig att till exempel approximera

$$I(10) \approx \frac{0!}{10} - \frac{1!}{10^2} + \frac{2!}{10^3} - \frac{3!}{10^4} + \frac{4!}{10^5} - \frac{5!}{10^6} = 0.09152.$$

Om vi ber WolframAlpha beräkna $I(10)$ så matar den ut att $I(10) \approx 0.0915633$, så det verkar som om vår approximation är god. Men, det hade inte *nödvändigtvis* behövt vara så. Från definitionen av en asymptotisk serie så vet vi att felet $\varepsilon_6(x) = O(1/x^7)$ då $x \to +\infty$. Men allt detta betyder är att det existerar *någon* konstant M_6 sådan att $|\varepsilon_6(x)| \leq M_6/x^7$ för alla *tillräckligt stora* x. Utan kännedom om ett värde på M_6 och för hur stora x olikheten $|\varepsilon_6(x)| \leq M_6/x^7$ gäller för så går det alltså inte att säga hur stort felet $\varepsilon_6(x)$ kan bli. Tvärtom så finns det ingen gräns på hur stort felet kan bli för något enskilt x. Tidigare fann vi den asymptotiska utvecklingen

$$e^{-x} \sim \frac{0}{x} + \frac{0}{x^2} + \frac{0}{x^3} + ... \quad (x \to +\infty),$$

och av sats 1.4 följder det då att

$$I(x) + Ce^{-x} \sim \frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} \mp ... \quad (x \to +\infty)$$

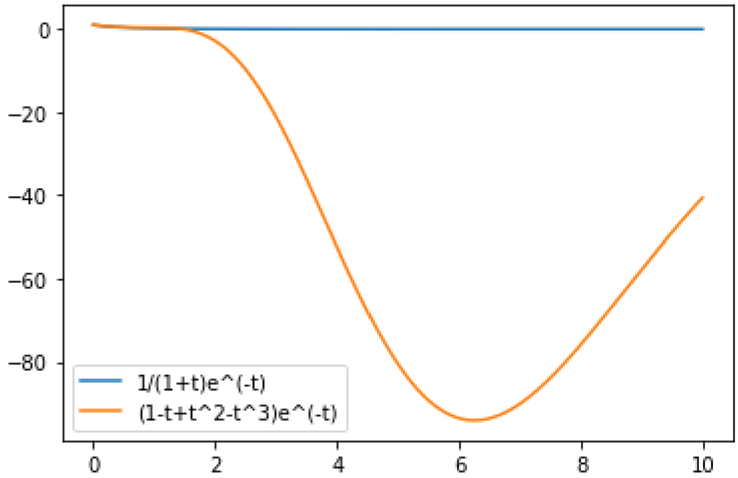
för varje godtyckligt reellt (eller komplext) tal C. Eftersom C kan väljas godtyckligt stort så ser vi att felet i vår numeriska approximation kan bli hur stort som helst. Då asymptotiska serier är ett relativt och inte ett absolut koncept så går det inte att avgöra hur stort felet blir från den asymptotiska serien själv, utan man måste studera hur den verkar som en asymptotiskt serie *åt* någon partikulär funktion. Om man använder sig av dem n första termerna i den asymptotiska serien för att approximera $I(10)$ så bör vi därför ge en explicit beskrivning av talet M_n (eller rättare sagt ett tal M_n) sådant att $|\varepsilon_n(x)| \leq M_n/x^{n+1}$ och hur stort x måste vara för att olikheten ska gälla. I vår analys fann vi att $M_n = n!$ fungerade för alla x. Detta ger oss felet $|\varepsilon_n(x)| \leq n!/x^{n+1}$. Om vi sätter $x = 10$ och $n = 7$ så ser vi att en övre gräns för felet i vår approximation

$$I(10) \approx \frac{0!}{10} - \frac{1!}{10^2} + \frac{2!}{10^3} - \frac{3!}{10^4} + \frac{4!}{10^5} - \frac{5!}{10^6} = 0.09152$$

är $6!/10^7 = 0.000072$, och alltså kan vi säkert hävda att $I(x) = 0.09152 \pm 0.00072$. Hade man inkluderat ytterligare en term från serien så hade den övre begränsning på felet blivit ännu lägre eftersom det hade blivit $7!/10^8 = 6!/10^7 \cdot 7/10 < 6!/10^7$. Naivt skulle man därför kunna tro att man i allmänhet skulle erhålla en bättre approximation av $I(10)$ genom att inkludera fler och fler termer från den asymptotiska serien, men så är inte fallet. Eftersom $n!/10^{n+1} \to +\infty$ då $n \to +\infty$ ser vi att den övre gränsen växer obegränsat då vi inkluderar fler och fler termer. Detta behöver ju inte i sig betyda att $|\varepsilon_n(10)| \to +\infty$ då $n \to +\infty$, men att det faktiskt är så kan inses då beloppet av termerna i den asymptotiska serien divergerar mot $+\infty$ då $n \to +\infty$. Det kan verka kontraintuitivt att man kan erhålla en sämre approximation genom att ta med fler termer från den asymptotiska serien i sin approximation, men vid lite närmare eftertanke är det rätt så naturligt. I en härledning av en asymptotisk utveckling får vi ofta fler termer i utvecklingen genom att göra starkare och starkare asymptotiska antaganden om funktionen, och vi kommer därför få bättre approximationer för alla *tillräckligt* stora värden på x genom att inkludera fler termer från den asymptotiska utvecklingen. I vårt fall så fann vi vår asymptotiska utveckling av $I(x)$ genom att approximera integranden som

$$e^{-xt} \cdot \frac{1}{1+t} \approx e^{-xt}(1 - t + t^2 - t^3 \pm ... + (-1)^n t^n).$$

för något heltal $n \geq 0$. För att detta ska vara en god approximation på hela integrationsintervallet $[0, +\infty)$ så måste x vara tillräckligt stort för att exponentialfunktionen e^{-xt} ska slå ut $1/(1+t) - (1 - t + t^2 - t^3 \pm ... + (-1)^n t^n)$ (jämför med figur 1.2 och 1.3). Om vi till exempel hade satt $n = 6$ och $x = 1$ så hade vår approximation av integranden varit dålig, se figur 1.4.



Figur 1.4: Dåliga approximationer

Sammanfattningsvis så ska man vara försiktig då man använder asymptotiska serier för att göra numeriska approximationer av funktioner. Eftersom asymptotiska serier är ett relativt koncept och inte ett absolut koncept kan man inte från enbart den asymptotiska serien avläsa hur stort felet i ens numeriska approximationer kommer att bli. Istället behöver man göra en noggrann analys av feltermerna i serien. Asymptotiskt obetydliga termer kommer visserligen asymptotiskt inte ge något bidrag till funktionen, men för varje enskilt värde på x kan deras bidrag vara godtyckligt stort. Bara för att man inkluderar fler termer från den asymptotiska serien behöver inte den numeriska approximationen bli bättre, ofta blir den istället sämre.

2 Laplaceintegraler

2.1 Inledning

I föregående kapitel betraktade vi integralen

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{1}{1+t} dt$$

som en funktion av variabeln x, och undersökte dess asymptotiska beteende då $x \to +\infty$. Ovanstående integral tillhör en klass av integraler som kallas för *Laplaceintegraler*. En Laplaceintegral är en integral på formen

$$I(x) = \int_a^b e^{-xt} q(t) dt$$

där $q(t)$ är en funktion i t och oberoende av x och integrationsgränserna a och b kan vara antingen ändliga eller oändliga. Laplaceintegraler är starkt förknippade med *Laplacetransformationen*

$$\mathcal{L}_q(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} q(t)dt,$$

där funktionen $q(t)$ transformeras till en Laplaceintegral. Analogt med hur exponentialfunktionen kan användas för att omvandla problem i addition och subtraktion till problem i multiplikation och division kan Laplacetransformationen användas för att omvandla problem i integration och differentiering till problem i multiplikation och division. Av denna anledning kan man därför exempelvis använda Laplacetransformationen för att algebraiskt lösa begynnelsevärdesproblem.

Laplacetransformationen har även många tillämpningar inom sannolikhetsteori och det var i just det området som Laplace själv först introducerade transformationen. Givet ett kontinuerligt slumptal X med täthet $f(t)$ kan man betrakta den så kallade *momentgenererande funktionen* $\psi_X(t)$ som definieras som väntevärdet

$$\psi_X(t) = E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(t)dt.$$

Funktionen är alltid väldefinierad i punkten $t = 0$ eftersom $\psi_X(0) = 1$ oberoende av val av slumptal X. Däremot behöver inte den momentgenererande funktionen nödvändigtvis existera i någon omgivning till $t = 0$. Men givet att den faktiskt gör det så går det att visa att alla moment $E(X^n)$ måste existera och de kan utvinnas med hjälp av sambandet $E(X^n) = \psi_X^{(n)}(0)$. Vidare kan man visa att givet att den momentgenererande funktionen existerar i någon omgivning till $t = 0$ så kommer den momentgenererande funktionen att entydigt bestämma fördelningsfunktionen för X. På så vis är den momentgenererande funktionen ett mycket kompakt sätt att beskriva en fördelning på. [1]

Laplaceintegraler dyker naturligt upp inom differentialkalkyl och sannolikhetsteori eftersom Laplacetransformationen visar sig ha bra egenskaper och resultatet av transformationen är en Laplaceintegral. Men Laplaceintegraler är även en allmänt naturligt förekommande integral som dyker upp lite här och där. Laplace själv studerade huvudsakligen Laplaceintegraler i samband med Bayesiansk statistik [6]. Integralerna uppstår ofta som den apriorifördelning som ges av Bayes sats. I detta fall är det användbart att kunna approximativt beräkna Laplaceintegraler för att kunna uppskatta den normaliserande konstanten i apriorifördelningen [2]. För att göra det utvecklade Laplace en asymptotisk metod som kom att kallas för Laplaces metod. Metoden kan inte snärtigt beskrivas med en enskild sats, utan är en sorts angreppsmetod för att kunna approximera Laplaceintegraler. Metoden bygger på precis de idéer som vi använde i härledningen av den asymptotiska relationen

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t} dt \sim \frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} \mp ... \quad (x \to +\infty)$$

i avsnitt 1. Om vi exempelvis betraktar en Laplaceintegral på formen

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} q(t) dt$$

så kommer funktionen $I(x)$ asymptotiskt för stora värden på x få sitt huvudsakliga tillskott från någon liten omgivning till punkten $t = 0$. Allmänt kan vi inte förvänta oss att integranden har ett globalt maximum i punkten $t = 0$ eftersom det globala maximumet kommer att bero på dels funktionen $q(t)$ och dels värdet på x. Däremot så kommer integranden i en viss asymptotisk mening ha ett globalt maximum i punkten $t = 0$ eftersom exponentialfunktionen kommer att slå ut integranden utanför $t = 0$ då $x \to +\infty$. Laplaces metod bygger därför på att approximera

$$I(x) \approx \int_0^{\delta} e^{-xt} q(t) dt$$

för något litet tal $\delta > 0$ och sedan använda någon lokalt god approximation av $q(t)$ sådant att man kan explicit beräkna integralen. De specifika detaljerna i hur man approximerar $q(t)$ kommer att variera från fall till fall. Vi kommer att betrakta den mest frekvent använda metoden som bygger på att approximera $q(t)$ med hjälp av en asymptotisk serie i $t = 0$. Men innan vi ger en beskrivning av denna metod så studerar vi först partiell integration i samband med asymptotiska undersökningar av integraler och den speciella funktionen *gammafunktionen.* Både partiell integration och gammafunktionen kommer visa sig vara fundamentala verktyg för att kunna hitta asymptotiska utvecklingar av många olika sorters integraler.

2.2 Partiell integration

Partiell integration är ett fundamentalt verktyg för att hitta asymptotiska utvecklingar integraler. Om vi exempelvis betraktar en integral

$$\int_a^b f(t)g(t)dt$$

så kan vi (givet att vissa förutsättningar är uppfyllda) skriva om den som

$$I(x) = F(t)g(t)\Big|_{t=a}^{t=b} - \int_a^b F(t)g'(t)dt.$$

Vad vi har åstadkommit med denna omskrivning är att frigöra en term,

$$F(t)g(t)\Big|_{t=a}^{t=b} = F(b)g(b) - F(a)g(a)$$

från integralen. I många fall kan vi betrakta denna term som den ledande termen i en asymptotisk utveckling av en integral där resttermen ges av integralen

$$\varepsilon_1 = -\int_a^b F(t)g'(t)dt.$$

För att få fler termer så fortsätter man med partiell integration på resttermen. Vi kan konkretisera denna idé med ett välkänt exempel, nämligen Taylors formel. Antag att $f(x)$ är en C^{n+1} funktion i någon omgivning av punkten x_0 och definiera $I(x) = f(x) - f(x_0)$. Med integralrepresentationen

$$I(x) = \int_{x_0}^{x} f'(t)dt$$

kan vi nu med hjälp av upprepad partiell integration hitta en asymptotisk utveckling av $I(x)$. Med n gånger upprepad partiell integration ser vi att

$$I(x) = \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \varepsilon_n(x)$$

där

$$\varepsilon_n(x) = \frac{(-1)^n}{n!}\int_{x_0}^{x}(t - x_0)^n f^{n+1}(t)dt = O\big((x - x_0)^{(n+1)}\big) \quad (x \to x_0).$$

Genom att möblera om lite ser vi att

$$f(x) \sim f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

då $x \to x_0$. Partiell integration är en mycket användbar teknik och kommer att lägga grunden för många av de metoder som vi senare utvecklar. En tumregel är att partiell integration fungerar väl i de fall då integralen $I(x)$ får sitt huvudsakliga asymptotiska tillskott från ändpunkterna a och b istället för någon eller några inre punkter $c \in (a, b)$. Exempelvis går det att härleda resultatet

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{1}{1+t}dt \sim \frac{0!}{x} - \frac{1!}{x^2} + \frac{2!}{x^3} \mp ... \quad (x \to +\infty)$$

direkt med hjälp av partiell integration.

2.3 Gammafunktionen

Målet med asymptotiska metoder är att finna analytiska approximationer av komplicerade funktioner. För att detta ska vara praktiskt genomförbart måste man behärska många speciella funktioner och identiteter. Dessa kan dels fungera som utgångspunkter för metoder och dels användas för att avsevärt förenkla komplicerade uttryck. I denna rapport kommer särskilt stort fokus ligga på en av dessa speciella funktioner, den så kallade gammafunktionen.

Definition 2.1. Funktionen

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$$

av parametern x kallas för gammafunktionen och är definierad för alla $x > 0$.

Kommentar. För $x \geq 1$ är ovanstående integral bara generaliserad i den mening att den övre integrationsgränsen är $+\infty$, men för $x \in (0,1)$ är den även generaliserade i punkten $t = 0$.

För att visa att gammafunktionen är väldefinierad för alla $x > 0$ börjar vi med att dela upp den som

$$\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^1 t^{x-1}e^{-t}dt + \int_1^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt.$$

Vi visar att båda ovanstående integraler existerar var för sig. Vi betecknar att funktionen $f(t)$ är integrerbar på mängden I genom att skriva att $f(t) \in \mathfrak{R}(I)$. För att visa att gammafunktionen i definition 2.1 är väldefinierad så ska vi alltså visa att för varje val av $x > 0$ gäller det att $t^{x-1}e^{-t} \in \mathfrak{R}(0,+\infty)$. Vi börjar med att fixera ett $x > 0$. Eftersom $t^{x-1}e^{-t} = O(e^{-t/2})$ då $t \geq 1$ så följer det att det existerar något tal M sådant att $t^{x-1}e^{-t} \leq Me^{-t/2}$ för alla $t \geq 1$. Eftersom $0 \leq t^{x-1}e^{-t} \leq Me^{-t/2}$ för $t \geq 1$ samt $Me^{-t/2} \in \mathfrak{R}[1,+\infty)$ så följer det av jämförelsekriterier för integraler att $t^{x-1}e^{-t} \in \mathfrak{R}[1,+\infty)$. För $t \in (0,1]$ så börjar vi med att observera att $0 \leq t^{x-1}e^{-t} \leq t^{x-1}$. Eftersom $t^{x-1} \in \mathfrak{R}(0,1]$ för alla $x > 0$ följer det att $t^{x-1}e^{-t} \in \mathfrak{R}(0,1]$ av jämförelsekriterier för integraler. Sammantaget visar detta att $t^{x-1}e^{-t} \in \mathfrak{R}(0,+\infty)$ för alla $x > 0$. Speciellt ser vi att gammafunktionen är väldefinierad.

Vi kommer senare se att gammafunktionen naturligt dyker upp vid asymptotiska utvecklingar av Laplaceintegraler. Men gammafunktionen är även intressant ur många andra aspekter. Man kan bland annat betrakta gammafunktionen som en generalisering av $n!$. Med partiell integration finner vi att

$$\Gamma(x) = -e^{-t}t^{x-1}\Big|_{t=0}^{t=+\infty} - \int_0^{+\infty} -e^{-t}(x-1)t^{(x-1)-1}dt =$$

$$= (0-0) + (x-1)\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{(x-1)-1}dt = (x-1)\Gamma(x-1),$$

vilket visar den intressanta funktionalekvationen $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$. Detta kan man tycka påminner mycket om formeln $n! = n(n-1)!$. Och mycket riktigt då

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$$

följer det av induktion att $\Gamma(n) = (n-1)!$. Av denna anledning går det att betrakta gammafunktionen som en kontinuerlig generalisering av fakultetsfunktionen. Givetvis finns det många sätt som man kan interpolera faktultetsfunktionen på, men gammafunktionen är en naturlig sådan då den exempelvis är en analytisk funktion för $x > 0$ [10]. Ibland använder man därför notationen $x!$ istället för $\Gamma(x+1)$.

Som en avslutande kommentar kan man tycka att det är något lustigt att man inte definierade gammafunktionen sådan att $\Gamma(n) = n!$ genom att skifta ett steg i x-led. Gauss (1777-1855) definierade gammafunktionen som

$$\Pi(x) := \Gamma(x+1) = \int_0^{+\infty} t^x e^{-t} dt$$

som då blir definierad för alla $x > 1$ med en singularitet i $x = 1$. Gauss version av gammafunktionen snyggar till fakultetsformeln eftersom $\Pi(n) = n!$ istället för $\Gamma(n+1) = n!$. Den notation som vi använder infördes av Legendre (1752-1833) och man vet inte varför han valde att definiera gammafunktionen med en singularitet i $x = 0$ istället för $x = 1$. [8]

2.4 Watsons lemma

Tidigare så såg vi att vi kunde erhålla en asymptotisk utveckling av Laplaceintegralen

$$I(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{1}{1+t} dt$$

genom att formellt serieutveckla $q(t) = 1/(1+t)$ som en potensserie och sedan integrera termvis. Med våra beräkningar som bakgrund är det naturligt att undra om detta är en metod som fungerar allmänt. Men hur allmänt kan man egentligen göra det? Eftersom vi aldrig explicit använde att potensserieutvecklingen

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 \pm ...$$

är konvergent i en liten omgivning runt $t = 0$ utan egentligen bara använde utvecklingens asymptotiska egenskaper kan det verka rimligt att metoden skulle fungera för det mer allmänna fallet där $q(t)$ har en asymptotisk potensserie. Vidare om vi blickar tillbaka till våra beräkningar i avsnitt 1 så verkade det aldrig väsentligt att vår integral var en potensserie med heltalsinkrement i potenserna, det vill säga att den asymptotiska utveckling av $q(t)$ var på formen

$$q(t) \sim a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + ... \quad (t \to 0)$$

istället för exempelvis

$$q(t) \sim a_0 + a_1 t^{1/2} + a_2 t^1 + a_3 t^{3/2} + a_4 t^2 ... \quad (t \to 0).$$

Mer allmänt kan vi istället tala om en asymptotisk utveckling på formen

$$q(t) \sim \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{(a-b+k)/b} = t^{a/b-1} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{k/b} \quad (t \to 0^+)$$

där a och b är två strikt positiva konstanter. Potenserna i ovanstående potensserie kan vid första anblick se något kryptiska ut, men om vi exempelvis vill att serien ska ha en första term $t^{-3/4}$ och därefter fortsätta med ett inkrement π i potenserna så motsvarar det att lösa ekvationerna

$$\frac{a}{b} - 1 = -3/4$$

och

$$\frac{1}{b} = \pi,$$

vilka har lösningarna $a = \pi/4, b = 1/\pi$. Restriktionen $a, b > 0$ är där för att garantera att den första termern $t^{a/b-1}$ har en potens som är strikt större än -1. Detta är väsentligt eftersom $t^{a/b-1}$ inte är integrerbar i en omgivning av $t = 0$ då $a/b - 1 \leq -1$. Låt oss nu se hur vi givet en asymptotisk utveckling

$$q(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{(a-b+k)/b}$$

av $q(t)$ kan härleda en asymptotisk utveckling av Laplaceintegralen

$$I(x) := \int_0^{+\infty} q(t) e^{-xt} dt.$$

För att göra det använder vi samma heuristiska argument som i avsnitt 1. Exponentialfunktionen i integranden gör så att integralens svans blir mycket tunn (transcendentalt liten), så en approximation

$$\int_0^{+\infty} q(t) e^{-xt} dt \approx \int_0^{\delta} q(t) e^{-xt} dt$$

för något litet $\delta > 0$ ligger nära till hands. Givet att δ är tillräckligt litet bör vi dessutom kunna approximera $q(t)$ lokalt på $[0, \delta]$ med dess trunkerade asymptotiska serie som

$$q(t) \approx \sum_{k=0}^{n} a_k t^{(a-b+k)/b}$$

för något lämpligt valt n. Detta ger att

$$\int_0^{\delta} q(t) e^{-xt} dt \approx \int_0^{\delta} \Big[\sum_{k=0}^{n} a_k t^{(a-b+k)/b} \Big] e^{-xt} dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^{\delta} t^{a-b+k)/b} e^{-xt} dt.$$

Integralerna

$$\int_0^{\delta} t^{(a-b+k)/b} e^{-xt} dt$$

ser inte så bra ut eftersom de beror på den något godtyckligt valda parametern δ. Eftersom en asymptotisk utveckling av $I(x)$ inte bör bero på någon godtyckligt vald parameter så måste vi på något sätt frigöra oss från detta δ-beroende. Exponentialfunktionen i integranden $t^{(a-b+k)/b} e^{-xt}$ gör så att svansen blir tunn och därför känns det rimligt att vi kan frigöra oss från δ-beroende på samma vis som vi introducerade det. Vi byter integrationsgränserna med

$$\int_0^{\delta} t^{(a-b+k)/b} e^{-xt} dt \approx \int_0^{+\infty} t^{(a-b+k)/b} e^{-xt} dt.$$

För att gå vidare i vår analys behöver vi gammafunktionen. Med variabelsubstitutionen $s = xt$ kan vi skriva om integralen som

$$\int_0^{+\infty} t^{(a+k)/b-1} e^{-xt} dt = \frac{1}{x^{(a+k)/b}} \int_0^{+\infty} s^{(a+k)/b-1} e^{s} ds = \frac{\Gamma\big[(a+k)/b\big]}{x^{(a+k)/b}}.$$

Detta steg är typiskt för asymptotiska utvecklingar av integraler. Genom att byta integrationsgränserna till 0 och $+\infty$ och sedan göra något variabelbyte i stil med $s = tx$ eller $s = t/x$ så frigör man ofta integralen från x-beroendet (här är det alltså fundamentalt att integrationsgränserna är just 0 och $+\infty$) och erhåller en potens i x gånger en konstant som bestäms av någon integral oberoende av x. För att fortsätta skriver vi nu att

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \int_0^{\delta} t^{a-b+k)/b} e^{-xt} dt \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k \Gamma\big[(a+k)/b\big]}{x^{(a+k)/b}}$$

vilket är en vanlig potensserie i x. Eftersom vårt val av n var godtyckligt tyder vårt heuristiska argument på att det existerar en asymptotisk utveckling

$$I(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \Gamma\big[(a+k)/b\big]}{x^{(a+k)/b}} \quad (x \to +\infty).$$

År 1918 publicerade G.N.Watson (1886-1965) ett rigoröst bevis av vårt heuristiska argument (metoden hade dock självfallet använts långt innan det) [7]. Satsen kallas för Watsons lemma och är idag en av de mest frekvent använda satserna för att härleda asymptotiska utvecklingar. Vi täpper igen alla luckor i vårt heuristiska argument och bevisar satsen. Satsen gäller för alla funktioner $q(t)$ så länge som $I(x)$ är konvergent, men eftersom denna rapport är riktad till studenter på kandidatnivå bevisar vi bara fallet då $q(t)$ är en kontinuerlig funktion på $[0,+\infty)$ utan oändligheter. Detta ändrar inte bevistekniken överhuvudtaget, utan det mer allmänna fallet är mer eller mindre rad för rad identiskt med vårt. Vi gör bara en förenkling för att fullt ut kunna rättfärdiga alla beräkningar.

Sats 2.1. *(Watsons lemma) Låt $q(t)$ vara en reellvärd eller komplexvärd funktion med asymptotisk utveckling*

$$q(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{(a-b+k)/b} \quad (t \to 0^+).$$

Förutsatt att Laplaceintegralen

$$I(x) = \int_0^{+\infty} q(t) e^{-xt} dt$$

existerar så gäller det att

$$I(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k \Gamma\big[(a+k)/b\big]}{x^{(a+k)/b}} \quad (x \to +\infty).$$

Bevis. Vi börjar med att definiera

$$\varepsilon_n(t) := q(t) - \sum_{k=0}^{n} a_k t^{(a-b+k)/b}$$

och

$$\mathcal{E}_n(x) := I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k \Gamma\big[(a+k)/b\big]}{x^{(a+k)/b}}.$$

Per definition av en asymptotisk serie är vi klara om vi kan visa att

$$\mathcal{E}_n(x) = O(1/x^{[a+(k+1)]/b}) \quad (x \to +\infty).$$

För att visa det börjar vi med att notera att

$$\mathcal{E}_n(x) = I(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k \Gamma[(a+k)/b]}{x^{(a+k)/b}} = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \varepsilon_n(t) dt.$$

Integralen i högerled är nödvändigtvis konvergent eftersom vi antog att $I(x)$ var det. Då

$$q(t) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^{(a-b+k)/b} \quad (t \to 0^+)$$

så vet vi att

$$\varepsilon_n(t) = O(t^{[(n+1)+a-b]/b}) \quad (t \to 0^+).$$

Detta betyder att det existerar konstanter $\delta_n > 0$ och A_n sådana att

$$|\varepsilon_n(t)| \le A_n t^{[(n+1)+a-b]/b}$$

för alla $t \in [0, \delta_n]$. Vi delar därför upp integrationsintervallet med

$$\int_0^{+\infty} e^{-xt}\varepsilon_n(t)dt = \int_0^{\delta_n} e^{-xt}\varepsilon_n(t)dt + \int_{\delta_n}^{+\infty} e^{-xt}\varepsilon_n(t)dt$$

och visar att båda ovanstående integraler i högerled är $O(1/(x^{(a+(k+1))/b})$ då $x \to +\infty$ var för sig. För den första integranden följer det av direkta beräkningar eftersom

$$\left| \int_0^{\delta_n} e^{-xt}\varepsilon_n(t)dt \right| \le \int_0^{\delta_n} e^{-xt} A_n t^{[(n+1)+a-b]/b} dt \le A_n \int_0^{+\infty} e^{-xt} t^{[(n+1)+a-b]/b} dt =$$

$$= \frac{A_n \Gamma[(a+(n+1))/b]}{x^{[a+(n+1)]/b}} = O(1/(x^{[a+(k+1)]/b}) \quad (x \to +\infty).$$

Vi är alltså klara om vi kan visa att

$$\int_{\delta_n}^{+\infty} e^{-xt}\varepsilon_n(t)dt = O(1/(x^{[a+(k+1)]/b}) \quad (x \to +\infty)$$

Ovanstående integral motsvarar en tunn svans, och vi ska visa att den faktiskt är transcendentalt liten. Låt x_0 vara något värde på x sådant att $I(x_0)$ existerar. Vi gör då omskrivningen

$$\int_{\delta_n}^{+\infty} e^{-xt}\varepsilon_n(t)dt = \int_{\delta_n}^{+\infty} e^{-(x-x_0)t} e^{-x_0 t}\varepsilon_n(x)dt.$$

Eftersom integralen

$$I(x_0) = \int_{\delta_n}^{+\infty} e^{-xt}\varepsilon_n(x)dt$$

existerar så betyder det att funktionen

$$G_n(t) := \int_{\delta_n}^{t} e^{-x_0 s}\varepsilon_n(t)ds$$

existerar. Nu använder vi vårt antagande om att $q(t)$ är en kontinuerlig funktion för att fullt ut kunna rättfärdiga våra kommande beräkningar. Eftersom $q(t)$ är en kontinuerlig funktion så kommer $\varepsilon_n(t)$ också vara det. Detta visar att $G_n(t)$ är en kontinuerlig funktion, begränsad på intervallet $t \in [\delta_n, +\infty)$ och är en primitiv funktion till funktionen

$$g_n(t) := e^{-x_0 t}\varepsilon_n(t).$$

Av dessa anledningar vet vi att vi nu kan utföra en partiell integration, och då finner vi att

$$\int_{\delta_n}^{+\infty} e^{-(x-x_0)t} e^{-x_0 t} \varepsilon_n(t) dt = e^{-(x-x_0)t} G_n(t) \Big|_{t=\delta_n}^{t=+\infty} + (x-x_0) \int_{\delta_n}^{+\infty} e^{-(x-x_0)} G_n(t) dt =$$

$$= 0 - 0 + (x - x_0) \int_{\delta_n}^{+\infty} e^{-(x-x_0)} G_n(t) dt = (x - x_0) \int_{\delta_n}^{+\infty} e^{-(x-x_0)} G_n(t) dt.$$

Eftersom $G_n(t)$ är begränsad på intervallet $[\delta_n, +\infty)$, säg av talet B_n, så följer det att

$$\left| (x - x_0) \int_{\delta_n}^{+\infty} e^{-(x-x_0)} G_n(t) dt \right| \leq (x - x_0) \int_{\delta_n}^{+\infty} e^{-(x-x_0)} B_n dt =$$

$$= B_n e^{-(x-x_0)\delta_n} = (B_n e^{-x_0 \delta_n}) e^{-x} = O(e^{-x}) \quad (x \to +\infty).$$

Detta visar att

$$\int_{\delta_n}^{+\infty} e^{-xt} \varepsilon_n(t) dt = O(e^{-x}) \quad (x \to +\infty)$$

det vill säga att svansen är transcendentalt liten. Eftersom $O(e^{-x}) = O(1/(x^{[a+(k+1)]/b})$ är beviset klart. ■

Kommentar. I Watsons lemma betraktar vi endast Laplaceingraler med integrationsgränser $a = 0$ och $b = +\infty$ men naturligtvis kan satsen användas i andra fall också. Om man exempelvis betraktar en Laplaceingral

$$\int_0^{10} q(t) e^{-xt} dt$$

så kommer den att ha samma asymptotiska utveckling som integralen

$$\int_0^{+\infty} q(t) e^{-xt} dt$$

eftersom svansen

$$\int_{10}^{+\infty} q(t) e^{-xt} dt$$

är transcendentalt liten. Övriga möjliga kombinationer av integrationsgränser a och b kan hanteras på liknande sätt. Om $a > 0$ gör man variabelbytet $s = t - a$ och om $a = -\infty$ och $b = +\infty$ så multiplicerar man den asymptotiska utvecklingen i Watsons lemma med 2 (givet att $q(t)$ har samma asymptotisk utveckling då $t \to 0$ från både höger och vänster).

2.5 Generaliserade Laplaceintgraler

Med hjälp av Watsons lemma kan vi hitta asymptotiska utvecklingar av många Laplaceintegraler. En integral på formen

$$\int_a^b e^{\phi(t)x} q(t)dt$$

kallas för en *generaliserad Laplaceintegral*. Den är generaliserad i den mening av vi har ersatt $-t$ i exponenten med någon godtycklig funktion $\phi(t)$. En vanlig Laplaceintegral motsvarar alltså specialfallet $\phi(t) = -t$. För att hitta asymptotiska utvecklingar av generaliserade Laplaceingraler testar man därför i allmänhet först ifall man kan utföra variabelbytet $-s = \phi(t)$ och sedan använda Watsons lemma. I vissa fall kommer detta inte fungera, exempelvis om $\phi'(t)$ har nollställen eller om sambandet $-s = \phi(t)$ är svårt att invertera. I dessa fall får man istället använda sig av mer komplicerade metoder. Dessa metoder är ofta mer mödosamma än metoden som bygger på Watsons lemma, och därför ger vi inga bevis utan fokuserar istället på de mer konceptuella och mekaniska aspekterna av metoderna.

Idén bakom metoderna för generaliserade Laplaceintegraler är precis densamma som idén bakom metoderna för vanliga Laplaceintegraler. Den väsentliga skillnaden är att istället för att bara approximera $q(t)$ så approximerar vi dessutom funktionen $\phi(t)$. När vi betraktar en generaliserad integral

$$I(x) = \int_a^b e^{x\phi(t)} q(t)dt$$

så söker vi återigen var på integrationsintervallet som integralen får sitt huvudsakliga tillskott. För en vanlig Laplaceintegral var det i punkten $t = 0$ eftersom det var där som exponenten till exponentialfunktionen var störst. I fallet med generaliserade Laplaceintegraler är det punkten där $\phi(t)$ har ett globalt maximum. Den första metoden som vi går igenom hanterar det fall då detta maximum antas i den nedre integrationsgränsen $t = a$ samtidigt som $\phi'(a) < 0$ (det är självklart att $\phi'(a) \leq 0$, så vi antar alltså bara att $\phi'(a) \neq 0$). I ett sådant fall känns det rimligt att approximera integralen med

$$I(x) = \int_a^b e^{x\phi(t)} q(t)dt \approx \int_a^{a+\delta} e^{x\phi(t)} q(t)dt$$

för något litet tal $\delta > 0$. Nu vill vi approximera integranden på intervallet $[a, a + \delta]$ på något sådant vis att integralen går att explicit beräknas. Givet att δ är litet nog så bör approximationerna

$$\phi(t) \approx \phi(a) + \phi'(a)(t - a)$$

och

$$q(t) \approx q(a)$$

var goda sådana. Vi förenklar integranden med hjälp av dessa approximationer:

$$\int_a^{a+\delta} e^{x\phi(t)}q(t)dt \approx \int_a^{a+\delta} e^{x[\phi(a)+\phi'(a)(t-a)]}q(a)dt.$$

Eftersom integranden har en smal högersvans (exponentiellt liten i förhållande till integralen över $[a, a+\delta]$) frigör vi oss från δ-beroendet genom att justera integrationsgränserna med

$$\int_a^{a+\delta} e^{x[\phi(a)+\phi'(a)(t-a)]}q(a)dt \approx \int_a^{+\infty} e^{x[\phi(a)+\phi'(a)(t-a)]}q(a)dt.$$

Anledningen till varför vi approximerade $\phi(t)$ och $q(t)$ som vi gjorde är att vi nu kan explicit beräkna ovanstående integral. Med direkta beräkningar finner vi att

$$\int_a^{+\infty} e^{x[\phi(a)+\phi'(a)(t-a)]}q(a)dt = \frac{-q(a)}{x\phi'(a)}e^{x\phi(a)}.$$

Vårt heuristiska argument verkar antyda att

$$I(x) \sim \frac{-q(a)}{x\phi'(a)}e^{x\phi(a)} \quad (x \to +\infty). \tag{3}$$

Om $\phi(t)$ har ett globalt maximum i den övre integrationsgränsen $t = b$ så kan man med liknande beräkningar visa att

$$I(x) \sim \frac{q(b)}{x\phi'(b)}e^{x\phi(b)} \quad (x \to +\infty).$$

Denna metod hade uppenbarligen inte fungerat i de fall där $\phi(t)$ har ett globalt maximum i en inre punkt $c \in (a, b)$ eftersom då hade $\phi'(c) = 0$. För att hantera ett sådant fall justerar vi vår lokala approximation av $\phi(t)$. Likt tidigare börjar vi med att approximera

$$I(x) = \int_a^b e^{x\phi(t)}q(t)dt \approx \int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{x\phi(t)}q(t)dt$$

för något litet $\delta > 0$. Approximationen

$$\phi(t) \approx \phi(c) + \phi'(c)(t-c)$$

ser dock inte bra ut. Eftersom $\phi'(c) = 0$ så skulle vi med en sådan approximation eliminera t-beroendet i exponentialfunktionen. Förutsatt att $\phi''(c) \neq 0$ (det vill säga $\phi''(c) < 0$) kan det därför kännas rimligt att istället approximera

$$\phi(t) \approx \phi(c) + \phi'(c)(t-c) + \phi''(c)(t-c)/2$$

och då $\phi'(c) = 0$ förenklar vi detta till

$$\phi(t) \approx \phi(c) + \phi''(c)(t-c)/2.$$

Om vi likt tidigare approximerar $q(t) \approx q(c)$ finner vi att

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{x\phi(t)} q(t) dt \approx \int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{x[\phi(c)+\phi''(c)(t-c)^2/2]} q(c) dt.$$

Vi frigör vi oss från δ-beroende i integralen genom att lägga till exponentiell små svansar som är asymptotiskt obetydliga. Eftersom både den undre och den övre integrationsgränsen beror på δ så lägger vi därför till båda högersvansen och vänstersvansen. Den resulterande integralen

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} q(c) e^{x[\phi(c)+\phi''(c)(t-c)^2/2]} dt \approx \int_{-\infty}^{+\infty} q(c) e^{[\phi(c)+\phi''(c)(t-c)^2/2]x} dt$$

är en så kallad Gaussisk integral och kan explicit beräknas med hjälp av ett välkänt trick. Om vi gör det finner vi att

$$\int_{-\infty}^{+\infty} q(c) e^{[\phi(c)+\phi''(c)(t-c)^2/2!)]x} dt = \frac{\sqrt{2\pi} q(c) e^{x\phi(c)}}{\sqrt{-x\phi''(c)}}$$

vilket verkar antyda att

$$I(x) \sim \frac{\sqrt{2\pi} q(c) e^{x\phi(c)}}{\sqrt{-x\phi''(c)}} \quad (x \to +\infty). \tag{4}$$

Denna metod går också exempelvis bra att använda i de fall då $\phi(t)$ antar ett globalt maximum i den nedre integrationsgränsen $t = a$ samtidigt som $\phi'(a) = 0$ och $\phi''(a) \neq 0$. I det fallet blir den asymptotiska ekvivalensen dock

$$I(x) \sim \frac{\sqrt{2\pi} q(c) e^{x\phi(c)}}{2\sqrt{-x\phi''(c)}} \quad (x \to +\infty).$$

Här har vi alltså delat högerledet i den asymptotiska ekvivalensen med en faktor 2 eftersom man på grund av assymmetri bara inkluderar högersvansen i beräkningarna.

Ovanstående metod byggde på att om ett maximum antogs i $t = c$ och $\phi'(c) = 0$ men $\phi''(c) \neq 0$ så kunde vi approximera

$$\phi(t) \approx \phi(c) + \phi''(c)(t-c)^2/2.$$

Om $\phi(t)$ har ett globalt maximum i punkten $t = c$ och $\phi'(c) = 0$ men $\phi''(c) \neq 0$ så säger vi att $\phi(t)$ har ett globalt maximum av *ordning* 2 i punkten $t = c$. Om heltalet $n \geq 1$ är det minsta tal sådant att $\phi^{(n)}(c) \neq 0$

så säger vi att $\phi(t)$ har ett globalt maximum i punkten $t = c$ av ordning n. Genom att göra ett teckenstudium av $\phi(t)$ runt $t = c$ med Taylors formel så kan man visa att ordningen n måste vara ett jämnt tal samt att $\phi^{(n)}(c) < 0$. I det allmänna fallet med ett globalt maximum $c \in (a, b)$ av ordning $n > 1$ approximerar vi istället med

$$\phi(t) \approx \phi(c) + \phi^{(n)}(c)(t-c)^n/n!.$$

Om vi följer samma recept som tidigare så ser vi att

$$I(x) \approx \int_{c-\delta}^{c+\delta} q(c)e^{x[\phi(c)+\phi^{(n)}(c)(t-c)^n/n!]}dt \approx$$

$$\approx q(c)e^{x\phi(c)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{x\phi^{(n)}(t-c)^n/n!}dt =$$

$$= \frac{q(c)e^{x\phi(c)}}{\sqrt[n]{-x\phi^{(n)}(c)/n!}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^n}ds =$$

$$= \frac{q(c)e^{x\phi(c)}}{\sqrt[n]{-x\phi^{(n)}(c)/n!}} \frac{2\Gamma(1/n)}{n} = \frac{2\Gamma(1/n)q(c)e^{x\phi(c)}}{n\sqrt[n]{-x\phi^{(n)}(c)/n!}}$$

vilket stödjer att

$$I(x) \sim \frac{2\Gamma(1/n)q(c)e^{x\phi(c)}}{n\sqrt[n]{-x\phi^{(n)}(c)/n!}} \quad (x \to +\infty). \tag{5}$$

Man kan direkt härleda formel (4) ur (5) genom att sätta $n = 2$ och använda sambandet $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. Formel (5) kan självfallet också användas i de fall då ett globalt maximum antas i en ändpunkt, men på grund av assymmetri i integrationsgränserna får man då dela högerled i formel (5) med 2.

Samtliga av ovanstående metoder kallas för Laplaces metod. Grundidén är att hitta vart funktionen $\phi(t)$ antar sitt globala maximum och därefter approximera $\phi(t)$ och $q(t)$ på något lämpligt sätt i en omgivning till denna punkt. Formlerna (3) och (5) ger den ledande termen i en asymptotisk utveckling av de generaliserade Laplaceintegralerna, och givetvis går det att justera metoderna för att hitta fullständiga utvecklingar. Att göra det är dock tekniskt mycket svårt. I Olver [7] ges ett någorlunda fullständigt bevis av formel (3), men när det kommer till den fullständiga asymptotiska utvecklingen är beviset mycket handviftande (nästan så pass handviftande att man kan beskriva det som inkomplett). Bevisidén är att man approximerar integralen

$$\int_a^b e^{\phi(t)}q(t)dt \approx \int_a^{a+\delta} e^{\phi(t)}q(t)dt$$

för något $\delta > 0$ som är så pass litet så att $\phi'(t) \neq 0$ på $[a, a+\delta]$. På intervallet $[a, a+\delta]$ kan man göra variabelbytet $-s = \phi(t) - \phi(a)$, varpå den generaliserade Laplaceintegralen övergår till en vanlig Laplaceintegral på formen

$$\int_0^{\Delta} e^{-sx} f(s) ds$$

där

$$f(s) = -\frac{q(t(s))}{\phi'(t(s))}.$$

Givet att man vet den asymptotiska utveckling av $f(s)$ i termer av s kan man enkelt hitta en fullständig asymptotisk utveckling med hjälp av Watsons lemma. Problemet är hur man givet asymptotiska utvecklingar av $\phi(t) - \phi(a)$ och $q(t)$ i variabeln t hittar en asymptotisk utveckling av $f(s)$ i variabeln s. Att göra detta verkar vara mycket svårt och i Olver ges ingen tydlig beskrivning av proceduren.

I Bender & Orszag [4] finns inga bevis utan man använder sig uteslutande av heuristiska argument likt vi har gjort i avsnitt 2.5. Där ges en vag beskrivning av hur man kan anpassa metoden som gav oss formel (4) för att hitta flera termer i en asymptotisk utveckling. Om man naivt testar sig fram genom att approximera

$$\phi(t) \approx \phi(c) + \phi''(c)(t-c)^2/2! + \phi(c) + \phi'''(c)(t-c)^3/3!$$

så kommer man omedelbart att stöta på flera problem. Det första problemet är att vi inte kan justera integrationsgränserna genom att byta $[c-\delta, c+\delta]$ till $(-\infty, +\infty)$ eftersom den resulterande integralen kommer att bli divergent. Om $\phi'''(c) > 0$ kommer exponentialfunktionen i integranden att gå mot $+\infty$ då $t \to +\infty$ och om $\phi'''(c) < 0$ kommer exponentialfunktionen att gå mot $+\infty$ då $t \to -\infty$. Man kan försöka att lösa detta problem genom att istället skriva att

$$\phi(t) \approx \phi(c) + \phi''(c)(t-c)^2/2! + \phi(c) + \phi'''(c)(t-c)^3/3! + \phi^{(4)}(c)(t-c)^4/4!$$

förutsatt att $\phi^{(4)}(c) < 0$. Det finns dock ett annat problem som denna omskrivning inte kommer att lösa. Funktionen

$$\phi(c) + \phi''(c)(t-c)^2/2!$$

kommer nödvändigtvis ha ett globalt maximum i punkten $t = c$. Dock så kommer inte funktionen

$$\phi(c) + \phi''(c)(t-c)^2/2! + \phi(c) + \phi'''(c)(t-c)^3/3! + \phi^{(4)}(c)(t-c)^4/4!$$

nödvändigtvis att ha ett globalt maximum i punkten $t = c$. Den kommer visserligen ha en extrempunkt i $t = c$, men det behöver inte vara något globalt maximum. Om funktionen istället antar ett globalt maximum i punkten

$d \neq c$ så kommer en integral i stil med

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x[\phi(c)+\phi''(c)(t-c)^2/2!+\phi(c)+\phi'''(c)(t-c)^3/3!+\phi^{(4)}(c)(t-c)^4/4!]} q(c)dt$$

få sitt huvudsakliga asymptotiska tillskott från en omgivning till punkten d och inte punkten c, och därför kan integralen omöjligen ge någon asymptotiskt god approximation av integralen

$$\int_a^b e^{x\phi(t)} q(t)dt$$

som får sitt huvudsakliga tillskott från punkten $t = c$. I Bender & Orszag så förklarar de hur man kan anpassa metoden för att få den andra termen, men likt i Olver så ges det ingen tydlig beskrivning. I både Olver och i Bender & Orszag finns det en explicit beskrivning av de första termerna i de fullständiga asymptotiska serierna, och för praktiskt bruk verkar detta räcka.

2.6 Stirlings formel och rörliga maximum

Vi har tidigare sett att gammafunktionen naturligt uppträder i samband med asymptotiska utvecklingar av Laplaceintegraler. Vi ska nu se att det går att hitta en asymptotisk utveckling av själva gammafunktionen. Med omskrivningen

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} e^{x\ln(t)} e^{-t-\ln(t)} dt$$

så ser vi att gammafunktionen är en generaliserad Laplaceintegral med $\phi(t) = \ln(t)$ och $q(t) = e^{-t-\ln(t)}$. Våra tidigare metoder kommer dock inte fungera på denna integral eftersom $\phi(t) = \ln(t)$ inte har något maximum på intervallet $(0, +\infty)$, utan är en strikt växande funktion som går mot $+\infty$ då $t \to +\infty$. Vi anpassar därför vår metod något. Tidigare har vi sett att integralen är konvergent för alla $x > 0$ eftersom exponentialtermen e^{-t} slår ut t^{x-1} tillräckligt fort. Av detta skäl gör vi omskrivningen

$$e^{x\ln(t)} e^{-t-\ln(t)} = e^{x\ln(t)-t} e^{-\ln(t)} = e^{x\ln(t)-t} \frac{1}{t}.$$

av integranden. Här har vi alltså bakat ihop de två termerna $e^{x\ln(t)}$ och e^{-t}. Anledningen till det är att för att se vart integranden asymptotiskt har sitt maximum så måste vi studera båda dessa termer samtidigt. Den algebraiska termen $1/t$ inkluderas inte eftersom den är obetydlig i jämförelse med den transcendentala termen $e^{x\ln(t)-t}$. Vi definierar nu funktionen

$$\varphi(t) := x\ln(t) - t.$$

och undersöker dess maximum. Vi finner att

$$\varphi'(t) = \frac{x}{t} - 1$$

vilket är 0 då $t = x$. Detta är ett maximum eftersom $\varphi''(t) < 0$. Till skillnad från tidigare är detta inte någon fix punkt på t-axeln, utan är beroende på x. Detta kallas för ett *rörligt maximum*. Integrandens asymptotiska maximum kommer alltså att vandra längs t-axeln i takt med att $x \to +\infty$. Men, vi kan också se det som att maximumet antas då $x/t = 1$. Genom variabelbytet $s := x/t$ så kommer det rörliga maximummet på t-axeln att spikas fast vid $s = 1$ på den istället rörliga s-axeln. Eftersom Jacobianen vid variabelbytet är en algebraisk term så kan vi därför använda våra standardmetoder på s-axeln istället. Med variabelbytet $s = x/t$ finner vi att

$$\Gamma(x) = \int_{+\infty}^{0} \frac{x}{s}^{x-1} e^{-x/s} \frac{-x}{s^2} ds = x^x \int_0^{+\infty} e^{x[-\ln(s)+1/s)]} \frac{1}{s} ds$$

Integralen

$$\int_0^{+\infty} e^{x[-\ln(s)+1/s)]} \frac{1}{s} ds$$

är en generaliserad Laplaceintegral där $q(s) = 1/s$ och $\phi(s) = -(\ln(s)+1/s)$. Vi noterar att $\phi(s)$ (per konstruktion) antar sitt maximum i punkten $s = 1$. Vi kan därför fortsätta med de tidigare metoder som vi utvecklade. Då $q(1) = 1$, $\phi(1) = -1$ och $\phi''(1) = -1$ följer det av formel (4) att

$$\int_0^{+\infty} e^{-(\ln(s)+1/s)x} \frac{1}{s} ds \sim \frac{\sqrt{2\pi} e^{-x}}{\sqrt{x}} \quad (x \to +\infty)$$

vilket därmed visar att

$$\Gamma(x) \sim x^x \frac{\sqrt{2\pi} e^{-x}}{\sqrt{x}} \quad (x \to +\infty).$$

Av sambandet $\Gamma(n+1) = n!$ följer det att

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n \to +\infty)$$

vilket brukar kallas för Stirlings formel. I efterhand kan man tycka att denna formel är lätt lustig. Om man hade börjat med att betrakta $n!$ och sedan försökt härleda en god approximation så hade man nog aldrig gissat att en sådan approximation skulle innehålla konstanterna e och π. Den ena dyker upp vid analys, och den andra vid geometri, och vem hade gissat att de har en koppling till den kombinatoriska kvantiteten $n!$?

3 Fourierintegraler

3.1 Riemann-Lebesgues lemma

Vi har tidigare betraktat Laplaceintegralerna

$$I(x) = \int_a^b e^{-xt} q(t)dt$$

och undersökt deras asymptotiska beteende då $x \to +\infty$. Laplaceintegralerna har en sorts systerintegral, *Fourierintegralerna*

$$I(x) = \int_a^b e^{xit} q(t)dt.$$

Likt hur det till Laplaceintegralerna finns en tillhörande Laplacetransformation finns det även till Fourierintegralerna en tillhörande Fouriertransformation. Transformationen används bland annat inom differentialkalkylen för att lösa differentialekvationer och inom sannolikhetsteorin när man studerar den så kallade *karaktäristiska funktionen*. Givet ett kontinuerligt slumptal X med täthet $f(x)$ definieras den karaktäristiska funktionen som väntevärdet

$$\psi(t) = E(e^{itX}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x)dx.$$

Detta är en Fourierintegral och eftersom

$$|\psi(t)| \leq E(|e^{itX}|) = E(1) = 1$$

är integralen absolutkonvergent för alla t och kommer därmed alltid existera (vilket inte nödvändigtvis är sant för den momentgenererande funktionen). Den karaktäristiska funktionen används för att visa många konvergenssatser, exempelvis de två fundamentala satserna *stora talens lag* och *centrala gränsvärdessatsen*. [1]

I detta kapitel gör vi asymptotiska undersökningar av Fourierintegraler. Medan integranden till en Laplaceintegral är formad som en kulle är Fourierintegranden en våg. Eftersom det finns en stor kvalitativ skillnad i hur Fourierintegraler och Laplaceingraler ser ut måste vi därför utveckla nya metoder för att kunna hitta asymptotiska utvecklingar. Då

$$e^{xit} = \cos(xt) + i\sin(xt)$$

så räcker det med att studera de inkompletta Fourierintegralerna

$$\int_a^b \cos(xt)q(t)dt$$

och

$$\int_a^b \sin(xt)q(t)dt$$

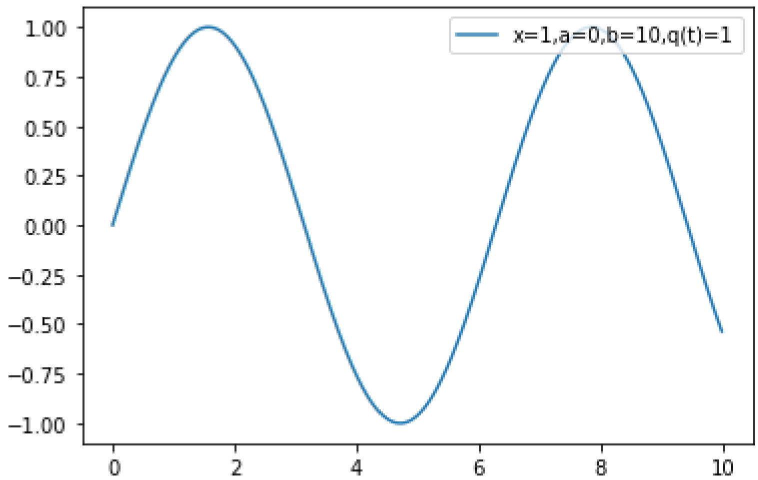
för att förstå Fourierintegralernas asymptotiska beteende (fördelen med att studera ovanstående integraler är naturligtvis att det blir lättare att plotta integranderna). För att få lite inspiration och intuition börjar vi med ett enkelt exempel. Vi undersöker det asymptotiska beteendet hos integralen

$$I(x) = \int_a^b \sin(xt)dt$$

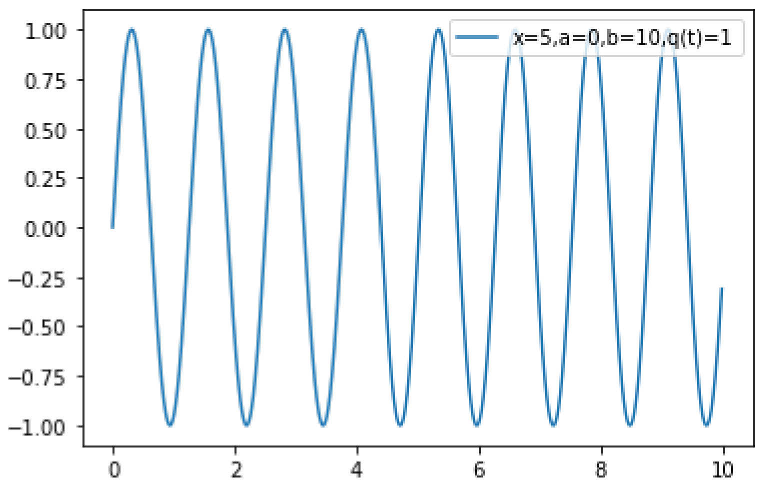
då $x \to +\infty$ där $a < b$ är två ändliga tal. Denna integral är så pass enkel att vi kan explicit beräkna den:

$$I(x) = \big[\cos(bx) - \cos(ax)\big]\frac{1}{x}. \tag{6}$$

Kan vi konstatera något märkvärdigt i ovanstående formel? Det finns två saker som vi kan observera. Det första som vi kan se är att emedan integralen direkt beror på integrationsgränserna a och b går det däremot inte direkt att avläsa att integralen beror på någon inre punkt $c \in (a, b)$. Det andra som vi kan notera är att $I(x) \to 0$ då $x \to +\infty$. Speciellt ser vi att $I(x) = O(1/x)$. För att förstå varför $I(x)$ har dessa egenskaper så tar vi och plottar integranden.



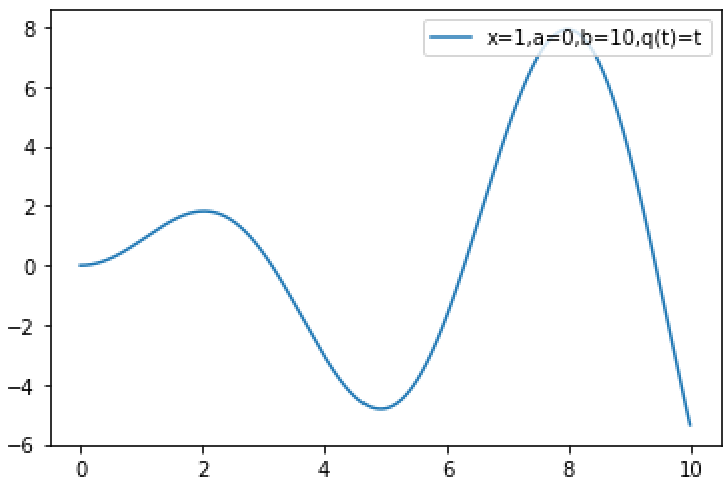
Figur 3.1: Inkomplett Fourierintegrand



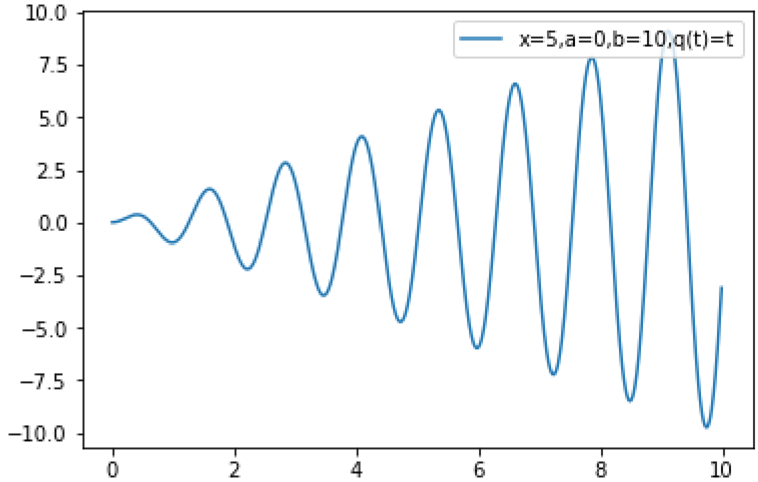
Figur 3.2: Inkomplett Fourierintegrand

I figur 3.1 och 3.2 visas integranden till en inkomplett Fourierintegral med $a = 0$, $b = 10$ och $q(t) = 1$ då $x = 1$ respektive $x = 5$. Låt oss börja med att se vilken roll parametern x spelar i en Fourierintegral. I en Laplaceintegral bidrog x med hur fort exponentialtermen e^{-xt} slår ut $q(t)$ utanför den kritiska punkten $t = 0$. I en Fourierintegral kommer x däremot bidra genom att göra så att funktionen $\sin(xt)$ oscillarar fortare (jämför figur 3.1 och figur 3.2). Något annat som är slående är att symmetrin hos sinusfunktionen orsakar en stor kancellering. Denna kancelleringseffekt uppstår dock inte i ändpunkterna a och b på grund av asymmetri. Detta visar att det enda i integralen som i slutändan inte försvinner i kancelleringseffekten kommer härstamma från något litet område till ändpunkterna. Perioden av $\sin(xt)$ är $2\pi/x \propto 1/x$, och därmed är bredden på dessa intervall kring a och b av storleksordning $1/x$. Eftersom $1/x \to 0$ to $x \to +\infty$ illustrerar detta varför $I(x) \to 0$ då $x \to +\infty$; bredden på intervallet där integralen får sitt tillskott går mot 0. Eftersom bredden på dessa kritiska områden är av just storleksordning $1/x$ förklarar det också varför just $I(x) = O(1/x)$. Sammanfattningsvis verkar formel (6) väldigt naturlig. Formeln beror inte direkt på någon inre punkt $c \in (a, b)$ eftersom tillskottet från en sådan punkt försvinner av kancelleringseffekten. Formeln beror däremot på de båda ändpunkterna a och b. Faktorn $1/x$ motsvarar storleksordningen på det kritiska område kring ändpunkterna där integralen får sitt huvudsakliga bidrag.

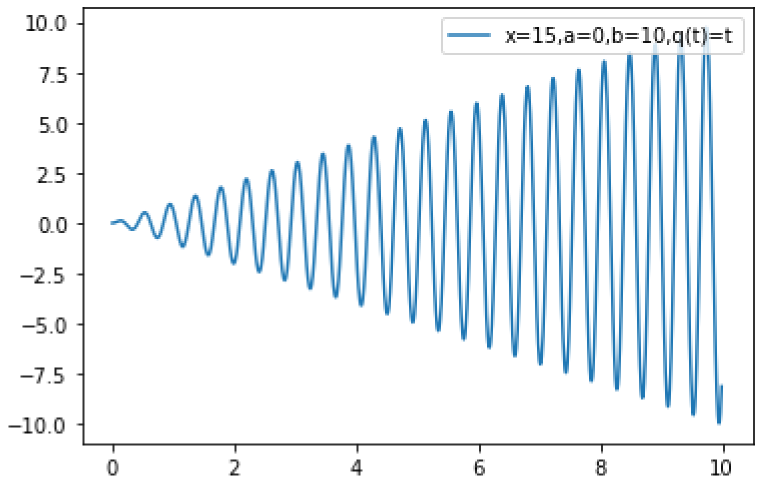
Vad händer då $q(t)$ inte är konstant utan är någon kontinuerlig funktion på $[a, b]$? Låt oss betrakta ett exempel.



Figur 3.3: Inkomplett Fourierintegrand



Figur 3.4: Inkomplett Fourierintegrand



Figur 3.5: Inkomplett Fourierintegrand

Figur 3.3, 3.4 och 3.5 visar integranden till en inkomplett Fourierintegral där $q(t) = t$ orsakar en kontinuerlig variation i amplituden hos sinusfunktionen. Från figurerna ser vi att det likt tidigare på grund av asymmetri inte uppstår någon kancelleringseffekt i ändpunkterna. På intervallet (a, b) kan vi däremot denna gång bara observera en väldigt liten kancelleringseffekt då $x = 1$, en måttlig kancelleringseffekt då $x = 5$, och en stor kancelleringseffekt då $x = 15$. Varför blir det så? Om $c \in (a, b)$ är en inre punkt i intervallet kan vi givet ett litet $\varepsilon > 0$ hitta ett litet $\delta > 0$ sådant att $|q(t) - q(c)| < \varepsilon$ för alla $t \in (c - \delta, c + \delta)$. Genom att välja ε tillräckligt litet så kan vi i praktiken ignorera förändringen i $q(t)$ på intervallet $(c - \delta, c + \delta)$ och approximera $q(t) \approx q(c)$. Då $q(t)$ är likformigt kontinuerlig kan vi välja ett $\delta >$ som fungerar överallt på integrationsintervallet. Om x är tillräckligt stort så kommer perioden hos sinusfunktionen bli så pass liten att den kontinuerliga variationen i amplituden blir överallt lokalt försumbar, och då kommer vi återigen kunna observera en stor kancelleringseffekt. Vi sammanfattar och formaliserar vår analys i en sats.

Sats 3.1 (Riemann-Lebesgues lemma)**.** *Låt $q(t)$ vara en kontinuerlig funktion på det slutna intervallet $[a, b]$. Då gäller det att*

$$I(x) = \int_a^b e^{ixt} q(t) dt \to 0$$

då $x \to +\infty$.

Bevis. Vårt argument är mer eller mindre bara en formalisering av den diskussion som fördes ovan. Låt $\varepsilon > 0$ vara ett litet tal vars värde vi preciserar senare. Eftersom $q(t)$ är en kontinuerlig funktion på den kompakta mängden $[a, b]$ är $q(t)$ likformigt kontinuerlig och $||q(t)||_\infty < +\infty$. Vidare kan vi hitta ett $\delta > 0$ sådant att $|q(t) - q(s)| < \varepsilon$ för alla $t, s \in [a, b]$ då $|t - s| < \delta$. Med detta δ i åtanke konstruerar vi någon partition $\{c_n\}_{n=0}^{m}$ av $[a, b]$ med egenskapen att $c_{n+1} - c_n < \delta$ för alla möjliga n. På intervallet (c_n, c_{n+1}) gör vi omskrivningen

$$q(t) = q(c_n) + [q(t) - q(c_n)]$$

vilket vi använder för att visa att

$$I(x) = \int_a^b e^{ixt} q(t)dt = \sum_{n=0}^{m-1} q(c_n) \int_{c_n}^{c_{n+1}} e^{ixt}dt + \sum_{n=0}^{m-1} \int_{c_n}^{c_{n+1}} e^{ixt}\big[q(t) - q(c_n)\big]dt.$$

Av komplexa triangelolikheten följer det att

$$\left| \int_{c_n}^{c_{n+1}} e^{itx}dt \right| = \left| \frac{e^{ic_{n+1}x} - e^{ic_n x}}{xi} \right| \leq \frac{2}{x},$$

samt att

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} q(c_n) \int_{c_n}^{c_{n+1}} e^{ixt}dt \right| \leq \sum_{n=0}^{m-1} |q(c_n)| \left| \int_{c_n}^{c_{n+1}} e^{ixt}dt \right| \leq m||q(t)||_\infty \frac{2}{x}.$$

Dessutom har vi per konstruktion av partitionen $\{c_n\}$ att

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} \int_{c_n}^{c_{n+1}} e^{ixt}\big[q(t) - q(c_n)\big]dt \right| \leq (b - a)\varepsilon.$$

Sammantaget finner vi att

$$|I(x)| \leq m||q(t)||_\infty \frac{2}{x} + (b - a)\varepsilon.$$

Den senare termen kan göras godtyckligt liten genom att välja ε tillräckligt litet (notera att ett val av ε bestämmer ett m), och den andra termen kan sedan göras godtyckligt liten genom att välja x tillräckligt stort. Detta visar att $I(x) \to 0$ då $x \to +\infty$. ■

I beviset av Riemann-Lebesgues lemma använder vi att a och b är ändliga. Vi kan dock generalisera satsen till att även inkludera svansarna, det vill säga tillåta att $a = -\infty$ eller att $b = +\infty$. För att undvika patologiska svansar antar vi att $I(x)$ är likformigt konvergent med avseende på parametern x.

Sats 3.2. *Låt b vara ett ändligt tal, $q(t)$ en kontinuerlig funktion på $(-\infty, b]$ och antag att*

$$I(x) = \int_{-\infty}^{b} e^{ixt} q(t)dt$$

är likformigt konvergent med avseende på parametern x. Då gäller det att $I(x) \to 0$ då $x \to +\infty$.

Bevis. Skriv

$$I(x) = \int_{-\infty}^{c} e^{ixt} q(t)dt + \int_{c}^{b} e^{ixt} q(t)dt$$

för något tal c sådant att $-\infty < c < b$. Då $I(x)$ är likformigt konvergent kan vi göra den första integralen godtyckligt litet för alla x genom att välja c tillräckligt litet. För ett givet c kan vi sedan använd Riemann-Lebesgues lemma för att visa att den andra integralen kan göras godtyckligt liten genom att välja x stort nog. ■

Sats 3.3. *Låt $a < b$ vara ändliga tal och $I(x)$ en Fourierintegral där $q(t) \in \mathcal{C}^1[a, b]$. Då gäller det att*

$$I(x) = O(1/x) \quad (x \to +\infty).$$

Bevis. Eftersom $q(t) \in \mathcal{C}^1[a, b]$ finner vi med partiell integration att

$$I(x) = [e^{ixa} q(a) - e^{ixb} q(b)] \frac{i}{x} + \frac{i}{x} \int_{a}^{b} e^{ixt} q'(t)dt.$$

Den första termen är självklart $O(1/x)$. Att den andra termen också är $O(1/x)$ följer direkt av Riemann-Lebesgues lemma applicerat på Fourierintegralen

$$\int_{a}^{b} e^{ixt} q'(t)dt.$$

■

Kommentar. Sats 3.3 är helt i linje med vad vi konstaterade tidigare; det enda asymptotiskt bidragande tillskottet till integralen kommer från en liten omgivning till ändpunkterna a och b, och denna omgivning är just av storleksordning $1/x$.

Med hjälp av Riemann-Lebesgues lemma och upprepad partiell integration kan vi enkelt hitta asymptotiska utvecklingar av Fourierintegraler.

Sats 3.4. *Låt $a < b$ vara två ändliga tal och antag att $q(t) \in \mathcal{C}^{m+1}[a, b]$. Definiera*

$$I(x) = \int_{a}^{b} e^{ixt} q(t)dt.$$

Då gäller det att

$$I(x) \sim \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{x^k} \quad (x \to +\infty)$$

där

$$a_k = [e^{iax} q^{(k-1)}(a) - e^{ibx} q^{(k-1)}(b)] i^k.$$

Bevis. Låt n vara ett heltal sådant att $1 \leq n \leq m$. Med n gånger upprepad partiell integration finner vi att

$$I(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{x^k} + \varepsilon_n(x)$$

där a_k är som definierat ovan och

$$\varepsilon_n = \left(\frac{i}{x}\right)^n \int_a^b e^{ixt} q^{n+1}(t) dt.$$

Att $\varepsilon_n(x) = O(1/x^{n+1})$ för alla $1 \leq n < m$ och att $\varepsilon_m(x) = o(1/x^m)$ följer direkt av sats 3.1 och sats 3.3 tillämpat på ovanstående integral. ∎

Kommentar. Om $q(t) \in C^\infty[a, b]$ kan vi med precis samma argument härleda en oändlig asymptotisk serie för $I(x)$.

Vi kan även generalisera dessa satser till att inkludera de fall då $a = -\infty$ och $b = +\infty$.

Sats 3.5. *Låt a vara ett ändligt tal, $q(t) \in \mathcal{C}^1[a, +\infty)$ och*

$$\lim_{t \to +\infty} q(t) \to 0.$$

Vidare antag att

$$I(x) = \int_a^{+\infty} e^{ixt} q(t) dt$$

samt

$$J(x) = \int_a^{+\infty} e^{ixt} q'(t) dt.$$

är konvergenta och $J(x)$ dessutom likformigt konvergent. Då gäller det att

$$I(x) = O(1/x) \quad (x \to +\infty).$$

Bevis. Med partiell integration finner vi att

$$I(x) = e^{ixa} q(a) \frac{i}{x} + \frac{i}{x} \int_a^{+\infty} e^{ixt} q'(t) dt.$$

Den första termen är uppenbarligen $O(1/x)$ och för att se att den andra termen också är det använder vi sats 3.2. ∎

Kommentar. I Olver [7] ges ett bevis av ovanstående sats med den extra premissen att $I(x)$ är likformigt konvergent men samtidigt utan premissen att $q(t) \to 0$ då $t \to +\infty$. Olver börjar beviset med att bevisa att $q(t) \to 0$ då $t \to +\infty$. I hans bevis så verkar det dock finnas ett fel. Eftersom Olver i allmänhet är väldigt sparsam med detaljerna är det lite oklart om han bara har valt en liten olycklig formulering eller om det faktiskt föreligger ett riktigt fel. Vid en närmare analys av resultatet så verkar det orimligt att $q(t)$ *inte* går mot 0 då $t \to +\infty$, men samtidigt verkar det ganska bökigt att visa att det nödvändigtvis måste vara fallet. Eftersom $q(t) \to 0$ i $t \to +\infty$ i sats 3.5 ofta är lätt att verifiera i praktiska tillämpningar så borde inte vårt antagande i sats 3.5 vålla några större besvär.

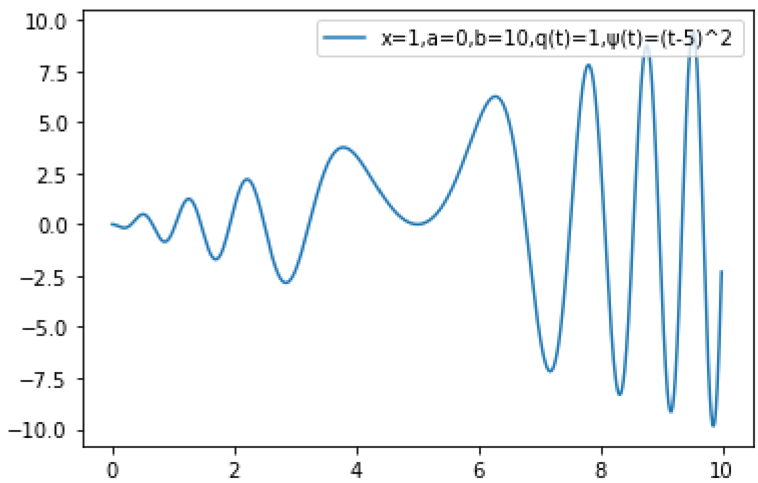
Genom en liknande argumentation som i sats 3.5 kan man (med lämpliga antaganden) generalisera sats 3.4 till de fall då $b = +\infty$.

3.2 Generaliserade Fourierintegraler

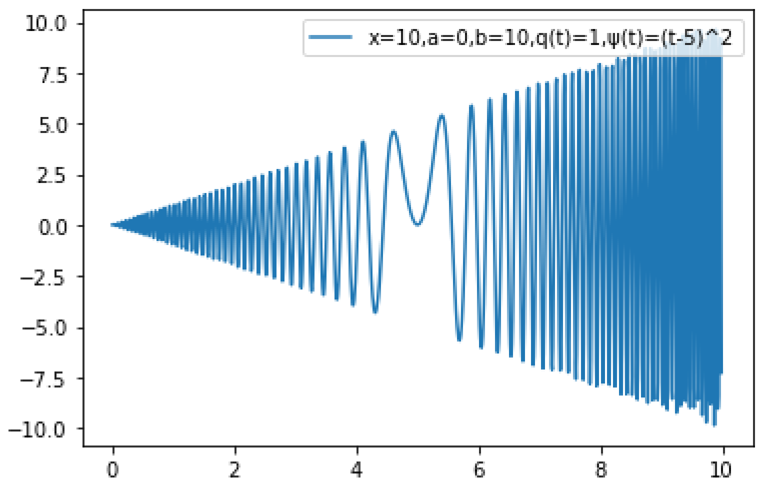
En integral av typen

$$I(x) = \int_a^b e^{ix\psi(t)} q(t)dt$$

där $\psi(t)$ är en reellvärd funktion oberoende av parametern x kallas för en *generaliserad Fourierintegral*. Genom variabelsubstitutionen $s := \psi(t)$ reduceras den generaliserade Fourierintegralen till en vanlig Fourierintegral. Av detta skäl kan man ofta enkelt hitta asymptotiska utvecklingar av generaliserade Fourierintegraler med hjälp av föregående tekniker. Problem uppstår då sambandet $\psi(t) = s$ är svårt att invertera eller om $\psi'(t) = 0$ för någon punkt $t \in [a, b]$. Det första problemet är av en mer praktisk karaktär medan det senare problemet är mer fundamentalt. Av denna anledning kommer vi därför fokusera på de generaliserade Fourierintegraler där $\psi'(t)$ har nollställen på integrationsintervallet. För att förstå vilka problem som uppstår betraktar vi ett exempel.



Figur 3.6: Integrand till inkomplett generaliserad Fourierintegral



Figur 3.7: Integrand till inkomplett generaliserad Fourierintegral

Figur 3.6 och 3.7 visar integranden till den inkompletta generaliserade Fourierintegral

$$\int_a^b \sin\big[x\psi(t)\big]q(t)dt$$

där $a = 0$, $b = 10$, $q(t) = 1$, $\psi(t) = (t-5)^2$ då $x = 1$ respektive $x = 10$. Likt i avsnitt 3.1 kan vi observera en kancellering på stora delar av integrationsintervallet. Vi kan även notera att kancelleringen ökar i takt med att x ökar. En skillnad från tidigare fall är att vi nu utöver ändpunkterna a och b dessutom har en tredje kritisk punkt $c = 5$ där vi inte kan observera någon omfattande kancellering. Låt oss försöka förstå varför det blir så. Givet en punkt $c \in [a, b]$ kan vi lokalt i någon omgivning till $t = c$ approximera

$$\psi(t) \approx \psi(c) + \psi'(c)(t-c) \tag{7}$$

samt

$$\sin\big[x\psi(t)\big] \approx \sin\big[x\psi(c) + x\psi'(c)(t-c)\big]. \tag{8}$$

Givet att $\psi'(c) \neq 0$ är funktionen

$$\sin\big[x\psi(c) + x\psi'(c)(t-c)\big]$$

en vanlig sinunsfunktion med en period av storleksordning $1/x$, och av detta skäl kommer integranden till den generaliserade Fourierintegralen lokalt i en omgivning till punkten $t = c$ att bete sig som integranden till en vanlig Fourierintegral. Detta förklarar varför vi i en omgivning till en sådan punkt får en stor kancellering. Speciellt verkar det antyda att givet att $\psi'(a), \psi'(b) \neq 0$ så kommer tillskottet till integranden från ändpunkterna (vilket inte direkt försvinner av kancelleringsskäl på grund av asymmetri) vara av storleksordning $1/x$. Givet att $\psi'(t)$ är en kontinuerlig funktion kan vi bevisa att så är fallet eftersom vi lokalt i en omgivning till punkten $t = c$ kan göra variabelbytet $s := \psi(t)$ och sedan använda metoderna från avsnitt 3.1. Detta hade dock bara fungerat om $\psi'(c) \neq 0$. Om $\psi'(c) = 0$ så ser vi att något intressant händer i vår approximation (8). I en sådan punkt hade approximationen nämligen kunnat förenklas till

$$\sin\big[x\psi(t)\big] \approx \sin\big[x\psi(c)\big].$$

Eftersom argumentet till sinusfunktionen är konstant kommer det då inte uppstå någon kancelleringseffekt alls. I detta fall är ju argumentet i $\sin(x\phi(t))$ antagligen inte riktigt konstant, och därför känns

$$\psi(t) \approx \psi(c) + \psi'(c)(t-c) + \psi''(c)(t-c)^2/2! \overset{\psi'(c)=0}{=} \psi(c) + \psi''(c)(t-c)^2/2!.$$

som en mer realistisk approximation av argumentet än (7). Med denna approximation blir inte argumentet konstant, men eftersom $(t-c)^2 = o(t-c)$ då $t \to c$ så kommer argumentet att lokalt variera långsammare än i de punkter då förstaderivatan är nollskild. Detta betyder att vi får mindre kancellering. Speciellt kan det låta rimligt att tillskott till integralen från en omgivning till en sådan punkt är av storleksordning $1/x$ i variabeln $s = (t-c)^2$, och därmed av storlseksordning $1/\sqrt{x}$ i variabeln t. Mer allmänt om $t = c$ är en stationär punkt till $\psi(t)$ av ordning $n \geq 2$ kan det tyckas rimligt att det lokala asymptotiska tillskottet till integranden från en liten omgivning till c är av storleksordning $1/\sqrt[n]{x}$. Mycket riktigt kan man visa att så är fallet. För att visa det använder man sig av en metod som kallas för Kelvin-Stokes metod. Metoden används för att hitta asymptotiska utvecklingar av generaliserade Fourierintegraler med stationära punkter i argumentet $\psi(t)$ och utvecklades av Lord Kelvin (1824-1907) och Stokes (1819-1903) [9]. Ibland kallas metoden för metoden av konstant fas (namnet syftar på förekomsten av punkter där $\psi'(c) = 0$). Idén bakom metoden är att för att hitta det ledande asymptotiska beteendet hos en generaliserad Fourierintegral så räcker det med att studera den stationära punkten till $\psi(t)$ som är av störst ordning eftersom övriga delar på integrationsintervallet ger asymptotiskt subdominanta bidrag till integralen. Likt i avsnitt 2.5 ger vi inget bevis av någon sats, utan nöjer oss med ett heuristiskt argument. Antag att $\psi'(t)$ har precis ett nollställe på intervallet $[a, b]$, säg i punkten $c \in (a, b)$. Vidare antag att $\psi''(c) > 0$ (fallet $\psi''(c) < 0$ behandlas med liknande metoder). Vi delar upp integrationsintervallet som

$$\int_a^b e^{ix\psi(t)} q(t)dt = \int_a^{c-\delta} e^{ix\psi(t)} q(t)dt + \int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{ix\psi(t)} q(t)dt + \int_{c+\delta}^b e^{ix\psi(t)} q(t)dt$$

för något litet tal $\delta > 0$. Eftersom $\psi'(t) \neq 0$ på $[a, c-\delta]$ och $[c+\delta, b]$ så är svansarna av storleksordning $1/x$. Den mellersta integralen kommer dock visa sig vara av storleksordning $1/\sqrt{x}$. Eftersom $1/x$ är subdominant med avseende på $1/\sqrt{x}$ kan vi försumma svansarna och enbart betrakta integralen

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{ix\psi(t)}q(t)dt$$

för att hitta det ledande asymptotiska beteendet hos $I(x)$. Genom att välja δ tillräckligt litet kan vi approximera

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{ix\psi(t)}q(t)dt \approx \int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{ix[\psi(c)+\psi''(c)(t-c)^2/2!]}q(c)dt.$$

Notera att vi approximerar både $\psi(t)$ och $q(t)$. Svansarna till ovanstående integral är av ordning $1/x$ och därför kan vi lägga till dem utan att det påverkar det ledande asymptotiska beteendet. Vi finner då att

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{ix[\psi(c)+\psi''(c)(t-c)^2/2!]}q(c)dt \approx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix[\psi(c)+\psi''(c)(t-c)^2/2!]}q(c)dt$$

och med variabelbytet $s := \sqrt{x\psi''(c)/2}(t-c)$ övergår integralen till

$$\frac{e^{ix\psi(c)}q(c)}{\sqrt{x\psi''(c)/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{is^2}ds.$$

Ovanstående integral kan explicit beräknas. Det går att visa att

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{is^2}ds = e^{i\pi/4}\sqrt{\pi}.$$

Med detta så ser vi att vi har troliggjort att

$$I(x) \sim \frac{e^{i\pi/4}\sqrt{\pi}e^{ix\psi(c)}q(c)}{\sqrt{x\psi''(c)/2}} \quad (x \to +\infty). \tag{9}$$

Ovanstående heuristiska argument är taget från Olver [7]. Här kan noteras att vi i princip har använt oss av samma metod som i härledningen av formel (4) i avsnitt 2.5. I Olver ges även ett rigoröst bevis av satsen (även om Olver i sedvanlig ordning är mycket sparsam med detaljerna). I Bender & Orszag ges ett heuristiskt argument i stil med det som fördes ovan [4].

Kelvin-Stokes metod ger den ledande asymptotiska termen för $I(x)$, men den allmänna uppfattningen inom teorin för asymptotiska metoder är att den inte är bra för så mycket mer än så. Till skillnad från Laplaces metod så brukar man inte försöka generalisera Kelvin-Stokes metod för att hitta fullständiga asymptotisk utvecklingar. För att förstå varför kontrasterar vi Kelvin-Stokes metod med Laplaces metod. Antag att $\psi(t)$ och $\phi(t)$ har en stationär punkt respektive ett globalt maximum, båda av ordning 2, i punkten $c \in (a,b)$. I båda metoder hade det första steget i härledningen av en asymptotisk beskrivning av integralerna varit uppdelningarna

$$\int_a^b e^{x\phi(t)}q(t)dt = \int_a^{c-\delta} e^{x\phi(t)}q(t)dt + \int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{x\phi(t)}q(t)dt + \int_{c+\delta}^{b} e^{x\phi(t)}q(t)dt$$

och

$$\int_a^b e^{ix\psi(t)}q(t)dt = \int_a^{c-\delta} e^{ix\psi(t)}q(t)dt + \int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{ix\psi(t)}q(t)dt + \int_{c+\delta}^{b} e^{ix\psi(t)}q(t)dt.$$

För att hitta asymptotiska utvecklingar av Laplaceintegralen och Fourierintegralen hade vi därefter förkastat högersvansarna och vänstersvansarna och fokuserat på dem mellersta integralerna. I Laplaces metod motiverade vi uppdelningen med att svansarna är exponentiellt små i förhållande till den mellersta integralen eftersom $\psi(c)$ var ett globalt maximum. I Fourierintegralen motiverade vi uppdelningen med att svansarna är av storleksordning $O(1/x)$ medan den mellersta är $O(1/\sqrt{x})$. Här föreligger det en markant skillnad. I Laplaces metod försummar vi exponentiellt små termer, medan i Kelvin-Stokes metod försummar vi algebraiska termer. De exponentiellt små termerna är asymptotiskt obetydliga och kommer därför inte ha någon påverkan på en asymptotisk utveckling av Laplaceintegralen, men de algebraiska termer kommer att ha en påverkan på den asymptotiska utvecklingen av Fourierintegralen. För att hitta en fullständig asymptotisk beskrivning av Laplaceintegralen räcker det därför med att enbart studera integralen

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} e^{x\phi(t)}q(t)dt.$$

Om vi ska hitta fler termer i en asymptotisk utveckling av den generaliserade Fourierintegralen så behöver vi dock även studera svansarna

$$\int_a^{c-\delta} e^{ix\psi(t)}q(t)dt + \int_{c+\delta}^{b} e^{ix\psi(t)}q(t)dt$$

eftersom bägge integraler kommer att ge ett tillskott till en fullständig asymptotisk utveckling (båda integraler är av storleksordning $O(1/x)$). Detta gör det svårt att formulera en allmän Kelvin-Stokes metod. Vidare föreligger det även en annan markant skillnad mellan de två metoderna. Om vi istället för en enskild extrempunkt c istället hade n stycken extrempunkter $\{c_k\}$ där $a < c_1 < c_2 < c_3 < ... < c_n < b$ hade Laplaces metod inte blivit svårare medan Kelvin-Stokes hade blivit mycket mödosam. Om det för något c_k gäller att $\phi(c_k)$ är ett globalt maximum hade den fullständiga asymptotiska utvecklingen av Laplaceintegralen fortfarande kunnat härledas från en enda integral,

$$\int_{c_k-\delta_k}^{c_k+\delta_k} e^{xt\phi(t)}q(t)dt,$$

eftersom alla andra integraler fortfarande hade varit exponentiellt små i förhållande till ovanstående integral. I fallet med en Fourierintegral hade vi dock likt tidigare behövt betrakta svansarna

$$\int_a^{c_1-\delta_1} e^{xt\phi(t)}q(t)dt + \int_{c_n+\delta_n}^{b} e^{xt\phi(t)}q(t)dt$$

men även samtliga integraler

$$\int_{c_i-\delta_i}^{c_i+\delta_i} e^{xt\phi(t)}q(t)dt$$

för alla $1 \leq i \leq n$. Då integralerna ger algebraiska bidrag till den totala integralen finns det ingen integral som vi kan försumma när vi söker en fullständig asymptotisk utveckling. Anledningen till dessa skillnader mellan Laplaces metod och Kelvin-Stokes metod är skillnaderna mellan generaliserade Laplaceintegraler och generaliserade Fourierintegraler. Laplaceintegraler är asymptotiskt formade som en kulle med en skarp topp medan Fourierintegralerna är en våg. För att hitta en fullständig asymptotisk beskrivning av en Laplaceintegral räcker det därför med att enbart göra lokala undersökningar vid toppen av kullen, emedan man för Fourierintegraler måste beakta hela integrationsintervallet med alla dess kritiska punkter. Istället för att försöka generalisera Kelvin-Stokes metod för att hitta flera asymptotiska termer så använder man sig därför istället av en mycket kraftfullare metod som bygger på att omvandla Fourierintegraler till Laplaceintegraler och därefter använda Laplaces metod. Detta är faktiskt mer eller mindre vad vi gjorde i härledningen av (9), bara på ett väldigt ineffektivt sätt.

4 Blandade integraler

4.1 Riemanns metod

I detta avsnitt kommer vi betrakta integraler av typen

$$I(x) = \int_a^b e^{\xi(t)}q(t)dt$$

där $\xi(t) = \phi(t) + i\psi(t)$ är någon analytisk komplexvärd funktion med realdel $\phi(t)$ och imaginärdel $\psi(t)$. Specialfallen $\psi(t) = 0$ och $\phi(t) = 0$ motsvarar generaliserade Laplaceintegraler respektive generaliserade Fourierintegraler. Metoden för att hitta asymptotiska utvecklingar av dessa illustreras bäst med konkreta exempel. Vi betraktar Fourierintegralen

$$I(x) = \int_0^1 \ln(t)e^{ixt}dt.$$

Denna integral existerar eftersom integralen är absolutkonvergent då

$$\int_0^1 \left| \ln(t)e^{ixt} \right| dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 -\ln(t)dt = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[1 + \varepsilon - \varepsilon \ln(\varepsilon)\right] = 1.$$

Integralen är en vanlig Fourierintegral och därför kan vi inte använda oss av Kelvin-Stokes metod. För att hitta en asymptotisk utveckling av $I(x)$ hade vi därför velat använda sats 3.4. Detta kan vi dock inte göra eftersom förutsättningarna för satsen inte är uppfyllda. Om vi ändå formellt försöker använda satsen får vi bland annat uttrycket $\ln(0)$ i den första koefficienten i den asymptotiska serien. För att hitta en asymptotisk utveckling av $I(x)$ börjar vi istället med att identifiera vår integral med en konturintegral i det komplexa talplanet. Vi kan identifierar $I(x)$ med konturintegralen

$$I(x) = \int_\Gamma \ln(w)e^{ixw}dw.$$

där $w = t + is$ för $t, s \in \mathbb{R}$ och konturen Γ är linjesegmentet på reella t-axeln från punkten 0 till 1. Integranden är en analytisk funktion, och därför kan vi göra kontinuerliga deformationer av konturen utan att ändra värdet på integralen (i detta fall finns det en liten teknikalitet då integranden inte är analytisk i ändpunkten $w = 0$, men vi förbiser denna detalj och fokuserar på det mer väsentliga i exemplet). Vidare observerar vi att integralen av $\ln(w)e^{ixw}$ är en Fourierintegral längs horisontella konturer men en Laplace-integral längs vertikala konturer. Av detta skäl gör vi en kontinuerlig deformation av Γ. Istället för att integrera längs reella t-axeln från 0 till 1 integrerar vi istället först det vertikala segmentet $\Gamma_1(R)$ från 0 till iR längs imaginära s-axeln, sedan det horisontella segmentet $\Gamma_2(R)$ från iR till $1+iR$, och sist det vertikala segmentet $\Gamma_3(R)$ från $1 + iR$ ner till 1. Här är $R > 0$ något reellt tal som vi än så länge låter vara opreciserat. Vi ser då att

$$I(x) = \int_{\Gamma'(R)} \ln(w)e^{ixw}dw$$

där $\Gamma'(R) = \Gamma_1(R) + \Gamma_2(R) + \Gamma_3(R)$. Integralerna

$$\int_{\Gamma_1(R)} \ln(w)e^{ixw}dw$$

och

$$\int_{\Gamma_3(R)} \ln(w)e^{ixw}dw$$

är vanliga Laplaceintegraler som vi “enkelt”kan hitta asymptotiska utvecklingar av. Tyvärr har vi dock också linjesegmentet $\Gamma_2(R)$ mellan punkterna $(0, iR)$ och $(1, iR)$ att integrera över. Över denna kontur är vår integral återigen en Fourierintegral, så det ser ut som om vi inte har vunnit någon mark, och oavsett vilket värde på R som vi än väljer måste vi alltid ha ett sådant horisontellt linjesegment som förbinder våra vertikala linjer $\Gamma_1(R)$ och $\Gamma_3(R)$. Vi låter därför $R \to +\infty$. En parameterisering av $\Gamma_2(R)$ är $w = t + iR$ där $0 \leq t \leq 1$, och eftersom

$$|\ln(t+iR)e^{ix(t+iR)}| = |\ln(t+iR)e^{ixt}e^{-xR}| \to 0$$

då $R \to +\infty$ för alla $x > 0$ samt då längden av $\Gamma_2(R)$ är konstant 1 ser vi att

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_2(R)} \ln(w)e^{ixw}dw = 0.$$

Detta visar att

$$I(x) = \int_{\Gamma_1+\Gamma_3} \ln(w)e^{ixw}dw = \int_{\Gamma_1} \ln(w)e^{ixw}dw + \int_{\Gamma_3} \ln(w)e^{ixw}dw$$

där Γ_1 och Γ_3 är de vertikala segmenten från 0 till ∞ och från ∞ till 1 som erhålls genom att låta $R \to +\infty$ i $\Gamma_1(R)$ och $\Gamma_3(R)$. Båda av de resulterande integralerna över dessa konturer är Laplaceintegraler. För integralen längs Γ_2 kan man använda sig av Watsons lemma, och integralen längs Γ_1 kan explicit beräknas med hjälp av en lustig identitet. Det går att visa att

$$I(x) \sim -\frac{i\ln(x)}{x} - \frac{i\gamma + \pi/2}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^n(n-1)!}{x^{n+1}} \quad (x \to +\infty)$$

där $\gamma \approx 0.5571$ är Eulers konstant. De två första termerna är det explicita värdet på integralen längs Γ_1. Se Bender & Orszag s.282 [4] för alla detaljer.

Ovanstående procedur är en mycket kraftfull och användbar metod inom asymptotisk analys. Metoden har många namn och kallas ibland för metoden av fortast nedflyttning eller för sadelpunktsmetoden. Metoden användes först av Riemann (1826-1866) [9] och vi kommer därför i denna text referera till metoden som Riemanns metod. Riemanns metod bygger på att studera argumentet

$$\xi(t) = \phi(t) + i\psi(t)$$

till exponentialfunktionen i integranden och hitta nivåkurvorna till imaginärdelen $\psi(t)$. På en nivåkurva $\psi(t) = C$ så ser vi att $\xi(t) = \phi(t) + iC$, vilket innebär att en integral på nivåkurvan reduceras till en Laplaceintegral. För att hitta en asymptotisk utveckling av en integral av typen

$$I(x) = \int_a^b e^{\xi(t)}q(t)dt$$

kan vi därför kontinuerligt deformera linjesegmentet Γ mellan a och b till en kontur $\Gamma' = \Gamma_a + \Gamma_c + \Gamma_b$, där Γ_a och Γ_b är ett avsnitt av de nivåkurvor till imaginärdelen $\psi(t)$ som passerar genom punkterna a och b. I de flesta fall gäller det att $\psi(a) \neq \psi(b)$, varpå vi finner att vi måste inkludera någon kurva Γ_c som binder samman Γ_a och Γ_b. I några fall behövs inte en sådan om man i stil med vårt tidigare exempel kan visa att Γ_a och Γ_b möts uppe i nordpolen på Riemannsfären. Vi betraktar ett nytt exempel. Med Kelvin-Stokes metod går det att visa att

$$I(x) = \int_0^1 e^{ixt^2} dt \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} e^{i\pi/4} \quad (x \to +\infty)$$

men i diskussionen i avsnitt 3.2 såg vi att det var svårt att generalisera metoden för att hitta en fullständig asymptotisk utveckling av integralen. Vi kan dock hitta en sådan med hjälp av Riemanns metod. Vi börjar med att definiera

$$\xi(w) = i(t+is)^2 = -2ts + i(t^2 - s^2)$$

där $\phi(w) = -2ts$ och $\psi(w) = t^2 - s^2$. Sedan identifierar vi $I(x)$ med integralen

$$\int_\Gamma e^{ixt^2} dt$$

där Γ är linjesegmentet mellan 0 och 1 längs reella t-axeln. Nu söker vi nivåkurvorna till imaginärdelen $\psi(w)$. Dessa nivåkurvor ska passera genom punkten $a = 0$ respektive $b = 1$. Vi börjar med $a = 0$. Vi ser att $iw^2 = i0^2 = 0$ varpå vi finner den sökta nivåkurvan genom att lösa ekvationen $\psi(w) = t^2 - s^2 = 0$. Den enda lösningen som vi är intresserad av är lösningen $t = s$ (på kurvan som ges av $t = -s$ kommer beloppet av exponentialfunktionen att växa obegränsat och därmed kommer Laplaces metod ej fungera). På ett liknande sätt finner vi att nivåkurvan genom $b = 1$ ges av punkterna på formen $t = \sqrt{s^2+1}$ där $s \geq 0$. Vi definierar därför dem två kurvorna $\Gamma_a(R)$ och $\Gamma_b(R)$ som ges av parametiseringarna (s, s) respektive $(\sqrt{s^2+1}, s)$ där $0 \leq s \leq R$. Ändpunkterna till dessa två konturer är dels punkterna $a = 0$ och $b = 1$ och dels punkterna (R, R) och $(\sqrt{R^2+1}, R)$. Vi sammanfogar dem två kurvorna med hjälp av det horisontella linjesegmentet $\Gamma_c(R)$ mellan (R, R) och $(\sqrt{R^2+1}, R)$, vilket kan parameteriseras som $((\sqrt{R^2+1} - R)t + R, R)$ där $0 \leq t \leq 1$. Om vi nu definierar $\Gamma'(R) = \Gamma_a(R) + \Gamma_c(R) - \Gamma_b(R)$ (notera orienteringen) ser vi att

$$I(x) = \int_{\Gamma'(R)} e^{iw^2} dw.$$

För att bli kvitt det horisontella segmentet $\Gamma_c(R)$ låter vi $R \to +\infty$. Beloppet av integranden längs $\Gamma_c(R)$ är begränsat och då

$$\sqrt{R^2+1} - R = \sqrt{R^2+1} - \sqrt{R^2} = \frac{1}{\sqrt{R^2+1} + \sqrt{R}}$$

ser vi att längden av $\Gamma_c(R)$ går mot 0 då $R \to +\infty$. Detta visar att

$$I(x) = \int_{\Gamma_a - \Gamma_b} e^{ixw^2} dw$$

där Γ_a och Γ_b är konturerna som ges av parameteriseringen (s, s) respektive $(\sqrt{s^2+1}, s)$ där $0 \leq s < +\infty$. Vi tar nu och hittar asymptotiska utvecklingar av dem generaliserade Laplaceintegralerna

$$I_a(x) = \int_{\Gamma_a} e^{ixw^2} dw$$

och

$$I_b(x) = \int_{-\Gamma_b} e^{ixw^2} dw.$$

Med vår parameterisering finner vi att

$$I_a(x) = \int_0^{+\infty} e^{-2xs^2}(1+i)ds = (1+i)\int_0^{+\infty} e^{-2xs^2} ds.$$

Denna integral kan explicit beräknas. Med en kontinuerlig deformation av integralen kan man byta integrationskonturen som går från $w = 0$ till $w = \infty$ längs reella axeln till imaginära axeln (jämför med lemma 12.1 i Olver **??**). Om man gör det övergår integralen till en Gaussisk integral vilket kan användas för att visa att

$$I_a(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} e^{i\pi/4}.$$

För att hitta den asymptotiska utvecklingen av $I_b(x)$ noterar vi att på konturen Γ_b gäller det att $\phi(t) = 2s\sqrt{s^2+1}$. Av detta skäl gör vi därför variabelbytet $u = 2s\sqrt{s^2+1}$ varpå $-I_b(x)$ övergår till Laplaceintegralen

$$\frac{e^{ix}}{2}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xu}}{\sqrt{1+iu}} du.$$

Taylorutvecklingen

$$\frac{1}{1+iu} = \sum_{n=0}^{\infty} (-iu)^n \frac{\Gamma(n+1/2)}{n!\Gamma(1/2)}$$

är enligt sats 1.1 en asymptotisk utveckling av $q(t)$ i punkten $t = 0$. Med Watsons lemma finner vi då att

$$I_b(x) \sim \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)x^{n+1}} \quad (x \to +\infty).$$

Eftersom asymptotiska serier kan adderas termvis enligt sats 1.4 ser vi att

$$I(x) = I_a(x) + I_b(x) \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}} e^{i\pi/4} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-i)^n \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2) x^{n+1}} \quad (x \to +\infty).$$

Notera att vi har ett minustecken framför serien på grund av orienteringen hos Γ_b.

Riemanns metod kan användas för att hitta asymptotiska utvecklingar av många integraler. Allmänt används metoden för att hitta asymptotiska utvecklingar av integraler på formen

$$\int_\Gamma e^{x\xi(w)} q(w) dw$$

där Γ är en kontur i komplexa talplanet och $\xi(w)$ och $q(w)$ är analytiska funktioner (så att man kan deformera konturer). Metoden kan exempelvis användas för att överföra många bökiga Fourierintegraler till Laplaceintegraler. Exempel 3 på sida 283 i Bender & Orszag [4] är ett intressant exempel. Där betraktar de den generaliserade Fourierintegralen

$$\int_0^1 \exp(ixe^{-1/t}) dt.$$

Detta är ett intressant exempel då funktionen $\psi(t) = e^{1/t}$ har en stationär punkt av oändlig ordning i $t = 0$. I avsnitt 3 fann vi med Kelvin-Stokes metod att den ledande termen i en asymptotisk utveckling var av ordning $1/\sqrt[n]{x}$ där $n \geq 1$ är det minsta heltal sådant att $\psi^{(n)}(0) \neq 0$. Denna metod fungerar alltså inte i detta fall, och istället visar det sig att integralen är av storleksordning $1/\ln(x)$.

Att i praktiken behärska Riemanns metod är svårt och det verkar inte finnas något tak för hur krångliga och tekniska beräkningarna kan bli. Det verkar vara fördelaktigt att ha goda kunskaper om analytiska funktioner, speciella funktioner och många obskyra integralidentiteter. Det verkar inte finnas någon allmän regel för hur man ska deformera konturintegralen, utan N.G de Bruijn beskriver hur valet ofta bara beror på ens personliga smak som matematiker. [3]

Referenser

[1] A.Gut. *An Intermediate Course in Probability.* Springer-Verlag New York Inc., 2009.

[2] Paulino C.Daniel P.Müller A.Turkman, M.Antónia. *Computational Bayesian Statistics.* Cambridge University Press, 2019.

[3] N.G.de Bruijn. *Asymptotic Methods in Analysis.* Dover Publications, 2010.

[4] S.A.Orszag C.M.Bender. *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers.* Springer-Verlag New York Inc., 2010.

[5] E.T.Copson. *Asymptotic expansions.* Cambridge University Press, 1965.

[6] F.Bach. Approximating integrals with laplace's method, 2024-05-20. https://francisbach.com/laplace-method/.

[7] F.W.J.Olver. *Asymptotics and Special Functions.* Academic Press Inc, 1974.

[8] H.M.Edwards. *Riemann's Zeta Function.* Dover Publications, 2001.

[9] J.D.Murray. *Asymptotic Analysis.* Springer-Verlag New York Inc., 1984.

[10] Donald Marshell. *Complex Analysis.* Cambridge University Press, 2019.

[11] J.Brüning W.Ahrens. *Scherz und Ernst in der Mathematik.* Georg Olms Verlag, 2002.