SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Mönster bland primtalen: en introduktion till Riemanns zetafunktion

av

Jens Nordström

2024 - No K16

Mönster bland primtalen: en introduktion till Riemanns zetafunktion

Jens Nordström

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Olof Sisask

2024

Sammanfattning

Denna uppsats undersöker ett av de viktigaste resultaten inom analytisk talteori, primtalssatsen, som är ett resultat angående primtalens fördelning. Uppsatsen inleds med en kort introduktion till primtal och det historiska studiet av dessa innan vi presenterar dess viktigaste resultat, primtalssatsen. Den huvudsakliga delen av uppsatsen består av ett utförligt bevis av denna sats, och för detta bevis behöver vi först presentera ett antal grundläggande resultat om aritmetiska funktioner och Riemanns zetafunktion. Uppsatsen avslutas med en introduktion till den ännu obevisade Riemannhypotesen och dess konsekvenser för primtalens fördelning.

Abstract

This thesis explores one of the most important results in the field of analytic number theory, namely the prime number theorem, which is a result regarding the distribution of the prime numbers. The thesis begins with an introduction to prime numbers and the historical study of these before we state the main result of this very inquiry, the prime number theorem. The main section of the thesis consists of a comprehensive proof of this theorem, and for this proof we first need to state a number of basic results about arithmetic functions and the Riemann zeta function. The thesis concludes with an introduction to the, to this day unsolved, problem of the Riemann hypothesis and its consequences for the distribution of the prime numbers.

Tack till...

...min handledare Olof Sisask som föreslog ämnet och som med sin detaljnoggrannhet, uppmuntran och inte minst enorma sakkunnighet gjorde denna uppsats möjlig. Stort tack även till min älskade flickvän som har fått stå ut med många sena kvällar och som med sin uppmuntran och obevekliga tro på mig har fått mig igenom besvärliga stunder under arbetets gång.

Innehåll

1 Inledning

Primtalen är ett fundamentalt objekt i matematiken som har studerats sedan urminnes tider. Att det finns oändligt många primtal är känt för de flesta och det kan också enkelt bevisas, men den som har studerat en tabell över primtalen har nog lagt märke till att dem blir färre och färre ju längre ner man kommer. Matematiker kämpade länge med att försöka hitta en approximerande formel för primtalens distribution och detta gav frukt när det resultat som kom att kallas för primtalssatsen först formulerades i mitten av 1800-talet och senare bevisades i slutet av detsamma. Primtalssatsen etablerar att antalet primtal mindre än eller lika med något tal x är approximativt lika med $x/\ln x$ för stora x, och det är denna sats som är huvudämnet i uppsatsen. Kapitel 2 ägnas åt grundläggande bakgrundsteori om primtal, samt en formulering av primtalssatsen och en kort redogörelse för den historiska utvecklingen av primtalsstudier, vilken även syftar till att introducera några av de koncept som förekommer i de senare kapitlen. Stoffet i kapitel 2 kommer huvudsakligen från [1]. Kapitel 3 ger en introduktion till ett antal för primtalssatsens bevis viktiga koncept. Ett av dessa är Riemanns zetafunktion $\zeta(s)$ som dyker upp frekvent i denna uppsats. Vi kommer konsekvent att använda notationen $s = \sigma + it$ för den komplexa variabeln i $\zeta(s)$ och andra funktioner definierade för komplexa tal, vilket åtminstone för $\zeta(s)$ är etablerad notation ända sedan Bernhard Riemann själv studerade zetafunktionen. Således kommer vid varje givet tillfälle σ beteckna realdelen av det komplexa talet s och t beteckna imaginärdelen till detsamma. Värt att nämna här är även att vi kommer använda begreppen "holomorf" och "analytisk", i kontexten av komplexvärda funktioner, synonymt. Begreppen åsyftar egentligen separata egenskaper hos komplexa funktioner men en viktig sats inom den komplexa analysen visar att en funktion är holomorf precis då den är analytisk, så behandlingen av dessa termer som synonymer är befogat. Innehållet i kapitel 3 är taget huvudsakligen från [1], [8], och [5]. Kapitel 4 består av ett bevis av primtalssatsen, och är på grund av bevisets längd uppdelat i delavsnitt för bättre översikt och enklare navigering. Strukturen på beviset kommer från [1]. Det sista kapitlet 5 introducerar ett av matematikens kändaste olösta problem, Riemannhypotesen, och visar lite kort vilka implikationer som finns för primtalssatsen. Innehållet i detta kapitel härrör till största del från [1] samt [6]. Utöver detta har ett antal andra källor använts för enskilda satser och bevis, och i dessa fall är källorna tydligt refererade till i texten.

2 Primtal och primtalsräkning

2.1 Vad är primtal?

Då denna uppsats kommer handla om primtalssatsen är det naturligtvis mycket viktigt att vi har en grundlig förståelse för satsens subjekt, primtalen.

Definition 2.1. Ett positivt heltal $n > 1$ är ett primtal om n endast delas av 1 och sig självt. Vi betecknar ofta primtal med p.

Talteorin är en gren av matematiken som studerar funktioner av, samband mellan, och egenskaper hos heltal. Ett fundamentalt och mycket viktigt resultat inom detta område är aritmetikens fundamentalsats.

Sats 2.2 (Aritmetikens fundamentalsats)**.** Varje heltal tal $n \geq 2$ kan skrivas som en produkt av primtal på ett (upp till ordning) unikt sätt.

Vi kan alltså betrakta primtalen som en sorts byggsten för heltalen, och att studera heltalen kan därmed i princip reduceras till att studera primtalen. Det är av denna anledning som primtalen är av sådan enorm betydelse inom talteorin. Beviset för aritmetikens fundamentalsats kommer nu.

Bevis av Sats 2.2. Satsen bevisas i två delar, vi visar först att varje heltal, större än 1, kan skrivas som en produkt av primtal, och sedan visar vi att denna produkt är unik, upp till primtalens inbördes ordning. Det första påståendet visas med stark induktion. Talet 2 är ett primtal, och kan således skrivas som en produkt av primtal på ett trivialt sätt. Antag att påståendet gäller för varje heltal k sådant att $2 \leq k \leq n-1$ för något heltal n. Om talet n är ett primtal gäller samma sak som för 2, och påståendet är sant för n. Om n inte är ett primtal kan vi skriva $n = ab$ där a och b är heltal större än 1 men mindre än n. Enligt antagandet gäller därför att $a = p_1p_2 \cdots p_j$ och $b = q_1q_2 \cdots q_k$ kan skrivas som en produkt av primtal och därmed gäller att också $n = p_1p_2 \cdots p_jq_1q_2 \cdots q_k$ kan skrivas som en produkt av primtal. Alltså gäller påståendet för n oavsett om n är ett primtal eller inte, så enligt principen om stark induktion gäller att varje heltal större än 1 kan skrivas som en produkt av primtal.

Vi visar nu att primtalsfaktoriseringen för varje heltal är unik. Antag, för att nå en motsägelse, att det existerar tal för vilka det finns två olika sätt att skriva dem som en produkt av primtal. Låt n vara det minsta sådana talet och skriv $n = p_1p_2 \cdots p_j = q_1q_2 \cdots q_k$, där samtliga p_i, q_i är primtal. Vi erinrar oss Euklides lemma, som säger att närhelst ett primtal delar en produkt måste primtalet dela minst en av faktorerna. Eftersom talet p_1 är en faktor i mittenledet måste det dela högerledet, och eftersom p_1 är ett primtal måste det således dela något av talen q_i. Antag utan inskränkning att $p_1|q_1$. Eftersom q_1 är ett primtal och $p > 1$ måste gälla att $p_1 = q_1$, så vi kan stryka den gemensamma faktorn i faktorisering av n för att erhålla $p_2 \cdots p_j = q_2 \cdots q_k$, alltså ett nytt tal skrivet som två olika faktoriseringar i primtal. Detta tal måste dock vara mindre än n, eftersom det erhölls genom division med en faktor större än 1, och detta bryter mot antagandet att n var det minsta talet som kunde skrivas som två olika primtalsfaktoriseringar. Denna motsägelse visar att varje primtalsfaktorisering är unik. □

Primtalen har studerats sedan långt före Kristus tid, och att primtalen är oändligt många är känt sedan åtminstone 300 f.kr när det bevisades av den grekiske matematikern Euklides (ca. 325 f.Kr. - ca. 265 f.Kr.). En parafraserad version av hans bevis följer nedan.

Sats 2.3. Det finns oändligt många primtal.

(Euklides) Bevis. Låt $p_1, p_2, \ldots, p_n$ vara någon ändlig lista av primtal, vi ska visa att det måste finnas något primtal som inte förekommer i listan. Låt P vara produkten av primtalen i vår ändliga lista, $P = p_1 p_2 \cdots p_n$, och sätt $q = P + 1$. Talet q är antingen ett primtal eller inte. Om q är ett primtal så är satsen bevisad, ty q förekommer inte i listan. Om q inte är ett primtal så har q, enligt aritmetikens fundamentalsats, någon primtalsfaktor p. Primtalet p förekommer antingen i vår lista eller inte. Om p inte förekommer i listan är satsen bevisad. Om p förekommer i listan så är p en delare till P, ty P är produkten av samtliga tal i listan vilken p är en del av, och naturligtvis delar p sig självt. Men p delar också $q = P + 1$, så p måste även dela differensen av q och P, alltså $q - P = (P + 1) - P = 1$. Detta är en motsägelse, eftersom inget primtal delar 1. Därmed kan inte p förekomma i listan, och satsen är bevisad. □

De två satserna vi här har visat är de två viktigaste och mest grundläggande som finns gällande primtal, och de kommer otaliga gånger att användas i denna uppsats, utan att nödvändgtvis explicit refereras till.

2.2 Hur räknar vi primtal?

För att på ett smidigt sätt kunna räkna primtalen mindre än eller lika med något x införs primtalsfunktionen $\pi(x)$, som definieras enligt nedan.

Definition 2.4 (Primtalsfunktionen)**.** För $x > 0$ betecknar vi med $\pi(x)$ primtalsfunktionen som definieras enligt

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1,$$

där summan tas över samtliga primtal mindre eller lika med x.

Funktionen returnerar alltså för varje $x > 0$ antalet primtal som är mindre eller lika med x. Summan som förekommer i definitionen kan förefalla märklig för läsaren som inte är van vid denna notation. Det är underförstått att talet p som vi summerar över är ett primtal, så summan består av lika många ettor som antalet primtal mindre än eller lika med x. Summor av denna typ kommer kollas närmare på i Avsnitt 3.2. Det följer direkt av definitionerna av $\pi(x)$ och av primtal att bland annat $\pi(x) = 0$ för $x < 2$, $\pi(2) = 1$, $\pi(3) = \pi(4) = 2$, samt från Sats 2.3 att $\pi(x) \to \infty$ då $x \to \infty$. För säkerhets skull poängterar vi att beteckningen $\pi(x)$ för primtalsfunktionen inte har någonting med talet π $(= 3.141592\ldots)$ att göra.

2.3 Primtalssatsen

Vi anger nu denna uppsats huvudsakliga resultat.

Sats 2.5. Låt $\pi(x)$ beteckna primtalsfunktionen och $\ln x$ den naturliga logaritmen. Då gäller att gränsvärdet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)\ln x}{x}$$

existerar och är lika med 1. Detta skrivs oftast

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$$

med notationen som kommer introduceras i Avsnitt 3.1.

Resultatet stipulerades av både Gauss och Legendre i slutet av 1700-talet men bevisades först 1896 på varsitt håll av Hadamard och de la Vallée Poussin. Bevisen för primtalssatsen delas in i två kategorier, de analytiska och de elementära. Att ett bevis är analytiskt betyder att det, till skillnad från ett elementärt bevis, använder komplex analys och i synnerhet Riemanns zetafunktion, de första bevisen av Hadamard och de la Vallée Poussin var analytiska. Termen ”elementärt” ska i detta sammanhang inte tolkas som synonymt med enkelt, tvärtom är de elementära bevisen ofta längre och mer invecklade än de analytiska. Det första elementära beviset för primtalssatsen upptäcktes, drygt 50 år efter det första beviset, 1949 av Selberg och Erdős. En stor del av denna uppsats kommer ägnas till ett analytiskt bevis av primtalssatsen, närmare bestämt kapitel 4.

2.4 Historisk överblick över primtalsstudier

Som vi såg exempel på i Avsnitt 2.1 var primtalen välkända och studerade redan på de gamla grekernas tid. Efter Euklides dröjde det dock många år innan någon på allvar tog för sig att undersöka primtalen. Pierre de Fermat (1607-1665) stipulerade att alla tal på formen $F_n = 2^{2^n} + 1$, så kallade Fermattal, producerar primtal för $n \geq 0$, och detta stämmer för $n \leq 4$. Leonhard Euler (1707-1783) grusade dock Fermats förhoppning när han 1732 visade att $F_5 = 2^{32}+1$ är sammansatt (Fermat själv var ju dock, förstås, avliden vid det här laget och kunde inte ta del av besvikelsen). Det har även gjorts försök att hitta primtalsproducerande polynom. Uttrycket $x^2 - x + 41$ ger primtal för alla heltal $0 \leq x \leq 40$ och uttrycket $x^2 - 79x + 1601$ för $0 \leq x \leq 79$, men Christian Goldbach (1690-1764) lyckades 1752 bevisa att inget polynom i x med heltalskoefficienter kan ge primtal för varje heltalsvärde på x. William Harold Mills (1921-1964) visade 1947 att det finns ett tal A sådant att heltalsdelen av A^{3^n} ger primtal för varje $n \geq 1$. Mills lyckades inte bestämma A men han visade att det var större än 1 men inte ett heltal. Talet är fortfarande okänt, faktum är att ganska lite är känt om A, bland annat huruvida det är rationellt eller inte. Ett annat olöst problem angående primtal är Goldbachs förmodan från 1742, som stipulerar att varje jämnt tal större än eller lika med 4 kan skrivas som summan av två primtal. Satsen har genom rena (dator-)beräkningar bekräftats för alla tal upp till $4 \cdot 10^{18}$ men är alltjämt obevisad. Ytterligare ett är primtalstvillingsförmodan, som säger att det finns oändligt många par av primtal vars differens är exakt två. Denna förmodan är ett specialfall ($k = 1$) av Polignacs förmodan som säger att det, för varje k större än eller lika med 1, finns oändligt många primtal p sådana att $p + 2k$ också är ett primtal, och som formulerades 1849 av Alphonse de Polignac (1826-1863). I slutet av 1700-talet upptäckte Carl Friedrich Gauss (1777-1855) och Adrien-Marie Legendre (1752-1833) oberoende av varandra att $\pi(x)$ (se Definition 2.4) antar ungefär samma värden som uttrycket $x/\ln x$ för stora värden på x. Denna upptäckt fick senare namnet primtalssatsen (Sats 2.5), som vi redan har sett. De första bevisen av primtalssatsen publicerades av Jacques Hadamard (1865-1963) och Charles Jean de la Vallée Poussin (1866-1962), som inte endast föddes och dog nästan samtidigt utan också båda oberoende av varandra bevisade primtalssatsen nästan samtidigt, i 1896. Deras bevis utgår från metoder som togs fram av Bernhard Riemann (1826-1866) under mitten av 1850-talet. Redan 1737 hade Euler upptäckt ett sätt att relatera funktionen

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x},$$

definierad för reella $x > 1$, till primtalen (vi kollar närmare på detta i Sats 3.22). Riemann tog denna funktion och uttökade dess definitionsmängd till komplexa tal s med realdel större än 1, och visade även att funktionen genom analytisk fortsättning (se Avsnitt 3.3) kan utvidgas till en analytisk funktion i hela det komplexa talplanet, förutom punkten $s = 1$ där funktionen har en enkel pol. Funktionen som Riemann därigenom definierade kom senare att kallas för Riemanns zetafunktion, och denna kommer studeras i detalj i Avsnitt 3.4. Det var till stor del de relativt nyupptäckta egenskaperna hos denna funktion som Hadamard och de la Vallée Poussin uttnyttjade för att för första gången bevisa primtalssatsen. Några decennier dessförinnan, närmare bestämt år 1838, upptäckte Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) den så kallade logaritmiska integralfunktionen, definierad

$$\mathrm{li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}, \tag{1}$$

för positiva $x \neq 1$. Funktionen visade sig också vara en mycket god uppskattning för $\pi(x)$, faktum är att primtalssatsen är ekvivalent till att $\pi(x) \sim \mathrm{li}(x)$. Att det förhållar sig så är inte så märkligt, ty om vi partiellt integrerar (1) n gånger erhåller vi

$$\begin{aligned}
\mathrm{li}(x) &= \frac{x}{\ln x} + \frac{x}{(\ln x)^2} + \ldots + \frac{x}{(\ln x)^n} + \int_0^x \frac{n!}{(\ln t)^{n+1}} dt \\
&= \frac{x}{\ln x}\left(1 + \frac{1}{\ln x} + \ldots + \frac{1}{(\ln x)^{n-1}} + \frac{\ln x}{x}\int_0^x \frac{n!}{(\ln t)^{n+1}} dt\right)
\end{aligned}$$

vilket visar att

$$\mathrm{li}(x) \sim \frac{x}{\ln x},$$

förutsatt att integralen i högerledet är konvergent (notera att integranden har en singularitet i $t = 1$) vilket man kan visa att den är.

3 Nödvändig bakgrundsteori

I det bevis av primtalssatsen som presenteras i Kapitel 4 förekommer ett antal funktioner vilka behöver en närmare introduktion. Dessa är å ena sidan de aritmetiska funktionerna, och å andra sidan Riemanns zetafunktion och gammafunktionen. Samtliga dessa presenteras i detta kapitel. Först av allt klargör vi lite notation som förekommer frekvent i studiet av dessa speciella funktioner.

3.1 Grundläggande notation

Låt f och g vara reellvärda funktioner definierade på något intervall (a, ∞).

- Vi skriver $f(x) = O(g(x))$ om det finns någon konstant M sådan att $|f(x)| \leq Mg(x)$ antingen för alla x för vilka funktionerna är definierade eller för alla tillräckligt stora x. Vi säger att "f är stora O av g".
- Om $g(x) \neq 0$ skriver vi $f(x) = o(g(x))$ om $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 0$ och säger att "f är lilla o av g".
- Om $g(x) \neq 0$ skriver vi $f(x) \sim g(x)$ om $\lim_{x\to\infty} f(x)/g(x) = 1$ och säger att "f är asymptotisk till g".

3.2 Aritmetiska funktioner

I många delar av matematiken studeras talföljder, reell- eller komplexvärda funktioner definierade för de positiva heltalen. Inom talteorin kallas dessa för aritmetiska funktioner, och de spelar en viktig roll i studiet av primtalens distribution och inte minst i primtalssatsens olika bevis. Vi är redan bekanta med en aritmetisk funktion, nämligen primtalsfunktionen $\pi(x)$, och vi kommer i detta avsnitt introducera fler funktioner och visa några viktiga samband.

Definition 3.1 (Mangoldtfunktionen)**.** Med $\Lambda(n)$ betecknar vi Mangoldtfunktionen som för varje heltal $n \geq 1$ definieras enligt

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \ln p & \text{om } n = p^m \text{ för något primtal p och heltal } m \geq 1, \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Mangoldtfunktionen i synnerhet kommer visa sig förekomma frekvent i det bevis av primtalssatsen som presenteras senare i uppsatsen.

Definition 3.2 (Möbiusfunktionen)**.** Med $\mu(n)$ betecknar vi Möbiusfunktionen vilken för varje heltal $n \geq 1$ definieras enligt

$$\mu(n) = \begin{cases} 0 & \text{om } p^2 | n \text{ för något primtal } p, \\ 1 & \text{om } n = 1, \\ (-1)^k & \text{om } n \text{ är en produkt av } k \text{ stycken skilda primtal.} \end{cases}$$

Definitionen av Möbiusfunktionen kan vara lite komplicerad vid en första anblick. Tabell 1 listar de tio första värdena på Möbiusfunktionen och kan förhoppningsvis hjälpa till att skapa lite intuition.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu(n)$	1	-1	-1	0	-1	1	-1	0	0	1

Tabell 1: Värdet på Möbiusfunktionen för de första 10 heltalen

Definition 3.3 (Partial- och delarsumma)**.** Låt $f(n)$ vara en aritmetisk funktion och låt $\lfloor x \rfloor$ beteckna det största heltalet mindre eller lika med x. Funktionen

$$F(x) = \sum_{n \leq x} f(n) = f(1) + f(2) + \cdots + f(\lfloor x \rfloor)$$

kallas för partialsumman av f i punkten x. Funktionen

$$G(x) = \sum_{d|x} f(d),$$

där summan sträcker sig över alla positiva delare av x, kallas för delarsumman av f i punkten x.

Partial- och delarsummor av kända aritmetiska funktioner används ofta till att definiera nya aritmetiska funktioner, ett exempel på detta följer nedan.

Definition 3.4 (Tjebysjovs andra funktion)**.** Med $\psi(x)$ betecknar vi Tjebysjovs andra funktion som definieras som partialsumman av Mangoldtfunktionen,

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n).$$

Eftersom $\Lambda(n) = \ln p$ om $n = p^m$ för något primtal p och något heltal $m \geq 1$, och $\Lambda(n) = 0$ annars kan definitionen ovan skrivas

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \ln p$$

där summan tas över samtliga primtalspotenser mindre än eller lika med x.

Definition 3.5 (Tjebysjovs första funktion)**.** Med ϑ betecknar vi Tjebysjovs första funktion som definieras som partialsumman av logaritmfunktionen,

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p.$$

Jämför vi detta med uttrycket för Tjebysjovs andra funktion $\psi(x)$ ser vi att man kan betrakta $\vartheta(x)$ som en begränsning av $\psi(x)$, eftersom båda funktioner summerar samma uttryck men $\psi(x)$ summerar över samtliga primtalspotenser $\leq x$ medan ϑ endast summerar över primtalen själva.

Sats 3.6. Om $n \geq 1$ har vi

$$\ln n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$$

Bevis. Om $n = 1$ har vi i högerledet endast termen $\Lambda(1) = 0$ och i vänsterledet $\ln 1 = 0$. Antag därför att $n > 1$. Enligt aritmetikens fundamentalsats kan vi skriva

$$n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{a_k}$$

för primtal p_k, och tar vi den naturliga logaritmen av detta uttryck får vi

$$\ln n = \sum_{k=1}^{r} a_k \ln p_k.$$

Från definitionen av $\Lambda(n)$ ser vi att de enda nollskilda termerna i delarsumman i högerledet kommer från delare d av n som kan skrivas $d = p_k^m$ för $m = 1, 2, \ldots, a_k$ och $k = 1, 2, \ldots, r$. Således fås i högerledet

$$\sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{a_k} \Lambda(p_k^m) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=1}^{a_k} \ln p_k = \sum_{k=1}^{r} a_k \ln p_k = \ln n.$$

Detta visar satsen. □

Sats 3.7. Om $n \geq 1$ har vi

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \left[\frac{1}{n}\right] = \begin{cases} 1 & \text{om } n = 1 \\ 0 & \text{om } n > 1. \end{cases}$$

Bevis. Vi genomför ett induktionsbevis på talet n. Om $n = 1$ har vänsterledet endast en term, $\mu(1)$, och vänsterledet är därför per definition lika med 1. Antag nu att $n > 1$, enligt aritmetikens fundamentalsats kan vi skriva $n = p_1^{a_1} \cdots p_k^{a_k}$ där $p_1, \ldots, p_k$ är primtal och $a_1, \ldots, a_k \geq 1$. Vi ser från definitionen av Möbiusfunktionen att de enda nollskilda termerna i vänsterledet kommer från $d = 1$ samt de delare av n som är produkter av skilda primtal. Därför har vi att

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \mu(1) + \mu(p_1) + \cdots + \mu(p_k) + \mu(p_1 p_2) + \cdots + \mu(p_{k-1} p_k) + \cdots + \mu(p_1 p_2 \cdots p_k).$$

Alla termer $\mu(\ldots)$ för ett givet antal primtal i argumentet har samma värde oavsett vilka primtal som ingår. Vi kan därför slå ihop alla termer $\mu(\ldots)$ vars argument innehåller lika många primtal. Det finns $\binom{k}{1}$ stycken sätt att välja ett primtal från k olika, $\binom{k}{2}$ stycken sätt att välja två tal från k, och i allmänhet $\binom{k}{m}$ stycken sätt att välja m tal från k. Därför kan summan ovan skrivas

$$\begin{aligned}\sum_{d|n} \mu(d) &= \mu(1) + \binom{k}{1}\mu(p_1) + \binom{k}{2}\mu(p_1 p_2) + \cdots + \binom{k}{k}\mu(p_1 p_2 \cdots p_k) \\ &= 1 + \binom{k}{1}(-1) + \binom{k}{2}(-1)^2 + \cdots + \binom{k}{k}(-1)^k.\end{aligned}$$

Detta känner vi nu igen som summan

$$\sum_{m=1}^{k} 1^{k-m}(-1)^m$$

vilken enligt binomialsatsen har värdet $(1-1)^k = 0$. Således är vänsterledet lika med 1 för $n = 1$ och lika med 0 för alla $n > 0$, vilket vi skulle visa. □

Definition 3.8 (Dirichletprodukt)**.** Låt $f(n)$ och $g(n)$ vara två aritmetiska funktioner. Funktionen som definieras av

$$h(n) = \sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

kallas för Dirichletprodukten av f och g och betecknas $f * g$.

Sats 3.9. *Dirichletmultiplikation är en kommutativ och associativ operation. Med andra ord gäller för alla aritmetiska funktioner f, g, k att*

$$\begin{aligned} f * g &= g * f, \\ (f * g) * k &= f * (g * k). \end{aligned}$$

Bevis. Notera att summan

$$\sum_{d|n} f(d) g\left(\frac{n}{d}\right)$$

ekvivalent kan skrivas

$$\sum_{ab=n} f(a) g(b)$$

där summan sträcker sig över alla ordnade par (a, b) vars produkt är n. Att Dirichletmultiplikation är kommutativt följer därför omedelbart från motsvarande faktum om multiplikation av heltal. För att visa associativiteten låter vi $A = g * k$ och betraktar produkten $f * A = f * (g * k)$. Vi har

$$(f * A)(n) = \sum_{ad=n} f(a) A(d) = \sum_{ad=n} f(a) \sum_{bc=d} g(b) k(c) = \sum_{abc=n} f(a) g(b) k(c).$$

Med $B = f * g$ får man på samma sätt

$$(B * k)(n) = \sum_{dc=n} B(d) k(c) = \sum_{dc=n} \sum_{ab=d} f(a) g(b) k(c) = \sum_{abc=n} f(a) g(b) k(c)$$

så tydligen gäller $f * A = B * k$, eller

$$f * (g * k) = (f * g) * k,$$

så Dirichletmultiplikation är associativt. □

Definition 3.10 (Generaliserad Dirichletprodukt)**.** Om $\alpha(n)$ är en aritmetisk funktion och $F(x)$ är en reell- eller komplexvärd funktion definierad på $(0, \infty)$ sådan att $F(x) = 0$ för $0 < x < 1$ så definieras den generaliserade Dirichletprodukten av α och F som

$$(\alpha \circ F)(x) = \sum_{n \leq x} \alpha(n) F\left(\frac{x}{n}\right).$$

Produkten $\alpha \circ F$ är en ny reell- eller komplexvärd funktion definierad på $(0, \infty)$ som är lika med noll för $0 < x < 1$.

Om $F(x) = 0$ för alla icke-heltalsvärden x så är begränsningen av F till heltalen en aritmetisk funktion, och $a \circ F = a * F$ eftersom $F\left(\frac{x}{n}\right) = 0$ för alla n som inte delar x. Det är på grund av detta specialfall som produkten kan betraktas som en generaliserad Dirichletmultiplikation. Till skillnad från vanlig Dirichletmultiplikation är den generaliserade varianten i allmänhet varken kommutativ eller associativ. Däremot finns det en form av associativ lag som relaterar operationerna $\circ$ och $*$:

Sats 3.11. Låt F vara som i definitionen ovan. För alla aritmetiska funktioner α och β gäller att

$$\alpha \circ (\beta \circ F) = (\alpha * \beta) \circ F.$$

Bevis. För $x > 0$ har vi att

$$\begin{aligned}(\alpha \circ (\beta \circ F))(x) &= \sum_{n \leq x} \alpha(n) \sum_{m \leq x/n} \beta(m) F\left(\frac{x}{mn}\right) = \sum_{mn \leq x} \alpha(n)\beta(m) F\left(\frac{x}{mn}\right) \\ &= \sum_{k \leq x} \left(\sum_{n|k} \alpha(n) \beta\left(\frac{k}{n}\right) \right) F\left(\frac{x}{k}\right) = ((\alpha * \beta) \circ F)(x).\end{aligned}$$

□

Sats 3.12. Om $h = f * g$, låt

$$H(x) = \sum_{n \leq x} h(n), \quad F(x) = \sum_{n \leq x} f(n), \quad G(x) = \sum_{n \leq x} g(n).$$

Då har vi att

$$H(x) = \sum_{n \leq x} f(n) G\left(\frac{x}{n}\right) = \sum_{n \leq x} g(n) F\left(\frac{x}{n}\right). \tag{2}$$

Bevis. Låt

$$U(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } 0 < x < 1, \\ 1 & \text{om } x \geq 1. \end{cases}$$

Då gäller att $F = f \circ U$, $G = g \circ U$, så vi får att

$$\begin{aligned} f \circ G = f \circ (g \circ U) = (f * g) \circ U = h \circ U = H, \\ g \circ F = g \circ (f \circ U) = (g * f) \circ U = h \circ U = H \end{aligned}$$

enligt Sats 3.11, vilket bevisar satsen. □

Följdsats 3.12.1. Om vi låter g vara den konstanta funktionen $g(n) = 1$ och $f(n) = \Lambda(n)$ så får vi $G(x) = \lfloor x \rfloor$, $F(x) = \psi(x)$ och ekvation (2) ger då

$$\sum_{n \le x} \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{n \le x} \Lambda(n) \left\lfloor \frac{x}{n} \right\rfloor = \sum_{n \le x} \psi\left(\frac{x}{n}\right).$$

Vidare har vi från Sats 3.6 att

$$\sum_{n \le x} \sum_{d|n} \Lambda(d) = \sum_{n \le x} \ln n = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \ldots + \ln \lfloor x \rfloor = \ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots \lfloor x \rfloor) = \ln(\lfloor x \rfloor !),$$

så sammanfattningsvis har vi sambandet

$$\sum_{n \le x} \psi\left(\frac{x}{n}\right) = \ln(\lfloor x \rfloor !).$$

Definition 3.13. Låt $a(n)$ vara en aritmetisk funktion. Om det gäller för alla relativt prima heltal n, m att

$$a(nm) = a(n)a(m) \tag{3}$$

så kallas funktionen $a(n)$ multiplikativ. Om (3) gäller för samtliga heltal n, m så kallas funktionen $a(n)$ komplett multiplikativ.

Sats 3.14. Möbiusfunktionen $\mu(n)$ är multiplikativ, men inte komplett multiplikativ.

Bevis. Låt n, m vara relativt prima heltal. Om någon av n och m innehåller en faktor p^k där $k \ge 2$ gör även nm det och därför har vi att

$$\mu(n)\mu(m) = 0 = \mu(nm).$$

Antag istället att varken n eller m har någon potensfaktor i sin primtalsfaktorisering. Vi skriver då $n = p_1 p_2 \cdots p_k$ och $m = q_1 q_2 \cdots q_t$ där $p_1, p_2, \ldots, p_k, q_1, q_2, \ldots, q_t$ är distinkta primtal. Då gäller att $\mu(n) = (-1)^k$ och $\mu(m) = (-1)^t$ och därför att

$$\mu(nm) = (-1)^{k+t} = (-1)^k(-1)^t = \mu(n)\mu(m),$$

vilket visar att $\mu(n)$ är multiplikativ. Vi ser att $\mu(n)$ däremot inte är komplett multiplikativ eftersom till exempel $\mu(9) = 0$ medan $\mu(3)\mu(3) = (-1)^2 = 1$. □

Definition 3.15. Låt $a(n)$ vara en aritmetisk funktion och s en komplex variabel. Serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}$$

kallas för en Dirichletserie.

3.3 Analytisk fortsättning

Låt säga att vi har en analytisk funktion $f(z)$ definierad i någon öppen delmängd Ω av det komplexa planet. Vi vet att analytiska funktioner har ett antal trevliga egenskaper, bland annat är de oändligt kontinuerligt deriverbara inuti sitt konvergensområde (se Sats 9.3 i [10]). Av denna anledning kan vi ställa oss frågan om det finns något sätt att utvidga funktionen $f(z)$ till en ny analytisk funktion $F(z)$ definierad i ett större område $U \supset \Omega$, kanske rentav hela $\mathbb{C}$, sådan att $F(z) = f(z)$ på Ω. Det visar sig, vi kommer dock inte visa det här, att det är möjligt, åtminstone ibland. Om det dock råkar vara så att det är möjligt att definiera en ny funktion med dessa egenskaper så är den nya funktionen unik. Tekniken att utvidga definitionsmängder av analytiska funktioner kallas analytisk fortsättning, och kommer i detta avsnitt introduceras för att senare appliceras på Riemanns zetafunktion $\zeta(s)$ i Avsnitt 3.4.

Om vi för en kort stund blir lite informella kan vi betänka exempel på analytisk fortsättning vi redan är bekanta med. Exponentialfunktionen e^x, där x är en reell variabel, är inte komplexvärd och är därför inte analytisk i den komplexa meningen, men den är, som analytiska funktioner i stort, oändligt deriverbar. Vidare är den definierad på den reella axeln vilket inte formellt är en öppen delmängd av det komplexa planet. Vi har ändock genom Eulers formel

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

ett naturligt sätt att uttöka den reella funktionen e^x till en komplexvärd sådan genom att definiera

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

Vi kan därför betrakta $F(z) = e^z$ som en analytisk fortsättning av funktionen $f(x) = e^x$. Notera att $F(z) = f(x)$ då $\Im(z) = y = 0$, så funktionerna överensstämmer på den ursprungliga funktionens definitionsmängd, vilket ju var något vi önskade av den utvidgade funktionen. Som sagt är detta inte ett formellt exempel på analytisk fortsättning, men det är ändå illustrerande för hur analytisk fortsättning går till i praktiken.

Den formella definitionen av analytisk fortsättning lyder:

Definition 3.16. Låt $f(z)$ vara en analytisk funktion i någon öppen sammanhängande delmängd $D \subset \mathbb{C}$. Om $F(z)$ är en analytisk funktion i någon öppen sammanhängande delmängd $D' \subset \mathbb{C}$ sådan att $D \subset D'$, och det dessutom gäller att

$$F(z) = f(z)$$

för alla $z \in D$, så säger vi att $F(z)$ är en analytisk fortsättning av $f(z)$ till D'.

Som vi nämnde i introduktion är det inte alltid möjligt att utvidga en funktion som är analytisk i ett område D till ett större område. Om det förhåller sig så säger vi att randen till D är en naturlig rand till funktionen. Däremot gäller att den analytiska fortsättningen, om den existerar, är unik. För att visa det ska vi först visa en generell sats om analytiska funktioner.

Sats 3.17. Om funktionen $f(z)$ är analytisk i någon öppen delmängd $D \subset \mathbb{C}$ och $f(z) = 0$ för alla z i någon öppen skiva $\Omega \subset D$, så gäller att $f(z) = 0$ för alla $z \in D$.

Bevis. Låt z_0 vara centrum av den öppna skivan $\Omega \subset D$. Antag, för att nå en motsägelse, att det finns en punkt $z_1 \in D$ med $f(z_1) \neq 0$, och låt $\Gamma \subset D$ vara en kurva från z_0 till z_1. Om vi rör oss längs Γ kommer vi initialt bara röra oss genom punkter där $f(z) = 0$, men till slut måste vi komma till en punkt, kalla den ω, med egenskaperna att dels $f(z) = 0$ i samtliga punkter som föregår ω på Γ, och dels att det finns punkter z godtyckligt nära ω på Γ där $f(z) \neq 0$. Detta eftersom $f(z)$ är kontinuerlig på D och i förlängningen på Γ. Från den första egenskapen ser vi att $f'(z) = 0$ i samtliga punkter z som föregår ω på Γ, ty där kan vi i uttrycket

$$f'(z) = \lim_{s \to z} \frac{f(z) - f(s)}{z - s}$$

välja s på Γ så att $f(z) = f(s) = 0$. På samma sätt har vi för varje z som föregår ω på Γ att

$$f''(z) = \lim_{s \to z} \frac{f'(z) - f'(s)}{z - s} = 0$$

genom att låta s närma sig z längs Γ där enligt ovan $f'(z) = f'(s) = 0$. Fortsätter vi på samma vis ser vi att samtliga derivator av $f(z)$ är lika med 0 för alla z som föregår ω på Γ, så faktumet att $f(z)$ är oändligt kontinuerligt deriverbar på hela Γ medför att detsamma gäller i punkten ω. Vidare betyder faktumet att $f(z)$ är analytisk i punkten ω att $f(z)$ kan utvecklas i en konvergent Taylorserie i en omgivning av ω, men då $f(\omega) = 0$ och detsamma gäller för alla derivator av f i ω så är samtliga termer i Taylorutvecklingen lika med 0, så $f(z)$ är identiskt lika med 0 i en omgivning till ω. Detta motsäger den andra egenskapen som vi konstaterade att ω måste ha, nämligen att det finns punkter z på Γ som ligger godtyckligt nära ω och i vilka $f(z) \neq 0$. Denna motsägelse betyder att det ursprungliga antagandet var felaktigt, så $f(z_1) = 0$. Således kan det inte finnas någon punkt i D i vilken $f(z)$ är nollskild, så $f(z)$ är identiskt lika med 0 på hela D. □

Beviset för entydigheten av den analytiska fortsättningen är nu i det närmaste trivial:

Sats 3.18. Låt $f(z)$ vara en analytisk funktion i något öppet sammanhängande område $D \subset \mathbb{C}$. Antag att $F(z)$ är en analytisk fortsättning av $f(z)$ på något större område $D' \subset \mathbb{C}$. Då är $F(z)$ entydigt bestämd på D'.

Bevis. Antag att $F_1(z)$ är ytterligare en analytisk fortsättning av $f(z)$ till D', och låt $G(z) = F(z) - F_1(z)$. Enligt Definition 3.16 gäller att $F(z) = F_1(z) = f(z)$ på D, så $G(z) = 0$ på D. Enligt Sats 3.17 är då $G(z) = 0$ på hela D', alltså gäller $F(z) = F_1(z)$ på hela D'. Således existerar som mest en unik analytisk fortsättning av $f(z)$ till D'. □

3.4 Riemanns zetafunktion

Riemanns zetafunktion, betecknad $\zeta(s)$, är en komplex funktion som ligger till grund för många viktiga resultat inom analysen, i denna uppsats sammanhang huvudsakligen i det analytiska beviset av primtalssatsen. Detta kapitel kommer introducera zetafunktionen och visa en del viktiga samband som är nödvändiga i ovan nämnda bevis. Som vi nämnde lite kort i Avsnitt 2.4 definierades Riemanns zetafunktion först för komplexa tal vilkas realdel är större än 1, för att sedan genom analytisk fortsättning definieras för hela det komplexa talplanet, förutom $s = 1$. För våra syften räcker det att studera zetafunktionen för $\Re(s) > 0$, så vi kommer endast att visa hur funktionen kan definieras i detta halvplan.

3.4.1 En första definition

Vi definierar nu Riemanns zetafunktion för $\sigma > 1$. Notera att denna definition redan dök upp i Avsnitt 2.4.

Definition 3.19. För varje $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ med $\sigma > 1$ definierar vi Riemanns zetafunktion $\zeta(s)$ enligt

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \tag{4}$$

När zetafunktionen skrivs på detta sett ser man att den utgör det enklaste exemplet $(a(n) = 1)$ på en Dirichletserie, se Definition 3.15.

Vi vet, i det fall s är en reell variabel, att serien (4) konvergerar absolut för alla $s > 1$. Följande sats visar att detta även gäller för samtliga komplexa s med $\sigma > 1$.

Sats 3.20. Serierepresentationen för Riemanns zetafunktion i Definition 3.19 är absolutkonvergent för alla $s \in \mathbb{C}$ med $\sigma > 1$.

Bevis. Enligt definitionen ovan har vi för $\sigma > 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

varför vi får att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^s}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^{\sigma+it}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{n^{\sigma} n^{it}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|n^{-it}|}{n^{\sigma}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|e^{-it\ln n}|}{n^{\sigma}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}$$

vilket konvergerar då $\sigma > 1$. Således är (4) absolutkonvergent. □

Vi kommer vid många tillfällen i beviset ha behov av ett uttryck för derivatan av $\zeta(s)$. Summor kan som bekant deriveras termvis då derivatan är en linjär operator, och då serier som den i Definition 3.19 kan betraktas som en sorts oändlig summa kan man hoppas att det finns ett enkelt uttryck för derivatan $\zeta'(s)$ då $\sigma > 1$. Satsen nedan visar att detta är fallet, men vi går inte in i detalj för hur detta motiveras.

Sats 3.21. Funktionen $\zeta(s)$ är analytisk för $\sigma > 1$ och vi kan beräkna derivatan av zetafunktionen genom termvis derivering. Således har vi för alla $s \in \mathbb{C}$ med $\sigma > 1$ att:

$$\zeta'(s) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^s}.$$

Bevis. Se Lemma 3 i [1] för varför $\zeta(s)$ är analytisk för $\sigma > 1$. Enligt Theorem 11.11 i [2] är vidare $\zeta(s)$ likformigt konvergent för $\sigma > 1$ varför vi kan derivera serierepresentationen (4) termvis enligt Remark 10.4 i [9]. □

3.4.2 Oändliga produkter

I förberedelse för nästa viktiga sats tar vi en kort paus från undersökningen av Riemanns zetafunktion för att istället ta en snabb titt på oändliga produkter. En oändlig produkt är som namnet antyder ett uttryck på formen

$$\prod_{n=1}^{\infty} a_n \tag{5}$$

där faktorerna a_n är nollskilda reella- eller komplexa tal. Framöver kommer vi se oändliga produkter av typen $\prod_p$ och då är det underförstått att produkten tas över samtliga primtal, vilka ju är oändliga (Sats 2.3). Precis som oändliga summor, eller serier som de formellt kallas, kan oändliga produkter konvergera eller divergera. Om (a_n) är en följd av nollskilda tal säges den oändliga produkten $\prod_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergera om talföljden (p_n), där vi för varje heltal $n \geq 1$ definierar $p_n = a_1 a_2 \cdots a_n$, konvergerar till ett nollskillt tal då $n \to \infty$. Betraktar vi (p_n) som en följd av "partialprodukter" i analogi med teorin för serier har vi alltså ett analogt kriterium för konvergens som vi har för serier. Om detta inte inträffar säger vi att den oändliga produkter divergerar, detta innefattar alltså även möjligheten att $p_n \to 0$. Tar vi den naturliga logaritmen av (5) fås

$$\ln \prod_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$$

varpå vi ser att oändliga produkter kan överföras till serier på ett naturligt sätt, förutsatt att logaritmfunktionen är definierad för alla a_n. Om $p_n = a_1 a_2 \ldots a_n \to 0$ så gäller att $\ln p_n = \ln a_1 + \ln a_2 + \cdots + \ln a_n \to -\infty$, vilket alltså innebär att serien $\sum_{n=1}^{\infty} \ln a_n$ divergerar. Det är av denna anledning vi betraktar den oändliga produkten som divergent i fallet $p_n \to 0$.

Ett mycket intressant resultat som presenterar en koppling mellan Riemanns zetafunktion och primtalen är zetafunktionens representation som Eulerprodukt, vilket är en oändlig produkt som tas över samtliga primtal. Man kan visa att varje Dirichletserie kan skrivas som en oändlig produkt men vi visar det endast för Riemanns zetafunktion. Värt att nämna är att denna länk mellan zetafunktionen och primtalen är helt och hållet tack vare aritmetikens fundamentalsats (Sats 2.2), vilket också framgår ur beviset.

Sats 3.22 (Eulerprodukten)**.** Om $\sigma > 1$ gäller följande formel för $\zeta(s)$:

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} \tag{6}$$

där produkten tas över samtliga primtal.

Bevis. För att bevisa denna sats visar vi först att varje faktor i högerledet av (6) kan skrivas som en absolutkonvergent serie. Multiplicerar vi dessa faktorer för alla primtal p upp till P erhåller vi en ändlig produkt av absolutkonvergenta serier, och subtraherar vi denna från serierepresentationen för $\zeta(s)$ erhåller vi en serie vilken enkelt kan visas konvergera mot 0 då $P \to \infty$. Från detta drar vi slutsatsen att den oändliga produkten i högerledet är lika med $\zeta(s)$. Vi gör detta nu.

Fixera primtalet p och betrakta den geometriska serien

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{p^s}\right)^k$$

för $\sigma > 1$. Serien är absolutkonvergent eftersom $\left|\frac{1}{p^s}\right| < 1$ och dess värde är som bekant

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}} = \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Låt nu P vara något primtal. Uttrycket

$$\prod_{p \leq P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{p \leq P} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}}$$

beskriver således en ändlig produkt av absolutkonvergenta serier varför vi kan multiplicera och kasta om termerna som vi vill (se exempelvis Theorem 3.55 i [7] för varför absolutkonvergenta serier kan omdisponeras som man vill) för att erhålla

$$\prod_{p \leq P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \prod_{p \leq P} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p^{ks}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_P(n)}{n^s} \tag{7}$$

där $c_P(n)$ är lika med 1 om samtliga primtalsfaktorer av n är $\leq P$ och 0 annars. Det är här i den sista likheten aritmetikens fundamentalsats kommer in i leken och vi har använt att varje heltal n på ett unikt sätt (frånsett inbördes ordning) kan skrivas som en produkt av primtal. Vi har därmed för följande differens uppskattningen

$$\left|\zeta(s) - \prod_{p \leq P} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - c_P(n)}{n^s}\right| = \left|\sum_{\substack{n \geq 1 \\ c_P(n)=0}} \frac{1}{n^s}\right| \leq \sum_{\substack{n \geq 1 \\ c_P(n)=0}} \frac{1}{n^\sigma}, \tag{8}$$

där vi har använt serierepresentationen för $\zeta(s)$ (Definition 3.19) som ju är giltig då $\sigma > 1$. Summan i högerledet går över alla heltal som har någon primtalssfaktor större än P, dessa tal utgör en (äkta-) delmängd av alla tal större än P, så högerledet är

$$\leq \sum_{n=P+1}^{\infty} \frac{1}{n^{\sigma}}$$

vilket eftersom, $\sigma > 1$, går mot 0 då $P \to \infty$. Låter vi således $P \to \infty$ i (8) ser vi att produkten

$$\prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}$$

konvergerar (tack vare att $\zeta(s)$ gör det) samt att den konvergerar mot just $\zeta(s)$. $\square$

3.4.3 Ytterligare definitioner av zetafunktionen

Med utgångpunkt i denna Eulerproduktform för $\zeta(s)$ kan vi ta fram flera häftiga formler som har stor vikt i studiet av zetafunktionens beteende och i beviset av primtalssatsen som kommer i Kapitel 4.

Sats 3.23. Låt $\Lambda(n)$ beteckna Mangoldtfunktionen från Definition 3.1 och låt $\sigma > 1$. Då gäller

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}. \tag{9}$$

Bevis. Strategin för detta bevis är att först visa att vänsterledet i (9) kan skrivas om som en viss serie. Denna serie innehåller en derivata och vi visar att vi kan byta ordning på summan och derivatan varav vi erhåller derivatan av en serie vilken kan visas vara lika med $\ln \zeta(s)$. Deriverar vi detta uttryck erhålls precis (9). Nu genomför vi detaljerna av beviset.

Vi minns att $\Lambda(n)$ är lika med $\ln p$ om $n = p^k$ för något primtal p och positivt heltal k, och lika med 0 annars. Vi har därför att

$$-\sum_{p^k} \frac{1}{k} \frac{d}{ds} \frac{1}{p^{ks}} = \sum_{p^k} \frac{\ln p}{p^{ks}} = \{n = p^k\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}$$

där de två första serierna går över samtliga primtalspotenser. Samtidigt har vi för den första serien att

$$-\sum_{p^k} \frac{1}{k} \frac{d}{ds} \frac{1}{p^{ks}} = -\frac{d}{ds} \sum_{p^k} \frac{1}{k} \frac{1}{p^{ks}}$$

där vi kan plocka ut derivatan utanför summationen då serien i vänsterledet är likformigt konvergent. Att serien konvergerar likformigt kan vi bland annat kan se från Weierstrass majorantsats (se Theorem 7.10 i [7]) då

$$\left|\frac{1}{k}\frac{d}{ds}\frac{1}{p^{ks}}\right| = \frac{\ln p}{p^{ks}} \leq \frac{\ln p}{p^{k\sigma}}$$

och serien $\sum \frac{\ln p}{p^{k\sigma}}$ konvergerar. Från Sats 3.22 får vi sedan att

$$\sum_{p^k} \frac{1}{k}\frac{1}{p^{ks}} = \sum_p \ln\left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \ln \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1} = \ln \zeta(s), \tag{10}$$

vilket vidare ger att

$$-\frac{d}{ds}\sum_{p^k} \frac{1}{k}\frac{1}{p^{ks}} = -\frac{d}{ds}\ln \zeta(s) = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

Allt som allt har vi alltså för $\sigma > 1$ att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} = -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}.$$

□

Notera att zetafunktionen enligt Sats 3.22, för $\sigma > 1$, är en konvergent produkt av nollskilda tal, således är $\zeta(s) \neq 0$ och högerledet i (9) är därmed väldefinierat för alla $s \in \mathbb{C}$ med $\sigma > 1$.

Följdsats 3.23.1. Beviset ovan, närmare bestämt ekvation (10), har som konsekvens att följande formel gäller för $\sigma > 1$:

$$\zeta(s) = \exp\left(\sum_{p^k} \frac{1}{kp^{ks}}\right).$$

Sats 3.24. Låt $\mu(n)$ beteckna Möbiusfunktionen från Definition 3.2 och låt $\sigma > 1$. Då gäller

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}.$$

Bevis. Eftersom Möbiusfunktionen är multiplikativ (Sats 3.14) och serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\mu(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma}$$

konvergerar för $\sigma > 1$ gäller enligt Theorem 1.9 i [11] att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_p \left(1 + \frac{\mu(p)}{p^s} + \frac{\mu(p^2)}{p^{2s}} + \cdots\right) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)$$

eftersom $\mu(p) = -1$ och $\mu(p^k) = 0$ för $k > 1$. Jämför vi nu högerledet med uttrycket i Sats 3.22 ser vi att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \frac{1}{\zeta(s)}.$$

□

Innan vi utvidgar definitionen av zetafunktionen till ett större område av det komplexa talplanet visar vi följande lemma, som ger ett alternativt sätt att definiera funktionen i området $\{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$.

Sats 3.25. Antag att $\sigma > 1$, då har vi för varje $x \in \mathbb{N}$ att:

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + O(|s|x^{-\sigma}).$$

Bevis. Notera först att

$$\int_n^{\infty} \frac{dw}{w^{s+1}} = \left[\frac{w^{-s}}{-s}\right]_n^{\infty} = \frac{1}{sn^s}$$

så att

$$\sum_{n>x} \frac{1}{n^s} = s \sum_{n>x} \int_n^{\infty} \frac{dw}{w^{s+1}} = s \int_n^{\infty} \left(\sum_{x<n\leq w} 1 \right) \frac{dw}{w^{s+1}} = s \int_n^{\infty} (\lfloor w \rfloor - x) \frac{dw}{w^{s+1}}$$

där vi får byta plats på summationen och integrationen eftersom allting konvergerar absolut, tack vare att $\sigma > 1$. Därmed har vi för zetafunktionen att

$$\begin{aligned}
\zeta(s) &= \sum_{n\leq x} \frac{1}{n^s} + \sum_{n>x} \frac{1}{n^s} = \sum_{n\leq x} \frac{1}{n^s} + s \int_n^{\infty} (\lfloor w \rfloor - x) \frac{dw}{w^{s+1}} \\
&= \sum_{n\leq x} \frac{1}{n^s} + s \int_x^{\infty} (w - x) \frac{dw}{w^{s+1}} + O\left(|s| \int_x^{\infty} \frac{dw}{w^{\sigma+1}} \right).
\end{aligned}$$

Den första integralen i det sista uttryckte är lika med

$$s \int_x^{\infty} \frac{dw}{w^s} - sx \int_x^{\infty} \frac{dw}{w^{s+1}} = s \left[\frac{w^{1-s}}{1-s}\right]_x^{\infty} + x \left[w^{-s}\right]_x^{\infty} = \frac{sx^{1-s}}{s-1} - x^{1-s} = \frac{x^{1-s}}{s-1}$$

och för feltermen får vi

$$O\left(|s| \int_x^{\infty} \frac{dw}{w^{\sigma+1}} \right) = O\left(\frac{|s|}{\sigma x^{\sigma}} \right) = O(|s|x^{-\sigma}).$$

Således är lemmat visat. □

3.4.4 En utvidgning av definitionen

Vi ska nu definiera $\zeta(s)$ för ett större område i det komplexa talplanet. Notera att representationen i Definition 3.19,

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

inte är något användbar för $s = \sigma + it$ med $\sigma \leq 1$, då serien divergerar i detta fall. Således måste vi hitta ett nytt sätt att definiera $\zeta(s)$ i detta område, och det gör vi genom analytisk fortsättning, se Avsnitt 3.3. Som vi konstaterade där är inte alla analytiska funktioner möjliga att analytiskt fortsätta. Att det dock är möjligt för zetafunktionen är inget vi kommer visa, men utan att gå in i detalj så kan man visa att att zetafunktionen kan skrivas $\zeta(s) = \Gamma(1-s)I(s)$ där $\Gamma(s)$ är gammafunktionen som kommer introduceras i Avsnitt 3.5 och $I(s)$ är en konturintegralen som är konvergent och analytisk i hela planet. Genom denna formel kan man analytisk fortsätta $\zeta(s)$ till hela planet förutom punkten $s = 1$, där $\zeta(s)$ har en pol (se Sats 3.27). Den intresserade läsaren hänvisas till kapitel 12 i [1] för detaljerna. Eftersom zetafunktionen är analytisk i halvplanet $\sigma > 1$ är denna analytiska fortsättning entydigt bestämd, enligt Sats 3.18.

För vårt ändamål, som för påminnelses skull är att bevisa primtalssatsen, räcker det att definiera $\zeta(s)$ för komplexa tal med positiv realdel. En sådan definition följer nedan.

Definition 3.26. Låt $x > 0$ vara ett godtyckligt reellt tal. För varje $s = \sigma+it \in \mathbb{C}$ med $\sigma > 0$, förutom $s = 1$, definieras Riemanns zetafunktion $\zeta(s)$ av

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + \frac{\{x\}}{x^s} - s\int_x^{\infty} \{w\} \frac{dw}{w^{s+1}}. \tag{11}$$

Här betecknar $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ decimaldelen av x. Observera att definitionen är oberoende av valet av x, vilket också visas nedan.

Notera att om $x \in \mathbb{N}$ och $\sigma > 1$ så sammanfaller högerledet ovan med högerledet i Sats 3.25, ty decimaldelen $\{x\}$ är förstås 0 och

$$\begin{aligned} s\int_x^{\infty} \{w\} \frac{dw}{w^{s+1}} &= O\left(|s| \int_x^{\infty} \frac{dw}{w^{\sigma+1}}\right) = O\left(|s| \left[\frac{-1}{\sigma w^{\sigma}}\right]_x^{\infty}\right) \\ &= O\left(\frac{|s|}{\sigma x^{\sigma}}\right) = O\left(|s| x^{-\sigma}\right). \end{aligned}$$

Således är Definition 3.26 konsekvent med tidigare definitioner och är dessutom oberoende av x om x är ett naturligt tal och $\sigma > 1$. Det återstår att visa att definitionen är oberoende av x för alla $x > 0$. Eftersom den analytiska fortsättningen är unik (Sats 3.18) är det tillräckligt att göra detta i fallet $\sigma > 1$:

Bevis för oberoende av x i högerledet av (11). Låt $x > 0$ vara fixt och låt $N = \lfloor x \rfloor + 1$ vara det minsta heltalet större än x. Då har vi

$$s\int_x^{N} \{w\} \frac{dw}{w^{s+1}} = s\int_x^{N} (w - (N-1)) \frac{dw}{w^{s+1}}$$

eftersom $\{w\} = w - \lfloor w \rfloor = w - \lfloor x \rfloor = w - (N-1)$ för $w \in (x, N)$. Vidare har vi

$$
\begin{aligned}
&s \int_x^N \{w - (N-1)\} \frac{dw}{w^{s+1}} = s \left(\int_x^N \frac{dw}{w^s} - (N-1) \int_x^N \frac{dw}{w^{s+1}} \right) \\
&= s \left(\left[\frac{w^{1-s}}{1-s} \right]_x^N + (N-1) \left[\frac{w^{-s}}{s} \right]_x^N \right) = \frac{sN^{1-s}}{1-s} - \frac{sx^{1-s}}{1-s} + (N-1)N^{-s} - \frac{N-1}{x^s} \\
&= -N^{1-s} \left(\frac{s}{s-1} - 1 \right) + x^{s-1} + \frac{x^{s-1}}{s-1} - \frac{1}{N^s} - \frac{N-1}{x^s} \\
&= -\frac{N^{1-s}}{s-1} + x^{s-1} + \frac{x^{s-1}}{s-1} - \frac{1}{N^s} - \frac{N-1}{x^s}.
\end{aligned}
$$

Beräknar vi nu differensen av högerledet i (11) med dels vårt fixa x som x och dels med $x = N$ får vi

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{n \le x} \frac{1}{n^s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} + \frac{\{x\}}{x^s} - s \int_x^\infty \{w\} \frac{dw}{w^{s+1}} \right) - \left(\sum_{n \le N} \frac{1}{n^s} + \frac{N^{1-s}}{s-1} - s \int_N^\infty \{w\} \frac{dw}{w^{s+1}} \right) \\
&= -\frac{1}{N^s} + \frac{x^{s-1}}{s-1} - \frac{N^{s-1}}{s-1} + \frac{\{x\}}{x^s} - s \int_x^N \{w\} \frac{dw}{w^{s+1}} \\
&= -\frac{N^{1-s}}{s-1} + x^{s-1} + \frac{x^{s-1}}{s-1} - \frac{1}{N^s} - \frac{N-1}{x^s} - s \int_x^N \{w\} \frac{dw}{w^{s+1}} = 0 \\
&= -\frac{N^{1-s}}{s-1} + x^{s-1} + \frac{x^{s-1}}{s-1} - \frac{1}{N^s} - \frac{N-1}{x^s} - \left(-\frac{N^{1-s}}{s-1} + x^{s-1} + \frac{x^{s-1}}{s-1} - \frac{1}{N^s} - \frac{N-1}{x^s} \right) \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

eftersom $\{N\} = 0$ då N är ett heltal och $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor = x - (N-1)$. Vi har sedan tidigare konstaterat att högerledet i (11) är oberoende av x om $x \in \mathbb{N}$. Här har vi visat att om x är ett godtyckligt positivt tal kan vi byta ut det mot ett naturligt tal utan att ändra värdet på högerledet i (11). Således är $x > 0$ helt godtyckligt. □

Sats 3.27. $\zeta(s)$ har en enkel pol i punkten $s = 1$ men är utöver det analytisk i halvplanet $\sigma > 0$. Den enkla polen i $s = 1$ har residyn 1.

Bevis. Väljer vi $x = 1$ i Definition 3.26 erhålls

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{s-1} - s \int_1^\infty \{w\} \frac{dw}{w^{s+1}}.$$

Detta uttryck har uppenbarligen en pol i $s = 1$, och eftersom integranden är analytisk för $\sigma > 0$ är integralen det också (se Theorem 1.12 i [11]), så $\zeta(s)$ är analytisk i halvplanet $\{s = \sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 0, s \neq 1\}$. Residyn i $s = 1$ beräknar vi enkelt till

$$\lim_{s \to 1} (s-1)\zeta(s) = \lim_{s \to 1} \left((s-1) + 1 - (s-1)s \int_1^\infty \{w\} \frac{dw}{w^{s+1}} \right) = 1.$$

Notera att integralen i högerledet är konvergent för $\sigma > 0$ varför den sista termen vid gränsövergång är lika med 0. $\square$

3.5 Gammafunktionen

En annan central komplexvärd funktion som förekommer i beviset för primtalssatsen (om än inte på långa vägar så mycket som Riemanns zetafunktion) är gammafunktionen $\Gamma(z)$. Precis som zetafunktionen defineras gammafunktionen stegvis, inledningsvis för positiva heltal, sedan för komplexa tal med positiv realdel, och sedermera genom analytisk fortsättning för samtliga komplexa tal (förutom de i vilka gammafunktionen har poler, vilket vi kommer till). En första definition kommer nu.

Definition 3.28. För positiva heltal n definierar vi gammafunktionen $\Gamma(n)$ enligt

$$\Gamma(n) = (n-1)!.$$

För positiva heltal är alltså gammafunktionen helt enkelt en förskjuten fakultet. Av denna anledning kan vi, när vi utökat definition av den, betrakta gammafunktionen som en sorts generalisering av fakultfunktionen som annars endast är definerad för icke-negativa heltal. Nedan följer en mer generell definition.

Definition 3.29. För komplexa tal z med $\Re(z) > 0$ defineras gammafunktionen av den generaliserade integralen

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt.$$

För att gammafunktionen ska vara väldefinerad kräver vi naturligtvis att denna senare definition sammanfaller med den ursprungliga då z är ett positivt reellt heltal, vilket inte är trivialt att se genom att blott titta på integralen. Att det faktiskt förhåller sig så kan vi dock visa ganska enkelt om vi använder oss av en viss rekursionsformel som gammafunktionen satisfierar, och som följer här:

Sats 3.30. För varje $z \in \mathbb{C}$ med $\Re(z) > 0$ satisfierar $\Gamma(z)$ den rekursiva formeln

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z). \tag{12}$$

Bevis. Genom att använda partiell integration på $\Gamma(z+1)$ erhålls

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty t^z e^{-t}dt = \left[-t^z e^{-t}\right]_0^\infty + \int_0^\infty z t^{z-1}e^{-t}dt.$$

Eftersom $\lim_{t\to\infty} \frac{t^z}{e^t} = 0$ för alla z är den första termen i högerledet är lika med 0. Därför har vi

$$\Gamma(z+1) = z\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt = z\Gamma(z)$$

vilket visar satsen. $\square$

Det följer nu från ett närmast trivialt induktivt resonemang att Definition 3.28 är ett specialfall av Definition 3.29:

Sats 3.31. För positiva heltal n gäller att

$$(n-1)! = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt,$$

det vill säga att de två definitionerna av gammafunktionen är samstämmiga i detta fall.

Bevis. Låt

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t} dt,$$

där n är ett positivt heltal, vi visar att $\Gamma(n) = (n-1)!$. Att detta gäller för $n = 1$ är inte svårt att se, ty

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^\infty = \lim_{t\to\infty}(-e^{-t}) + e^0 = 1$$

samtidigt som $(1-1)! = 0! = 1$. Antag nu att det för något heltal $k > 1$ gäller att $\Gamma(k) = (k-1)!$. För $k+1$ får vi från rekursionsformeln (12) samt induktionshypotesen att

$$\Gamma(k+1) = k\Gamma(k) = k(k-1)! = k!.$$

Enligt principen om induktion gäller därför att $\Gamma(n) = (n-1)!$ för varje heltal $n \geq 1$.

$\square$

Vi visade rekursionsformeln (12) för $z \in \mathbb{C}$ med $\Re(z) > 0$, men faktum är att formeln gäller för alla z, vilket följer av att $\Gamma(z)$ kan analytiskt fortsättas till hela planet (se sida 857 i [4]). Därför kan vi använda rekursionen för att härleda värden för gammafunktionen utanför halvplanet i vilket vi redan definerat den. Till exempel ser vi att

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-t} dt$$

vilket genom variabelbytet $t = x^2$ blir

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty (x^2)^{-1/2} e^{-x^2} 2x dx = 2\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

enligt ett känt resultat. Således ger en omskrivning av rekursionsformeln till

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

att

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\Gamma(1/2)}{1/2} = -2\sqrt{\pi}.$$

Något mycket viktigt som framkommer ur rekursionsformeln när man tillåter godtyckliga komplexa tal är gammafunktionens poler. Vi ser nämligen ur

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

att $z = 0$ är en simpel pol, ty täljaren $\Gamma(1) = 1$ är ändlig och nämnaren lika med 0. Använder vi rekursionsformeln upprepade gånger ser vi att

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z} = \frac{\Gamma(z+2)}{z(z+1)} = \ldots = \frac{\Gamma(z+n)}{z(z+1)\cdots(z+n-1)}$$

för alla $n \geq 1$. Ur denna formel framkommer att gammafunktionen har simpla poler i samtliga negativa heltalsvärden. Vi kan även relativt enkelt beräkna residyn en godtycklig pol $z = -k$ enligt

$$\begin{aligned}\lim_{z \to -k}(z+k)\Gamma(z) &= \lim_{z \to -k} \frac{(z+k)\Gamma(z+k)}{z(z+1)\cdots(z+k-1)} = \lim_{z \to -k} \frac{\Gamma(z+k+1)}{z(z+1)\cdots(z+k-1)} \\ &= \frac{\Gamma(1)}{(-k)(-k+1)\cdots(-1)} = \frac{(-1)^k\Gamma(1)}{k(k-1)\cdots 1} = \frac{(-1)^k}{k!}.\end{aligned}$$

Detta resultat kommer senare dyka upp i beviset till Sats 4.6.

4 Ett analytiskt bevis för primtalssatsen

Vi kommer här presentera ett analytiskt bevis för primtalssatsen. Vi kommer inte bevisa primtalssatsen direkt, utan istället påståendet $\psi(x) \sim x$ där $\psi(x)$ är Tjebysjovs andra funktion från Definition 3.4, vilket dock är ekvivalent med primtalssatsen, vilket också bevisas i slutet. Beviset är ganska långt och är därför strukturerat på så vis att det delas upp i en rad satser, lemman, och följdsatser som tillsammans utgör ett bevis för påståendet. Vi inleder med ett par generella lemman som handlar om aritmetiska funktioner

4.1 Generella lemman för aritmetiska funktioner

Lemma 4.1 (Abels identitet)**.** Låt $a(n)$ vara en aritmetisk function och definiera funktionen $A(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$ med $A(x) = 0$ om $x < 1$. Antag att funktionen f är kontinuerligt deriverbar på intervallet $[y, x]$, där $0 < y < x$. Då har vi att

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt.$$

Bevis. Från definitionen av funktionen $A(x)$ ser vi att den är en trappfunktion med hopp av storlek $a(n)$ vid varje heltalsvärde n. Summan i vänsterledet ovan kan därför skrivas som en Riemman-Stieltjes integral (se kapitel 6 i [7]), enligt

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = \int_y^x f dA.$$

Använder vi partiellt integration på denna integral får vi

$$\int_y^x f dA = [A(t)f(t)]_y^x - \int_y^x Adf = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x Adf$$

och eftersom f har en kontinuerlig derivata på $[y, x]$ (se Theorem 6.17 i [7]) kan detta förenklas till

$$\sum_{y<n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - A(y)f(y) - \int_y^x A(t)f'(t)dt.$$

där integralen är en vanlig Riemann integral. □

Lemma 4.2. Låt $a(n)$ vara en aritmetisk funktion och låt $A(x)$ vara som i Lemma 4.1. Då gäller

$$\sum_{n\leq x}(x - n)a(n) = \int_1^x A(t)dt. \tag{13}$$

Bevis. Lemma 4.1 med $0 < y < 1$ ger att

$$\sum_{n\leq x} a(n)f(n) = A(x)f(x) - \int_1^x A(t)f'(t)dt, \tag{14}$$

eftersom $A(y) = 0$, om f är kontinuerligt deriverbar på $[y, x]$. Låter vi $f(x) = x$ i ekvation (14) erhålls

$$\sum_{n \leq x} na(n) = xA(x) - \int_1^x A(t)dt$$

varifrån omflyttning av termer ger ekvation (13). $\square$

Lemma 4.3. Låt $A(x) = \sum_{n \leq x} a(n)$ och $A_1(x) = \int_1^x A(t)dt$ för alla $x \geq 1$. Antag att termerna $a(n) \geq 0$ för varje n. Då gäller att om vi har den asymptotiska formeln

$$A_1(x) \sim Lx^c \tag{15}$$

så gäller även formeln

$$A(x) \sim cLx^{c-1}.$$

Med andra ord är det korrekt att formellt derivera formeln (15).

Bevis. Då termerna $a(n)$ är icke-negativa är funktionen $A(x)$ icke-negativ och växande och detsamma gäller därmed funktionen $A_1(x)$. Tag ett $\beta > 1$ och betrakta differensen $A_1(\beta x) - A_1(x)$. Vi har

$$A_1(\beta x) - A_1(x) = \int_x^{\beta x} A(t)dt \geq \int_x^{\beta x} A(x)dt = A(x)(\beta x - x) = xA(x)(\beta - 1).$$

Detta ger oss olikheten $xA(x) \leq \frac{1}{\beta - 1}(A_1(\beta x) - A_1(x))$ vilket efter division med $x^c(\beta - 1)$ (som är nollskilt) ger

$$\frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq \frac{1}{\beta - 1}\left(\frac{A_1(\beta x)}{(\beta x)^c}\beta^c - \frac{A_1(x)}{x^c}\right).$$

Fixerar vi β och låter $x \to \infty$ erhålls från ekvation (15)

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq \frac{1}{\beta - 1}(L\beta^c - L) = L\frac{\beta^c - 1}{\beta - 1}.$$

Låter vi nu $\beta \to 1^+$ har vi i högerledet differenskvoten för funktionen β^c i punkten $\beta = 1$ vilken har gränsvärdet c. Således har vi olikheten

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq cL. \tag{16}$$

Tag nu ett $0 < \alpha < 1$ och betrakta differensen $A_1(x) - A_1(\alpha x)$. Ett liknande förfarande som ovan ger olikheten

$$\liminf_{x \to \infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \geq cL \tag{17}$$

varpå olikheterna (16) och (17) tillsammans ger att

$$\limsup_{x \to \infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} \leq cL \leq \liminf_{x \to \infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}}.$$

Detta visar att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{x^{c-1}} = cL,$$

vilket är ekvivalent med att

$$A(x) \sim cLx^{c-1}.$$

Detta avslutar beviset. $\square$

4.2 En integralrepresentation för ψ_1

Med dessa lemman att tillgå kan vi nu börja behandla funktionen $\psi(x)$, eller snarare funktionen $\psi_1(x) = \int_1^x \psi(x)dx$. Anledning till att vi definierar $\psi_1(x)$ är att $\psi(x)$ är diskontinuerlig och ganska besvärlig att arbete med i analytiska sammanhang. Funktionen $\psi_1(x)$ å andra sidan är kontinuerlig och styckvis linjär, och lämpar sig således bättre till analytiska efterforskningar.

Sats 4.4. Vi har att

$$\psi_1(x) = \sum_{n\leq x}(x-n)\Lambda(n).$$

Vidare implicerar den asymptotiska formeln $\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2$ att $\psi(x) \sim x$.

Bevis. Det första resultatet följer direkt från tillämpning av Lemma 4.2 på $\psi_1(x) = \int_1^x \psi(t)dt = \int_1^x \sum_{n\leq t} \Lambda(n)dt$. Vidare gäller per definition att $\Lambda(n) \geq 0$ för varje n, så det andra resultatet följer även det direkt, från Lemma 4.3. $\square$

Vi har här konstaterat att om vi har den asymptotiska formeln $\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2$ så följer att även $\psi(x) \sim x$ gäller, alltså formeln vi vill visa. Det gäller därmed för oss att visa att $\psi_1(x) \sim \frac{1}{2}x^2$, eller ekvivalent att

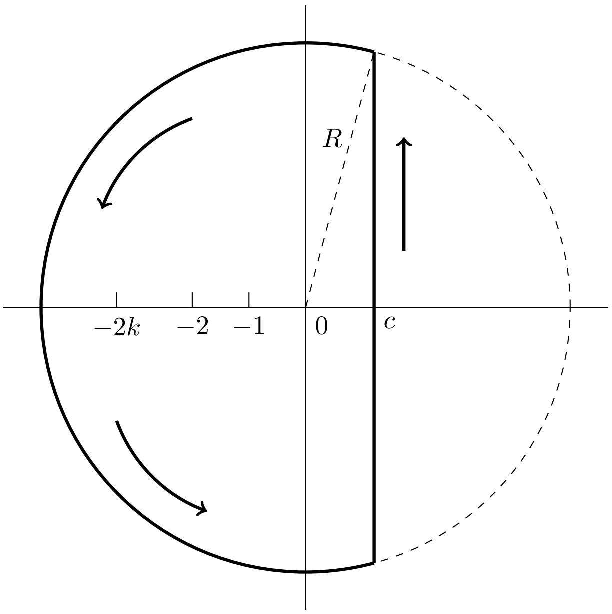
$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

Strategin kommer vara att uttrycka $\psi_1(x)/x^2$ som en integral och visa att denna konvergerar mot värdet $\frac{1}{2}$ då $x \to \infty$. För att bestämma denna integral behövs följande lemma, beviset för vilket använder en rad egenskaper av gammafunktionen, som diskuterades i Avsnitt 3.5.

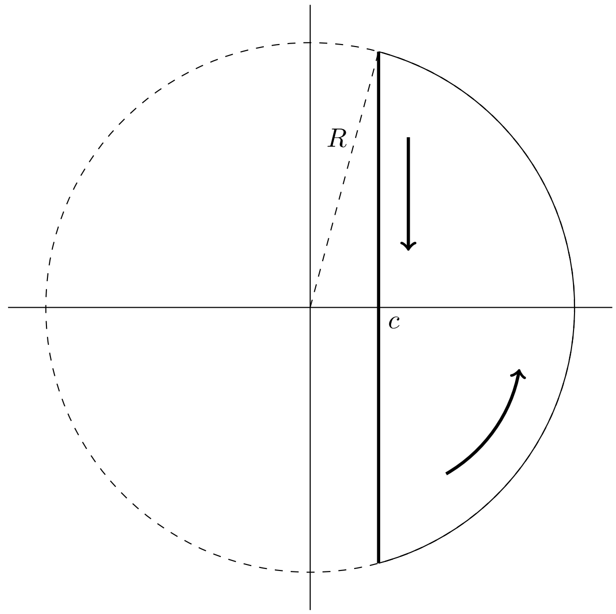
Lemma 4.5. Om $c > 0$ och $u > 0$ så gäller för varje $k \geq 1$ att

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)}dz = \begin{cases} \frac{1}{k!}(1-u)^k & \text{om } 0 < u \leq 1 \\ 0 & \text{om } u > 1 \end{cases}$$

samt att konvergensen är absolut.



Figur 1: $0 < u \leq 1$



Figur 2: $u > 1$

Bevis. Strategin för beviset är följande: vi visar först att integranden i vänsterledet kan skrivas om till ett uttryck innehållandes gammafunktionen. Vi formulerar därefter en konturintegralen längs en kurva i det komplexa planet som beror av ett tal R och som bland annat består av ett vertikalt linjestycke på $\Re(z) = c$. Vi visar sedan att konturintegralen längs det ickevertikala segmentet går mot 0 då $R \to \infty$, vilket medför att konturintegralens värde är helt beroende av integrandens beteende på det vertikala segmentet. Vi beräknar nu konturintegralen på ett alternativt sätt genom Cauchys residysats (där vi utnyttjar egenskaper hos gammafunktionen) vilket ger oss uttrycket i högerledet, och detta är då lika med konturintegralen på det vertikala linjestycket vilket genom gränsövergången $R \to \infty$ precis övergår i vänsterledet. Detaljerna kommer nu.

Genom upprepad användning av rekursionsformeln (12) för gammafunktionen, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, ser vi att integranden är lika med

$$\frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)} = \frac{u^{-z}\Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)}.$$

För att bevisa lemmat använder vi Cauchys residysats (se Theorem 2, Avsnitt 6.1 i [8]) på integralen

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(R)} \frac{u^{-z}\Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)}dz$$

där $C(R)$ är kurvan i Figur 1 då $0 < u \leq 1$ och i Figur 2 då $u > 1$. Radien R är här ett godtyckligt tal större $2k+c$. Gammafunktionen har enkla poler i origo och varje negativt heltalsvärde (se den avslutande diskussionen i Avsnitt 3.5), och vi har valt radien så att den är större än $2k+c$, varför kurvan omsluter polerna $z = 0, -1, -2, \ldots, -k$. De resterande av gammafunktionens poler behöver vi inte ta hänsyn till eftersom de förekommer i båda täljare och nämnare i integranden och således tar ut varandra. Vi börjar med att visa att integralen längs båda cirkulära segment går mot 0 då radien R går mot oändligheten. Låt $z = x + iy$ och $|z| = R$. Integranden domineras då av

$$\left|\frac{u^{-z}}{z(z+1)\ldots(z+k)}\right| = \frac{u^{-x}}{|z||z+1|\cdots|z+k|} \leq \frac{u^{-c}}{R|z+1|\cdots|z+k|}$$

där olikheten $u^{-x} \leq u^{-c}$ beror på att u^{-x} är en växande funktion av x då $0 < u < 1$ och avtagande då $u > 1$, och vi ser från figurerna att $x \geq c$ i det första fallet och $x \leq c$ i det andra. Om nu $1 \leq n \leq k$ så har vi att $|z+n| \geq |z| - n = R - n \geq R - k \geq R/2$ där den sista olikheten kommer av att $R \geq 2k + c > 2k$. Därav gäller att integralen längs varje cirkelbåge är dominerad av

$$\frac{2\pi R u^{-c}}{R(\frac{1}{2}R)^k} = O(R^{-k})$$

vilket går mot noll då $R \to \infty$ då k är positivt. Således är integralen längs varje cirkelbåge lika med 0 då $T \to \infty$, varför värdet på

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(R)} \frac{u^{-z}\Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)}dz$$

endast beror på värdet av integralen längs med linjestycket $\Re(z) = c$. Vi ser i Figur 2 att inga poler till gammafunktionen ligger innanför kurvan i fallet att $u > 1$. Således är integranden analytisk i det av kurvan omslutna området varför Cauchys integralsats ger att $\int_{C(R)} dz = 0$ oberoende av radien R. Låter vi $R \to \infty$ visar detta lemmat i fallet $u > 1$. Antag nu istället att $0 < u \leq 1$. Gammafunktionen har alltså poler i varje icke-negativt heltalsvärde varför Cauchys residysats ger att

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int_{C(R)} \frac{u^{-z}\Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)}dz &= \sum_{n=0}^{k} \operatorname*{Res}_{z=-n} \frac{u^{-z}\Gamma(z)}{\Gamma(z+k+1)} \\
&= \sum_{n=0}^{k} \frac{u^n}{\Gamma(k+1-n)} \operatorname*{Res}_{z=-n} \Gamma(z) = \sum_{n=0}^{k} \frac{u^n}{(k-n)!}\frac{(-1)^n}{n!} \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n}(-u)^n = \frac{1}{k!}(1-u)^k.
\end{aligned}$$

Låter vi $R \to \infty$ erhålls det önskade resultatet,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{u^{-z}}{z(z+1)\cdots(z+k)}dz = \frac{1}{k!}(1-u)^k,$$

eftersom endast integration längs det vertikala linjestycket i Figur 1 bidrar till integralen. $\square$

Med detta lemmat kan vi nu ta fram en integralrepresentation för $\psi_1(x)/x^2$:

Sats 4.6. Låt $c > 1$ vara givet. Om $x \geq 1$ så gäller att

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} \right) ds. \tag{18}$$

Bevis. Strategin för detta bevis är följande: vi börjar med en omskrivning av partialsummaformeln för $\psi_1(x)$ som vi härledde i Sats 4.4. Högerledet i den omskrivna formeln innehåller uttrycket $1 - n/x$, vilket vi genom Lemma 4.5 kan skriva om som en generaliserad integral. Från detta kan vi sedan enkelt uttrycka $\psi_1(x)/x$ som en serie innehållandes den generaliserade integralen. Vi visar att vi kan byta ordning på serien och integralen och erhåller då ett uttryck för $\psi_1(x)/x$ som en generaliserad integral där integranden innehåller en serie, vilket råkar vara precis serien i Sats 3.23. Därmed erhåller vi (18). Vi visar nu detta i detalj.

Från Sats 4.4 har vi att

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n \leq x} \left(1 - \frac{n}{x}\right) \Lambda(n). \tag{19}$$

Vi applicerar nu Lemma 4.5 med $k = 1$ och $u = n/x$. Om $0 < n \leq x$ gäller $0 < u \leq 1$ och vi har därför

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \left(\frac{n}{x}\right)^{-s} \frac{1}{s(s+1)} ds = 1 - \frac{n}{x}.$$

Vi multiplicerar nu båda led med $\Lambda(n)$ och summerar över alla $n \leq x$. Vi erhåller då enligt ekvation (19)

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n \leq x} \left(1 - \frac{n}{x}\right) \Lambda(n) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n \leq x} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{\Lambda(n)}{s(s+1)} ds.$$

Notera att integralen i högerledet är lika med 0 om $n > x$ (motsvarar fallet $u > 1$ i Lemma 4.5), så vi kan lika gärna summera till oändligheten. Vi erhåller således uttrycket

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{\Lambda(n)}{s(s+1)} ds.$$

Detta kan vi nu skriva som

$$\frac{\psi_1(x)}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} f_n(s) ds \tag{20}$$

där $2\pi i f_n(s) = \left(\frac{x}{n}\right)^s \frac{\Lambda(n)}{s(s+1)}$. För att underlätta räkningarna önskar vi nu byta ordning på serien och integralen, och för att göra detta räcker det att visa att serien

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} |f_n(s)| ds$$

konvergerar (se Theorem 10.26 i [2]). Partialsummorna av denna serie uppfyller

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |f_n(s)| ds &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^{N} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \left(\frac{x}{n}\right)^c \frac{\Lambda(n)}{|s||s+1|} ds \\ &= \frac{x^c}{2\pi i} \sum_{n=1}^{N} \frac{\Lambda(n)}{n^c} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{1}{|s||s+1|} ds.\end{aligned} \tag{21}$$

Vi ser att integralen i det sista ledet konvergerar, ty den kan jämföras med den konvergenta integralen $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2} dt$, så vi har

$$\frac{x^c}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{1}{|s||s+1|} ds = A$$

för någon konstant A. Vidare gäller, eftersom $\Lambda(n)/n^c \geq 0$ för alla $n \geq 1$, att

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\Lambda(n)}{n^c} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^c},$$

så (21) ger vidare att

$$\sum_{n=1}^{N} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} |f_n(s)| ds \leq A \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^c}$$

Serien i högerledet ovan konvergerar, vilket ses genom jämförelse med den konvergenta (eftersom $c > 1$) serien $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^c}$. Således har partialsummorna ett ändligt gränsvärde och serien (4.2) konvergerar. Vi kan därför byta ordning på summation och integration i högerledet av ekvation (20) för att erhålla

$$\begin{aligned}\frac{\psi_1(x)}{x} &= \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s} ds \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^s}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) ds,\end{aligned}$$

där vi har använt Sats 3.23. Dividerar vi nu denna ekvation med x erhålls satsen. □

Vi noterar nu att vi kan parametrisera integralen i ekvation (18) genom att sätta $s = c + it$ och på så sätt erhålla formeln

$$\begin{aligned}\frac{\psi_1(x)}{x^2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{(c-1)+it}}{(c+it)(c+1+it)} \left(-\frac{\zeta'(c+it)}{\zeta(c+it)}\right) dt \\ &= \frac{x^{c-1}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{it\ln x}}{(c+it)(c+1+it)} \left(-\frac{\zeta'(c+it)}{\zeta(c+it)}\right) dt.\end{aligned} \tag{22}$$

Vårt mål är som sagt att visa att högerledet konvergerar mot $1/2$ då $x \to \infty$. Problemet är faktorn x^{c-1} som, på grund av att $c > 1$, är uppåt obegränsad. För att göra oss av med denna faktor skulle vi vilja sätta $c = 1$, men enligt satsen gäller (22) endast för $c > 1$, och anledning till det är att med $c = 1$ så innehåller integranden en faktor $-\zeta'(1+it)/\zeta(1+it)$, vilken har en pol i punkten $t = 0$ med residyn 1 (se Sats 4.15). Vi vill på något sätt radera denna pol ur ekvationen, och vi ska snart visa hur vi gör det. Först nämner vi ett lemma som kommer behövas senare i beviset.

Lemma 4.7 (Riemann-Lebesgues lemma)**.** Antag att $f(x)$ är en integrerbar funktion på hela $\mathbb{R}$. Då gäller att

$$\lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{ikx}dx = 0$$

om $f(x)$ är absolutintegrerbar på samma intervall, alltså om integralen

$$\int_{\infty}^{\infty} |f(x)|dx$$

konvergerar.

Bevis. Se beviset till Theorem 2.2 i [12] □

Sats 4.8. Låt $c > 1$ vara givet. Om $x \geq 1$ så har vi

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1}h(s)ds \tag{23}$$

där

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right).$$

Bevis. Eftersom $c > 1$ är $c - 1 > 0$, så Lemma 4.5, denna gång med $k = 2$ och $u = 1/x$, ger att

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{(c-1)-\infty i}^{(c-1)+\infty i} \frac{x^z}{z(z+1)(z+2)}dz.$$

eftersom $u = 1/x \leq 1$. Vi gör nu variabelbytet $z = s - 1$ och erhåller

$$\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{(s-1)s(s+1)}ds. \tag{24}$$

Vi påminner om att Sats 4.6 gav att följande

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} \frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right)ds$$

samband gäller. Subtrahera ekvation (24) från denna, för att få

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i}\left(\frac{x^{s-1}}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right) - \frac{x^{s-1}}{(s-1)s(s+1)}\right)ds.$$

varpå förenkling av uttrycket i högerledet ger ekvation (23). □

Parametriserar vi denna integral på samma sätt som den vi fick i Sats 4.6 finner vi att ekvation (23) blir

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{x^{c-1}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(c+it)e^{it\ln x}dt. \tag{25}$$

Med denna nya integralrepresentation ser vi att påståendet $\psi_1(x) \sim \frac{x^2}{2}$ är ekvivalent med att högerledet i ekvation (25) går mot 0 då $x \to \infty$. Lemma 4.7 ger att integralen i högerledet går mot 0 om integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(c+it)|dt$$

konvergerar, och att detta sker är inte svårt att visa. Som tidigare konstaterat har vi dock den problematiska faktorn x^{c-1} framför integralen. Vi vill därför sätta $c = 1$ och för att integralen i ekvation (25) fortfarande ska gå mot 0 måste vi visa att integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)|dt$$

konvergerar. För att göra det måste vi först göra lite efterforskning i zetafunktionens beteende i en omgivning till linjen $\sigma = 1$.

4.3 Zetafunktionen på $\sigma = 1$

Vi ska nu studera hur zetafunktionen beter sig i en omgivning av linjen $\sigma = 1$, där som tidigare σ betecknar realdelen av det komplexa argumentet s, och för detta ändamål använder vi Definition 3.26 som är giltigt för $\sigma > 0$, och skriver, för något $x > 0$,

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s} + \frac{x^{1-s}}{s-1} - s\int_x^{\infty}\{w\}\frac{dw}{w^{s+1}} \tag{26}$$

där vi påminner om att $\{w\}$ betecknar decimaldelen av w. Vi använder även formeln för $\zeta'(s)$ som fås genom derivering av varje term i ekvation (26),

$$\begin{aligned}\zeta'(s) = &-\sum_{n \leq x} \frac{\ln n}{n^s} - \frac{x^{1-s}\ln x}{s-1} - \frac{x^{1-s}}{(s-1)^2} \\ &- \int_x^{\infty}\{w\}\frac{dw}{w^{s+1}} + s\int_x^{\infty}\{w\}\ln w\frac{dw}{w^{s+1}}.\end{aligned} \tag{27}$$

Att det går bra att derivera ekvation (26), specifikt att vi kan flytta in derivatan inuti integralen, följer från Leibniz integralregel, se Lemma II.3.3 i [3]. Vår strategi blir att först visa att det existerar övre begränsningar för $\zeta(s)$ och $\zeta'(s)$ i ett område runt ett delsegment av denna linje, för att sedan använda dessa begränsningar för att visa liknande begränsningar för funktionerna $1/\zeta(s)$ samt $\zeta'(s)/\zeta(s)$ på $\sigma = 1$. Vi kommer även att visa att $\zeta(s)$ är nollskild på denna linje, vilket vi visar genom en användbar olikhet (Sats 4.10).

Sats 4.9. För varje $A > 0$ finns det en konstant M (som beror av A) sådan att

$$|\zeta(s)| \leq M \ln t \qquad \text{och} \qquad |\zeta'(s)| \leq M(\ln t)^2 \tag{28}$$

för alla $s = \sigma + it$ med $\sigma \geq 1/2$ sådana att

$$\sigma > 1 - \frac{A}{\ln t} \qquad \text{och} \qquad t \geq e \tag{29}$$

Bevis. Om $\sigma \geq 2$ har vi

$$|\zeta(s)| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2)$$

samt

$$|\zeta'(s)| = \left|-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^\sigma} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2} = |\zeta'(2)|,$$

där vi har använt resultatet från Följdsats 3.21. Således är olikheterna (28) uppfyllda för lämpligt M. Antag därför att $\sigma < 2$ och $t \geq e$. Vi har då att

$$|s| \leq \sigma + t \leq 2 + t < 2t \quad \text{och} \quad |s-1| = \sqrt{(\sigma-1)^2 + t^2} \geq t$$

så att $1/|s-1| \leq 1/t$. Använder vi dessa olikheter tillsammans med uttrycket för $\zeta(s)$ från (26) får vi uppskattningen

$$\begin{aligned} |\zeta(s)| &\leq \left|\sum_{n \leq x} \frac{1}{n^s}\right| + \left|\frac{x^{1-s}}{s-1}\right| + |s| \left|\int_x^\infty \{w\} \frac{dw}{w^{s+1}}\right| \\ &\leq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{x^{1-\sigma}}{t} + 2t \int_x^\infty \frac{dw}{w^{\sigma+1}} \\ &= \sum_{n \leq x} \frac{1}{n^\sigma} + \frac{x^{1-\sigma}}{t} + \frac{2t}{\sigma x^\sigma}. \end{aligned} \tag{30}$$

För att uttrycka denna uppskattning för $|\zeta(s)|$ i lite mer påtagliga termer ska vi nu kika närmare på varje term i högerledet av (30). För den första termen ser vi att då $x > 0$ är godtyckligt kan vi välja $x = \lfloor t \rfloor$ så att $x \leq t < x + 1$ och $\ln n \leq \ln t$ för $n \leq x$. Olikheten (29) betyder att $1 - \sigma < A/\ln t$ varpå

$$\frac{1}{n^\sigma} = \frac{n^{1-\sigma}}{n} = \frac{1}{n} e^{(1-\sigma)\ln n} < \frac{1}{n} e^{A \ln n/\ln t} \leq \frac{1}{n} e^A = O\left(\frac{1}{n}\right). \tag{31}$$

Olikheten (31) gäller förstås även för $1/x^\sigma$, eftersom $\ln x \le \ln t$, så tillsammans med $t < x+1$ fås för den sista termen att

$$\frac{2t}{\sigma x^\sigma} \le \frac{2x+2}{\sigma x} e^A = O(1), \tag{32}$$

och för den mellersta termen fås på samma sätt att

$$\frac{x^{1-\sigma}}{t} = \frac{x}{t}\frac{1}{x^\sigma} \le \frac{1}{x^\sigma} = O\left(\frac{1}{x}\right) \tag{33}$$

eftersom $x \le t$. Allt sammantaget har vi därför enligt (30) att

$$|\zeta(s)| = O\left(\sum_{n\le x} \frac{1}{n^\sigma}\right) + O\left(\frac{1}{x}\right) + O(1) = O(\ln x) + O\left(\frac{1}{x}\right) + O(1) = O(\ln t),$$

eftersom $\ln x \le \ln t$, vilket visar första delen av satsen. Vi gör nu motsvarande undersökning av uttrycket (27) för $\zeta'(s)$. Vi får att

$$\begin{aligned}
|\zeta'(s)| \le & \left|\sum_{n\le x} \frac{\ln n}{n^s}\right| + \left|\frac{x^{1-s}\ln x}{s-1}\right| + \left|\frac{x^{1-s}}{(s-1)^2}\right| \\
&+ \left|\int_x^\infty \{w\}\frac{dw}{w^{s+1}}\right| + |s|\left|\int_x^\infty \{w\}\ln w \frac{dw}{w^{s+1}}\right| \\
&\le \sum_{n\le x} \frac{\ln x}{n^\sigma} + \frac{x^{1-\sigma}}{t}\ln n + \frac{x^{1-\sigma}}{t^2} + \int_x^\infty \frac{dw}{w^{\sigma+1}} + 2t\int_x^\infty \ln w \frac{dw}{w^{\sigma+1}} \\
&= \sum_{n\le x} \frac{\ln x}{n^\sigma} + \frac{x^{1-\sigma}}{t}\ln n + \frac{x^{1-\sigma}}{t^2} + \frac{1}{\sigma x^\sigma} + \frac{2t}{\sigma x^\sigma}\left(\ln x + \frac{1}{\sigma}\right).
\end{aligned}$$

På samma sätt som tidigare kollar vi på dessa termer var för sig. Av (31) följer att

$$\frac{\ln n}{n^\sigma} \le \frac{\ln t}{n} e^A = O\left(\frac{\ln t}{n}\right),$$

och det är uppenbart från (33) att

$$\frac{x^{1-\sigma}}{t}\ln x = O(\ln x) = O(\ln t).$$

Från (33) ser vi även att

$$\frac{x^{1-\sigma}}{t^2} = O(1)$$

och från (31) att

$$\frac{1}{\sigma x^\sigma} = O\left(\frac{1}{x}\right) = O(1).$$

Slutligen får vi från (32) att

$$O\left(\frac{2t}{\sigma x^{\sigma}}\left(\ln x + \frac{1}{\sigma}\right)\right) = O\left(\frac{2t}{\sigma x^{\sigma}}\right)(O(\ln x) + O(1)) = O(\ln x) = O(\ln t).$$

Allt som allt fås alltså att

$$\begin{aligned} |\zeta'(s)| &= O\left(\sum_{n\leq x}\frac{\ln t}{n^{\sigma}}\right) + O(\ln t) + O(1) + O(1) + O(\ln t) \\ &= O((\ln t)^2) + O(\ln t) + O(1) = O((\ln t)^2). \end{aligned}$$

□

Detta etablerar alltså övre begränsningar för $\zeta(s)$ och $\zeta'(s)$ i en omgivning till och på linjen $\sigma = 1$, åtminstone för $t \geq e$. Vi ska nu visa att $\zeta(1+it) \neq 0$ för varje reellt t. Beviset använder en olikhet som också kommer behövas senare i beviset, och som vi börjar med att visa.

Sats 4.10. Om $\sigma > 1$ och t är godtyckligt har vi att

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| \geq 1.$$

Bevis. Följdsats 3.23.1 gav, då $\sigma > 1$, att

$$\zeta(s) = \exp\left(\sum_{p^k}\frac{1}{kp^{ks}}\right)$$

där summan alltså tas över samtliga primtalspotenser. Denna ekvation kan ekvivalent skrivas

$$\zeta(s) = \exp\left(\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{p^{-ikt}}{kp^{k\sigma}}\right) = \exp\left(\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{e^{-ikt\ln p}}{kp^{k\sigma}}\right)$$

varpå vi erhåller (genom Eulers formel $e^{ix} = \cos x + i\sin x$) att

$$|\zeta(s)| = \exp\left(\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kt\ln p)}{kp^{ks}}\right).$$

Upprepad använding av denna formel med argumenten $s = \sigma$, $s = \sigma + it$, samt $s = \sigma + 2it$ ger:

$$\begin{aligned} \zeta(\sigma) &= \exp\left(\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kp^{k\sigma}}\right), \\ |\zeta(\sigma+it)| &= \exp\left(\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(kt\ln p)}{kp^{ks}}\right), \\ |\zeta(\sigma+2it)| &= \exp\left(\sum_p\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kt\ln p)}{kp^{ks}}\right). \end{aligned}$$

Potenslagar ger nu att:

$$\zeta(\sigma)^3 = \exp\left(\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{kp^{k\sigma}}\right),$$
$$|\zeta(\sigma+it)|^4 = \exp\left(\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\cos(kt\ln p)}{kp^{ks}}\right),$$

varpå vi slutligen får

$$\begin{aligned}&\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| \\ &= \exp\left(\sum_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3+4\cos(kt\ln p)+\cos(2kt\ln p)}{kp^{k\sigma}}\right).\end{aligned} \tag{34}$$

Låt för ett ögonblick $kt\ln p = \theta$. Notera att

$$\begin{aligned}3+4\cos\theta+\cos 2\theta = 3+4\cos\theta+2\cos^2\theta-1 &= 2(1+2\cos\theta+\cos^2\theta) \\ &= 2(1+\cos\theta)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Därmed är varje term i serien i (34) icke-negativ varför

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| \geq e^0 = 1.$$

□

Och nu till själva satsen:

Sats 4.11. För varje reellt $t \neq 0$ gäller att $\zeta(1+it) \neq 0$.

Bevis. Vi såg i Sats 4.10 att om $\sigma > 1$ så gäller för varje $t \in \mathbb{R}$ att

$$\zeta^3(\sigma)|\zeta(\sigma+it)|^4|\zeta(\sigma+2it)| \geq 1.$$

Denna olikhet kan genom division med faktorn $\sigma - 1$ skrivas om till

$$\big((\sigma-1)\zeta(\sigma)\big)^3 \left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4 |\zeta(\sigma+2it)| \geq \frac{1}{\sigma-1}. \tag{35}$$

Vi låter nu $\sigma \to 1^+$. Den första faktorn i vänsterledet går mot 1 då $\zeta(s)$ har residyn 1 i polen $s = 1$, se Sats 3.27. Enligt samma sats är $\zeta(s)$ analytisk för $\sigma > 0$, förutom i $s = 1$, och är därför kontinuerlig i $s = 1 + 2it$. Den tredje faktorn går således helt enkelt mot $|\zeta(1+2it)|$. Låt oss nu, för att erhålla en motsägelse, antaga att $\zeta(1+it) = 0$. I sådana fall får vi då $\sigma \to 1^+$ att

$$\left|\frac{\zeta(\sigma+it)}{\sigma-1}\right|^4 = \left|\frac{\zeta(\sigma+it)-\zeta(1+it)}{\sigma-1}\right|^4 \to |\zeta'(1+it)|^4,$$

eftersom $\zeta(s)$ är komplext deriverbar i det punkterade halvplanet $\{s = \sigma + it \in \mathbb{C} : \sigma > 0, s \neq 1\}$, (återigen Sats 3.27). I detta fall skulle alltså vänsterledet i (35) vid gränsövergången $\sigma \to 1^+$ övergå i det ändliga uttrycket

$$|\zeta'(1+it)|^4 |\zeta(1+2it)|$$

medan högerledet går mot $+\infty$. Denna motsägelse visar satsen. $\square$

Vi kommer nu använda Sats 4.10 igen för att visa följande olikheter:

Sats 4.12. Det finns en konstant $M > 0$ sådan att

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| < M(\ln t)^7 \qquad \text{och} \qquad \left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| < M(\ln t)^9 \tag{36}$$

då $\sigma \geq 1$ och $t \geq e$.

Bevis. Vi visar först olikheterna tämligen enkelt i fallet $\sigma \geq 2$. Bevisstrategin därefter för uppskattningen av $|1/\zeta(s)|$ är att genom en omskrivning av Sats 34 och användande av Sats 4.9 och Sats 4.11 erhålla en undre begränsning för $|\zeta(\sigma + it)|$ uttryckt i σ och t. Vi inför talet $1 < \alpha < 2$ och härleder för alla $1 \leq \sigma \leq \alpha$ en undre begränsning för $|\zeta(\sigma + it)|$ uttryckt i α och t. Därefter uttrycker vi α i t och väljer det sådant att vi erhåller den första delen av satsen.

Om $\sigma \geq 2$ får vi enligt Sats 3.23 att

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2)$$

och

$$\left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| = \left|\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Lambda(n)}{n^2},$$

där serien i högerledet av den nedre ekvationen konvergerar enligt vad vi sett tidigare. Olikheterna 36 är således uppfyllda i detta fall, givet förstås att M väljs tillräckligt stort. Antag därför att $1 \leq \sigma \leq 2$ och fortsatt att $t \geq e$. Olikheten i Sats 4.10 kan skrivas om till

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma + it)|} \leq \zeta(\sigma)^{3/4} |\zeta(\sigma + 2it)|^{1/4}, \tag{37}$$

Notera att vi inte riskerar att dividera med 0 här, eftersom $|\zeta(s)| > 0$ för $\sigma \geq 1$ enligt Sats (4.11). Som konstaterat i beviset till Sats 4.11 är uttrycket $(\sigma - 1)\zeta(\sigma)$ begränsat i en omgivning till $\sigma = 1$, och således även i hela intervallet $1 \leq \sigma \leq 2$. Låt D vara en konstant sådan att $(\sigma - 1)\zeta(\sigma) \leq D$ i detta intervall, då följer att $\zeta(\sigma) \leq \frac{D}{\sigma - 1}$ på $1 < \sigma \leq 2$. Vidare är enligt Sats 4.9 $|\zeta(\sigma + 2it)| \leq C \ln 2t = C \ln 2 + C \ln t \leq 2C \ln t$ på samma intervall, så (37) kan skrivas

$$\frac{1}{|\zeta(\sigma + it)|} \leq \frac{D^{3/4}(2C \ln t)^{1/4}}{(\sigma - 1)^{3/4}} = \frac{A(\ln t)^{1/4}}{(\sigma - 1)^{3/4}}$$

för något $A = (2D^3C)^{1/4} > 0$. Således gäller med $B = 1/A$ att

$$|\zeta(\sigma + it)| > \frac{B(\sigma - 1)^{3/4}}{(\ln t)^{1/4}} \tag{38}$$

för $1 < \sigma \leq 2$, $t \geq e$ (notera att det även gäller för $\sigma = 1$ enligt Sats 4.11). Låt nu α vara något tal på intervallet $1 < \alpha < 2$. Om $1 \leq \sigma \leq \alpha$ gäller att

$$|\zeta(\alpha + it) - \zeta(\sigma + it)| = \left|\int_\sigma^\alpha \zeta'(u + it)du\right| \leq \int_\sigma^\alpha |\zeta'(u + it)|du.$$

Applicerar vi nu uppskattningen för $\zeta'(s)$ från Sats 4.9 får vi att

$$\int_\sigma^\alpha |\zeta'(u + it)|du \leq D(\ln t)^2 \int_\sigma^\alpha du = (\alpha - \sigma)D(\ln t)^2 \leq (\alpha - 1)D(\ln t)^2.$$

Triangelolikheten ger nu att

$$|\zeta(\alpha+it)| = |\zeta(\sigma+it)+\zeta(\alpha+it)-\zeta(\sigma+it)| \leq |\zeta(\sigma+it)|+|\zeta(\alpha+it)-\zeta(\sigma+it)|$$

så att

$$\begin{aligned}
|\zeta(\sigma + it)| &\geq |\zeta(\alpha + it)| - |\zeta(\alpha + it) - \zeta(\sigma + it)| \\
&\geq |\zeta(\alpha + it)| - (\alpha - 1)D(\ln t)^2 \\
&\geq \frac{B(\alpha - 1)^{3/4}}{(\ln t)^{1/4}} - (\alpha - 1)D(\ln t)^2.
\end{aligned}$$

Denna olikhet gäller för $1 \leq \sigma \leq \alpha$ och från (38) ser vi att det även gäller då $\alpha \leq \sigma \leq 2$ eftersom $(\sigma - 1)^{3/4} \geq (\alpha - 1)^{3/4}$. Sammanfattningsvis gäller alltså om $1 \leq \sigma \leq 2$ och $t \geq e$ att

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq \frac{B(\alpha - 1)^{3/4}}{(\ln t)^{1/4}} - (\alpha - 1)D(\ln t)^2$$

för alla α sådana att $1 < \alpha < 2$. Vi gör nu α beroende av t och väljer det sådant att den första termen i olikheten ovan är dubbelt så stor som den andra termen. Löser vi ut $\alpha - 1$ ur ekvationen

$$\frac{B(\alpha - 1)^{3/4}}{(\ln t)^{1/4}} = 2(\alpha - 1)D(\ln t)^2$$

ser vi att vi måste välja α sådan att

$$\alpha - 1 = \left(\frac{B}{2D}\right)^4 \frac{1}{(\ln t)^9}.$$

Uppenbarligen gäller att $\alpha > 1$, men det gäller också att $\alpha < 2$ om t är tillräckligt stort, säg $t \geq t_0$ (det går förstås att uttrycka t_0 i konstanterna B och

D men det exakta värdet är inte så intressant). Således har vi för $t \geq t_0$ och $1 \leq \sigma \leq 2$ att

$$|\zeta(\sigma + it)| \geq (\alpha - 1)D(\ln t)t = \left(\frac{B}{2D}\right)^4 \frac{D}{(\ln t)^7} = \frac{M}{(\ln t)^7}.$$

Olikheten gäller även med annat M om $e \leq t \leq t_0$, ty så länge $t \geq e$ gäller att

$$\alpha \leq 1 + \left(\frac{B}{2D}\right)^4.$$

Per definition är D är någon konstant sådan att $(\sigma - 1)\zeta(\sigma) \leq D$ för $1 \leq \sigma \leq 2$ och $|\zeta'(\sigma + it)| \leq D(\ln t)^2$ för $\sigma \geq 1, t \geq e$, så det finns ingen övre begränsning för vårt val av D. Notera dessutom att B är omvänt proportionellt mot $D^{3/4}$ så om vi väljer D större får vi samtidigt ett mindre B, så den övre begränsningen för α blir mindre. Således kan vi alltid välja D så att

$$\alpha \leq 1 + \left(\frac{B}{2D}\right)^4 < 1 + 1 = 2$$

Vi har således bevisat satsens första olikhet, att

$$\left|\frac{1}{\zeta(s)}\right| < \frac{1}{M}(\ln t)^7$$

om $\sigma \geq 1$ och $t \geq e$. För att visa den andra olikheten, för $|\zeta'(s)/\zeta(s)|$, använder vi Sats 4.9 och får därmed en extra faktor $(\ln t)^2$ jämfört med uppskattningen för $|1/\zeta(s)|$. $\square$

Nu när vi har erhållit en del kunskap om zetafunktionens beteende i området runt linjen $\sigma = 1$ är vi nästan redo att slutföra beviset. Vi behöver dock ytterligare en sats angående beteendet av kvoten $|\zeta'(s)/\zeta(s)|$ på linjen $\sigma = 1$, och för att bevisa satsen visar vi först ett lemma från den komplexa analysen.

Lemma 4.13. Antag att $f_1(z)$ och $f_2(z)$ är två funktioner som båda har enkla poler i $z = z_0$ med residyn a. Då är deras differens

$$f_1(z) - f_2(z)$$

analytisk i $z = z_0$.

Bevis. Då $f_1(z)$ och $f_2(z)$ har enkla poler med residyn a i $z = z_0$ kan vi i en omgivning av $z = z_0$ skriva dem enligt

$$f_1(z) = \frac{a}{z - z_0} + g_1(z)$$

och

$$f_2(z) = \frac{a}{z - z_0} + g_2(z)$$

där $g_1(z)$ och $g_2(z)$ är analytiska i $z = z_0$. För deras differens gäller då att

$$f_1(z) - f_2(z) = g_1(z) - g_2(z)$$

vilket uppenbarligen är analytiskt i $z = z_0$, då $g_1(z)$ och $g_2(z)$ är det. $\square$

Lemma 4.14. Om $f(s)$ har en pol av ordning k vid $s = \alpha$ så har kvoten $f'(s)/f(s)$ en enkel pol i samma punkt med residyn $-k$.

Bevis. Då $f(s)$ har en pol av ordning k i punkten $s = \alpha$ kan vi skriva

$$f(s) = \frac{g(s)}{(s-\alpha)^k}$$

för någon lämplig funktion $g(s)$ som är analytisk och nollskild i $s = \alpha$. Därmed har vi för alla s i en omgivning till α följande:

$$f'(s) = \frac{g'(s)}{(s-\alpha)^k} - \frac{kg(s)}{(s-\alpha)^{k+1}} = \frac{g(s)}{(s-\alpha)^k}\left(\frac{g'(s)}{g(s)} - \frac{k}{s-\alpha}\right) = f(s)\left(\frac{g'(s)}{g(s)} - \frac{k}{s-\alpha}\right).$$

Alltså gäller för kvoten $f'(s)/f(s)$ att

$$\frac{f'(s)}{f(s)} = \frac{g'(s)}{g(s)} - \frac{k}{s-\alpha}$$

vilket uppenbarligen har residyn $-k$ i punkten $s = \alpha$ eftersom termen $g'(s)/g(s)$ är analytisk i α och därför har residyn 0. □

Sats 4.15. Funktionen

$$-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$$

är analytisk i punkten $s = 1$.

Bevis. Vi har sedan tidigare (Sats 3.27) visat att $\zeta(s)$ har en enkel pol i punkten $s = 1$. Lemma 4.14 ger därför att kvoten $-\zeta'(s)/\zeta(s)$ har en enkel pol i samma punkt med residyn 1. Uppenbarligen gäller detsamma för funktionen $1/(s-1)$, så deras differens är analytisk i punkten $s = 1$, enligt Lemma 4.13. □

Vi vet nu en hel del om hur zetafunktionen beter sig på linjen $\sigma = 1$, och är därför redo att äntligen formulera en slutlig integralrepresentation för $\psi_1(x)$.

4.4 En sista integralrepresentation för ψ_1

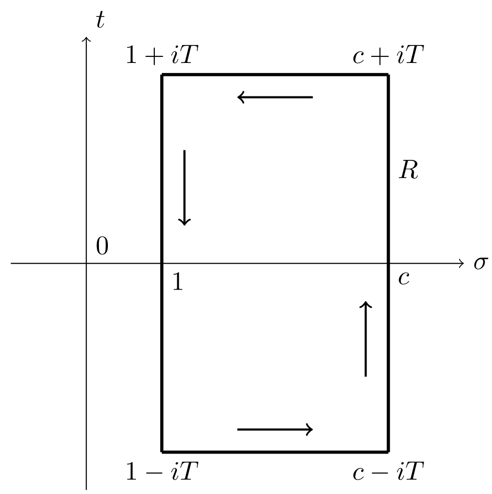
Vi påminner om Sats 4.8, där vi visade att vi för $c > 1$ och $x \geq 1$ kan skriva

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1}h(s)ds,$$

där vi har satt

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)}\left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}\right)$$

Med kunskapen vi har erhållit ska vi nu visa att vi kan flytta integrationsvägen från $\sigma = c$ till $\sigma = 1$.



Figur 3: Kurva i beviset till Sats 4.16

Sats 4.16. För $x \geq 1$ har vi att

$$\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(1+it)e^{it\ln x}dt,$$

med $h(s)$ enligt ovan.

Bevis. Den övergripande strategin för detta bevis är att visa att integralen av $x^{s-1}h(s)$ längs de vertikala segmenten i Figur 3, vars längd beror av en konstant T, är lika med varandra då $T \to \infty$, bortsett från ett teckenbyte. För detta ändamål visar vi att hela kurvintegralen längs kurvan är lika med 0, samt att integralen längs de horisontella segmenten är lika med 0 då $T \to \infty$. Detta visar att integralen från Sats 4.8 kan flyttas till linjen $\sigma = 1$. Parametriseras denna integral erhålls satsen.

Vi börjar med att visa att integralen av $x^{s-1}h(s)$ längd med hela kurvan i Figur 3 är lika med 0, och för detta ändamål applicerar vi Cauchys integralsats. Om $\sigma \geq 1$ är $\zeta(s) \neq 0$, ty om $\sigma > 1$ så kan $\zeta(s)$ skrivas som en konvergent oändlig produkt (Sats 3.22) och om $\sigma = 1$ har vi Sats 4.11. Vidare är enligt Sats 4.15 faktorn $-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1}$ analytisk i punkten $s = 1$ varför hela funktionen $h(s)$ är analytisk på och innanför rektangeln R. Detsamma gäller då naturligtvis hela integranden $x^{s-1}h(s)$, varför Cauchys integralsats ger att konturintegralen av $x^{s-1}h(s)$ längs med R är lika med 0. Vi visar nu att integralen längs de horisontella segmenten går mot 0 då $T \to \infty$, vilket då medför att integralen längs de vertikala linjestyckena är lika, i gränsen $T \to \infty$. Med lite räkningar, som utelämnas här, kan man visa att $|x^{s-1}h(s)|$ antar samma värden för komplexkonjugerade s, så det räcker att visa att integralen går mot 0 på det övre linjesegmentet, där $t = T$. På denna har vi förstås att $|s+1| \geq |s| \geq |\Im(s)| = T$ varför

$$\left|\frac{1}{s(s+1)}\right| \leq \frac{1}{|s|^2} \leq \frac{1}{T^2}$$

och på samma sätt

$$\left|\frac{1}{s(s+1)(s-1)}\right| \leq \frac{1}{T^3} \leq \frac{1}{T^2},$$

där vi använder att $|s-1| \geq \Im(s) = T$ tack vare att $\sigma \geq 1$. Vidare visade Sats 4.12 att $|\zeta'(s)/\zeta(s)| \leq M(\ln t)^9$ för något M om $\sigma \geq 1$ och $t \geq e$. Vi har därför

$$|h(s)| \leq \left|\frac{1}{s(s+1)}\right| \left|\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}\right| + \left|\frac{1}{s(s+1)(s-1)}\right| \leq \frac{M(\ln T + 1)^9}{T^2} \tag{39}$$

så länge $T \geq e$, vilket vidare ger att

$$\left|\int_{1+iT}^{c+iT} x^{s-1}h(s)ds\right| \leq \int_{1+iT}^{c+iT} |x^{s-1}||h(s)|ds \leq \int_1^c x^{c-1}\frac{M(\ln T+1)^9}{T^2}d\sigma = Mx^{c-1}\frac{(\ln T+1)^9}{T^2}(c-1).$$

Detta uttryck går mot 0 då $T \to \infty$, så vi har för kurvintegralen längs R att

$$\begin{aligned} 0 = \oint_R x^{s-1}h(s)ds &= \int_{c-iT}^{c+iT} x^{s-1}h(s)ds + \int_{c+iT}^{1+iT} x^{s-1}h(s)ds \\ &+ \int_{1+iT}^{1-iT} x^{s-1}h(s)ds + \int_{1-iT}^{c-iT} x^{s-1}h(s)ds \\ &\to \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s-1}h(s)ds + \int_{1+i\infty}^{1-i\infty} x^{s-1}h(s)ds \end{aligned}$$

då $T \to \infty$. Således har vi

$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{s-1}h(s)ds = -\int_{1+i\infty}^{1-i\infty} x^{s-1}h(s)ds = \int_{1-i\infty}^{1+i\infty} x^{s-1}h(s)ds,$$

vi har alltså framgångsrikt flyttat integralen från linjen $\sigma = c$ till $\sigma = 1$. På linjen $\sigma = 1$ kan vi parametrisera integrationsvägen genom $s = 1 + it$ och skriva integralen som

$$\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} x^{s-1}h(s)ds = i\int_{-\infty}^{\infty} x^{it}h(1+it)dt = i\int_{-\infty}^{\infty} h(1+it)e^{it\ln x}dt,$$

vilker visar att

$$\begin{aligned} \frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{x}\right)^2 &= \frac{1}{2\pi i}\int_{c-\infty i}^{c+\infty i} x^{s-1}h(s)ds \\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} x^{s-1}h(s)ds \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(1+it)e^{it\ln x}dt. \end{aligned}$$

□

För att erhålla den asymptotiska formeln för $\psi_1(x)$ måste vi nu visa att integralen i högerledet av Sats 4.16 går mot 0 då $x \to \infty$. Som vi nämnde i diskussionen efter Sats 4.8 kan vi visa detta genom att applicera Lemma 4.7 och visa att integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)| dt$$

konvergerar. Vi gör detta nu.

Sats 4.17. Integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)| dt,$$

där

$$h(s) = \frac{1}{s(s+1)} \left(-\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} - \frac{1}{s-1} \right),$$

är konvergent.

Bevis. För att visa att integralen konvergerar delar vi upp den i de tre delarna

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)| dt = \int_{-\infty}^{-e} + \int_{-e}^{e} + \int_{e}^{\infty}.$$

och noterar att integranden i den första och sista integralen begränsas av

$$|h(1+it)| \leq \frac{M(\ln t + 1)^9}{t^2}$$

enligt ekvation (39), så dessa två integraler är konvergenta. I den mellersta integralen är integranden begränsad förutom i punkten $s = 1$ där vi visat att integranden är analytisk. Således är även den och därmed hela integralen konvergent. □

Då integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(1+it)| dt$$

är konvergent ger Lemma 4.7 att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} h(1+it) e^{it \ln x} dt = 0.$$

Således får vi från Sats 4.16 att

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\psi_1(x)}{x^2} - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right) \right) = 0,$$

alltså att $\psi_1(x)/x^2 \to \frac{1}{2}$ då $x \to \infty$ eller ekvivalent att $\psi_1(x) \sim x^2/2$. Deriverar vi båda led av denna asymptotiska formel (vilket är giltigt tack vare Lemma 4.3) så erhålls resultatet

$$\psi(x) \sim x.$$

Vi har nu visat den asymptotiska formel för $\psi(x)$ vi ämnade bevisa, så vi är nästan helt klara. Det återstår att visa att denna formel är ekvivalent med primtalssatsen, så vi avslutar beviset med detta.

4.5 Bevis för ekvivalens av asymptotiska formler för $\psi(x)$ och $\pi(x)$

Vi erinrar oss Tjebysjovs första funktion ϑ, se Definition 3.5. Vi börjar med att visa att det asymptotiska beteendet av ϑ är tätt sammanfogat med det motsvarande för ψ.

Sats 4.18. Den asymptotiska formeln

$$\vartheta(x) \sim x$$

är ekvivalent med att

$$\psi(x) \sim x.$$

Bevis. Strategin här är att uttrycka $\psi(x)$ i termer av $\vartheta(x)$ varifrån vi kan erhålla en uppskattning för differensen av kvoterna $\psi(x)/x$ och $\vartheta(x)/x$. Visar vi att denna differens går mot 0 då $x \to \infty$ så medförs att gränsvärdet av $\psi(x)/x$ då $x \to \infty$ existerar om och endast om motsvarande existerar för $\vartheta(x)/x$. Satsens slutsats är ett specialfall av detta. Nu gör vi detta.

Enligt definitionen av $\psi(x)$ och $\Lambda(n)$ (Definition 3.4 och 3.1) gäller att

$$\psi(x) = \sum_{n \leq x} \Lambda(n) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{p \leq x^{1/m}} \ln p.$$

Summan ovan är egentligen en ändlig summa, då mängden av primtal mindre än eller lika med $x^{1/m}$ är tom för tillräckligt stora m. Närmare bestämt händer detta då $x^{1/m} < 2$, eller då

$$m > \frac{\ln x}{\ln 2} = \log_2 x.$$

Således kan vi skriva

$$\psi(x) = \sum_{m \leq \log_2 x} \sum_{p \leq x^{1/m}} \ln p.$$

Denna summa kan nu med definitionen av ϑ tillhands skrivas

$$\psi(x) = \sum_{m \leq \log_2 x} \vartheta(x^{1/m}).$$

Uppenbarligen gäller att $\psi(x) - \vartheta(x) > 0$, eftersom termerna i summan för $\vartheta(x)$ utgör en äkta delmängd av termena i summan för $\psi(x)$. Vidare gäller att

$$\psi(x) - \vartheta(x) = \sum_{m \leq \log_2 x} \vartheta(x^{1/m}) - \vartheta(x) = \sum_{2 \leq m \leq \log_2 x} \vartheta(x^{1/m}).$$

Vi ser även från definitionen av ϑ samt den triviala olikheten $\pi(t) \leq t$ att

$$\vartheta(x) = \sum_{p \leq x} \ln p \leq \ln x \sum_{p \leq x} 1 = \pi(x) \ln x \leq x \ln x$$

så vi har för differensen $\psi(x) - \vartheta(x)$ olikheterna

$$\begin{aligned} 0 \le \psi(x) - \vartheta(x) &\le \sum_{2 \le m \le \log_2 x} x^{1/m} \ln x^{1/m} \le (\log_2 x)\sqrt{x} \ln \sqrt{x} \\ &= \frac{\ln x}{\ln 2} \frac{\sqrt{x}}{2} \ln x = \frac{\sqrt{x}(\ln x)^2}{2 \ln 2}. \end{aligned}$$

Genom division med x övergår denna olikheten i

$$0 \le \frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \le \frac{(\ln x)^2}{2 \ln 2 \sqrt{x}},$$

Eftersom $\lim_{x\to\infty} \frac{(\ln x)^2}{2 \ln 2 \sqrt{x}} = 0$ gäller alltså att

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{\psi(x)}{x} - \frac{\vartheta(x)}{x} \right) = 0,$$

det vill säga att gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x}$ existerar om och endast om gränsvärdet $\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x}$ existerar, och gränsvärdena är i sådana fall lika. Speciellt gäller att

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x} = 1$$

om och endast om

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\vartheta(x)}{x} = 1.$$

Detta visar satsen. □

Sats 4.19. För $x \ge 2$ har vi att

$$\vartheta(x) = \pi(x) \ln x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt$$

samt att

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\ln t)^2} dt.$$

Bevis. Låt $1_{\mathcal{P}}(n)$ beteckna den karakteristiska funktionen för primtal, alltså funktionen

$$1_{\mathcal{P}}(n) = \begin{cases} 1 & \text{om } n \text{ är ett primtal} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Då kan vi skriva funktionerna $\pi(x)$ och $\vartheta(x)$ enligt

$$\pi(x) = \sum_{n \le x} 1_{\mathcal{P}}(n) \quad \text{och} \quad \vartheta(x) = \sum_{p \le x} \ln p = \sum_{n \le x} 1_{\mathcal{P}}(n) \ln n.$$

Använder vi nu Lemma 4.1 med $a(n) = 1_{\mathcal{P}}(n)$, $f(x) = \ln x$, och $y = 1$ så har vi $A(x) = \sum_{n \leq x} 1_{\mathcal{P}}(n) = \pi(x)$ och erhåller därför

$$\begin{aligned}\vartheta(x) &= \sum_{n \leq x} 1_{\mathcal{P}}(n) \ln n \\ &= \pi(x) \ln x - \pi(1) \ln 1 - \int_1^x \frac{\pi(t)}{t} dt = \pi(x) \ln x - \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt\end{aligned}$$

då $\pi(x) = 0$ för alla $x < 2$. Detta visar det första påståendet i satsen. Låt nu $b(n) = 1_{\mathcal{P}}(n) \ln n$ och skriv

$$\pi(x) = \sum_{3/2 \leq n \leq x} \frac{b(n)}{\ln n} \quad \text{samt} \quad \vartheta(x) = \sum_{n \leq x} b(n).$$

Notera att vi här börjar summationen för $\pi(x)$ i $y = 3/2$ istället för $y = 1$ för att undvika division med 0, eftersom 1 inte är ett primtal förändras inte summan av detta byte. Använder vi återigen Lemma 4.1 med $a(n) = b(n)$, $f(x) = 1/\ln x$, samt $y = 3/2$ erhåller vi

$$\pi(x) = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} - \frac{\vartheta(3/2)}{3/2} + \int_{3/2}^x \frac{\vartheta(t)}{t(\ln t)^2} dt = \frac{\vartheta(x)}{\ln x} + \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\ln t)^2} dt$$

eftersom $\vartheta(x) = 0$ för $x < 2$. Båda påståenden i satsen är nu bevisade. □

Sats 4.20. Den asymptotiska formeln

$$\psi(x) \sim x$$

är ekvivalent med primtalssatsen,

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}.$$

Bevis. Vi ska först visa att de asymptotiska formlerna $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ och $\vartheta(x) \sim x$ är ekvivalenta. Eftersom vi sedan tidigare (Sats 4.18) har att $\vartheta(x) \sim x$ är ekvivalent med att $\psi(x) \sim x$ så följer då att $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$är ekvivalent med $\psi(x) \sim x$.

Från Sats 4.19 har vi att

$$\frac{\vartheta(x)}{x} = \frac{\pi(x) \ln x}{x} - \frac{1}{x} \int_2^x \frac{\pi(t)}{t} dt \tag{40}$$

samt att

$$\frac{\pi(x) \ln x}{x} = \frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{\ln x}{x} \int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\ln t)^2} dt. \tag{41}$$

Vi visar först att $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ medför att $\psi(x) \sim x$. Antag således att

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x) \ln x}{x} = 1,$$

det följer att $\frac{\pi(t)}{t} = O\left(\frac{1}{\ln t}\right)$ varpå vi har för integralen i (40) att

$$\frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt = \frac{1}{x}\int_2^x O\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt = O\left(\frac{1}{x}\int_2^x \frac{dt}{\ln t}\right).$$

Vidare har vi att

$$\begin{aligned}\int_2^x \frac{dt}{\ln t} &= \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\ln t} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\ln t} \\ &\leq \int_2^{\sqrt{x}} \frac{dt}{\ln 2} + \int_{\sqrt{x}}^x \frac{dt}{\ln \sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2}{\ln 2} + \frac{x-\sqrt{x}}{\ln \sqrt{x}} \leq \frac{\sqrt{x}}{\ln 2} + \frac{x-\sqrt{x}}{\ln \sqrt{x}}\end{aligned}$$

vilket medför att

$$\frac{1}{x}\int_2^x \frac{dt}{\ln t} \leq \frac{\sqrt{x}}{x\ln 2} + \frac{x-\sqrt{x}}{x\ln\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}\ln 2} + \frac{1-1/\sqrt{x}}{\ln\sqrt{x}} \to 0$$

då $x \to \infty$. Således gäller att om $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ så ger (40) att

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\vartheta(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln x}{x} - \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\int_2^x \frac{\pi(t)}{t}dt = 1.$$

Antag nu istället att $\vartheta(x) \sim x$. Detta medför att $\vartheta(t) = O(t)$ varför vi har för integralen i (41) att

$$\frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\ln t)^2}dt = O\left(\frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2}\right).$$

På precis samma sätt som tidigare har vi vidare att

$$\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} \leq \frac{\sqrt{x}}{(\ln 2)^2} + \frac{x-\sqrt{x}}{(\ln\sqrt{x})^2}$$

varför

$$\frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{dt}{(\ln t)^2} \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}(\ln 2)^2} + 2\,\frac{1-1/\sqrt{x}}{\ln x} \to 0$$

då $x \to \infty$. Alltså gäller att om $\vartheta(x) \sim x$ så ger (41) att

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)\ln x}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\vartheta(x)}{x} + \lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}\int_2^x \frac{\vartheta(t)}{t(\ln t)^2}dt = 1.$$

Detta visar att de asymptotiska formlerna $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ och $\vartheta(x) \sim x$ är ekvivalenta. Tillsammans med Sats 4.18 visar detta att den asymptotiska formeln $\psi(x) \sim x$ är ekvivalent med primtalssatsen, $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$. $\square$

5 Riemannhypotesen och primtalsräkning

Som vi vid flertalet tillfällen har nämnt (se t.ex. inledningen till Avsnitt 3.4) kan $\zeta(s)$ sånär som på en enkel pol i $s = 1$ utvidgas till en analytisk funktion i hela det komplexa talplanet. Vidare kan det visas att funktionalekvationen

$$\zeta(s) = 2(2\pi)^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s)\zeta(1-s) \tag{42}$$

är giltig för samtliga $s \in \mathbb{C}$ (se Theorem 12.7 i [1]). Eftersom $\sin \frac{\pi s}{2}$ har nollställen i (bland annat) $s = -2n$ för alla $n \in \mathbb{N}$, ser vi att $\zeta(-2n) = 0$ eftersom de övriga faktorerna i högerledet är ändliga. Vi ser alltså att $\zeta(s)$ har nollställen i de jämna negativa heltalen, dessa nollställen kallas för zetafunktionens triviala nollställen. Man kan tänka sig att samma sak borde gälla för de jämna positiva heltalen där $\sin \frac{\pi s}{2}$ också har nollställen, men där har $\Gamma(1-s)$ enkla poler (se den avslutande diskussion i Avsnitt 3.5), och det råkar vara så att nollställena från sinusfunktionen och polerna från gammafunktionen tar ut varandra. Att detta sker är i själva verket en direkt konsekvens av denna funktionalekvation, ty om denna kan visas gälla för de jämna positiva heltalen måste högerledet vara ändligt eftersom det följer direkt från den första definitionen (3.19) av $\zeta(s)$ att $0 < \zeta(s) < \infty$ då $\sigma > 1$.

Har då $\zeta(s)$ inga nollställen förutom de så kallat triviala? Jodå, som namnet antyder har man även hittat nollställen som är *icke-triviala*, det märkliga är att samtliga hittills funna icke-triviala nollställen har realdel 1/2. Detta beteende av de icke-triviala nollställena var känt för Riemann redan när han för första gången formulerade sin zetafunktion 1859, faktum är att han själv höll det för troligt att varje icke-trivialt nollställe till zetafunktionen har realdel 1/2, något han dock inte lyckades bevisa. Denna förmodan har kommit att kallas för *Riemannhypotesen* och är till denna dag ett av matematikens stora olösa problem. Stor möda har lagts på att hitta nollställen till $\zeta(s)$ för att antingen motbevisa eller bekräfta hypotesen och många nollställen har också hittats, samtliga med realdel 1/2. Att samtliga icke-triviala nollställen måste ligga i den så kallat kritiska remsan $0 < \sigma < 1$ följer från funktionalekvationen (42). Vi inser detta genom följande falluppdelning. Om $\sigma > 1$ är zetafunktionen en absolutkonvergent serie med nollskilda termer, och således nödvändigtvis nollskild. Om $\sigma = 1$ är $\zeta(s)$ nollskild tack vare Sats 4.11. Om $\sigma = 0$ är $\sin \frac{\pi s}{2}$ endast lika med noll då $s = 0$, men i den punkten har $\zeta(1-s)$ en pol. I övrigt är samtliga faktorer i högerledet nollskilda (återigen tack vare Sats 4.11). Om $\sigma < 0$ är gammafunktionen och zetafunktionen i högerledet av funktionalekvationen positiva, och nollställena kan bara komma från sinusfunktionen, men dessa är precis de triviala nollställena. Således kan inga icke-triviala nollställen ligga utanför remsan $0 < \sigma < 1$. Vidare kan man visa att nollställena är symmetriskt placerade med avseende på den reella axeln samt den ”kritiska linjen” $\sigma = 1/2$.

Att Riemannhypotesen är en av de allra mest eftertraktade olösta problemen i matemikens historia är ingen slump, ty implikationerna som skulle följa av ett eventuellt bevis för hypotesen är många. Inom ramen för denna uppsats gäller detta feltermen i uppskattningen för $\pi(x)$ som primtalssatsen handlar om.

Notera att primtalssatsen 2.5 etablerar att $\pi(x)$ beter sig som kvoten $x/\ln x$ för stora x, men såsom vi har formulerat satsen vet vi ingenting om hur bra denna uppskattning är för olika stora x. När de la Vallée Poussin formulerade sitt ursprungliga bevis för primtalssatsen 1896 gjorde han det tillsammans med en uppskattning av det absoluta felet av den asymptotiska formeln $\pi(x) \sim \mathrm{li}(x)$, som ju är ekvivalent till vår formulering av primtalssatsen (se Avsnitt 2.4). Hans uppskattning för det absoluta felet var

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| \leq Kxe^{-c\sqrt{\ln x}},$$

och trots att försök har gjorts så har matematiker sedan dess inte lyckats reducera denna övre gräns särskilt mycket. Det är här Riemannhypotesen kommer in. Man kan nämliga visa att om hypotesen är sann, alltså om samtliga icke-triviala nollställen till $\zeta(s)$ har realdel $1/2$, så gäller att

$$|\pi(x) - \mathrm{li}(x)| = O(x^{\alpha}) \tag{43}$$

för alla $\alpha > 1/2$. Denna implikation är dessutom reversible, det vill säga att om det kan visas att (43) gäller för vilket $\alpha > 1/2$ som helst, så följer att Riemanns hypotes är sann. Precis som för Riemannhypotesen har otaliga numeriska beräkningar gjorts vilka bekräftar (43), men ännu har inget definitivt bevis hittats.

Litteraturförteckning

[1] Tom Apostol. *Introduction to Analytic Number Theory*. Springer, 1976. ISBN: 0-387-90163-9.

[2] Tom Apostol. *Mathematical Analysis*. Addison-Wesley, 1974. ISBN: 978-0201002881.

[3] Eberhard Freitag & Rolf Busam. *Complex Analysis*. Springer, 2005. ISBN: 3-540-25724-1.

[4] Philip J. Davis. *Leonhard Euler's Integral: An Historical Profile of the Gamma Function*. URL: https://web.archive.org/web/20120607110916/http://mathdl.maa.org/images/upload_library/22/Chauvenet/Davis.pdf. (hämtad: 12.05.2024).

[5] Adam Harper. *Lecture notes 1 for Cambridge part III course on 'the Riemann zeta function', lent 2014*. URL: https://warwick.ac.uk/fac/sci/maths/people/staff/harper/zetacoursenotes1.pdf. (hämtad: 07.05.2024).

[6] G.J.O. Jameson. *The Prime Number Theorem*. Cambridge University Press, 2003. ISBN: 0-521-81411-1.

[7] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw Hill, 1976. ISBN: 0-07-054235-X.

[8] E. B. Saff & A. D. Snider. *Fundamentals of Complex Analysis with Applications to Engineering and Science*. Pearson, 2013. ISBN: 978-1292023755.

[9] Michael Stoll. *Introductory Complex Analysis*. URL: https://www.mathe2.uni-bayreuth.de/stoll/lecture-notes/IntroductoryComplexAnalysis.pdf. (hämtad: 13.05.2024).

[10] Andrzej Szulkin & Martin Tamm. *Analytiska funktioner, likformig konvergens och potensserier*. URL: https://kurser.math.su.se/pluginfile.php/176416/mod_resource/content/1/AnLikf.pdf. (hämtad: 10.05.2024).

[11] Hugh L. Montgomery & Robert C. Vaughan. *Multiplicative Number Theory I. Classical Theory*. Cambridge University Press, 2007. ISBN: 0-521-84903-9.

[12] Anders Vretblad. *Fourier Analysis and Its Applications*. Springer, 2003. ISBN: 0-387-00836-5.