SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Linjära invarianter i ramseyteori

av

Aron Benedicto

2024 - No K26

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Linjära invarianter i ramseyteori

Aron Benedicto

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Jörgen Backelin

2024

Abstract

Large Ramsey numbers are notoriously difficult to compute. In order to compute lower Ramsey numbers we have to investigate relatively few cases. Usually we can compute them by applying the pigeonhole principle iteratively. However for larger Ramsey numbers this method is ineffective since there are too many cases we need to investigate. So in order to rule out cases we use methods such as algorithms, probabilistics or linear invariants. This thesis will investigate how we can use linear invariants in Ramsey theory. By reformulating the problem in terms of complete subgraphs and independence number allows us to experiment with the relation between the graphs number of nodes, number of edges and independence number. It turns out that there are linear combinations of these three variables that exhibits interesting properties for triangle-free graphs. We will use monoid theory to show why we can create these linear invariants. We will then prove that two different linear invariants will always give us a positive value if the graph is triangle-free. Using these and some other linear invariants we will compute upper limits for different $R(3, k)$.

Sammanfattning

Högre ramseytal är ökänt svåra att beräkna. När vi beräknar lägre ramseytal behöver vi undersöka relativt få fall. Oftast kan vi hitta dem genom att tillämpa lådprincipen iterativt. För högre ramseytal är antalet fall vi måste undersöka för många för såna metoder. Så för att utesluta fall för högre ramseytal används exempelvis algoritmer, probabilistik och linjära invarianter. Den metod vi kommer att fokusera på i den här uppsatsen är linjära invarianter. Genom att omformulera frågan i termer av kompletta delgrafer och oberoendetal så kan man experimentera med sambandet mellan nodtal, kanttal och oberoendetal. Det visar sig att det finns linjära kombinationer med intressanta egenskaper för triangelfria grafer. I det här arbetet kommer vi att tillämpa teorin om monoider för att förstå varför vi kan skapa dessa linjära invarianter. Vi kommer sedan ge ett bevis för att två olika linjära invarianter ger oss positiva värden för alla triangelfria grafer. Vi kommer sedan använda dem för att hitta övre begränsningar på olika $R(3, k)$.

Förord

Jag vill först och främst tacka min handledare, Jörgen Backelin, för hans stöd, vägledning och feedback. Jag stötte på ramseyteori för första gången under mitt gymnesiearbete så jag är väldigt glad att jag fick möjligheten att fördjupa mig ytterligare i ämnet. Jag vill också uttrycka min tacksamhet till mina vänner och närstående för deras hjälp och uppmuntran. Utan deras stöd skulle detta arbete inte ha varit möjligt.

Innehåll

1 Definitioner

I detta avsnitt kommer vi gå igenom centrala begrepp som används i det här arbetet. *Positiv* betyder att ett tal är större än eller lika med noll och ett negativt tal är strikt mindre än noll. I detta arbete kommer noll ingå i de naturliga talen. Ergo används för att visa att ett påstående är en logisk konsekvens av tidigare påståenden, exempelvis "det är inte natt ergo det är dag".

Vi kommer använda oss av termerna *noder* och *kanter* istället för hörn och bågar. En graf består av två mängder, dess *nodmängd* och dess *kantmängd*. Kantmängden är en delmängd av alla möjliga delmängder till nodmängden med storlek två. I det här arbetet kommer nodmängden alltid vara ändlig så kantmängden kommer också vara det. Om G är en graf så kommer $V(G)$ beteckna dess nodmängd och $E(G)$ beteckna dess kantmängd. Beteckningen $n(G)$ är kardinaliteten på grafens nodmängd och $e(G)$ är kardinaliteten på dess kantmängd. En *delgraf* består av en delmängd av nodmängden och en delmängd av kantmängden. Kantmängden för en delgraf kan endast använda par där båda noderna är element i delgrafens nodmängd. Om delgrafen är inducerad kommer de kanter som existerar mellan noderna som ingår i delgrafen vara kvar. Vilket nödvändigtvis inte är fallet när vi diskuterar delgrafer generellt. I det här arbetet syftar benämningen delgrafer uteslutande på inducerade delgrafer såvida det inte uttryckligen står nåt annat. En *inducerad delgraf* är en delgraf där vi inte tar bort kanter mellan noder som ingår i delgrafen.

Två noder i grafen är *grannar* om det finns ett element i kantmängden där de båda ingår. Två noder i grafen är *oberoende* om det inte finns ett element i kantmängden där de båda förekommer tillsammans. Så om $v, w \in V(G)$ kommer de vara grannar endast om $\{v, w\} \in E(G)$ och oberoende endast om $\{v, w\} \notin E(G)$. En nods *gradtal* är antalet gånger den noden förekommer i ett element i kantmängden. En nods *andragrad* är summan av antalet gånger nodens grannar förekommer i ett element i kantmängden. Alla grafer som diskuteras här kommer vara enkla. Vilket innebär att varje element i kantmängden kan endast förekomma en gång och att $\forall v \in V(G)$ kommer $\{v, v\} \notin E(G)$. Så en enkel graf innehåller inga dubbelkanter mellan två noder och inga öglor. En nods gradtal kommer betecknas som $\deg(v)$ och summan av en nods grannars gradtal kommer betecknas som $\deg^2(v)$. $\delta(G)$ kommer beteckna lägsta gradtal i grafen. Vi kommer använda δ istället för $\delta(G)$ när grafen är given från sammanhanget. $\Delta(G)$ kommer beteckna maximalgraden för alla noder i grafen och vi kommer använda Δ när grafen är given från sammanhanget.

En *n-reguljär graf* är en graf där alla noder har grad n. Ett viktigt lemma inom grafteori är $\Sigma_{v \in V(G)} \deg(v) = 2e(G)$ som vi kommer kalla handskakningslemmat i denna uppsats. Handskakningslemmat säger att summan av alla grader i en graf är lika med två gånger antalet kanter i grafen. $N(v)$ är beteckningen för mängden noder i G som är grannar med noden v. En *stig* är en följd av noder där två noder kan följa varandra endast om de är grannar. En stig som består av n noder betecknas så här $v_1 v_2 ... v_{n-1} v_n$ och dess *längd* är $n - 1$. *Avståndet* mellan två noder är längden på den kortaste stigen mellan dem. En *cykel* är en stig där alla noder får förekomma en gång förutom startnoden som måste vara densamma som slutnoden. Det finns flera sätt att beteckna en cykel på. I detta arbete kommer en cykel där n skilda noder ingår betecknas som antingen C_n eller som en n-cykel. En komplett graf är en graf där alla noder är grannar med varandra. En *komplett graf* med n noder kommer betecknas som K_n och K_3 kan ibland även kallas triangel eller trecykel.

En graf är *sammanhängande* endast om det $\forall v, w \in V(G)$ där v är skild från w existerar minst en stig med v som startnod och w som slutnod. Om så inte är fallet innebär det att grafen består av minst två disjunkta icke-tomma delgrafer. Vi kan ta unionen av två disjunkta grafer för att bilda en ny graf. Vi kommer gå in mer i detalj vad det innebär att addera disjunkta grafer i avsnitt 3. Vad vi menar med *addera* i det här sammanhanget är att ta unionen av deras nod-och kantmängder för att bilda en ny graf. Det är viktigt att påpeka att inga nya kanter kommer bildas när vi gör det. En *komponent* är en maximalt sammanhängande delgraf. Med maximalt menar vi att det inte kan ingå mer noder i delgrafen utan att göra den osammanhängande.

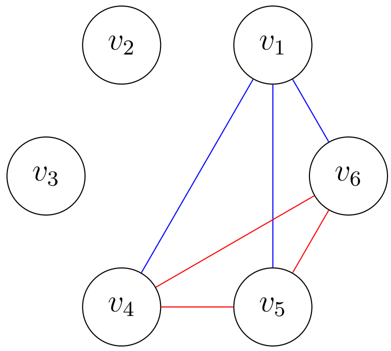
G^v är beteckningen på den inducerade delgrafen vi får när vi tar bort noden v samt dess grannar ur G och alla kanter som har sin ändpunkt i nån av grannarna till v. Om $v, w \in V(G)$ kommer $G^{v,w} = (G^v)^w$ vilket kommer vara den inducerade delgrafen vi får när vi först tar bort noden v samt dess grannar och sedan noden w samt dess grannar. Noderna v och w måste vara oberoende från varandra eftersom motsatsen hade medfört att $w \notin V(G^v)$. Vi kommer ibland använda G^P som en beteckning för delgrafen vi får när vi tar bort noderna i oberoendemängden P samt deras grannar.

En *oberoendemängd* är en delmängd av en grafs nodmängd där ingen av noderna i mängden är grannar med varandra. En graf kan ha flera olika oberoendemängder, exempelvis har grafen K_3 fyra olika oberoendemängder. I det här arbetet kommer en maximal oberoendemängd betyda att det inte finns någon oberoendemängd i grafen som är strikt större än den. En graf kan ha mer än en maximal oberoendemängd, exempelvis har grafen C_4 två maximala oberoendemängder som båda innehåller två noder. Storleken på en grafs maximala oberoendemängd/oberoendemängder kallas grafens *oberoendetal* och kommer betecknas som $\alpha(G)$.

2 Bakgrund

Ramseyteori är en gren av kombinatoriken som studerar strukturer som vid första anblick framstår som kaotiska men ändå alltid har vissa egenskaper. En typisk frågeställning inom ramseyteori är "Givet att vi kan antingen färglägga ett element rött eller blått hur stor måste strukturen vara för att garantera ett mönster av en viss storlek?". De två kändaste exemplen på detta är ramseytalen och van der waerdentalen. Denna uppsats kommer fokusera på ramseytalen vilket är ett grafteoretiskt problem.
I ramseyteori har vi en komplett graf som vi sedan färglägger kanterna med antingen färgen röd eller blå. Den naturliga frågan vi kan ställa då är vad är det minsta antal noder en graf behöver för att garantera att det antingen ska existera en komplett röd delgraf av storlek n eller en komplett blå delgraf av storlek m? Det kändaste exemplet är att om vi har sex noder i en graf kommer det alltid existera antingen en röd komplett delgraf av storlek tre eller en blå av storlek tre. Detta kan uttryckas formellt som $R(3,3) = 6$. Även om en graf bestående av sex noder kan verka liten så finns det 15 kanter i den grafen vilket innebär att det finns $2^{15} = 32768$ sätt att färglägga den på. Att gå igenom varje fall för hand och verifiera att det existerar en delgraf som uppfyller ett av kraven är ett sant sisyfosarbete. Istället för att gå igenom alla möjliga utfall kan vi bevisa det formellt med hjälp av lådprincipen.

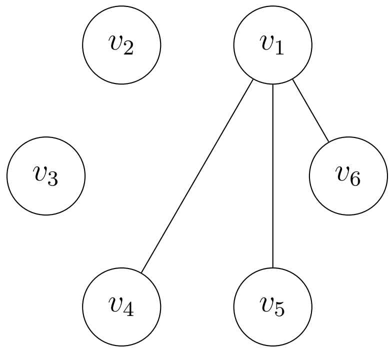
Låt oss försöka konstruera en graffärgläggning som inte har en blå eller röd triangel (se figur 1). Vi börjar med att undersöka alla kanter med v_1 som en ändpunkt. Eftersom vi har två färger och fem kanter så kommer enligt lådprincipen minst tre av dem ha samma färg. Det finns fem kanter i grafen med v_1 som ändpunkt och vi har två färger, enligt lådprincipen minst tre av dem ha samma färg. För att visa att detta stämmer kommer vi gå igenom samtliga utfall, alla fem kanter kan vara blåa, fyra kanter kan vara blåa och då måste en kant vara röd, tre kanter kan vara blåa och då måste två kanter vara röda, två kanter kan vara blåa och då måste tre kanter vara röda, en kant kan vara blå och då måste fyra kanter vara röda eller så kan alla fem kanter vara röda. Som vi kan observera så kommer i samtliga utfall minst tre kanter vara blåa eller så kommer minst tre kanter vara röda. I vårt exempel



Figur 1: $R(3,3) = 6$

bevisar vi det för fallet då minst tre av kanterna är blåa men beviset är analogt i det motsatta fallet. Så v_1:s blåa kanter har ändpunkterna v_4, v_5 och v_6. Om det finns en blå kant mellan nån av dessa tre noder ex. v_4 och v_5 så har vi skapat en blå K_3 med noderna v_1, v_4 och v_5 vilket vi vill undvika. Alltså måste alla kanter mellan dessa noder vara röda men då bildar dessa noder en röd K_3. Som vi ser går det inte att konstruera en färgläggning av dessa kanter utan att det skapas en monokromatisk K_3.
Detta bevisar att $R(3,3) \leq 6$ men det finns exempel på grafer med fem noder vars kanter vi kan färglägga utan att skapa en monokromatisk K_3. För att hitta grafen som bevisar att $R(3,3) > 5$ måste vi konstruera en färgläggning för K_5 som inte innehåller en monokromatisk K_3. Färglägg kanterna så att de röda bildar en monokromatisk C_5 och sedan färglägger du resten av kanterna blåa. Det innebär att vi kan konstruera en graffärgläggning med fem noder utan en monokromatisk K_3 och vi vet att vi inte kan det om grafen har sex noder ergo $R(3,3) = 6$.

I den här uppsatsen kommer vi fokusera på oberoendetal i triangelfria grafer. Även om detta kan initialt framstå som orelaterat till ramseyteori så kan vi visa att så inte är fallet. Låt oss omformulera $R(3,3) = 6$ med hjälp av oberoendetal. Analogt till beviset för $R(3,3) = 6$ ska vi försöka konstruera en triangelfri graf med sex noder och med ett oberoendetal strikt mindre än tre (se figur 2). Låt oss utgå ifrån v_1. Det finns fem andra noder i grafen som v_1 kan antingen vara oberoende ifrån eller inte. Enligt lådprincipen måste den antingen vara granne med minst tre noder eller oberoende från minst tre noder. I vårt fall är den granne med v_4, v_5 och v_6. Eftersom den ska vara triangelfri kan inte nån av dessa noder vara granne med varandra eftersom det hade skapat en triangel ex. $v_1v_4v_5$. Då måste v_4, v_5 och v_6 vara oberoende från varandra med då utgör de en obeorendemängd av storlek tre.



Figur 2: Obeorendetal tre

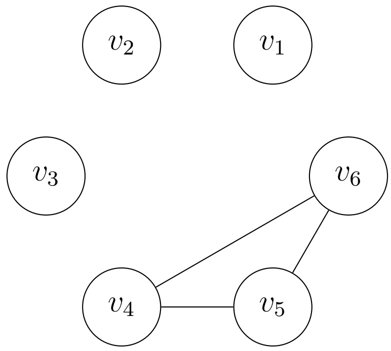
I andra fallet (se figur 3) så måste v_1 vara oberoende från minst tre andra noder ex. v_4, v_5 och v_6. Detta innebär att $\{v_1, v_4, v_5, v_6\}$ utgör en oberoendemängd av storlek fyra. Så om vi lägger till ex. $\{v_4, v_5\}$ i kantmängden så får vi ner oberoendemängden till tre. Om vi lägger till ytterligare en kant ex. $\{v_5, v_6\}$ så är oberoendemängden fortfarande tre eftersom v_1, v_4 och v_6 inte är grannar. Alltså måste vi även lägga till $\{v_4, v_6\}$ i kantmängden. Då har vi skapat en triangel bestående av noderna $v_4v_5v_6$. Likt hur vi inte kan färglägga kanterna i två färger i en K_6 utan att skapa en monokromatisk delgraf av storlek tre så kan vi inte konstruera en graf med sex noder utan att den har en triangel eller oberoendetal minst tre. Det visar att $R(3,3) \leq 6$ men om det är ett likhetstecken måste det gå att konstruera en triangelfri graf med fem noder och oberoendetal strikt mindre än tre. Grafen C_5 uppfyller dessa villkor så $R(3,3) \geq 6$. Så vi vet att $R(3,3) \leq 6$ och att $R(3,3) \geq 6$ vilket endast kan stämma om $R(3,3) = 6$.

Som vi kan se oavsett om vi formulerar problemet i termer av kantfärgläggning eller oberoendetal och kompletta delgrafer så är resonemangen analoga med varandra. Ett sätt vi kan se på det är att istället för färgerna blått och rött så arbetar vi med färgerna vitt och svart. Vi kan säga att om två noder är grannar är kanten mellan dem svart och den är vit om de är oberoende. Det är därför resonemangen är analoga eftersom vi vill förhindra att tre noder formar en svart eller vit triangel.

3 Monoider

I detta kapitel kommer vi diskutera monoider som är en generalisering av grupper samt hur teorin kan tillämpas på grafteori.

En monoid består av en mängd och en binär operation som uppfyller tre axiom. Den



Figur 3: Triangel bestående av v_4, v_5 och v_6

måste vara sluten under dess operation, operationen måste vara associativ och det måste existera ett neutralt element. Alltså om $(M, \circ)$ är en monoid så vet vi att om $a, b, c \in M$ kommer $a \circ b \in M$ (slutenhet), $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ (associativitet) samt att $\exists e \in M$ så att $d \circ e = e \circ d = d$, $\forall d \in M$. Till skillnad från grupper måste det inte existera inverser i en monoid. Så alla grupper är monoider men alla monoider är inte grupper. Precis som med grupper kan en monoid vara kommutativ (abelsk), vilket innebär att $\forall a, b \in M$ kommer $a \circ b = b \circ a$. [Bou89, I, § 2, no. 1, Definition 2]
Ett bra exempel på en kommutativ monoid som inte är en grupp är de naturliga talen med addition som operation. Ett naturligt tal plus ett annat naturligt tal blir ett naturligt tal, det spelar ingen roll i vilken ordning vi adderar talen i samt att det finns ett neutralt element 0. Ett exempel på en icke-kommutativ monoid som inte är en grupp är mängden två gånger två matriser med matrismultiplikation som operation.

Monoidhomomorfier är en generalisering av grupphomomorfier, vilket innebär att det är en strukturbevarande funktion mellan två monoider. Om vi har två monoider $(M, \circ)$ och $(N, \cdot)$ och en monoidhomomorfi f mellan dem kommer $f(m \circ n) = f(m) \cdot f(n)$ $\forall m, n \in M$ och $f(e_M) = e_N$. [Bou89, I, § 2, no. 1, Definition 2]

Exempelvis kommer determinanten av en matris vara en monoidhomomorfi mellan monoiden två gånger två matriser med matrismultiplikation som operation och monoiden de reella talen med multiplikation som operation.

Injektivitet och surjektivitet är två egenskaper en monoidhomomorfi kan ha. Att en monoidhomomorfi f är injektiv innebär att om $f(a) = f(b)$ måste $a = b$. Att en monoidhomomorfi f är surjektiv innebär att $\forall n \in N$ måste $\exists m \in M$ så att $f(m) = n$. Om en monoidhomomorfi är både injektiv och surjektiv så säger vi att den är bijektiv.

Determinanten av alla två gånger två matriser är en icke-injektiv monoidhomomorfi eftersom två matriser kan ha samma determinant trots att de inte är samma matris. Determinanten av alla två gånger två matriser är en surjektiv homomorfi. För en matris A kommer $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, så om exempelvis $a_{12} = 0$ och $a_{22} = 1$ kommer $\det(A) = a_{11}$ vilket kan vara vilket reellt tal som helst.

Om det existerar en bijektiv monoidhomomorfi mellan två monoider så är de isomorfa med varandra. Så om monoiden $(M, \circ)$ är isomorf med monoiden $(N, \cdot)$ så skriver vi att $(M, \circ) \cong (N, \cdot)$. Så trots att de två monoiderna $(M, \circ)$ och $(N, \cdot)$ kan bestå av olika mängder och operationer så beter de sig på samma sätt. Så om vi bevisar att $(M, \circ)$ har en viss egenskap måste $(N, \cdot)$ ha den eftersom de har samma struktur.

Två viktiga egenskaper isomorfier har är inverterbarhet och sammansättning. Inverterbarhet innebär att om b är en isomorfi måste även b^{-1} vara det. Sammansättning innebär att om b och c är isomorfier måste $b \circ c$ också vara det.

Isomorfier är även en central del av grafteorin. Om två grafer är isomorfa så innebär det att de har samma struktur. De två sakerna som avgör en grafs struktur är dess nodmängd och dess kantmängd. En isomorfi i grafteori är en bijektion mellan två grafers nodmängder som inducerar en bijektion mellan deras kantmängder. Vilket innebär att om f är en isomorfi mellan G_1 och G_2 så är $\{v, w\} \in E(G_1)$ om och endast om $\{f(v), f(w)\} \in E(G_2)$. [Big02, XV, § 1]

Om en isomorfi existerar mellan två grafer G_1 och G_2 är de isomorfa vilket vi betecknar som $G_1 \cong G_2$. En isomorfiklass är mängden grafer som är isomorfa med varandra och betecknas som $[G]_{\cong}$ där G är en representant för isomorfiklassen.

Exempelvis om vi har två grafer G_1 och G_2 där $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3\}$, $E(G_1) = \{\{v_1, v_2\}, \{v_1, v_3\}\}$, $V(G_2) = \{w_1, w_2, w_3\}$, och $E(G_2) = \{\{w_1, w_2\}, \{w_1, w_3\}\}$ så kan vi visa att de är isomorfa. Vi vet att de är isomorfa eftersom vi kan skapa en bijektion f mellan deras nodmängder som inducerar en bijektion mellan deras kantmängder. Så låt $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ och $f(v_3) = w_3$ då kan vi enkelt se att $\{f(v_i), f(v_j)\} \in E(G_2)$ om och endast om $\{v_i, v_j\} \in E(G_1)$.

I detta arbete kommer vi jobba med en monoid som består av mängden isomorfiklasser av ändliga grafer $\mathcal{G}$ med addition som operation. Med addition menar vi i detta sammanhang unionen av två disjunkta grafer. Så denna monoids operation är $[G_1]_{\cong} + [G_2]_{\cong} := [G_1 + G_2]_{\cong}$ där vi alltid kan anta att G_1 och G_2 är disjunkta. Exempelvis om vi adderar två disjunkta grafer ur isomorfiklassen $[C_5]_{\cong}$ så får vi inte en graf i isomorfiklassen $[C_{10}]_{\cong}$ eller $[C_5]_{\cong}$, vad vi får är en graf med två komponenter som båda är isomorfa med C_5.

Vi måste först bevisa att denna operation är väldefinierad, alltså att om vi har en graf $H_1 \in [G_1]_{\cong}$ och en graf $H_2 \in [G_2]_{\cong}$ så kommer $H_1 + H_2 \in [G_1 + G_2]_{\cong}$. Eftersom H_1 är isomorf med G_1 måste det existera en isomorfi f från $V(G_1)$ till $V(H_1)$. H_2 är isomorf med G_2 så det existerar en isomorfi g från $V(G_2)$ till $V(H_2)$.

Ta en godtycklig nod i $v \in V(G_1 + G_2)$, eftersom de två summanderna är disjunkta måste den antingen finnas i delgrafen isomorf med G_1 eller delgrafen isomorf med G_2. Vi kan använda detta för att skapa funktionen

$$h(v) = \begin{cases} f(v) & \text{om } v \in G_1 \\ g(v) & \text{om } v \in G_2 \end{cases}. \tag{1}$$

Vi kan enkelt se att den här funktionen är en bijektion mellan deras nodmängder. Så vi måste nu visa att den även inducerar en bijektion mellan deras kantmängder.

Vi måste visa att $\forall v_1, v_2 \in G_1 + G_2$ kommer $\{h(v_1), h(v_2)\} \in E(H_1 + H_2)$ om och endast om $\{v_1, v_2\} \in E(G_1 + G_2)$. Vi vet att för v_1 kan $h(v_1) = f(v_1)$ eller $h(v_1) = g(v_1)$ och för v_2 kan $h(v_2) = f(v_2)$ eller $h(v_2) = g(v_2)$ så det finns fyra möjliga fall.

Om $h(v_1) = f(v_1)$ och $h(v_2) = f(v_2)$ så innebär det att $v_1, v_2 \in V(G_1)$. Eftersom f är en isomorfi mellan delmängden $V(G_1)$ och delmängden $V(H_1)$ kan $\{h(v_1), h(v_2)\} \in E(H_1 + H_2)$ om och endast om $\{v_1, v_2\} \in E(G_1 + G_2)$. I fallet då $h(v_2) = g(v_2)$ kommer resonemanget vara analogt till det här.

Om $h(v_1) = f(v_1)$ och $h(v_2) = g(v_2)$ kommer $v_1 \in V(G_1)$ och $v_2 \in V(G_2)$. Eftersom G_1 och G_2 är disjunkta så vet vi att $\{v_1, v_2\} \notin E(G_1 + G_2)$. Vi vet även att $f(v_1) \in V(H_1)$ och $g(v_2) \in V(H_2)$, eftersom H_1 och H_2 är disjunkta kommer $\{f(v_1), g(v_2)\} \notin E(H_1 + H_2)$. I fallet då $h(v_1) = g(v_1)$ och $h(v_2) = f(v_2)$ kommer resonemanget vara analogt. Så vi kan dra slutsatsen att h är en bijektion mellan $V(G_1 + G_2)$ och $V(H_1 + H_2)$ som inducerar en bijektion mellan deras kantmängder. Alltså existerar det en isomorfi mellan graferna vilket innebär att $H_1 + H_2 \in [G_1 + G_2]_{\cong}$.

Vi vet att $(\mathcal{G}, +)$ är en monoid eftersom den uppfyller de tre nödvändiga axiomen. Den är sluten under operationen eftersom unionen av två disjunkta grafer blir en ny graf. Operationen är associativ eftersom det spelar ingen roll vilken ordning vi adderar graferna i, summan blir oavsett ordningen en graf med samma komponenter. Det existerar ett neutralt element i mängden vilket är den tomma grafen K_0. Däremot uppfyller denna struktur inte gruppaxiomen för det existerar inga inverser. Det finns inga inverser i den här monoiden eftersom det inte finns några grafer med negativt antal noder. Den är även kommutativ eftersom vi kan enkelt se att G_1+G_2 kommer vara isomorf med G_2+G_1.

Nu ska vi diskutera egenskaper och funktioner som är invarianta. Alltså egenskaper som måste vara sanna för alla grafer i samma isomorfiklass och funktioner som måste ge samma värde för alla grafer i en isomorfiklass. De tre funktioner vi ska fokusera på nodtal, kanttal och oberoendetal.

För nodtal och kanttal kan vi betrakta två grafer $G_1, G_2 \in [G]_{\cong}$. Vi vet att båda graferna är isomorfa med G. Alltså existerar det en isomorfi f mellan $V(G_1)$ och $V(G)$. Det existerar även en isomorfi g mellan $V(G)$ och $V(G_2)$. Båda funktioner är isomorfier vilket medför att deras sammansättning $b = g \circ f$ är en isomorfi. Det existerar alltså en isomorfi b mellan $V(G_1)$ och $V(G_2)$ vilket innebär att graferna måste ha samma nodtal. Eftersom b är en isomorfi måste den inducera en bijektion mellan $E(G_1)$ och $E(G_2)$ vilket innebär att graferna har samma kanttal.

Låt A_1 vara en maximal oberoendemängd i grafen G_1. Vi vet att det existerar en isomorfi b mellan grafernas nodmängder. Eftersom A_1 är en oberoendemängd måste $b(A_1)$ utgöra en oberoendemängd i grafen G_2. Vi vet det eftersom $\{v_1, v_2\} \in E(G_1)$ om och endast om $\{b(v_1), b(v_2)\} \in E(G_1)$ annars hade b inte varit en isomorfi. Inga noder i A_1 är grannar i G_1 så inga noder i $b(A_1)$ kan vara grannar i G_2. Så $b(A_1)$ är en oberoendemängd i G_2 därför måste $\alpha(G_2) \geq |b(A_1)|$. Vi vet att $|A_1| = |b(A_1)|$ och att $|A_1| = \alpha(G_1)$ ergo $\alpha(G_2) \geq \alpha(G_1)$.

Eftersom b är en isomorfi måste även dess invers b^{-1} vara det. Låt A_2 utgöra en maximal oberoendemängd i grafen G_2. Genom samma resonemang som tidigare vet vi att $b^{-1}(A_2)$ utgör en oberoendemängd i G_1. Vi använder samma resonemang för att konkludera att $\alpha(G_1) \geq \alpha(G_2)$. Då vet vi att $\alpha(G_1) \geq \alpha(G_2)$ och att $\alpha(G_2) \geq \alpha(G_1)$ vilket innebär att $\alpha(G_1) = \alpha(G_2)$.

Vi kommer nu visa att $n(G)$, $e(G)$ och $\alpha(G)$ är monoidhomomorfier mellan monoiderna $\mathcal{G}$ och $\mathbb{R}$.

Vi kommer använda oss av principen om inklusion/exklusion för att bevisa att de är monoidhomomorfier. Principen om inklusion/exklusion ger oss en metod för att räkna ut storleken på unionen av mängder. I fallet då vi har två mängder A och B kommer enligt principen om inklusion/exklusion $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

Först visar vi att $n(G)$ är en monoidhomomorfi. Eftersom K_0 inte innehåller några noder kommer $n(K_0) = 0$. Nu måste vi verifiera att $\forall [G_1]_{\cong}, [G_2]_{\cong} \in \mathcal{G}$ där G_1 och G_2 är disjunkta kommer $n(G_1+G_2) = n(G_1)+n(G_2)$. Vi vet att $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$ eftersom de är två disjunkta grafer vilket innebär att $|V(G_1) \cap V(G_2)| = 0$. Enligt principen om inklusion/exklusion kommer $|V(G_1+G_2)| = |V(G_1)|+|V(G_2)|-|V(G_1)\cap V(G_2)|$ men snittet är den tomma mängden så $|V(G_1+G_2)| = |V(G_1)|+|V(G_2)|$. Vi vet att $n(G_1+G_2) = |V(G_1+G_2)|$, $n(G_1) = |V(G_1)|$ och att $n(G_2) = |V(G_2)|$ vilket innebär att $n(G_1+G_2) = n(G_1)+n(G_2)$ vilket bevisar att $n(G)$ är en monoidhomomorfi.

Resonemanget för att visa att $e(G)$ är en monoidhomomorfi är analogt till $n(G)$. För att visa att $\alpha(G)$ är en monoidhomomorfi börjar vi med att konstatera att $\alpha(K_0) = 0$ eftersom K_0 inte har några noder som kan ingå i en oberoendemängd. Låt A vara en maximal obeorendemängd i grafen G_1+G_2, vilket innebär att $|A| = \alpha(G_1+G_2)$. Eftersom G_1+G_2 består av två disjunkta delgrafer så kommer $A = (A\cap V(G_1)) \cup (A \cap V(G_2))$. Mängden $A \cap V(G_1)$ kommer vara en maximal oberoendemängd i grafen G_1 annars måste det existera en oberoendemängd A_1 så att $|A_1| > |A\cap V(G_1)|$. Om det vore fallet måste oberoendemängden $A_1 \cup (A\cap V(G_2))$ i grafen G_1+G_2 ha en större kardinalitet än oberoendemängden A vilket är en motsägelse. Det innebär att $|A\cap V(G_1)| = \alpha(G_1)$ och med samma resonemang kommer $|A\cap V(G_2)| = \alpha(G_2)$. Eftersom de två delgraferna är disjunkta måste snittet av dessa två oberoendemängder vara tom så enligt principen om inklusion/exklusion kommer $|A| = |A\cap V(G_1)| + |A\cap V(G_2)|$ vilket innebär att $\alpha(G_1+G_2) = \alpha(G_1)+\alpha(G_2)$. Vi kommer nu använda mera informella beteckningar när vi diskuterar representanter från olika isomorfiklasser. Vi kan använda dessa tre monoidhomomorfier för att skapa linjära kombinationer ex. $f(G) = ae(G)+bn(G)+c\alpha(G)$ där $a, b, c \in \mathbb{R}$. Vi kan verifiera att dessa linjära kombinationer också kommer vara monoidhomomorfier genom att visa att $f(G_1)+f(G_2) = f(G_1+G_2)$ samt att $f(K_0) = 0$. Vi kan utnyttja faktumet att $n(G)$, $e(G)$ och $\alpha(G)$ alla är monoidhomomorfier för att bevisa att f är det. För att visa att $f(G_1)+f(G_2) = f(G_1+G_2)$ så kan vi använda att

$$\begin{aligned} f(G_1+G_2) &= ae(G_1+G_2)+bn(G_1+G_2)+c\alpha(G_1+G_2) \\ &= a(e(G_1)+e(G_2))+b(n(G_1)+n(G_2))+c(\alpha(G_1)+\alpha(G_2)) \\ &= ae(G_1)+bn(G_1)+c\alpha(G_1)+ae(G_2)+bn(G_2)+c\alpha(G_2) \\ &= f(G_1)+f(G_2). \end{aligned} \tag{2}$$

För att visa att $f(K_0) = 0$ så kan vi använda att

$$\begin{aligned} f(K_0) &= ae(K_0) + bn(K_0) + c\alpha(K_0) \\ &= a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{3}$$

För homomorfierna $n(G)$, $e(G)$ och $\alpha(G)$ kommer vi oavsett grafen få ut ett naturligt tal. Om vi justerar koefficienterna i vår linjär kombination kommer det inte alltid stämma. Exempelvis om vi har en funktion $f(G) = e(G) - 2n(G) + \alpha(G)$ kommer $f(K_2) = -2$. I denna uppsats kommer vi undersöka linjära kombinationer mellan dessa tre monoidhomomorfier men det är viktigt att påpeka att det existerar många monoidhomomorfier mellan $\mathcal{G}$ och $\mathbb{R}$. Exempelvis $N(C_n; G)$ som räknar hur många skilda cykler av storlek n det finns i grafen G.
I den här uppsatsen kommer vi fokusera på triangelfria grafer. Vi måste nu visa att denna egenskap är hereditär och additativ. Det förstnämnda innebär att om en graf har en viss egenskap måste alla dess delgrafer (inducerade eller ej) ha den och det sistnämnda innebär att om vi adderar två grafer med en egenskap måste deras summa också ha den egenskapen. Låt oss anta att triangelfrihet inte är en hereditär egenskap. Detta innebär att för en triangelfri graf G existerar det en delgraf $H \subseteq G$ så att $H \in [K_3]_{\cong}$. Det är endast möjligt om det existerar en triangel i G, vilket är en motsägelse. För att visa att den är additiv kan vi betrakta två triangelfria grafer G_1 och G_2 samt deras summa $G = G_1 + G_2$. Låt oss anta att G inte är triangelfri då måste det existera $H \subseteq G$ så att $H \in [K_3]_{\cong}$. Vi vet att den måste ligga i nån av delgraferna G_1 eller G_2 eftersom de är disjunkta medan K_3 är sammanhängande. Så antingen är $H \subseteq G_1$ eller $H \subseteq G_2$ men då kan inte båda vara triangelfria vilket är en motsägelse.

4 Linjära invarianter

Som vi visat kan vi kombinera olika monoidhomomorfier som beroende på koefficienterna kan ge oss både positiva och negativa värden. Det visar sig att det existerar linjära kombinationer mellan nodtal, kanttal och oberoendetal som har intressanta egenskaper för triangelfria grafer. Trots att den har en negativ koefficient kommer värdet alltid vara positivt om grafen i fråga är triangelfri. De tre linjära invarianterna som vi kommer använda i detta arbete är

$$\begin{aligned} w(G) &= e(G) - 3n(G) + 5\alpha(G) \\ q(G) &= e(G) - 5n(G) + 10\alpha(G) \\ t(G) &= e(G) - 6n(G) + 13\alpha(G). \end{aligned} \tag{4}$$

Varav två av dem $w(G)$ och $t(G)$ kommer vi bevisa att de alltid ger oss ett positivt värde om G är triangelfri. Beviset för att $q(G)$ är positivt för alla triangelfria grafer liknar beviset för $w(G)$ men med ett par specialfall vi måste undersöka. Det bör påpekas att det existerar linjära invarianter med samma egenskap som tar in fler variabler än dessa tre. Exempelvis bevisade Oliver Krüger [Kru19, I, § 1 Theorem 1.1] att det stämmer för invarianten

$$v(G) = 3e(G) - 17n(G) + 35\alpha(G) + N(C_4; G). \tag{5}$$

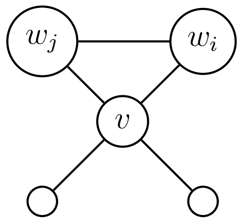
Vi kommer återkomma till varför detta är relevant för ramseyteori men först kommer vi visa att $w(G)$ har denna egenskap.

4.1 $w(G) \geq 0$

Vi ska nu bevisa att den här linjära invarianten är positiv för alla triangelfria grafer. Innan vi börjar kommer vi först bevisa ett lemma som kommer återanvändas regelbundet.

Lemma 4.1. *Om G är en triangelfri graf och $v \in V(G)$ kommer $e(G^v) = e(G) - \deg^2(v)$.*

Om $N(v) = \{w_1, ..., w_m\}$ kommer $\deg^2(v) = \Sigma_{k=1}^{m} \deg(w_k)$ vilket blir en övre begränsning för antal kanter som har sin ändpunkt i nån av v:s grannar. Därför kommer $e(G^v) \leq e(G) - \deg^2(v)$ eftersom motsatsen hade medfört att det existerar en kant med ändpunkt i en av v:s grannar som vi inte räknat med. Låt oss anta att $e(G^v) < e(G) - \deg^2(v)$ vilket innebär att $e(G^v) \leq e(G) - \deg^2(v) - 1$. Eftersom varje kant har sin ändpunkt i två skilda noder måste vi ha dubbelräknat en kant. Det enda sättet det skulle kunna hända är om en kant har sina ändpunkter i två av v:s grannar (se figur 4). Detta innebär att $\exists w_i, w_j \in N(v)$ så att $\{w_i, w_j\} \in E(G)$. Då bildar vw_iw_j en triangel i G vilket är en motsägelse. $\square$



Figur 4: Exempel på en graf där $e(G^v) \neq e(G) - \deg^2(v)$

Sats 4.2. *Låt $w(G) := e(G) - 3n(G) + 5\alpha(G)$, för alla triangelfria grafer G kommer $w(G) \geq 0$.*

Detta bevis följer samma struktur som Jörgen Backelins bevis [Bac19, X, Formell 10.2, sida 278-279]. Vi kommer bevisa detta med hjälp av induktion över oberoendetalet. Vårt basfall kommer vara K_0. Vi vet att $n(K_0) = 0$, $e(K_0) = 0$ samt att $\alpha(K_0) = 0$ alltså blir

$$\begin{aligned} w(G) &= e(K_0) - 3n(K_0) + 5\alpha(K_0) \\ &= 0 - 3 \cdot 0 + 5 \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Nu låt oss anta att det stämmer för alla oberoendetal upp tills $k-1$. Nu ska vi visa att det är sant för grafen G där $\alpha(G) = k$. Vi vet att det existerar ett $v \in V(G)$ så att $\deg(v) = \delta$, låt oss utgå från den. Vi vet att för den inducerade delgrafen G^v kommer $n(G^v) = n(G) - (1 + \delta)$. Vi kan enkelt se att för en godtycklig maximal oberoendemängd A i G kommer antingen $v \in A$ eller så kommer $|N(v) \cap A| \geq 1$. Oavsett fallet kan vi enkelt se att G^v måste ha ett lägre oberoendetal än G ergo $\alpha(G^v) \leq \alpha(G) - 1$. Vi vet inte vad v har för andragrad men vi vet att $\deg(v) = \delta$ samt att varje granne har minst grad δ alltså kommer $\deg^2(v) \geq \delta^2$. Från detta och likheten i lemma 4.1 vet vi att $e(G^v) = e(G) - \deg^2(v) \leq e(G) - \delta^2$. Vi kan använda detta för att hitta en undre begränsning för $w(G)$

$$e(G) - 3n(G) + 5\alpha(G) \geq e(G^v) - 3n(G^v) + 5\alpha(G^v) + \delta^2 - 3(1 + \delta) + 5. \tag{7}$$

Vi vet att $e(G^v) - 3n(G^v) + 5\alpha(G^v) = w(G^v)$ och eftersom $\alpha(G^v) < k$ måste

$w(G^v) \geq 0$ enligt induktionsantagandet. Från det får vi olikheten

$$\begin{aligned} e(G^v) - 3n(G^v) + 5\alpha(G^v) + \delta^2 - 3(1+\delta) + 5 &= w(G^v) + \delta^2 - 3(1+\delta) + 5 \\ &\geq \delta^2 - 3(1+\delta) + 5 \\ &= (\delta - 2)(\delta - 1). \end{aligned} \tag{8}$$

Vi kan därmed dra slutsatsen att $w(G) \geq (\delta - 2)(\delta - 1)$. Vi vet att $\delta \in \mathbb{N}$ alltså finns det fyra fall vi måste undersöka $\delta = 0$, $\delta = 1$, $\delta = 2$ och $\delta \geq 3$. Om $\delta \geq 3$ kommer $(\delta - 2)(\delta - 1) \geq 2$, om $\delta = 1$ kommer $(\delta - 2)(\delta - 1) = 0$, om $\delta = 2$ kommer $(\delta - 2)(\delta - 1) = 0$ och tillsist om $\delta = 0$ kommer $(\delta - 2)(\delta - 1) = 2$. Som vi kan observera kommer samtliga fall ha noll som en undre begränsning ergo $w(G) \geq 0$. $\square$

4.2 Alternativt bevis för $R(3, 3) = 6$.

Här kommer vi visa hur linjära invarianter kan användas inom ramseyteori. Vi kommer utnyttja faktumet att $w(G) \geq 0$ om G är triangelfri för att hitta en övre begränsning på $R(3, 3)$. Det är viktigt att påpeka att vi inte kan använda endast $w(G)$ för att visa att $R(3, 3) = 6$. Precis som i avsnitt 2 måste vi konstruera en triangelfri graf med fem noder och oberoendetal strikt mindre än tre. Den delen av beviset är analogt till tidigare bevis så vi kommer inte inkludera den här.

Som vi visade tidigare betyder $R(3, 3) = 6$ att om en graf har minst sex noder kommer den antingen inte vara triangelfri eller så måste dess oberoendetal vara minst tre. Så vi kan omformulera frågan till "hur många noder kan en triangelfri graf med oberoendetal strikt mindre än tre ha?".

Vi vet att G är en triangelfri graf så $w(G) \geq 0$ enligt sats 4.2. Eftersom $\alpha(G) \leq 2$ så får vi olikheten

$$\begin{aligned} w(G) &= e(G) - 3n(G) + 5\alpha(G) \\ &\leq e(G) - 3n(G) + 5 \cdot 2 \\ &= e(G) - 3n(G) + 10. \end{aligned} \tag{9}$$

För att hitta en övre begränsning för $e(G)$ börjar vi med att undersöka $\Delta(G)$. G är en triangelfri graf vilket innebär att om $v, w_1, w_2 \in V(G)$ och $\{v, w_1\}, \{v, w_2\} \in E(G)$ vet vi att $\{w_1, w_2\} \notin E(G)$. Om så inte vore fallet skulle det existera en triangel vw_1w_2 i grafen vilket är en motsägelse. Om det existerar en nod v i grafen så att $\deg(v) \geq 3$ så måste dess grannar vara oberoende från varandra. Det innebär att G

har en oberoendemängd som består av minst tre noder. Så vi kan dra slutsatsen att $\Delta \leq 2$ annars kommer $\alpha(G) \geq 3$. Detta ger oss olikheten

$$\Sigma_{v \in V(G)} \deg(v) \leq 2n(G). \tag{10}$$

Vi kan använda denna olikhet i handskakningslemmat för att få en övre begränsning på kanttalet

$$\begin{aligned} e(G) &\leq \frac{2n(G)}{2} \\ &= n(G). \end{aligned} \tag{11}$$

Vilket ger oss olikheten

$$\begin{aligned} w(G) &\leq e(G) - 3n(G) + 10 \\ &\leq n(G) - 3n(G) + 10 \\ &= -2n(G) + 10. \end{aligned} \tag{12}$$

Vi vet att $w(G) \geq 0$ samtidigt som vi vet att $-2n(G) + 10 \geq w(G)$ alltså kommer $-2n(G) + 10 \geq 0$. Från det här vet vi att $n(G) \leq 5$. Det innebär att om en graf ska vara både triangelfri och ha ett oberoendetal strikt mindre än tre kan den inte ha mer än fem noder. Så vi kan dra slutsatsen att om en graf har sex noder måste dess oberoendetal vara minst tre eller så måste den innehålla en triangel. Vilket bevisar att $R(3, 3) \leq 6$ med hjälp av linjära invarianter.

4.3 $t(G) \geq 0$

Sats 4.3. *Låt $t(G) := e(G) - 6n(G) + 13\alpha(G)$, för alla triangelfria grafer G kommer $t(G) \geq 0$.*

Vi kommer att bevisa satsen med hjälp av induktion på oberoendetalet. Detta bevis kommer följa samma struktur som Radziszowski och Krehers bevis [RK91] med tillägg från Jörgen Backelin [Bac13, I, § 1 Theorem 1.1].

Vi börjar med att först verifiera påståendet för K_0. Eftersom $e(K_0) = 0$, $n(K_0) = 0$

och $\alpha(K_0) = 0$ kommer

$$\begin{aligned} t(K_0) &= e(K_0) - 6n(K_0) + 13\alpha(K_0) \\ &= 0 - 6 \cdot 0 + 13 \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

För att visa att $t(G) \geq 0$ för alla oberoendetal kommer vi anta att det inte stämmer. Eftersom påståendet stämmer för basfallet måste det då existera ett minsta oberoendetal k_0 så att för någon triangelfri graf G med oberoendetal k_0 blir $t(G) < 0$. För att gå vidare med beviset ska vi först introducera två mängder av grafer

$$\begin{gathered} \Psi = \{G | G \in \mathcal{G} \wedge t(G) = 0 \wedge \alpha(G) < k_0\} \\ \Lambda = \{G | G \in \mathcal{G} \wedge t(G) \leq -1 \wedge \alpha(G) = k_0\}. \end{gathered} \tag{14}$$

För att bevisa satsen måste vi första undersöka vilka krav en graf G måste uppfylla för att $G \in \Lambda$ och sedan visa att en sådan graf måste vara så perfekt att den inte existerar.

Lemma 4.4. *Om $G \in \Lambda$ är G en sammanhängande graf.*

Låt oss anta att G består av två disjunkta icke-tomma delgrafer som vi kallar H och K. Eftersom $t(G) = t(H) + t(K)$ samt $t(G) \leq -1$ innebär det att $t(H) + t(K) \leq -1$. Det innebär att minst en av summanderna måste ha ett negativt t värde. Vi kan enkelt se att $\alpha(H) < k_0$ och $\alpha(K) < k_0$ så om någon av summanderna har ett negativt t värde kommer det att motsäga induktionsantagandet. Ergo G är en sammanhängande graf. □

Lemma 4.5. *Om $G \in \Lambda \cup \Psi$ måste $\delta(G) \geq 3$*

Låt oss etablera en övre begränsning för $\deg^2(v)$ genom att beräkna $t(G^v)$. Vi vet att $\alpha(G^v) \leq \alpha(G) - 1$, $n(G^v) = n(G) - (\deg(v) + 1)$ och från lemma 4.1 vet vi att $e(G^v) = e(G) - \deg^2(v)$. Från det får vi en övre begränsning för $t(G^v)$

$$\begin{aligned} t(G^v) &\leq (e(G) - \deg^2(v)) - 6(n(G) - (\deg(v) + 1)) + 13(\alpha(G) - 1) \\ &= t(G) - \deg^2(v) + 6\deg(v) + 6 - 13. \end{aligned} \tag{15}$$

Eftersom $G \in \Lambda \cup \Psi$ innebär det att $\alpha(G^v) < k_0$ så enligt induktionsantagandet måste $t(G^v) \geq 0$. Vi vet att $t(G) \leq 0$ därför måste

$$\deg^2(v) \leq 6\deg(v) - 7. \tag{16}$$

Olikheten blir strikt om $G \in \Lambda$. Om $\delta(G) = 0$ så är G antingen isomorf med K_1 eller en osammanhängande graf. Vi vet att $t(K_1) = 7$ och att den inte kan vara osammanhängande enligt lemma 4.4 ergo $\delta(G) \geq 1$.
Om $\delta(G) = 1$ måste det existera en nod v i G med grad ett. Enligt olikheten ovanför måste $\deg^2(v) \leq -1$ vilket är en motsägelse eftersom en nod inte kan ha en negativ andragrad.

Om $\delta(G) = 2$ innebär det att det existerar en nod $v \in V(G)$ så att $\deg(v) = 2$. Detta innebär att $\deg^2(v) \leq 5$ enligt tidigare olikhet. Vi har alltså två fall att kolla, om v har en granne av grad tre eller om v har två grannar av grad två.
Vi väljer vårt v så att $\deg(v) = \delta = 2$ samt att den har högst andragrad av alla noder av samma grad. Om $\deg^2(v) = 4$ måste grafen vara tvåreguljär. Vi vet det eftersom v:s grannar har grad två samt att deras andragrad är lika med eller mindre än $\deg^2(v)$. I vårt fall måste de ha samma andragrad som v. Alltså har alla noder i grafen grad två vilket innebär att den är tvåreguljär. Det är enkelt att se att om alla noder i en graf har grad två, grafen är sammanhängande (vilket den är enligt lemma 4.4) och grafen är triangelfri måste $G \in [C_n]_{\cong}$ där $n \in \mathbb{N}$ och $n \geq 4$. Vi måste alltså hitta värdet på $t(C_n)$ för alla $n \geq 4$. Vi har två fall antingen är $n = 2m + 1$ eller $n = 2m$ där $m \geq 2$. I det sista fallet vet vi att grafen är en jämn cykel, alltså måste $\alpha(C_n) = \frac{2m}{2}$.
En mer intuitiv förklaring varför är att om vi inkluderar en nod i oberoendemängden kan vi inte inkludera nån av dess grannar. Så vi inkluderar dess grannars grannar istället. Om vi gör detta och går hela varvet kommer vi inte inkludera nån granne till en nod i oberoendemängden. Om cykeln är udda kommer det hända, vilket innebär att vi inte kan ta varannan nod eftersom då kommer vi inkludera en granne till en nod i oberoendemängden. Så vi måste exkludera en nod när vi gått ett varv runt cykeln. Så i fallet då n är udda kommer $\alpha(G) = \frac{(2m+1)-1}{2}$.
Åter till fallet då cykeln är jämn. Eftersom alla noder har samma grad så kommer enligt handskakningslemmat $e(C_n) = \frac{2(2m)}{2}$. Från det får vi likheten

$$\begin{aligned} t(C_n) &= e(C_n) - 6n(C_n) + 13\alpha(C_n) \\ &= 2m - 12m + 13m \\ &= 3m. \end{aligned} \tag{17}$$

Eftersom m är positivt och nollskilt måste $t(C_n) > 0$.
Om det är en udda cykel kommer enligt handskakningslemmat $e(C_n) = \frac{2(2m+1)}{2}$.

Från det får vi likheten

$$
\begin{aligned}
t(C_n) &= 2m + 1 - 6(2m+1) + 13m \\
&= 3m - 5.
\end{aligned} \tag{18}
$$

Eftersom $m \geq 2$ får vi att $t(C_n) \geq 1$.
Om det existerar en graf med egenskapen $\delta = 2$ och $t(G) \leq 0$ så måste det existera ett minsta oberoendetal c_0 en sådan graf kan ha. Låt grafen G med oberoendetal c_0 uppfylla dessa villkor. Från tidigare resonemang vet vi att den inte kan vara tvåreguljär. Därför måste det existera en nod i G med högre gradtal än två. Låt oss utgå från noden v som har grad två i G samt största andragrad av alla noder med grad två i G. Eftersom grafen inte är tvåreguljär måste $\deg^2(v) = 5$ eftersom $\deg^2(v) \leq 6\deg(v) - 7$. Låt oss undersöka den inducerade delgrafen G^v, vi vet att $e(G^v) = e(G) - 5$ enligt lemma 4.1, $n(G^v) = n(G) - 3$ och att $\alpha(G^v) + 1 \leq \alpha(G)$. Från det får vi olikheten

$$
\begin{aligned}
t(G^v) &= e(G^v) - 6n(G^v) + 13\alpha(G^v) \\
&\leq (e(G) - 5) - 6(n(G) - 3) + 13(\alpha(G) - 1) \\
&= t(G) - 5 + 18 - 13 \\
&= t(G).
\end{aligned} \tag{19}
$$

Detta innebär att $t(G^v) \leq 0$. Alla noder av grad två kan antingen ha fem eller fyra som andragrad. Noden v har en granne w_1 av grad två och w_1 har ytterligare en granne w_2 (som är skild från v) som antingen har grad två eller tre. Vilket medför att i grafen G^v kommer $\deg_{G^v}(w_2) \leq 2$ samtidigt som $t(G^v) \leq 0$ och $\alpha(G^v) < \alpha(G) = c_0$ vilket är en motsägelse. $\square$

Lemma 4.6. *Om $G \in \Lambda$ så är G en 4-reguljär graf.*

För att utesluta fallen då $\delta \geq 5$ väljer vi en nod $v \in V(G)$ så att $\deg(v) = \delta \geq 5$. Då måste $\deg^2(v) < 6\delta - 7$ enligt samma resonemang som i lemma 4.5 samt $\delta^2 \leq \deg^2(v)$. Från det får vi olikheten

$$
\begin{aligned}
\delta^2 &< 6\delta - 7 \\
7 &< 6\delta - \delta^2 \\
7 &< \delta(6 - \delta).
\end{aligned} \tag{20}
$$

Som vi kan se stämmer olikheten endast i fallen då $\delta = 2$, $\delta = 3$ eller $\delta = 4$. Så vi kan dra slutsatsen att $\delta \not\geq 5$. Enligt lemma 4.5 måste $\delta > 2$ så de två fallen vi

behöver undersöka är när $\delta = 3$ och $\delta = 4$.
Anta att $\delta(G) = 3$ och att G är en 3-reguljär graf. I detta fall kommer vi utnyttja faktumet att $q(G) := e(G) - 5n(G) + 10\alpha(G) \geq 0$ för alla triangelfria grafer. Eftersom grafen är 3-reguljär så vet vi att $e(G) = \frac{3n(G)}{2}$enligt handskakningslemmat. När vi utnyttjar det i $q(G)$ får vi likheten

$$\begin{aligned}
0 &\leq q(G) \\
&= e(G) - 5n(G) + 10\alpha(G) \\
&= \frac{3n(G)}{2} - 5n(G) + 10\alpha(G) \\
&= -\frac{7n(G)}{2} + 10\alpha(G).
\end{aligned} \tag{21}$$

Från detta kan vi dra slutsatsen att för en 3-reguljär graf måste $\frac{20\alpha(G)}{7} \geq n(G)$. Från det får vi olikheten

$$\begin{aligned}
t(G) &= e(G) - 6n(G) + 13\alpha(G) \\
&= \frac{3n(G)}{2} - 6n(G) + 13\alpha(G) \\
&= -\frac{9n(G)}{2} + 13\alpha(G) \\
&\geq -\frac{9}{2} \cdot \frac{20\alpha(G)}{7} + 13\alpha(G) \\
&= -\frac{90\alpha(G)}{7} + \frac{91\alpha(G)}{7} \\
&= \frac{\alpha(G)}{7}.
\end{aligned} \tag{22}$$

Eftersom $\alpha(G) \geq 0$ måste $t(G) \geq 0$ om G är 3-reguljär men då är $G \notin \Lambda$.
Eftersom G inte är 3-reguljär måste det existera minst en nod $v \in V(G)$ så att $\deg(v) = 3$ och $\delta^2 = 9 < \deg^2(v) < 6\deg(v) - 7 = 11$ (den har en granne av grad fyra). Låt oss utgå ifrån en av v:s grannar w_1 där $\deg(w_1) = 3$. Vi vet att $\deg^2(w_1) < 6\deg(w_1) - 7 = 11$ alltså måste den ha en granne w_2 (skild från v) där $\deg(w_2) = 3$. Eftersom $G \in \Lambda$ kommer $\alpha(G^v) < k_0$ så enligt induktionsantagandet måste $t(G^v) \geq 0$. Vi vet att $e(G^v) = e(G) - \deg^2(v)$ enligt lemma 4.1, $n(G^v) =$

$n(G) - (\deg(v) + 1)$ samt att $\alpha(G^v) + 1 \leq \alpha(G)$. Från det får vi olikheten

$$\begin{aligned} t(G^v) &= e(G^v) - 6n(G^v) + 13\alpha(G^v) \\ &\leq (e(G) - 10) - 6(n(G) - 4) + 13(\alpha(G) - 1) \\ &= t(G) - 10 + 24 - 13 \\ &= t(G) + 1. \end{aligned} \tag{23}$$

Vi vet att $t(G) \leq -1$, $t(G^v) \geq 0$ och att $t(G^v) \leq t(G) + 1$. Det här kan endast stämma om $t(G^v) = 0$. Vilket innebär att $G \in \Psi$ men $\deg_{G^v}(w_2) \leq 2$ vilket motsäger lemma 4.5.

I fallet då $\delta = 4$ väljer vi en nod $v \in V(G)$ så att $\deg(v) = 4$. Vi vet att $\deg^2(v) < 6\deg(v) - 7 = 17$ samt att $\deg^2(v) \geq \delta^2 = 16$ eftersom motsatsen hade medfört att en av v:s grannar har en grad lägre än fyra. Från det kan vi dra slutsatsen att $\deg^2(v) = 16$ och eftersom alla dess grannar har grad fyra kommer de ha samma andragrad. Eftersom det är en sammanhängande graf enligt lemma 4.4 måste detta stämma för alla noder i grafen ergo G är 4-reguljär. □

Lemma 4.7. *Om $G \in \Lambda$ så är $t(G) = -1$ och $t(G^v) = 0$*

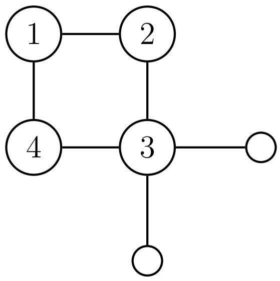
Eftersom vi tar bort en nod samt dess grannar kommer $\alpha(G^v) < k_0$ så enligt induktionsantagandet kommer $G^v \notin \Lambda$. Då vet vi att $t(G^v) \geq 0$ samtidigt som $t(G) \leq -1$. Enligt lemma 4.6 kommer alla noder ha grad fyra så $\deg^2(v) = 16$. Vi vet att $e(G^v) = e(G) - 16$ enligt 4.1, $\alpha(G^v) - 1 \leq \alpha(G)$ och att $n(G^v) = n(G) - 5$ vilket ger oss olikheten

$$\begin{aligned} t(G^v) &= e(G^v) - 6n(G^v) + 13\alpha(G^v) \\ &\leq (e(G) - 16) - 6(n(G) - 5) + 13(\alpha(G) - 1) \\ &= e(G) - 6n(G) + 13\alpha(G) - 16 + 30 - 13 \\ &= t(G) + 1. \end{aligned} \tag{24}$$

Vi vet att $t(G)$ är negativ och $t(G^v)$ positiv ergo $t(G) = -1$ och $t(G^v) = 0$. □

Lemma 4.8. *Om $G \in \Lambda$ har grafen inga fyracykler.*

Låt oss säga att det existerar en fyracykel 1234 (se figur 5) i G. Det innebär noderna 1 och 3 två gemensamma grannar i G. Vi vet att grafen $G^1 \in \Psi$ enligt lemma 4.7, vilket innebär att ingen nod kan ha grad två eller lägre enligt lemma 4.5. Vi vet



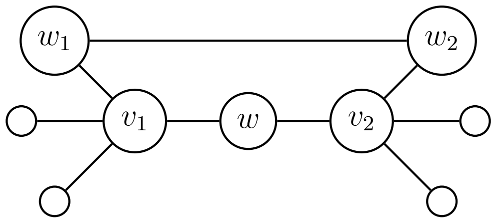
Figur 5: Fyracykel i G med alla grannar till nod 3

att $1, 3 \notin V(G^v)$ samt att $\deg_G(3) = 4$ eftersom G är fyrareguljär enligt lemma 4.6. Alltså måste $\deg_{G^1}(3) < 3$ vilket är en motsägelse. $\square$
Ett korollarium till lemmat är att två noder i G kan inte ha mer än en gemensam granne eftersom motsatsen hade medfört att det existerar en fyracykel.

Lemma 4.9. *Om $G \in \Lambda$ och $v_1, v_2, w \in V(G)$ där w är v_1 och v_2:s gemensamma granne kommer stigen $v_1 w v_2$ vara en del av en femcykel.*

Från korollariet till lemma 4.8 vet vi att v_1 och v_2 kan endast ha en gemensam granne. Vi vet att $\{v_1, v_2\} \notin E(G)$ eftersom det hade medfört att det existerar en trecykel $v_1 v_2 w$ i G. Vi kan generalisera resonemanget från lemma 4.1 för att tillämpa det på en oberoendemängd P. Till skillnad från fallet då vi tar bort en nod och dess grannar kan noderna ha gemensamma grannar. Exempelvis om vi har två skilda noder $x_1, x_2 \in P$, $y_1 \in N(x_1)$, $y_2 \in N(x_2)$ och $\{y_1, y_2\} \in E(G)$ så har vi tagit bort en kant från grafen men om vi räknar på summan av nodernas andragraden kommer vi dubbelräkna den kanten. Så låt H_P beteckna delgrafen till G där $V(H_P) = P \cup N(P)$, då kommer $e(G^P) = e(G) - (\sum_{x \in V(H_P)} \deg_G(x) - e(H_P))$. I vårt fall är oberoendemängden $P = \{v_1, v_2\}$. Vi vet att $\alpha(G^P) + 2 \leq \alpha(G)$ så enligt induktionsantagandet måste $t(G^P) \geq 0$. Vi vet också att $n(G^P) = n(G) - n(H_P) = n(G) - 9$ eftersom v_1 och v_2 har en gemensam granne. Eftersom det är nio noder i delgrafen kommer $\sum_{x \in V(H_P)} \deg_G(x) = 36$. Från det här får vi olikheten

$$
\begin{aligned}
t(G^P) &= e(G^P) - 6n(G^P) + 13\alpha(G^P) \\
&\leq (e(G) - (36e(H_P))) - 6(n(G) - 9) + 13(\alpha(G) - 2) \\
&= e(G) - 6n(G) + 13\alpha(G) + e(H_P) - 36 + 54 - 26 \qquad (25) \\
&= t(G) + e(H_P) - 8 \\
&= e(H_P) - 9.
\end{aligned}
$$



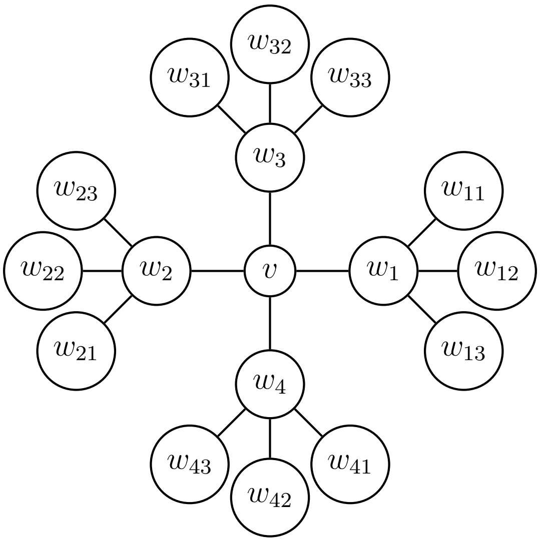
Figur 6: Stigen v_1wv_2

Från det här kan vi dra slutsatsen att $e(H_P) \geq 9$. Eftersom både v_1 och v_2 har fyra grannar i H_P så har vi identifierat åtta kanter. Det innebär att det finns minst en kant mellan två av v_1:s och v_2:s grannar. Vi vet att inga av v_1:s eller v_2:s grannar kan vara grannar med varandra eftersom det är en triangelfri graf. Vi vet också att w inte kan ha ytterligare en granne i H_P eftersom den är granne med både v_1 och v_2. Så det måste existera två skilda noder $w_1, w_2 \in V(H_P) - \{v_1, w, v_2\}$ där $w_1 \in N(v_1)$ och $w_2 \in N(v_2)$ samt att $\{w_1, w_2\} \in E(H_P)$. Det medför att det existerar en femcykel $v_1wv_2w_2w_1$ i G (se figur 6). $\square$

Eftersom vi kan tillämpa detta resonemang på alla stigar av längd två, blir ett korollarium till detta att genom varje enskild stig av längd två passerar det minst en femcykel genom om $G \in \Lambda$.
När vi tar bort en godtycklig nod v samt dess grannar kommer alla noder i G^v antingen ha grad fyra eller tre. De noderna med grad tre kommer alla vara grannar med v:s grannar som vi kallar för w_1, w_2, w_3 och w_4. Vi vet att de måste ha grad tre eftersom motsatsen hade medfört att det existerar en fyracykel i G vilket motsäger lemma 4.8. Nu ska vi undersöka den inducerade delgrafen $J \subseteq G^v$ där $V(J) = \{w_{11}, w_{12}, w_{13}, w_{21}, w_{22}, w_{23}, w_{31}, w_{32}, w_{33}, w_{41}, w_{42}, w_{43}\}$ (se figur 7).

Lemma 4.10. *Om $x \in V(J)$ så är $\deg_J(x) \neq 0$.*

Vi vet från lemma 4.9 att genom varje stig av längd två passerar minst en femcykel. Så om vi tar stigen vw_1w_{11} som exempel. En av noderna som måste ingå i cykeln är nån av v:s tre övriga grannar. Vi kan ta w_2 som exempel, då måste den sista noden i cykeln vara en gemensam granne mellan w_2 och w_{11}. Det innebär att w_{11} måste vara granne med antingen w_{21}, w_{22} eller w_{23}. Alla dessa tre noder finns i delgrafen J vilket innebär att w_{11} måste ha minst en granne i J. Med hjälp av samma resonemang vet vi att detta stämmer för alla noder i J. Det här innebär att ingen nod kan ha grad noll i J. $\square$



Figur 7: v:s grannar samt deras grannar

Lemma 4.11. *Om $x \in V(J)$ och $\deg_J(x) = 1$ kan inte någon av x:s grannar i G^v ha en till granne i J utöver x.*

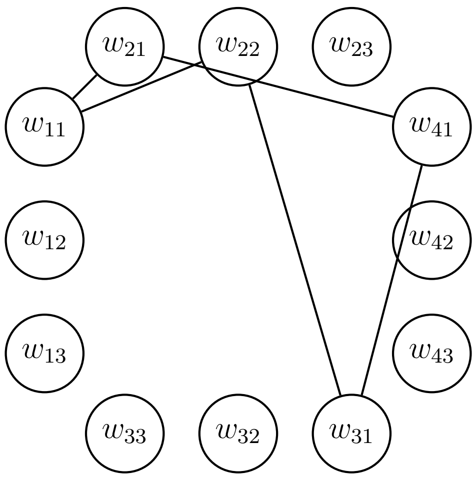
Låt oss anta att det existerar en nod $x \in V(J)$ så att $\deg_J(x) = 1$ samt att dess granne $y \in V(G^v)$ har ytterligare en granne i J skild från x. Låt oss nu betrakta grafen $(G^v)^x$, vi vet att $e((G^v)^x) = e(G^v) - 4 - 4 - 3$ eftersom den endast har en granne i J, $n((G^v)^x) = n(G^v) - 4$ och $\alpha((G^v)^x) + 1 \leq \alpha(G^v)$. Från det här får vi olikheten

$$\begin{aligned} t((G^v)^x) &\leq ((e(G^v) - 11) - 6(n(G^v) - 4) + 13(\alpha(G^v) - 1) \\ &= t(G^v). \end{aligned} \tag{26}$$

Vi har etablerat att $t(G^v) = 0$ enligt lemma 4.7 alltså blir $t((G^v)^x) = 0$ ergo $(G^v)^x \in \Psi$. Eftersom ytterligare en av y:s grannar utöver x ligger i J så kommer den noden ha max grad två i $(G^v)^x$. Alltså måste $\delta((G^v)^x) \leq 2$ vilket motsäger lemma 4.5. □
Eftersom y kan vara i J så blir ett korollarium till detta att om en komponent i J har mer än två noder kan ingen av dem ha grad ett.
Nu har vi etablerat att ingen komponent i J som innehåller mer än två noder har en nod med grad ett. Alla noder i en sådan komponent har grad två eller tre och eftersom J har ändligt antal noder måste den innehålla minst en cykel. J är en inducerad delgraf av G så den kan inte ha någon cykel av storlek tre eller fyra.

Lemma 4.12. *J har ingen cykel av storlek fem*

För att bevisa att det inte kan existera en femcykel i J ska vi försöka konstruera en (se figur 8). Låt oss börja med w_{11}, den kan inte vara granne med w_{12} eller w_{13} eftersom det skapar en trecykel. Så vi kan exempelvis välja w_{21} som nästa nod i cykeln. Om det existerar en kant mellan w_{21} och w_{12} eller w_{13} kommer det att bilda en fyracykel i G, $w_1w_{11}w_{21}w_{12}$ exempelvis vilket motsäger lemma 4.8. Så vi kan dra en kant mellan w_{21} och nån av grannarna till w_3 eller w_4. Vi väljer noden w_{41} men resonemanget är analogt om vi valt nån av w_3:s grannar. Det kan inte existera en kant från w_{41} till w_{22} eller w_{23} för då skulle det existera en fyracykel i G. Vi kan inte heller använda w_{42} eller w_{43} eftersom det hade medfört att det existerar en K_3 i G. Vi kan inte välja w_{12} eller w_{13} eftersom det är den näst sista noden i vår cykel vilket innebär att nästa nod i cykeln är granne med w_{11}. Om vi hade valt w_{12} och sedan exempelvis w_{22} hade vi bildat en fyracykel $w_{12}w_{22}w_{11}w_1$ vilket motsäger 4.8. Så vi vi väljer w_{31} som nästa nod i vår cykel. Vi kan inte välja w_{12} eller w_{13} som sista noden i cykeln eftersom då bildar vi en trecykel ex. $w_1w_{11}w_{12}$. Så vi väljer w_{22} som den sista noden i vår femcykel. Då kommer det existera en fyracykel $w_{22}w_2w_{21}w_{11}$ i G vilket är en motsägelse.



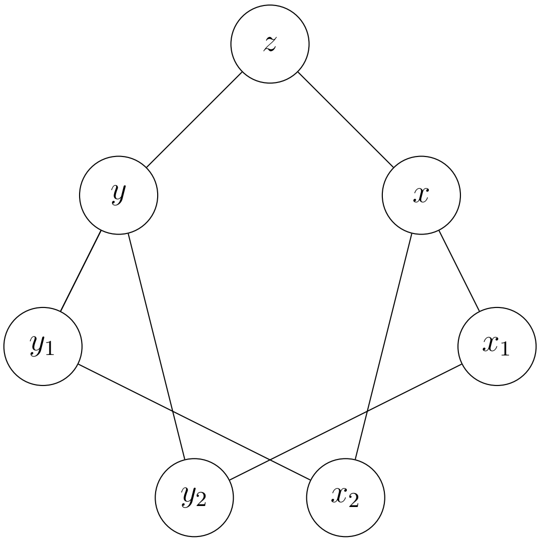
Figur 8: Försök att konstruera en femcykel i J

Lemma 4.13. *Om x och y är två noder med grad två i J och en gemensam granne z i J så kommer x:s granne utanför J vara granne med y:s granne i J och vice versa.*

Låt x_1 och y_1 vara x:s respektive y:s granne i J och x_2 och y_2 vara x:s respektive y:s granne utanför J. Vi vet att x_1 måste vara skilt från y_1 annars hade vi bildat en fyracykel zxx_1y vilket motsäger lemma 4.8. Av samma anledning måste x_2 vara skilt från y_2. Vi vet även att x_1 och y_1 inte kan vara grannar eftersom det hade bildat en femcykel zxx_1y_1y i J vilket motsäger lemma 4.12. Låt $P = \{x, y\}$ och H_P vara delgrafen som består av x och y samt deras grannar. Eftersom $\deg_J(x) = 2$ så medför lemma 4.11 att $\deg_J(x_1) \geq 2$. Det innebär att det existerar en nod $u \in V(J) - V(H_P)$ så att $\{x_1, u\} \in E(J)$. Vi vet att u är skilt från y och y_1 av tidigare nämnda skäl. Det innebär att u inte är granne med vare sig y eller x vilket innebär att $u \notin V(H_P)$. Eftersom u har grad tre i G^v så kan den max ha grad två i $(G^v)^P$. Vilket innebär att $\delta((G^v)^P) < 3$ så enligt lemma 4.7 måste $t((G^v)^P) > 0$. Genom att tillämpa samma metod som i lemma 4.9 får vi olikheten

$$\begin{aligned} t((G^v)^P) &\leq (e(G^v) - (23 - e(H_P)) - 6(n(G^v) - 7) + 13(\alpha(G^v) - 2) \\ &= e(G^v) - 6n(G^v) + 13\alpha(G^v) - 23 + e(H_P) + 42 - 26 \\ &= t(G^v) - 7 + e(H_P) \\ &= e(H_P) - 7. \end{aligned} \tag{27}$$

Så vi kan konkludera att i delgrafen H_P finns det minst åtta kanter. Eftersom y_1 och x_1 har tre grannar i G^v så är de tillsammans ändpunkter till sex kanter. Så det existerar minst två kanter till i delgrafen som har sina ändpunkter i andra noder. Eftersom det är en triangelfri graf så har vi fyra möjliga kanter att lägga till $\{x_1, y_1\}$, $\{x_2, y_2\}$, $\{x_1, y_2\}$ och $\{x_2, y_1\}$. Vi kan inte lägga till $\{x_1, y_1\}$ av tidigare nämnda skäl. Om vi lägger till $\{x_2, y_2\}$ så måste vi antingen lägga till lägga till $\{x_1, y_2\}$ eller $\{x_2, y_1\}$. Om vi sedan lägger till $\{x_1, y_2\}$ så bildar vi en fyracykel $xx_2y_2x_1$ vilket motsäger lemma 4.8. Av samma skäl kan inte både $\{x_2, y_2\}$ och $\{x_2, y_1\}$ ingå i kantmängden samtidigt. Vilket innebär att $\{x_1, y_2\}, \{x_2, y_1\} \in E(H_P)$ (se figur 9). □



Figur 9: Delgrafen H_P i lemma 4.13.

Lemma 4.14. *J har inga sexcykler.*

Låt oss anta att J har en sexcykel $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$. Ingen nod i cykeln kan ha ytterligare en granne i cykeln eftersom det hade medfört att det existerar en triangel eller en fyracykel i G vilket motsäger lemma 4.8. Låt $P = \{x_1, x_3, x_5\}$ som är en oberoendemängd och delgrafen H_P bestå av noderna i P samt deras grannar. Vi kan tillämpa samma metod som i lemma 4.9 för att hitta en undre begränsning för $e(H_P)$. Vi kallar x_1:s granne utanför cykeln x_7, x_3:s granne utanför cykeln x_8 och x_5:s granne utanför cykeln x_9. Vi vet att x_7, x_8 och x_9 måste vara skilda från varandra eftersom motsatsen hade medfört att det existerar en fyracykel i G vilket motsäger lemma 4.8. Till skillnad från tidigare fall vet vi inte om x_7, x_8 och x_9 har grad tre eller fyra i G^v. Så låt d_P beteckna summan av graderna för noderna i P samt deras grannar i grafen G^v. Eftersom tre av dessa noder kan antingen ha grad tre eller fyra så innebär det att $27 \leq d_P \leq 30$ beroende på vilka gradtal x_7, x_8 och x_9 har. Från det får vi olikheten

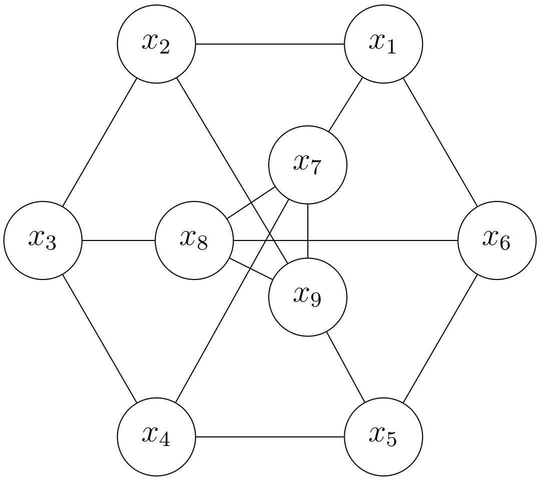
$$\begin{aligned} t((G^v)^P) &= e((G^v)^P) - 6n((G^v)^P) + 13\alpha((G^v)^P) \\ &\leq (e(G^v) - (d_P - e(H_P))) - 6(n(G^v) - 9) + 13(\alpha(G^v) - 3) \\ &= e(G^v) - 6n(G^v) + 13\alpha(G^v) - d_P + e(H_P) + 54 - 39 \\ &= t(G^v) + e(H_P) - d_P + 15 \\ &= e(H_P) - d_P + 15. \end{aligned} \tag{28}$$

Enligt induktionsantagandet måste $t((G^v)^P) \geq 0$ ergo $e(H_P) \geq d_P - 15$. Eftersom d_P är beroende av tre skilda noders gradtal kan $d_P = 27$, $d_P = 28$, $d_P = 29$ eller $d_P = 30$. Eftersom x_1, x_3 och x_5 har grad tre och är oberoende har vi identifierat nio skilda kanter med dessa tre noder som ändpunkter. Det innebär att det antingen måste finnas minst tre kanter till om $d_P = 27$, minst fyra kanter till om $d_P = 28$, minst fem kanter till om $d_P = 29$ eler minst sex kanter till om $d_P = 30$ (se figur 10).

Om $d_P = 27$ innebär det att alla nio noder ligger i J. Då kan vi inte lägga till mer kanter utan att skapa en femcykel, vilket J inte kan ha enligt lemma 4.12. Exempelvis om vi lägger till $\{x_7, x_9\}$ eller $\{x_7, x_6\}$ kommer vi skapa femcykeln $x_7x_9x_5x_6x_1$ eller femcykeln $x_7x_3x_4x_5x_6$. Vi kan därmed dra slutsatsen att $d_P \neq 27$.
Om $d_P = 28$ ligger exempelvis noden x_7 inte i J. Vilket innebär att vi kan lägga till $\{x_8, x_7\}$ och $\{x_9, x_7\}$ utan att skapa en otillåten femcykel. Vi kan inte lägga till mer kanter med x_8 eller x_9 som ändpunkt för samma anledning som i tidigare fall. Vi kan inte heller lägga till $\{x_7, x_4\}$ eftersom det skulle skapa en fyracykel $x_7x_4x_5x_9$ vilket motsäger lemma 4.8. Vi kan därmed dra slutsatsen att $d_P \neq 28$
Om $d_P = 29$ ligger exempelvis noderna x_7 och x_8 inte i J. Då måste $\deg_J(x_1) = 2$ och $\deg_J(x_3) = 2$ så enligt lemma 4.13 vet vi att $\{x_6, x_8\}, \{x_4, x_7\} \in E(G)$. Om $\{x_2, x_9\} \in E(G)$ eller $\{x_7, x_8\} \in E(G)$ har vi antingen bildat en femcykel $x_2x_9x_5x_4x_3$ i J vilket motsäger lemma 4.12 eller en fyracykel $x_4x_7x_8x_3$ vilket motsäger lemma 4.8. Så vi har två potentiella kanter kvar men vi behöver minst tre kanter till för att konstruera H_P. Vi kan därmed dra slutsatsen att $d_P \neq 29$
I sista fallet då $d_P = 30$ ligger x_7, x_8 och x_9 inte i J. Vilket innebär att $\deg_J(x_1) = 2$, $\deg_J(x_3) = 2$ och $\deg_J(x_5) = 2$ alltså kommer $\{x_7, x_4\}, \{x_6, x_8\}, \{x_5, x_9\} \in E(G^v)$ enligt lemma 4.13. Då måste delgrafen innehålla minst tre kanter till. Dessa kanter måste ha båda ändpunkter i de tre noder utanför J. Det innebär att noderna x_7, x_8 och x_9 kommer bilda en triangel vilket är en motsägelse. Vi kan därmed dra slutsatsen att $d_P \neq 30$
Vi kan alltså inte konstruera delgrafen H_P om J innehåller en sexcykel så J kan inte ha en. $\square$

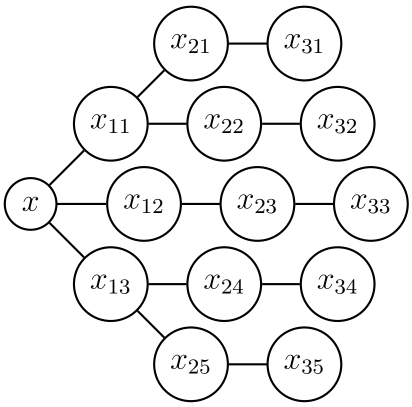
Lemma 4.15. *Om* $\deg_J(x) = 3$ *måste* $\deg^2_J(x) = 7$

Vi vet enligt lemma 4.11 att ingen av dess grannar kan ha grad ett. Så vi börjar med att utesluta möjligheten att två eller tre av dess grannar har grad tre. För att motbevisa den möjligheten så ska vi försöka konstruera en sådan graf (se figur 11). Om två av x:s grannar har grad tre och ingen av dem kan ha en gemensam granne



Figur 10: Möjliga kanter om J har en sexcykel.

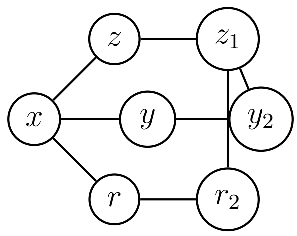
eftersom grafen inte har några fyracykler. Då vet vi att utöver x och dess grannar måste det existera ytterligare fem skilda noder i J som ingår i samma komponent. Ingen av noderna med avstånd två från x kan vara grannar med varandra eller ha en gemensam granne eftersom det hade medfört att J har en cykel av storlek fem eller sex vilket motsäger lemma 4.12 eller 4.14. Låt oss anta att de alla har grad två, det innebär att vi behöver ytterligare fem noder i J. Alltså behöver vi minst 14 noder för att konstruera denna delgraf men det finns tolv noder i J. Så vi kan dra slutsatsen att två av x:s grannar inte kan ha grad tre. Beviset för att x inte kan ha tre grannar av grad tre är analogt till det här.



Figur 11: Försök att konstruera J om $\deg_J^2(x) = 8$

Låt oss anta att x har tre grannar i J z, y och r som alla har grad två i J (se figur 12). Låt z_1 vara z:s andra granne i J där $z_1 \in V(J) - \{x\}$ samt y_2 och r_2 vara

y:s respektive r:s granne utanför J. Vi vet att y_2 och r_2 måste vara skilda eftersom motsatsen hade medfört att det existerar en fyracykel i G vilket motsäger lemma 4.8. Vi vet också att z_1 är skild från y och r eftersom G är en triangelfri graf. Enligt lemma 4.13 kommer $\{z_1, r_2\}, \{z_1, y_2\} \in E(H)$ vilket innebär att $\deg_J(z_1) = 1$. Då kommer $\deg_J(z_1) = 1$ trots att $\deg_J(z) = 2$ vilket motsäger lemma 4.11. Alltså kan inte $\deg_J^2(x) \geq 8$ eller $\deg_J^2(x) \leq 7$ om $\deg_J(x) = 3$. Vi kan därmed dra slutsatsen att om $\deg_J(x) = 3$ måste $\deg_J^2(x) = 7$. $\square$



Figur 12: Försök att konstruera G^v om $\deg_J^2(x) = 6$

Lemma 4.16. *Grafen J består endast av isolerade kanter.*

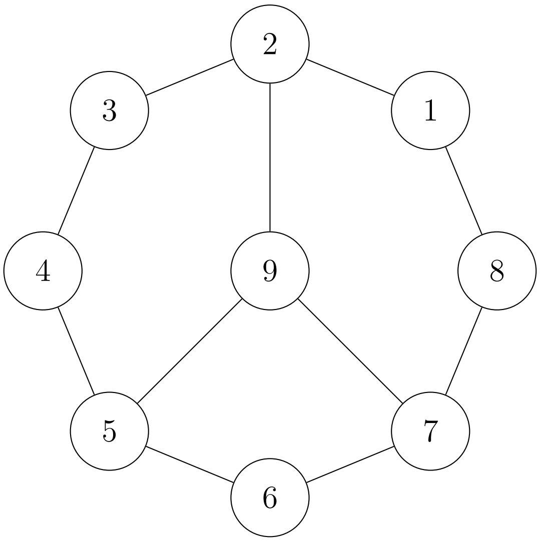
Vi vet enligt lemma 4.11 att om en nod i J har grad ett så måste dess granne också ha grad ett i J. Det innebär att om en komponent innehåller mer än två noder måste alla noder ha grad två eller tre. J är en ändlig graf så den komponenten måste innehålla cykler. Vi vet att J inte kan ha en cykel kortare än sju enligt lemma 4.8, 4.12 och 4.14 så vi har sex fall att utesluta om J är tvåreguljär. Utöver det finns det ytterligare två fall där J har antingen två eller fyra noder av grad tre.

(i) En komponent i J är inte isomorf med C_7, C_9 eller C_{11}

(ii) En komponent i J är inte isomorf med C_8, C_{10} eller C_{12}

(iii) En komponent i J har inte två eller fyra noder av grad tre.

(i) Vi vet från lemma 4.8, 4.12, 4.14 och 4.10 att en komponent kan antingen bestå av två noder eller minst sju noder. Så om en komponent innehåller sju noder måste de resterande fem noderna vara i komponenter av storlek två. Det fungerar inte eftersom fem inte är ett jämnt tal. Resonemanget varför en komponent i J inte kan vara isomorf med C_9 eller C_{11} är analogt till det här.
(ii) Vi vet från lemma 4.13 att om två noder i J (av grad två i J) har en gemensam granne i J måste deras granne utanför J vara granne med den andra nodens granne i J och vice versa. Så om vi betraktar en åttacykel 12345678 i J så ser vi att 1 och



Figur 13: Fyracykel 5679

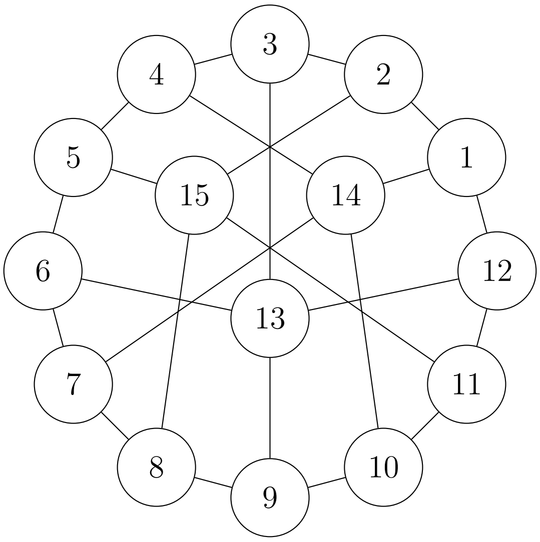
3 har en gemensam granne. Med hjälp av det här lemmat kan vi dra slutsatsen att 1 och 4 har en gemensam granne utanför J (se figur 13). Tillämpar vi denna sats iterativt så ser vi att en nod n i cykeln har en gemensam granne utanför J med noden $n+3$ där $n, n+3 \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$. Eftersom $\operatorname{sgd}(8,3) = 1$ kan vi helt enkelt tillämpa detta lemma iterativt tills vi har konstruerat en otillåten cykel. Exempelvis har 2 och 5 en gemensam granne utanför J men det måste även 7 och 2 ha. Eftersom 2, 5 och 7 har grad tre i G^v så är de alla granne med samma nod som vi kallar 9. Detta skapar en fyracykel 5679 i G^v vilket motsäger lemma 4.8.

I fallet C_{10} vet vi att $\operatorname{sgd}(10,3) = 1$. Alltså kommer vi få samma motsägelse som i fallet C_8.

I fallet C_{12} kan vi tillämpa samma lemma men eftersom $\operatorname{sgd}(12,3) = 3$ kommer vi inte få ut en liknande motsägelse som i tidigare fall (se figur 14). Så vi börjar med att undersöka hur många noder G måste ha i det här fallet. Vi vet att G är en 4-reguljär graf så enligt handskakningslemmat kommer $e(G) = \frac{4n(G)}{2}$ och enligt lemma 4.7 kommer $t(G) = -1$. Från det får vi likheten

$$\begin{aligned} -1 &= t(G) \\ &= e(G) - 6n(G) + 13\alpha(G) \\ &= 2n(G) - 6n(G) + 13\alpha(G) \\ &= -4n(G) + 13\alpha(G). \end{aligned} \tag{29}$$

Eftersom $\frac{12}{3} = 4$ kommer det existera tre skilda noder utanför cykeln som har fyra



Figur 14: Fallet C_{12}

grannar var i cykeln. Låt x, y och z vara dessa tre noder där $x, y, z \in V(G^v) - V(J)$. När vi tillämpar samma lemma som tidigare på vår tolvcykel får vi att $\{1, 4, 7, 10\} = N(x)$, $\{2, 5, 8, 11\} = N(y)$ och $\{3, 6, 9, 12\} = N(z)$. Vi vet att x, y och z alla har grad fyra i G^v så alla deras grannar ligger i J. Det innebär att dessa tre noder bildar tillsammans med noderna i J en komponent i G^v. Alltså kommer $n(G^v) = 15$ och eftersom G är sammanhängande enligt lemma 4.4 kommer $n(G^v) = n(G) - 5$. Så vi vet att $n(G) = 20$ och när vi utnyttjar det här tillsammans med vår tidigare likhet får vi att

$$\begin{aligned} -80 + 13\alpha(G) &= -1 \\ \alpha(G) &= \frac{79}{13}. \end{aligned} \tag{30}$$

Vilket inte går eftersom $\alpha(G)$ måste vara ett naturligt tal. Så vi kan dra slutsatsen att J är ej isomorf med C_{12}.

(iii) I fallet då fyra noder har grad tre kommer J vara en tolvcykel där $\{1, 7\}, \{4, 10\} \in E(J)$. Vi vet att $\text{sgd}(12, 3) = 3$ så enligt ett resonemang analogt med fallet C_{12} vet vi att det existerar två skilda noder $x, y \in V(G)$ där $\{2, 5, 8, 11\} = N(x)$ och $\{3, 6, 9, 12\} = N(y)$. Både x och y har grad fyra så $n(G^v) = 14$ alltså kommer $n(G) = 5 + 14$. När vi utnyttjar det här i vår likhet från tidigare får vi ekvationen $-4 \cdot 19 + 13\alpha(G) = -1$. Eftersom $\alpha(G)$ är ett naturligt tal så finns det ingen lösning på den här ekvationen. Så vi kan konkludera att J inte är isomorf med den här grafen.

I fallet då J har två noder av grad tre kommer J vara en tolvcykel där $\{3, 9\} \in E(G)$.

Genom att tillämpa lemma 4.13 på samma sätt som i tidigare fall vet vi att det existera två skilda noder $13, 14 \in V(G^v) - V(J)$ där $\{1, 4, 7, 10\} = N(13)$ och $\{2, 5, 8, 11\} = N(14)$. Noderna 6 och 12 har grad två i J så vi kallar nod 6:s granne utanför J för 15 och nod 12:s granne utanför J för 16. Vi har därmed två fall, antingen är noderna 15 och 16 skilda från varandra (se figur 15) eller så är de samma nod. Vi kommer först gå igenom fallet då de är två skilda noder.

Betrakta oberoendemängden $P = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, låt delgrafen H_P bestå av noderna i oberoendemängden samt deras grannar. Vi kommer använda samma metod som i lemma 4.9 för att finna en övre begränsning för $t((G^v)^P)$. Det finns 16 noder i H_P varav tolv har grad tre och fyra grad fyra så vi får olikheten

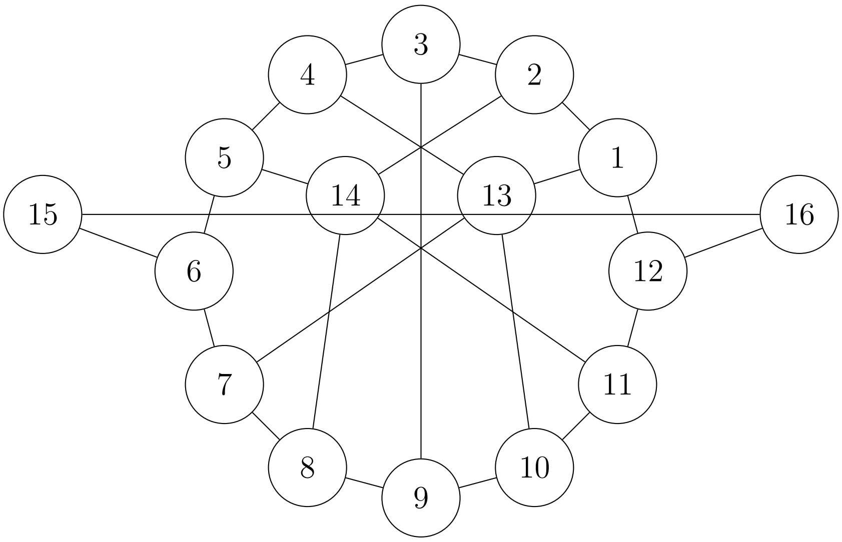
$$\begin{aligned} t((G^v)^P) &= e((G^v)^P) - 6n((G^v)^P) + 13\alpha((G^v)^P) \\ &\leq (e(G^v) - (52 - e(H_P))) - 6(n(G^v) - 16) + 13(\alpha(G^v) - 6) \\ &= e(G^v) - 6n(G^v) + 13\alpha(G^v) - 52 + e(H_P) + 96 - 78 \\ &= t(G^v) + e(H^P) - 34 \\ &= e(H^P) - 34. \end{aligned} \tag{31}$$

Eftersom $\alpha((G^v)^P) < k_0$ kommer enligt induktionsantagandet $t((G^v)^P) \geq 0$ ergo $e(H_P) \geq 34$. Vi kan direkt identifiera 23 kanter i grafen så vi behöver identifiera minst elva kanter till för att konstruera H_P. Den enda möjliga kanten vi kan lägga till är $\{15, 16\}$. Så den här delgrafen går inte att konstruera. Resonemanget varför H_P inte går att konstruera om 15 och 16 är samma nod är analogt. Vi kan därmed konkludera att J inte kan ha två noder av grad tre.

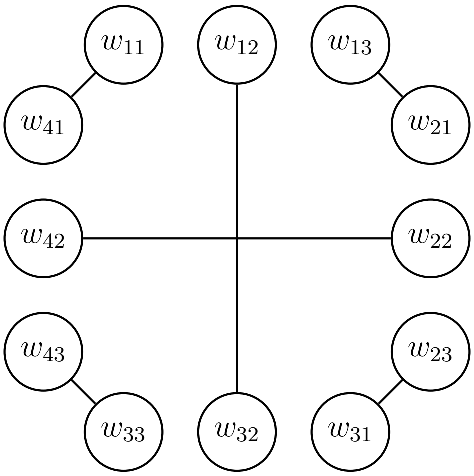
Eftersom det inte går att konstruera delgrafen G^v i något av dessa fall kan vi dra slutsatsen att J endast består av isolerade kanter (se figur 16). □

Lemma 4.17. *Om $G \in \Lambda$ har G ingen cykel av storlek sex.*

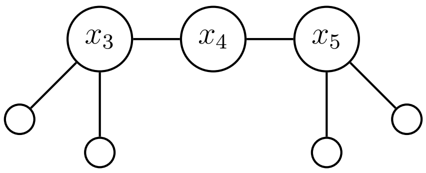
Låt oss anta att det existerar minst en sexcykel $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ i G. Noderna x_3 och x_5 kan inte vara grannar med x_1 eftersom G är en triangelfri graf. I delgrafen G^{x_1} kommer $\deg_{G^{x_1}}(x_3) = 3$ och $\deg_{G^{x_1}}(x_5) = 3$. Vi definierar delgrafen J för grafen G^{x_1} på samma sätt som vi gjorde för grafen G^v. Det innebär att x_3 och x_5 kommer ingå i delgrafen J. Enligt lemma 4.16 kommer $\deg_J(x_3) = 1$ och $\deg_J(x_5) = 1$ eftersom J består enbart av isolerade kanter. Från lemma 4.11 vet vi att om två noder har grad ett i J kan de inte ha en gemensam granne i G^{x_1} men $N(x_3) \cap N(x_5) = \{x_4\}$ (se figur 17) vilket är en motsägelse. □



Figur 15: Fallet då två noder har grad tre



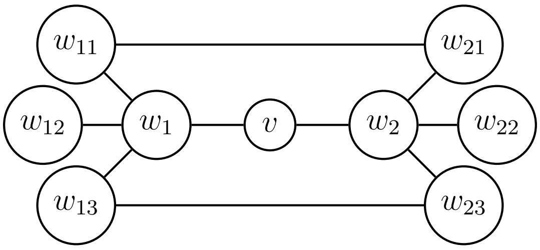
Figur 16: Hur J kommer att se ut.



Figur 17: x_3:s och x_5:s grannar i G^{x_1}.

Lemma 4.18. *Om $G \in \Lambda$ går det exakt en unik femcykel genom varje stig av längd två.*

Låt oss anta att genom stigen $w_1 v w_2$ passerar det minst två skilda femcykler (se figur 18). Från lemma 4.16 vet vi att det är endast möjligt om två av w_1:s grannar är granne med två av w_2:s grannar. Om exempelvis $\{w_{11}, w_{21}\}, \{w_{11}, w_{21}\} \in E(G)$ kommer två skilda femcykler passera genom stigen $w_1 v w_2$. Då bildas det en sexcykel $w_1 w_{11} w_{21} w_2 w_{23} w_{13}$ i G vilket motsäger lemma 4.17. □



Figur 18: Om två skilda femcykler passerar genom stigen $w_1 v w_2$.

Nu när vi etablerat vilka egenskaper G har om $G \in \Lambda$ kan vi bevisa invarianten.

Sats 4.19. $\Lambda = \emptyset$

Låt $G \in \Lambda$, $x, y \in V(G)$ och $\{x, y\} \in E(G)$. Både x och y har fyra grannar var enligt lemma 4.6. Från det och lemma 4.18 kan vi enkelt se att det passerar två skilda femcykler genom kanten $\{x, y\}$. Låt $xabcy$ och $xdefy$ vara dessa två femcykler. Vi vet att noderna i mängden $P = \{a, d, c, f\}$ är oberoende från varandra eftersom motsatsen hade medfört att det finns en K_3 eller fyracykel i G vilket motsäger lemma 4.8. Vi vet även att a och c inte kan vara granne med e eftersom det hade medfört att det existerar en fyracykel i G vilket motsäger lemma 4.8. Av samma skäl kan inte d eller f vara granne med b. Från det och lemma 4.6 vet vi att noderna i oberoendemängden måste ha två grannar var som inte ligger i nån av cyklerna. Vi kallar dessa grannar a_1, a_2, c_1, c_2, d_1, d_2, f_1 och f_2 där $a_1, a_2 \in N(a)$, $c_1, c_2 \in N(c)$, $d_1, d_2 \in N(d)$ och $f_1, f_2 \in N(f)$. Alla dessa noder måste vara skilda från varandra eftersom motsatsen hade medfört att det existerar antingen en fyracykel eller en otillåten femcykel i G vilket motsäger lemma 4.8 eller 4.18. Exempelvis om a_2 och f_2 är samma nod kommer de vara en del av en femcykel yff_2ax i G, vilket innebär att det går två skilda femcykler genom stigen yxa.
Från lemma 4.18 vet vi att det måste passera en femcykel genom stigen axd och en skild femcykel genom stigen cyf. Därför måste $\{a_1, d_1\}, \{c_1, f_1\} \in E(G)$.

Betrakta den inducerade delgrafen H_P som består av noderna i mängden P samt deras grannar (se figur 19). Vi kan använda samma metod som i lemma 4.9 för att hitta en undre begränsning för $e(H_P)$. Vi vet att $n(G^P) = n(G) - 16$, $\alpha(G^P) + 4 \leq \alpha(G)$ och $\deg^2(P) = 4 \cdot 16 - e(H_P)$. Eftersom $\alpha(G^P) < k_0$ så måste $t(G^P) \geq 0$ enligt induktionsantagandet. Från det får vi olikheten

$$\begin{aligned} t(G^P) &= e(G^P) - 6n(G^P) + 13\alpha(G^P) \\ &\leq (e(G) - (64 - e(H_P))) - 6(n(G) - 16) + 13(\alpha(G) - 4) \\ &= e(G) - 6n(G) + 13\alpha(G) - 20 + e(H_P) \\ &= t(G) + e(H_P) - 20. \end{aligned} \tag{32}$$

Enligt lemma 4.7 är $t(G) = -1$ och enligt induktionsantagandet måste $t(G^P) \geq 0$ ergo $e(H_P) - 21 \geq 0$. Så det måste existera minst 21 kanter i G. Vi känner till kanterna med en ändpunkt i nån av noderna i oberoendemängden samt $\{a_1, d_1\}$, $\{c_1, f_1\}$ och $\{x, y\}$ så vi har identifierat 19 kanter. Det kan inte finnas mer kanter med x, y, b eller e som ändpunkter eftersom det skulle skapa en K_3, en fyracykel eller en otillåten femcykel i G vilket motsäger lemma 4.8 eller 4.18. Så de potentiella ändpunkterna för de övriga kanterna måste därför vara noderna i mängden $\{a_1, a_2, d_1, d_2, c_1, c_2, f_1, f_2\}$.

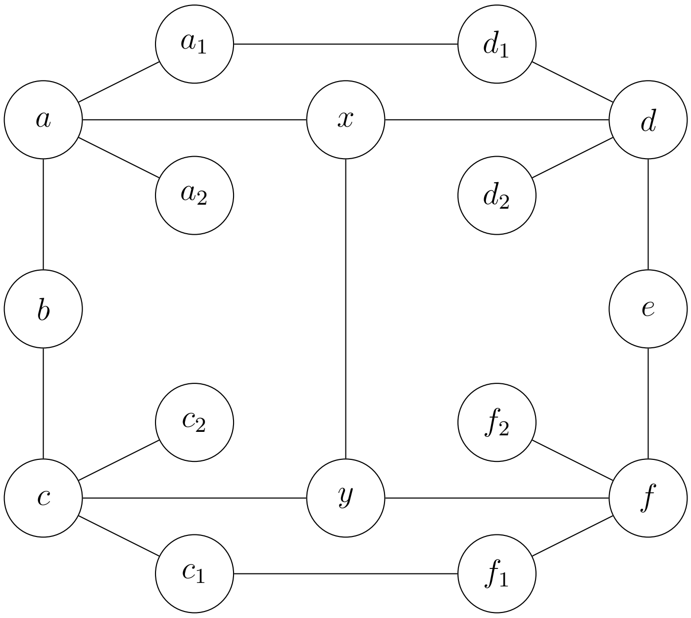
Låt oss utgå ifrån a_1 och a_2 för att försöka konstruera grafen. De kan inte vara grannar med c_1 eller c_2 eftersom det skulle skapa en femcykel exempelvis a_1abcc_1. Då skulle stigen abc haft två skilda femcykler passera genom den vilket motsäger lemma 4.18.

Eftersom a_1 är granne med d_1 kan inte a_2 vara granne med d_1 också eftersom det hade skapat en fyracykel $aa_2d_1a_1$ vilket motsäger lemma 4.8. Noderna a_1 och d_2 kan inte vara grannar eftersom det hade skapat en fyracykel $dd_1a_1d_2$ vilket motsäger lemma 4.8. Om a_2 är granne med d_2 hade det skapat en sexcykel $aa_1d_1dd_2a_2$ vilket motsäger lemma 4.17.

De sista potentiella ändpunkterna vi måste undersöka är f_1 och f_2. Om a_1 eller a_2 är granne med f_1 eller f_2 skulle de bilda en sexcykel, exempelvis a_1f_1fyxa vilket motsäger lemma 4.17.

När vi undersöker de resterande potentiella ändpunkter i H_P kommer vi komma fram till samma motsägelser som vi gjorde för a_1 och a_2. Därför kan vi dra slutsatsen att det inte går att konstruera delgrafen H_P.

Det innebär att G är en graf så perfekt att den inte kan existera ergo $\Lambda = \emptyset$. $\square$



Figur 19: Delgrafen H_P från lemma 4.19

5 Resultat

Som vi visade i avsnitt 4.2 så kan vi använda $w(G)$ för att hitta en övre begränsning på $R(3,3)$. Genom att generalisera resonemanget som vi använde i avsnitt 4.2 kan vi hitta övre begränsningar för andra ramseytal. Skillnaden är att k kan nu vara ett godtyckligt naturligt tal större än två. Precis som med $R(3,3)$ kommer det här hjälpa oss att utesluta fall för $R(3,k)$. Eftersom resonemangen är analoga kommer vi inte gå igenom dem lika grundligt här.

Låt $f(G) := ae(G) - bn(G) + c\alpha(G)$ vara en linjär invariant där $a, b, c > 0$ och $f(G) \geq 0$ om G är en triangelfri graf. Eftersom oberoendetalet måste vara strikt mindre än k vet vi att $\alpha(G) \leq k-1$. För att det ska stämma måste $\Delta \leq k-1$. Vilket ger oss följande olikhet $\Sigma_{v \in V(G)} \deg(v) \leq \Delta n(G)$. Vi kan utnyttja det och handskakningslemmat för att få ut olikheten

$$\begin{aligned} e(G) &= \frac{\Sigma_{v \in V(G)} \deg(v)}{2} \\ &\leq \frac{\Delta n(G)}{2} \\ &\leq \frac{(k-1)n(G)}{2}. \end{aligned} \tag{33}$$

Nu har vi en övre begränsning på grafens kanttal och oberoendetal. Vi kan utnyttja det för att få ut följande olikhet

$$
\begin{aligned}
f(G) &= ae(G) + bn(G) + c\alpha(G) \\
&\leq a\frac{(k-1)n(G)}{2} - bn(G) + c(k-1) \\
&= \frac{a(k-1)-2b}{2}n(G) + c(k-1).
\end{aligned} \tag{34}
$$

Eftersom G är triangelfri måste $f(G) \geq 0$ vilket innebär att

$$
\frac{a(k-1)-2b}{2}n(G) + c(k-1) \geq 0. \tag{35}
$$

När vi sätter in koefficienterna från $w(G)$, $q(G)$ och $t(G)$ får vi följande olikheter

$$
\begin{aligned}
\frac{(k-1)-6}{2}n(G) + 5(k-1) \geq 0 \\
\frac{(k-1)-10}{2}n(G) + 10(k-1) \geq 0 \\
\frac{(k-1)-12}{2}n(G) + 13(k-1) \geq 0.
\end{aligned} \tag{36}
$$

En begränsning med dessa metoder är att koefficienten framför $n(G)$ kan vara positiv. Exempelvis om $k = 11$ kommer $w(G)$, $q(G)$ och $t(G)$ ge oss följande olikheter

$$
\begin{aligned}
2n(G) + 50 \geq 0 \\
0n(G) + 100 \geq 0 \\
-n(G) + 130 \geq 0.
\end{aligned} \tag{37}
$$

Från $w(G)$ får vi olikheten $n(G) \geq -25$ och från $q(G)$ får vi olikheten $100 \geq 0$. Endast $t(G)$ ger oss en övre begränsning för $R(3, 11)$. Så med dessa tre linjära invarianter kan vi finna övre begränsningar upp till $R(3, 12)$. För vissa k kommer övre begränsningen för $n(G)$ inte vara ett heltal. I dessa situationer avrundar vi alltid neråt till närmaste heltal.

Vi kommer tillsist inkludera en sista linjär invariant $c(G) := 5e(G) - 34n(G) + 78\alpha(G)$ som är positiv för alla triangelfria grafer [Bac19, XIII, § 5, Proposition 13.5].

Från den får vi olikheten

$$
\frac{5(k-1)-68}{2}n(G) + 78(k-1) \geq 0. \tag{38}
$$

I tabellen nedanför jämför vi de övre begränsningarna $w(G)$, $q(G)$, $t(G)$ och $c(G)$ ger oss med deras sanna värde eller deras lägsta kända övre begränsning (markerade med asterisk). Dessa värden kommer från artikeln "Small Ramsey Numbers" i The Electronic Journal of Combinatorics [Rad21, II, § 1, Tabell Ia] samt från Angeltveits artikel "$R(3, 10) \leq 41$" [Ang24, I, § 1, Theorem 1.1].

k	R(3,k)	w(G)	q(G)	t(G)	c(G)
3	6	6	6	6	6
4	9	11	9	9	9
5	14	21	14	14	14
6	18	51	21	19	19
7	23	-	31	27	25
8	28	-	47	37	34
9	36	-	81	53	45
10	41*	-	181	79	62
11	50*	-	-	131	87
12	59*	-	-	287	133
13	68*	-	-	-	235
14	77*	-	-	-	677
15	87*	-	-	-	1093

Tabell 1: Övre begränsningar på ramseytal

Referenser

[Ang24] Vigleik Angeltveit. $R(3, 10) \leq 41$, 2024. URL: https://arxiv.org/abs/2401.00392, arXiv:2401.00392.

[Bac13] Jörgen Backelin. Edge number critical triangle free graphs with low independence numbers, 2013. URL: https://arxiv.org/abs/1309.7874, arXiv:1309.7874.

[Bac19] Jörgen Backelin. Contributions to a Ramsey calculus., 2019. URL: https://www2.math.su.se/~joeb/public/Ramsey/index.

[Big02] Norman L. Biggs. *Discrete Mathematics*. Oxford University Press, 2nd edition, 2002.

[Bou89] Nicolas Bourbaki. *Elements of Mathematics: Algebra I, Chapters 1-3*. Springer-Verlag, Berlin, Germany, 2nd printing edition, 1989.

[Kru19] Oliver Kruger. An Invariant for Minimum Triangle-Free Graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, 74(3):371–388, 2019.

[Rad21] Stanisław Radziszowski. Small Ramsey Numbers. *Electronic Journal of Combinatorics*, 29:DS1, 2021. doi:10.37236/21.

[RK91] Stanisław Radziszowski and Donald Kreher. Minimum Triangle-Free Graphs. *Ars Combinatoria*, 31:77–84, 1991.