

# SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

## Cayleys formel för antalet träd

av

**Sandra Hasselgren**

2024 - No K3



# Cayleys formel för antalet träd

Sandra Hasselgren

---

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Dan Petersen

2024



## Sammanfattning

Denna uppsats tar upp olika bevis för Cayleys formel. Cayleys formel är en formel för att beräkna antalet märkta träd med  $n$  stycken noder. Bevisen har olika tillvägagångssätt för att bevisa formeln. Vi använder bijektion, linjär algebra, rekursion, en typ av dubbel beräkning, bevis med hjälp av Prüfersekvensen och bevis med hjälp av polynom.

## Abstract

In this essay we look at different proofs of Cayley's formula. Cayley's formula is a formula for the number of labeled trees we can form from  $n$  number of vertices. The proofs has different approaches on how to prove the formula. We use bijection, linear algebra, recursion, a type of double counting, proof using Prüfer sequence and proof using polynomials.

# Innehåll

0.1	Intro . . . . .	7
0.2	Källor . . . . .	7
<b>1</b>	<b>Grafer och träd</b>	<b>8</b>
1.1	Cayleys formel . . . . .	11
1.2	Bevis 1 (Bijektion) . . . . .	12
<b>2</b>	<b>Matriser</b>	<b>14</b>
2.1	Bevis 2 (Linjär algebra) . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Rekursion och induktion</b>	<b>20</b>
3.1	Bevis 3 (Rekursion) . . . . .	20
<b>4</b>	<b>Rotade skogar</b>	<b>24</b>
4.1	Bevis 4 (Dubbel beräkning) . . . . .	25
<b>5</b>	<b>Prüfersekvensen</b>	<b>27</b>
5.1	Bevis 5 (Prüfersekvensen) . . . . .	28
<b>6</b>	<b>Polynom</b>	<b>29</b>
6.1	Bevis 6 (Polynom) . . . . .	30
	<b>Referenser</b>	<b>32</b>

## 0.1 Intro

En stor del av bland annat kombinatorik och grafteori använder sig av träd. Under 1800-talet lyckades Arthur Cayley komma fram till en formel för att beräkna antalet märkta träd med  $n$  stycken noder. Cayleys formel är enkel att använda men svårare att bevisa. I denna uppsats kommer vi att gå in på sex olika tillvägagångssätt att bevisa Cayleys formel, vi använder oss av: Bijektion, Linjär algebra, Rekursion, Dubbel beräkning, Prüfersekvensen och Polynom.

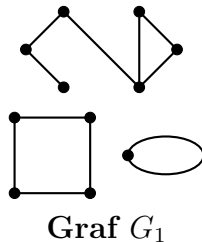
Det är intressant att det finns flera olika bevis för att bevisa samma formel. När man ska bevisa ett påstående eller en formel kan man ta hjälp av tidigare bevis inom samma område, därmed kan det vara bra att det finns flera bevis att välja mellan.

Att vi har flera bevis kan även hjälpa flera att förstå varför en formel stämmer. Alla människor lär sig på olika sätt vilket kan vara bra att tänka på när man ska lära ut en ny formel till någon, då kan det vara bra att visa flera olika bevis för att alla ska förstå. För bevisen i denna uppsats kan man föredra något bevis framför ett annat, men alla bevis är lika viktiga i processen för att skapa fler bevis i framtiden eller hjälpa fler att förstå Cayleys formel.

## 0.2 Källor

De fyra första bevisen och definitionen av Cayleys formel är baserade på bevis från *Proofs from THE BOOK* av M. Aigner och G. M. Ziegler[1], Prüfersekvensen som vi använder i femte beviset finns beskriven på Wikipedia[4] och för det sista och sjätte beviset användes en online-pdf skriven av en student från MIT-universitet [3]. För definitioner genom arbetet har vi använt oss av N.L. Biggs bok *Discrete mathematics*[2].

# 1 Grafer och träd



Vi börjar med att presentera några Definitioner och Lemman som kan vara bra att ha klara för sig innan vi går igenom första beviset för Cayleys formel.

**Definition 1.1 (GRAF).** En enkel **graf**  $G = (V, E)$  består av två mängder, en mängd  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  med element vi kallar **noder** och en mängd  $E = \{\{v_j, v_k\} \mid v_j, v_k \in V\}$  med **kanter** som består av oordnade unika par av noder från  $V$ , vi tillåter  $v_j = v_k$ .

Om kanterna består av **ordnade** unika par av noder kallar vi grafen för en **riktad graf**.

**Definition 1.2 (GRAD).** Varje nod  $v \in G$  har en **grad**, betecknat  $\deg(v) = k$ , där  $k$  är antalet ändar av kanter kopplade till  $v$ .

**Definition 1.3 (VANDRING, VÄG, CYKEL, LOOP).** En **vandring** i en graf  $G$  är en sekvens av noder,  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_k$ , där  $v_i$  och  $v_{i+1}$  är intilliggande för  $1 \leq i \leq k - 1$ . Om alla noder är unika så kallas vandringen för en **väg** och om vi gör en vandring  $v_1, v_2, \dots, v_k$  där alla noder är unika utom att  $v_k = v_1$  så har vi skapat en **cykel**. Om cykeln är från  $v_1$  till  $v_1$  utan mellanliggande noder kallas cykeln för **loop**.

**Definition 1.4 (KOMPONENTER, SAMMANHÄNGANDE GRAF).** Två noder,  $x, y \in V$ , tillhörande en graf  $G = (V, E)$  har en ekvivalensrelation  $x \sim y$  om det finns en väg mellan dem. Vi delar upp  $V$  så att varje del innehåller noder med ekvivalensrelation  $\sim$ ,  $V = V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ . De noder  $x, y \in V_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , och kanterna  $E_i = \{\{x, y\} \mid x, y \in V_i\}$  där  $E_i \subseteq E$ , bildar en ekvivalensklass som vi kallar för en **komponent** av  $G$ . Vi kan se ett exempel på en graf här ovanför, **Graf  $G_1$** , som består av tre komponenter. En graf som består av endast en komponent kallas för en **sammanhängande graf**.



**Definition 1.5** (TRÄD). Ett *träd*  $t$  är en sammanhängande graf utan cykler.

**Definition 1.6** (MÄRKT TRÄD eller GRAF). Ett *märkt* träd  $t$ , eller graf  $G = (V, E)$ , är när varje nod är tilldelad en markering. Exempel på markering är heltal  $1, 2, \dots, n$ , där  $n$  är antalet noder.

**Lemma 1.7.** I en riktad ändlig graf,  $\vec{G}_r$ , där varje nod har exakt en kant riktad ut från sig, finns det exakt en riktad cykel i varje sammanhängande komponent.

*Bevis.* Vi har vår graf  $\vec{G}_r$  och väljer ut en komponent och en nod där vi ska börja en promenad. Vi kommer då följa kanterna dit de pekar. Oavsett vart i komponenten av  $\vec{G}_r$  vi börjar kommer vi tillslut att hamna i en cykel då  $\vec{G}_r$  är ändlig och alla noder pekar till en nästa nod. Vi kommer alltid att hamna på samma väg och i samma cykel eftersom alla noder endast har en riktning och kant ut från sig.

Vi antar att det finns två cykler i en komponent av  $\vec{G}_r$ . Detta betyder att det kommer finnas två angränsande noder som hamnar i olika cykler, men detta är omöjligt. Två angränsande noder kan antingen ha endast en kant mellan sig, vilket betyder att kanten bara kan gå åt ett håll eller så finns det två kanter mellan dem, då bildar de en cykel och noderna kan alltså inte hamna i två olika cykler. Det kan alltså inte finnas flera cykler i samma komponent av  $\vec{G}_r$ .

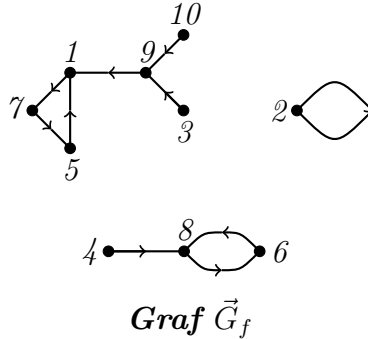
Det måste alltså finnas exakt en cykel i varje sammanhängande komponent i  $\vec{G}_r$ .  $\square$

**Lemma 1.8.** Låt  $f : [n] \rightarrow [n]$ ,  $[n] = \{1, \dots, n\}$ , vara en funktion,  $f$  är representerad i en riktad graf  $\vec{G}_f$  där kanterna är riktade så att de går från  $i \in [n]$  till  $f(i)$ .

Som exempel har vi funktionen:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 7 & 2 & 9 & 8 & 1 & 8 & 5 & 6 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Med tillhörande graf  $\vec{G}_f$ :



Vi låter  $N_C \subseteq [n]$  vara unionen av alla noderna tillhörande cykler i  $\vec{G}_f$ . Då är  $N_C$  den unika maximala delmängden av  $[n]$  sådant att  $f$  på  $N_C$  är bijektiv på  $N_C$ .

*Bevis.* Antag att  $f : N \rightarrow N$  är en bijektiv funktion för någon delmängd  $N \subseteq [n]$ . Vi vill då visa att  $N$  är en union av cykler.

Betrakta sekvensen av element  $v \in N$ :

$$v, f(v), f(f(v)), \dots$$

Eftersom  $N$  är ändlig kommer sekvensen att upprepa sig. Det existerar alltså  $f^m(v) = f^k(v)$ , där  $m > k$ .

Eftersom vi antagit att  $f$  är bijektiv kommer  $f$  vara inverterbar på alla element. Därmed vet vi att  $f^{-k}(f^m(v)) = f^{-k}(f^k(v)) \Rightarrow f^{m-k}(v) = v$ ,  $v$  tillhör alltså en cykel.

Vi antar att  $N \subseteq [n]$  är en union av cykler, vi vill då visa att  $f$  är bijektiv på  $N$ . En cykel betyder att vi skickar elementen i  $N$  till ett nästa element tills vi har gått i en cykel och kommer tillbaka till första elementet. Detta betyder att  $f$  kommer vara bijektiv på  $N$ , eftersom alla element träffas och  $f$  har en unik invers för varje element.  $\square$

Nedanstående **Lemma 1.9** med bevis går att hitta liknande i *Discrete mathematics*[2, s.186-187].

**Lemma 1.9.** *Ett träd  $t = (V, E)$  har antal kanter  $|E| = |V| - 1$ .*

*Bevis.* Vi använder oss av induktion över  $|V|$ . Vi vet att ett träd  $t = (V, E)$  är en sammanhängande graf utan cykler.

För basfallet har vi  $|V| = 1$ , som vi ser stämmer eftersom ett träd som består av endast en nod kan inte ha någon kant.

Vi antar att formeln  $|E| = |V| - 1$  stämmer för alla träd med högst  $k$  noder, då ska vi se om den stämmer då  $|V| = k + 1 \Rightarrow |E| = k + 1 - 1 = k$ .

Vi säger att en kant  $e \in E$  tillhör trädet  $t$ . Om vi tar bort kant  $e$  kommer vi få två nya träd,  $t_1 = (V_1, E_1)$  och  $t_2 = (V_2, E_2)$ . Vi har då

$$|V_1| + |V_2| = |V|, \quad |E_1| + |E_2| = |E| - 1$$

och eftersom vi antagit att formeln stämmer för träd med högst  $k$  noder och  $|V_1|, |V_2| < |V|$  får vi

$$\begin{aligned} |E| &= |E_1| + |E_2| + 1 \\ &= |V_1| - 1 + |V_2| - 1 + 1 \\ &= |V| - 1 = k + 1 - 1 = k. \end{aligned}$$

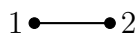
Vilket visar oss att formeln stämmer för alla  $1 \leq k$ . □

## 1.1 Cayleys formel

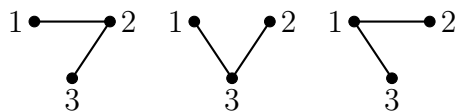
Arthur Cayley kom fram till satsen för att beräkna antalet märkta träd utifrån hur många noder,  $V = \{1, 2, \dots, n\}$ , man använder.

Vi tittar på de träd med endast  $n = 2$  eller  $3$  noder. Mängden träd vi får fram med  $2$  noder är ett träd, och tittar vi på  $n = 3$  kommer vi kunna få ut  $3$  märkta träd.

$n = 2$



$n = 3$



Om vi fortsätter med  $n = 4$  kommer vi kunna få ut  $16$  märkta träd.

Formeln för antalet märkta träd med  $n$  noder som Cayley kom fram till är:

**SATS 1.10** (Cayleys formel). *Mängden märkta träd med  $n$  noder kallar vi  $T_n$ , antalet märkta träd med  $n$  noder är  $|T_n| = n^{n-2}$ .*

Det vi kommer göra nu är att bevisa denna sats med sex olika bevis, vi börjar med det första.

## 1.2 Bevis 1 (Bijektion)

Vi vill visa att det finns en bijektion mellan  $T_n$ , alltså mängden av alla märkta träd med  $n$  noder, och en mängd vars kardinalitet är  $n^{n-2}$ . I detta bevis använder vi oss av märkta träd  $t$  med en mängd noder,  $t_n$ , där träden har två märkta noder, en *vänster ände*  $\circ$  och en *höger ände*  $\square$ , som kan sammanfalla. Vi benämner mängden  $\tau_n = \{(t, \circ, \square) \mid t \in T_n, \circ \in t_n, \square \in t_n\}$ . Kardinaliteten för mängden blir  $|\tau_n| = n^2|T_n|$ , där  $n$  är antalet noder och  $n^2$  kommer från att vi kan placera ut vänster och höger ände på  $n^2$  sätt.

Vårt mål är att bevisa att  $|\tau_n| = n^n$ , för då har vi även bevisat att Cayleys formel  $|T_n| = n^{n-2}$  stämmer. Vi vill alltså hitta en mängd som är av storlek  $n^n$ , vi kan då använda oss av mängden av funktioner från  $[n]$  till  $[n]$  som vi kallar  $F = \{f : [n] \rightarrow [n]\}$ , där  $[n] = \{1, \dots, n\}$ . Vi har bevisat att  $|\tau_n| = n^n$  om vi kan visa att det finns en bijektion  $\Phi : F \rightarrow \tau_n$ , eftersom en bijektion har egenskapen att definitionsmängd och värdemängd är lika stora.

Vi använder oss av exempelfunktion  $f$  och tillhörande graf  $\vec{G}_f$  som vi använde oss av i **Lemma 1.8**.

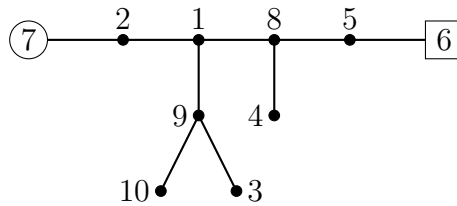
Enligt **Lemma 1.7** vet vi att en graf med exakt en kant som går ut från varje nod finns det för varje sammanhängande komponent exakt en riktad cykel. Detta ser vi stämmer för graf  $\vec{G}_f$ .

Vi låter  $M \subseteq [n]$  vara unionen av de noder som tillhör alla dessa cykler i grafen  $\vec{G}_f$ . Enligt **Lemma 1.8** är  $M$  den unika maximala delmängden av  $[n]$  sådant att restriktionen av  $f$  på  $M$  agerar som en bijektion på  $M$ . Utifrån  $M$  får vi en ny funktion  $f_M : M \rightarrow M$ , som är en bijektiv funktion.

I vårt fall blir  $M = \{1, 2, 5, 6, 7, 8\}$  och  $f_M$  får vi av att placera talen från  $M$  i naturlig ordning på den övre raden av  $f_M$  och sedan skriver ut  $f(i)$ ,  $i \in M$ , på den undre raden. Vi tittar på funktionen vi får:

$$f_M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 1 & 8 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

För att nu konstruera trädets  $t$ , som är motsvarande till funktionen  $f$  tar vi nu  $f_M(1)$  som vår vänstra ände och  $f_M(8)$  är vår högra ände. Vi ritar en väg från vår vänstra ände till vår högra, sedan lägger vi till de noder som blivit över från  $\vec{G}_f$  till trädets  $t$  som vi ser här nedanför. Vi har alltså att  $\Phi(f) = (t, f_M(1), f_M(8))$ .



Trädet  $t$

Vi kan se att vi lika gärna skulle kunna börja i andra änden av formeln, alltså inversen av  $\Phi$  så  $\Phi^{-1}(t, \circlearrowleft, \square) = f$  och få ut grafen  $\vec{G}_f$ . Vi börjar alltså med ett träd  $t$  med en unik väg från en vänster ände  $\circlearrowleft$  till en höger ände  $\square$ , utifrån detta får vi ut  $M$  som är noderna från vägen placerade i ordning. Vi vet att  $f_M$  består av  $M$  som sin övre rad och den undre raden är samma noder som  $M$  men placerade i ordningen från vägen i trädets.

Sedan vet vi att  $f_M$  består av alla cykler i grafen  $\vec{G}_f$  och genom att ta hjälp av trädets uppbyggnad kan vi veta vart resterande noder i grafen är riktade och placerade. Utifrån trädets  $t$  och  $f_M$  får vi även unikt fram en funktion  $f$ . Vi vet att  $f$  och grafen  $\vec{G}_f$  är unika utifrån trädets  $t$  då det endast går att ta ut  $M$  på ett unikt sätt från trädets.

Vi har alltså visat att för alla riktade grafer,  $\vec{G}$ , av typen där alla noder har en kant som går ut från dem, finns ett unikt samband med ett träd,  $t$ , av typen där vi har två satta änd-punkter. Vi har även visat att det går att vända på formeln, att för alla träd  $t$  finns en unik graf  $\vec{G}$ .

Eftersom vi vet att antalet funktioner  $f : [n] \rightarrow [n]$  är  $[n]^{[n]}$  och för varje funktion kan vi få **ett** unikt träd så vet vi att även träden har då kardinalitet  $[n]^{[n]}$ . Därmed har vi bevisat att  $|\tau_n| = n^n$ , där  $n$  är antalet noder i ett träd, som i sin tur bevisar att  $|T_n| = n^{n-2}$ .  $\square$

## 2 Matriser

Till **Bevis 2 (Linjär algebra)** behöver vi komplettera med ett antal fler Definitioner, Lemman och Satser.

**Definition 2.1 (KOMPLETT GRAF).** En graf  $G = (V, E)$  där  $\deg(v) = |V| - 1$ , för alla  $v \in V$ , och  $E = \{\{v_j, v_k\} \mid v_j, v_k \in V, v_j \neq v_k\}$ , alltså att alla par av noder har en kant mellan sig och inga loopar förekommer, detta kallar vi för en **komplett graf**.

**Definition 2.2 (SPÄNNANDE TRÄD).** I en oriktad och sammanhängande graf  $G = (V, E)$ , där  $|E| \geq |V| - 1$ , kan det finnas flera delträd som innehåller alla noder från grafen och endast de kanter från  $G$  som tillsammans skapar ett träd, dessa delträd kallas för **spännande träd**,  $t(G)$ .

Incidensmatris finns beskrivet i *Proofs from THE BOOK*[1, s.237]. Här är en mer utförlig definition.

**Definition 2.3 (INCIDENSMATRIS, RIKTAD INCIDENSMATRIS).** Låt  $G = (V, E)$  vara en graf **utan loopar**. Till  $G$  associerar vi en **inciden-smatris**  $A = (a_{ij})$  där raderna representerar noder  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  och kolumnerna kanter  $E = \{1, 2, \dots, e\}$  i  $G$ .

En plats  $a_{ij} = 1$  eller  $0$ ,  $i \in V$  och  $j \in E$ , om  $1$  betyder det att noden är kopplad till kanten och om  $0$  är de inte kopplade.

Om vi istället har en riktad graf  $\vec{G}$  får vi en **riktad incidenmatris** där  $a_{ij} = 1, -1$  eller  $0$ ,  $1$  betyder att kanten går in i noden,  $-1$  om kanten går ut från noden och annars  $0$ .

I nedanstående **Bevis 2 (Linjär algebra)** använder vi oss av följande sats som går att hitta i *Proofs from THE BOOK*[1, s.232]:

**SATS 2.4 (Binet-Cauchy).** Om  $P$  är en  $r \times s$  matris och  $Q$  är en  $s \times r$  matris, där  $r \leq s$ , så gäller

$$\det(PQ) = \sum_Z (\det P_Z)(\det Q_Z),$$

där  $P_Z$  är en undermatris  $r \times r$  av  $P$  med kolumnmängden  $Z$ , och  $Q_Z$  är undermatrisen  $r \times r$  av  $Q$  med motsvarande rader  $Z$ . Vi summerar alltså över alla undermatriser  $P_Z$  och  $Q_Z$  av storlek  $r \times r$ .

För att tydligare förstå vad som menas med matriserna  $P_Z$  och  $Q_Z$  gör vi ett exempel. Här använder vi oss av riktade incidensmatriser för att tydligare kunna koppla till **Bevis 2** här nedanför, även om Binet-Cauchys bevis gäller för alla typer av matriser med de restriktioner som nämns i satsen.

**Exempel 1.**

Om  $P$  är en  $3 \times 5$  matris och  $Q$  en  $5 \times 3$  matris så kommer vi behöva iterera över  $\binom{5}{3} = 10$  undermatriser. För varje undermatris  $P_{Z_{ijk}}$  av  $P$  väljer vi tre kolumner  $i, j$  och  $k$  och motsvarande tre rader till  $Q_{Z_{ijk}}$  av  $Q$ .

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Vi börjar med kolumnerna 1, 2 och 3 från  $P$  och motsvarande rader från  $Q$  och får då undermatriserna:

$$P_{Z_{123}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad Q_{Z_{123}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sedan finns nio andra kombinationer av rader och kolumner som vi behöver beräkna determinanten av.

$$\begin{aligned} \det(P_{Z_{123}}) \det(Q_{Z_{123}}) &= 1 & \det(P_{Z_{124}}) \det(Q_{Z_{124}}) &= 1 \\ \det(P_{Z_{125}}) \det(Q_{Z_{125}}) &= 0 & \det(P_{Z_{135}}) \det(Q_{Z_{135}}) &= 1 \\ \det(P_{Z_{235}}) \det(Q_{Z_{235}}) &= 1 & \det(P_{Z_{234}}) \det(Q_{Z_{234}}) &= 1 \\ \det(P_{Z_{134}}) \det(Q_{Z_{134}}) &= 1 & \det(P_{Z_{245}}) \det(Q_{Z_{245}}) &= 1 \\ \det(P_{Z_{345}}) \det(Q_{Z_{345}}) &= 0 & \det(P_{Z_{145}}) \det(Q_{Z_{145}}) &= 1. \end{aligned}$$

Vi summerar alla determinanter och beräknar determinanten av  $PQ$  och då får vi sambandet

$$\sum_Z \det(P_Z) \det(Q_Z) = 8 \Leftrightarrow \det(PQ) = 8.$$

**Lemma 2.5.** Låt  $C = (c_{ij})$  vara en riktad incidensmatrix av grafen  $G = (V, E)$ , med  $|V| = n$  och  $|E| = e$ . Om vi matrismultipliserar  $CC^T = B$  får vi en  $n \times n$  matrix  $B$  där diagonalen består av varje nods grad:

$$b_{11} = \deg(v_1), b_{22} = \deg(v_2), \dots, b_{nn} = \deg(v_n).$$

*Bevis.* Då raderna i  $C$  är lika med kolumnerna i  $C^T$  får vi på platsen  $b_{11}$  i diagonalen av  $B = CC^T$  att  $b_{11} = c_{11}^2 + c_{12}^2 + \dots + c_{1e}^2$ . Eftersom raderna i  $C$  består av 1 eller  $-1$  där noden är kopplad till en kant, annars 0, betyder det att  $b_{11} = \deg(v_1)$ . Samma beräkning får vi för andra noden på plats  $b_{22}$  och resterande noder i diagonalen av  $B$ .  $\square$

**Definition 2.6 (LÖV).** Om en nod,  $v$ , som tillhör en graf eller ett träd har  $\deg(v) = 1$  kallas noden för ett löv.

**Lemma 2.7.** För en graf  $G = (V, E)$  utan loopar gäller

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v).$$

*Bevis.* Om vi har en graf  $G = (V, E)$ ,  $|V| = n$ , med tillhörande incidensmatrix  $A$  vet vi att varje rad representerar en nod  $v_i \in V$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , och graden för  $v_i$  får vi om vi lägger ihop rad  $i$ , då raden består av 1 om noden är kopplad till en kant och annars 0. Varje kolumn står för en kant och om vi summerar en kolumn kommer vi få summan 2 eftersom varje kant är kopplad till två noder.

Om vi nu vill summera alla  $\deg(v_i)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ , så har vi alltså summerat alla rader i matrisen  $A$ . Att summera alla rader i matrisen blir samma som att summera alla kolumner, detta gör vi genom att vi vet att vi har summa 2 för varje kolumn och antalet kanter är  $|E|$ , alltså  $2 \cdot |E|$ . Vi får då likheten:

$$\deg(v_1) + \deg(v_2) + \dots + \deg(v_n) = \sum_{i=1}^n \deg(v_i) = 2|E|.$$

$\square$

**Lemma 2.8.** Ett träd  $t$  med minst två noder har alltid minst två löv.

*Bevis.* Ett träd  $t = (V, E)$  där  $|V| = n$  så har vi  $|E| = |V| - 1$  enligt **Lemma 1.9**. Eftersom ett träd är sammanhängande kommer ingen nod ha  $\deg(v) = 0$ ,  $v \in V$  och vi tittar på träd där  $n \geq 2$ .



Vi sätter alla noder till  $\deg(v) \geq 2$ , utom en som har  $\deg(v) = 1$ . Det skulle betyda, enligt **Lemma 2.7**, att vi får  $2|E| \geq 2|V| - 1$  vilket är omöjligt då vi har ett jämnt tal i vänsterledet och ett ojämnt i högerledet och det säger emot likheten  $|E| = |V| - 1$ . För att olikheten ska stämma behöver minst två noder vara av grad  $\deg(v) = 1$ , alltså  $2|E| \geq 2|V| - 2$ , som stämmer för om  $E, V \in t$  att  $|E| = |V| - 1$ .

Det här betyder att ett träd med minst två noder måste innehålla minst två löv.  $\square$

I nedanstående **Bevis 2 (Linjär algebra)** kommer vi använda oss av följande resultat från linjär algebra.

**Lemma 2.9.** *Determinanten av en  $n \times n$  matris  $A$  ger samma värde som att multiplicera alla matrisens egenvärden med multiplicitet*

$$\det(A) = \prod_{j=1}^n \lambda_j.$$

**Lemma 2.10.** *En  $n \times n$  matris  $A$  har antal egenvärden  $n$ , varje egenvärde har multiplicitet  $n - k$ , där  $k = \text{rank}(B)$  och  $B = A - \lambda I$ .*

*Vi kan även få multipliciteten av egenvärden genom att skriva det karakteristiska polynomet  $P_A$  på formen  $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \prod_i^n (\lambda_i - \lambda)$ , och om ett egenvärde blir en multipelrot av  $P_A(\lambda) = 0$  så har egenvärdet samma multiplicitet som roten då graden av  $P_A$  är antalet egenvärden.*

## 2.1 Bevis 2 (Linjär algebra)

Vi tänker oss  $T_n$  som mängden spännande träd i en komplett graf  $K_n$ . Vi tittar nu på en sammanhängande graf  $G$  med noder  $V = \{1, 2, \dots, n\}$  och kanter  $E = \{1, 2, \dots, e\}$ , vi benämner  $t(G)$  som mängden av spännande träd i  $G$ , vilket betyder att  $T_n = t(K_n)$ . Vi låter  $G$  få en godtycklig orientering och

tittar på den riktade incidensmatrisen  $C = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1e} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \dots & b_{ne} \end{pmatrix}$  av  $G$ . Vi noterar

att  $|E| \geq n - 1$ , enligt **Lemma 1.9**, då vi jobbar med en sammanhängande graf  $G$ . Varje kolumn består av  $-1, 1$  och sedan resten 0 eftersom varje kant är kopplad till två noder. Vi får fram matris  $M = CC^T$  en  $n \times n$  matris där diagonalen består av varje nods grad  $d_1, \dots, d_n$ , som vi såg i **Lemma 2.5**.

**SATS 2.11** (Matrix Tree Theorem). *Vi har att  $|t(G)| = \det M_{ii}$  för alla  $i = 1, \dots, n$ , där  $M_{ii}$  är matrisen vi får från  $M$  där vi har tagit bort rad  $i$  och kolumn  $i$ .*

Nu kommer vi använda oss av Binet-Cauchys Sats, **Sats 2.4**. För  $M_{ii}$  betyder satsen att

$$\det M_{ii} = \sum_N \det N \cdot \det N^T = \sum_N (\det N)^2,$$

där  $N$  menas med alla  $(n-1) \times (n-1)$  undermatriser till  $C \setminus \{\text{rad } i\}$ , vi summerar över dessa på samma sätt som i **Exempel 1**.

De  $n-1$  kolumnerna av  $N$  hör ihop med en undergraf av  $G$  med  $n-1$  kanter, det vi behöver visa nu är att

$$\det N = \begin{cases} \pm 1 & \text{om kanterna skapar ett träd} \\ 0 & \text{annars.} \end{cases}$$

Om vi visar detta så har vi alltså visat att summan  $\sum_N (\det N)^2$  blir lika med antalet spännande träd i  $G$  och då har vi bevisat att påståendet  $\det M_{ii} = |t(G)|$  stämmer.

Om de  $n-1$  kanterna inte skapar ett träd betyder det att undergrafan till  $G$  innehåller en eller flera cykler och består av minst två komponenter då vi har  $n-1$  kanter och  $n$  noder som tillsammans inte ska bilda ett träd. De rader, i matrisen tillhörande undergrafan, som representerar noderna i den komponent som inte innehåller nod  $i$ , kommer att vara linjärt beroende. Det är eftersom vi kommer att kunna lägga ihop dessa rader så att vi får en rad som består av endast 0. Detta beror på att alla kanter och noder i komponenten kommer att vara kopplade till varandra och därmed består alla kolumner av 1 och  $-1$ , eller endast 0 för de kolumner som representerar de kanter som inte är med i komponenten, så om vi lägger ihop dessa rader till en rad så blir den raden 0. Det här betyder att  $\det N = 0$ .

Om de  $n-1$  kanterna nu istället skapar ett träd. Vi vet då att på någon rad  $j_1$  kommer det finnas nollor och endast en  $\pm 1$ :a eftersom ett träd har minst två löv, se **Lemma 2.8**.

Vi gör en radutveckling utifrån rad  $j_1$  och får då en  $(n-2) \times (n-2)$  matris. Eftersom vi nu tog bort en yttre nod och kanten kopplad till noden från trädet kommer vi nu ha fått ett nytt löv. Det finns alltså en ny rad  $j_2$  som

innehåller nollor och en  $\pm 1$ :a. Sedan gör man en radutveckling utifrån rad  $j_2$ , får en ny matris och varje kommande matris kommer att ha en rad där det finns endast en  $\pm 1$ :a och nollor tills vi tillslut tar bort rad  $j_{n-1}$  och har endast kvar en  $\pm 1$ :a, som visar att  $\det N = \pm 1$ .  $\square$

För fallet där  $G = K_n$  får vi matrisen

$$M_{ii} = \begin{pmatrix} n-1 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-1 & \dots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & \dots & n-1 \end{pmatrix}$$

där diagonalen är graden för varje nod som vi gick igenom i **Lemma 2.5**, och för en komplett graf blir graden för varje nod  $n-1$ . Resterande platser blir  $-1$  eftersom varje nod är kopplad till alla andra noder.

Enligt **Lemma 2.9** kan vi, när vi beräknar determinanten för en matris, använda oss av att man beräknar fram de egenvärden,  $\lambda$ , som hör till matrisen  $M_{ii}$  och sedan blir

$$\det(M_{ii}) = \prod_{j=1}^{n-1} \lambda_j.$$

Vi tittar på det karakteristiska polynomet  $P_{M_{ii}}(\lambda) = \det(M_{ii} - \lambda I) \Rightarrow$

$$P_{M_{ii}}(\lambda) = \begin{vmatrix} (n-1) - \lambda & -1 & \dots & -1 \\ -1 & (n-1) - \lambda & \dots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & \dots & (n-1) - \lambda \end{vmatrix}.$$

För att hitta egenvärdena vill vi att  $P_{M_{ii}}(\lambda) = 0$ , så om vi sätter  $\lambda_1 = n$  får vi en matris bestående av endast  $-1$  och alltså  $\det(M_{ii} - nI) = 0$ . En matris av endast  $-1$ :or har rank 1, vilket betyder att  $\lambda_1$  har multiplicitet  $n-1-1 = n-2$  enligt **Lemma 2.10**.

Det här betyder att matris  $M_{ii}$  har ett till egenvärde eftersom antalet egenvärden är samma som graden av det karakteristiska polynomet  $P_{M_{ii}}$  som i vårt fall är  $n-1$ . Om  $\lambda_2 = 1$  får vi en matris som ser ut som följer

$$\begin{pmatrix} n-2 & -1 & \dots & -1 \\ -1 & n-2 & \dots & -1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ -1 & \dots & \dots & n-2 \end{pmatrix}.$$

För denna matris kan vi se att vi kan lägga ihop alla kolumner till första kolumnen så att hela första kolumnen består av 0:or. Vi tittar på första raden:  $n-2 + (-1 \cdot (n-2)) = 0$ . Denna matris får rank  $n-2$  och  $\lambda_2$  har alltså multiplicitet 1.

Vi får alltså att  $|t(K_n)| = \det(M_{ii}) = \lambda_1^{n-2} \cdot \lambda_2 = n^{n-2}$ .  $\square$

### 3 Rekursion och induktion

Det tredje beviset använder sig av rekursion och induktion. Vi börjar med en definition för **skog** och Binomialsatsen innan vi går in på beviset.

**Definition 3.1** (SKOG). *En graf som består av flera komponenter, där alla komponenter är träd, kallas för en **skog**.*

*Om träden är märkta kallas skogen för en **märkt skog**.*

Följande sats kommer vi använda oss av i nedanstående **Bevis 3 (Rekursion)**.

**SATS 3.2** (Binomialsatsen). *Låt  $x$  och  $y$  vara två reella tal, för varje naturligt tal  $n$  gäller för exponentiering av binomet  $(x+y)$*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

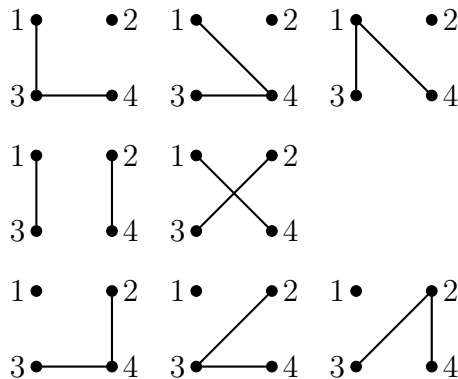
#### 3.1 Bevis 3 (Rekursion)

I detta bevis kommer vi använda oss av rekursion. Vi skapar en rekursiv relation och löser den med hjälp av induktion. Enligt Aigner och Ziegler [1] kommer följande idé huvudsakligen från J. Riordan and A. Rényi.

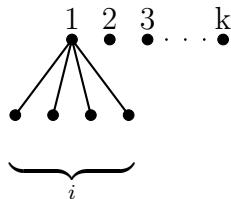
Låt  $A$  vara en  $k$ -mängd,  $\{1, \dots, k\}$ , av noder. Vi betecknar mängden av märkta skogar på en mängd noder,  $\{1, \dots, n\}$ , med  $T_{n,k}$ , som består av  $k$  träd där noderna av  $A$  finns i olika träd. Vi är främst intresserade av storleken  $k$ , eftersom vi vill att  $A = \{1\}$  och  $k = 1$  då vi kan observera att  $T_{n,1} = T_n$ , som står för mängden skogar där varje skog innehåller endast ett träd, det vill säga mängden märkta träd med  $n$  noder.

Vi tar ett exempel:

Vi har  $|T_{4,2}| = 8$  för  $A = \{1, 2\}$ . Detta säger att vi har fyra märkta noder,  $n = 4$ , varje skog ska bestå av två träd,  $k = 2$ , och noderna 1 och 2 ska tillhöra olika träd för varje skog,  $A = \{1, 2\}$ . Det är tillåtet att ett träd innehåller endast en nod. Här nedanför ser vi de åtta skogarna:



Vi tittar på en sådan skog  $F$  med  $A = \{1, 2, \dots, k\}$ , och anta att nod 1 är närliggande till  $i$  noder, som vi kan se här nedanför i **Bild 1**.



**Bild 1.**

Om vi tar bort nod 1, kommer de  $i$  grannarna tillsammans med noderna  $2, \dots, k$  innehålla en nod var i komponenterna av en skog som innehåller  $k - 1 + i$  träd. Vi kan även skapa  $F$  genom att först börja med att välja de  $i$  grannarna till nod 1, för att sedan ta ut vilka skogarna blir för resterande  $n - 1$  noder och  $k - 1 + i$  träd.

Vi får

$$|T_{n,k}| = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} |T_{n-1,k-1+i}| \quad (1)$$

för alla  $n \geq k \geq 1$ , där vi sätter  $|T_{0,0}| = 1$ ,  $|T_{n,0}| = 0$  för  $n > 0$ . En skog med inga noder kan skapa inga träd på ett sätt, därmed är  $|T_{0,0}| = 1$ , medan om vi har  $n$  noder och vill skapa träd utan noder så får vi en tom mängd  $|T_{n,0}| = 0$ . Vi vet också då att  $|T_{n,n}| = 1$ .

Förhållandet (1) är bijektivt då vi kan dela upp  $T_{n,k}$  efter antalet grannar,  $0 \leq i \leq n - k$ , som nod 1 har och för varje  $i$  har vi samma antal skogar på var sida i formel (1).

Exempelvis för  $T_{4,2}$  när  $i = 1$  ser vi från exemplet här ovan att det finns 4 skogar där nod 1 har 1 granne, och i summan när  $i = 1$  får vi

$$\binom{2}{1} |T_{3,2}| = 2 \cdot 2 = 4$$

vilket är samma som antalet skogar  $|T_{4,2}|$  när  $i = 1$ .

**SATS 3.3.** *Vi har*

$$|T_{n,k}| = kn^{n-k-1} \quad (2)$$

*och därmed, vilket är nödvändigt för att bevisa Cayleys formel,*

$$|T_{n,1}| = |T_n| = n^{n-2}.$$

Vi vill nu visa med hjälp av induktion att rekursion (1) implicerar formel (2).

Induktionsbeviset blir över  $n$  där  $n \geq k \geq 1$ .

Basfallet blir  $n = 1$  och  $k = 1$ , vi vet att  $|T_{n,n}| = 1 \Rightarrow |T_{1,1}| = 1$ , vi sätter in  $n = 1$  och  $k = 1$  i (2) och får:

$$1 \cdot 1^{1-1-1} = 1.$$

Vi har då visat att för basfallet stämmer formel (2).

Vi antar att formel (2) stämmer för  $n \geq k \geq 1$  och  $n \leq p$  där  $p$  är ett godtyckligt heltal  $p \geq 1$ . Vi vill nu visa att formel (2) stämmer för  $n = p + 1$ , alltså att

$$|T_{p+1,k}| = k(p+1)^{(p+1)-k-1} = k(p+1)^{p-k}, \quad (3)$$

och om vi får samma resultat när vi sätter in  $n = p + 1$  i formel (1) så har vi bevisat att formel (2) stämmer för alla  $n \geq k \geq 1$ .

Vi sätter  $n = p + 1$  i formel (1):

$$|T_{p+1,k}| = \sum_{i=0}^{p+1-k} \binom{p+1-k}{i} |T_{p,k-1+i}|$$

Eftersom vi antagit att formel (2) stämmer för  $p \geq k \geq 1$  så kan vi i formel (1) sätta  $|T_{p,k-1+i}| = (k-1+i)p^{p-k-i}$ . Vi sätter in detta i formel (1):

$$|T_{p+1,k}| = \sum_{i=0}^{p+1-k} \binom{p+1-k}{i} (k-1+i)p^{p-k-i} =$$

Vi substituerar  $i \rightsquigarrow p+1-k-i$  då binomialkoefficienten blir samma eftersom  $\binom{p+1-k}{i} = \binom{p+1-k}{p+1-k-i}$ :

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=0}^{p+1-k} \binom{p+1-k}{i} (k-1+p+1-k-i)p^{p-k-p-1+k+i} \\ &= \sum_{i=0}^{p+1-k} \binom{p+1-k}{i} (p-i)p^{i-1} \end{aligned}$$

Nu kan vi dela upp summan genom att multiplicera ut parentesen  $(p-i)$  till  $p \cdot p^{i-1} = p^i$  och  $(-i) \cdot p^{i-1}$  och får då:

$$= \sum_{i=0}^{p+1-k} \binom{p+1-k}{i} p^i - \sum_{i=1}^{p+1-k} \binom{p+1-k}{i} i p^{i-1}$$

Vi tar nu hjälp av binomialsatsen då första summan är summan för ett binom där  $x = p$  och  $y = 1$ . Andra summan vill vi försöka få även den på en form så att vi kan ta hjälp av binomialsatsen. Vi börjar med att få bort  $i$  från inuti summan och gör detta genom att dividera bort  $i$  med hjälp av nämnaren i binomialkoefficienten som vi kan skriva som  $\binom{p+1-k}{i} = \frac{p+1-k}{i} \cdot \frac{(p-k)!}{(i-1)!(p+1-k-i)!}$ , men då behöver vi också bryta ut  $p+1-k$  från täljaren för att då få:

$$= (p+1)^{p+1-k} - (p+1-k) \sum_{i=1}^{p+1-k} \binom{p-k}{i-1} p^{i-1}$$

Vi gör en substitution av  $i \rightsquigarrow i+1$ . Summan kommer då gå från 0 till  $p-k$ :

$$= (p+1)^{p+1-k} - (p+1-k) \sum_{i=0}^{p-k} \binom{p-k}{i} p^i$$

Nu enligt binomialsatsen där  $x = p$ ,  $y = 1$  och exponenten blir  $p-k$  får vi:

$$= (p+1)^{p+1-k} - (p+1-k)(p+1)^{p-k}$$

Vi multiplicerar ut parentesen  $(p+1-k)$  till:

$$= (p+1)^{p+1-k} - (p+1) \cdot (p+1)^{p-k} + k \cdot (p+1)^{p-k} = k(p+1)^{p-k}.$$

Nu har vi från formel (1) kommit fram till samma formel som formel (3) vilket var det vi ville visa stämde för  $n = p+1$ . Detta betyder att formel (1) implicerar formel (2) för alla  $n \geq k \geq 1$ . Vi har därmed bevisat att  $|T_{n,k}| = kn^{n-k-1}$  som i sin tur bevisar att  $|T_n| = n^{n-2}$ .  $\square$

## 4 Rotade skogar

Nu kommer vi in i den fjärde sektionen där vi kommer gå igenom det fjärde beviset av Cayleys formel. Innan beviset behöver vi en definition av **rot** och sedan ett Lemma.

**Definition 4.1** (ROT, ROTAT TRÄD, ROTAD SKOG). *En **rot** i ett träd är en utvald nod i trädet som man kallar för rot. Trädet med en utvald rot kallar vi för **rotat träd**. En **rotad skog** är en skog som består av rotade träd.*

**Lemma 4.2.** *En skog  $F$  med  $n$  noder och  $k$  träd kommer att innehålla  $n - k$  kanter.*



*Bevis.* Vi vet från **Lemma 1.9** att ett träd,  $t$ , med  $n_t$  noder har  $n_t - 1$  kanter. För  $k$  antal träd, där varje träd har  $n_x$ ,  $x \in \{1, \dots, k\}$ , noder, kommer det finnas  $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \dots + (n_k - 1) = (\sum_{x=1}^k n_x) - k$  kanter, alltså för en skog  $F$  blir antalet kanter det totala antalet noder subtraherat med antalet träd.  $\square$

## 4.1 Bevis 4 (Dubbel beräkning)

Enligt Aigner och Ziegler[1] kommer beviset vi ska gå igenom nu från Arnon Avron och Nachum Dershowitz som bygger sitt bevis på en idé från Jim Pitman. Vi kommer bevisa Cayleys formel genom att komma fram till formel (2) från **Bevis 3** utan induktion.

Vi har en märkt skog med mängden noder  $\{1, \dots, n\}$ . Vi låter  $F_{n,k}$  vara mängden av alla rotade skogar som består av  $k$  rotade träd. Därmed är  $F_{n,1}$  mängden av alla rotade träd. Vi noterar att  $|F_{n,k}| = \binom{n}{k} |T_{n,k}|$ , där  $T_{n,k}$  är mängden märkta skogar från **Bevis 3**. Vi väljer alltså först ut vilka noder som ska vara rötter på  $\binom{n}{k}$  sätt, när vi valt vilka noder som är rötter kan vi skapa  $|T_{n,k}|$  märkta skogar utifrån varje val av  $k$  rötter.

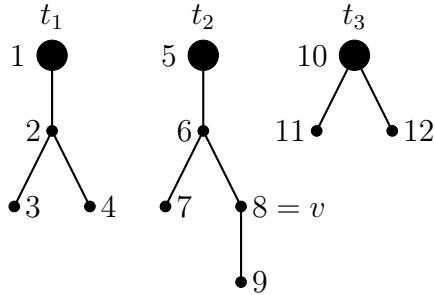
Nu ska vi på två olika sätt räkna antalet rotade skogar på  $n$  noder, bestående av  $k$  träd, där vi valt ut en märkt kant. Detta ger oss likheten:

$$(n - k)|F_{n,k}| = kn|F_{n,k+1}|. \quad (4)$$

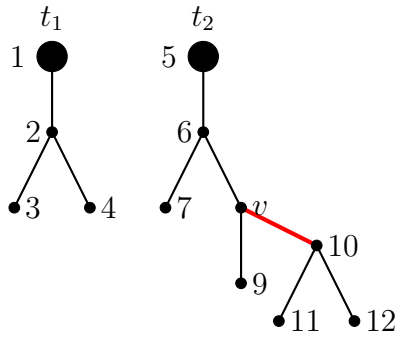
Vänsterledet får vi fram genom att i varje skog  $F \in F_{n,k}$  kan vi välja vilken kant av de  $n - k$  kanter som vi vill till att bli den märkta kanten, vi vet antalet kanter genom **Lemma 4.2**.

Högerledet i (4) får vi om vi tänker oss en skog  $F' \in F_{n,k+1}$ , vi väljer en av de  $n$  noder i  $F'$ , som vi kallar  $v$ , och fäster något av de  $k$  träd,  $t$ , som inte innehåller nod  $v$  till nod  $v$ . Kanten mellan nod  $v$  och roten i det utvalda trädet,  $t$ , blir den märkta kanten, och roten i träd  $t$  blir inte längre någon rot utan en vanlig nod. Vi får alltså mängden  $F_{n,k}$  av rotade skogar med en märkt kant. Vi har  $n$  val för  $v$  och  $k$  val för ett träd  $t$  vilket ger oss  $nk|F_{n,k+1}|$  val.

Vi väljer att visa hur det kan se ut med ett exempel, vi har en skog bestående av tre träd:



vi väljer att kalla nod 8 för  $v$  och väljer att fästa träd  $t_3$  till nod  $v$  och får skogen:



Kanten mellan  $v$  och nod 10 blir den märkta kanten, och nod 10 är inte längre någon rot. Slut på exempel.

För att få fram  $|F_{n,1}|$  upprepar vi (4)  $n - 1$  gånger, vi stoppar in  $k = 1$  i vänsterledet i (4) och för varje steg behöver vi dela med  $(n - k)$  och multiplicera med  $nk$ :

$$|F_{n,1}| = \frac{1}{n-1} n |F_{n,2}| = \frac{1}{n-1} \frac{2}{n-2} n^2 |F_{n,3}| = \dots$$

Vi fortsätter upp till  $k - 1$  upprepningar:

$$\dots = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (k-1)}{(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)} n^{k-1} |F_{n,k}| = \dots \quad (5)$$

för att sedan komma upp till itterering  $n - 1$ :

$$\dots = \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)}{(n-1)(n-2)\dots 1} n^{n-1} |F_{n,n}| = 1 \cdot n^{n-1} F_{n,n}.$$

För  $F_{n,n}$  finns endast en skog då vi skapar en skog där alla noder är varsitt träd,  $|F_{n,n}| = 1$ , så vi har alltså att  $|F_{n,1}| = n^{n-1}$ . Eftersom vi letar

efter hur många träd vi får i Cayleys formel vill vi få fram  $|T_{n,1}| = |T_n|$ , som vi såg tidigare är  $|F_{n,1}| = \binom{n}{1}|T_{n,1}|$ , då  $\binom{n}{1} = n$  får vi alltså  $|T_n| = \frac{1}{n}n^{n-1} = n^{n-2}$ .  $\square$

Vi skulle även ha kunnat göra beviset lite annorlunda. Om vi tittar på rad 2 här ovan som är markerat med (5), den kan vi skriva som:

$$\frac{1 \cdot 2 \cdots (k-1)}{(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)} n^{k-1} |F_{n,k}| = n^{n-1}$$

Vi justerar om så vi får  $|F_{n,k}|$  ensam på sin sida:

$$|F_{n,k}| = \frac{(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots (k-1)} \frac{n^{n-1}}{n^{k-1}}$$

$\Rightarrow$

$$|F_{n,k}| = \binom{n-1}{k-1} n^{n-k}$$

Vi kan göra binomialkoefficienten till  $\binom{n}{k} \cdot \frac{k}{n}$  eftersom  $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$  så får vi:

$$|F_{n,k}| = \binom{n}{k} \frac{k}{n} n^{n-k} = \binom{n}{k} k n^{n-k-1}.$$

Då  $|F_{n,k}| = \binom{n}{k} |T_{n,k}|$  har vi alltså bevisat  $|T_{n,k}| = k n^{n-k-1}$ , vilket är samma formel som formel (2) från **Bevis 3**, utan att behöva använda induktion.

## 5 Prüfersekvensen

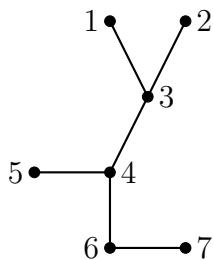
Det femte beviset kommer inte från *Proofs from THE BOOK*[1], utan detta bevis kommer från utvecklingen av Prüfersekvensen[4].

**Definition 5.1** (Prüfersekvensen). *En Prüfersekvens, för  $n \in \mathbb{N}$ , är en sekvens,  $(p_1, p_2, \dots, p_{n-2})$  där  $p_i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .*

Till ett märkt träd,  $t = (V, E)$ , finns en unik Prüfersekvens där sekvensen består av märkena till noderna i trädet. Formeln för att skriva ner en Prüfersekvens går till så att för steg  $i$  hittar vi det lägst märkta lövet  $v_j$  och

lägger in märket för grannen till lövet på plats  $i$  i sekvensen och plockar bort lövet från trädet. Vi upprepar detta tills vi har två noder kvar och då är sekvensen klar.

Som exempel för hur man skriver ner en Prüfersekvens från ett märkt träd har vi följande märkta träd,  $t = (V, E)$ :



Detta trädets Prüfersekvens blir  $P_t = (3, 3, 4, 4, 6)$ . De lägst märkta löven  $v_1$  och  $v_2$  har granne  $v_3$  därmed börjar sekvensen med 3,3. Nu är nod  $v_3$  ett löv och därmed hamnar nod  $v_4$  på plats tre i sekvensen. Sekvensen är klar när vi har nod  $v_6$  och  $v_7$  kvar när vi plockat bort det sista lövet  $v_4$ .

**SATS 5.2.** *Varje sekvens av längd  $n - 2$  av märkena  $p_i \in \{1, 2, \dots, n\}$  är Prüfersekvensen för ett unikt märkt träd,  $t = (V, E)$ , där  $|V| = n$ .*

## 5.1 Bevis 5 (Prüfersekvensen)

Vi vill bevisa att **Sats 5.2** stämmer eftersom det då existerar en bijektion mellan mängden, vi kallar den  $S$ , av alla sekvenser av längd  $n - 2$  av märkena  $p_i \in \{1, 2, \dots, n\}$  och mängden märkta träd med  $n$  noder,  $T_n$ . Bevisar vi detta vet vi att, då  $S$  har storlek  $n^{n-2}$ , har därmed även  $|T_n| = n^{n-2}$ .

Om vi börjar med en sekvens,  $S' = (p_1, \dots, p_{n-2})$ , så ska vi nu, med formeln för hur man skriver ner en Prüfersekvens från ett träd i åtanke, kunna utifrån  $S'$  bygga upp ett unikt märkt träd.

Vi börjar med att ta reda på antalet noder som trädet kommer innehålla,  $|S'| = n - 2 \Rightarrow |S'| + 2 = n$ . Sedan tar vi reda på vilken grad varje nod kommer ha då graden för varje nod blir antalet upprepningar noden har i sekvens  $S'$  och lägger till 1.

Formeln för att bygga trädet blir att man börjar från vänster i sekvens  $S'$  och för steg  $i$  skapar en kant mellan noden på plats  $i$  i  $S'$  och den nod  $v_j$  med

lågast markering där  $j \notin S'_i = (p_i, \dots, p_{n-2})$  och som inte uppnått sin grad,  $\deg(v_j)$ , än. För varje steg tar vi bort noden längst till vänster i sekvensen  $S'$ .

Vi visar med vår tidigare sekvens  $P_t = (3, 3, 4, 4, 6)$ , för denna sekvens kommer trädet innehålla  $|P_t| + 2 = n \Rightarrow 5 + 2 = 7$  noder. Graden för noderna blir  $\deg(v_3) = 2 + 1 = 3$ ,  $\deg(v_4) = 3$  och  $\deg(v_6) = 2$ . De resterande noderna,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_5$  och  $v_7$ , som inte ligger i  $P_t$  har grad 1, och ska alltså vara löv. Vi kan se att alla gradtal stämmer överens med träd  $t$ .

När vi ska börja bygga trädet tillhörande Prüfersekvens  $P_t = (3, 3, 4, 4, 6)$  börjar vi med att titta på noden längst till vänster,  $v_3$  har  $\deg(v_3) = 3$  och ska kopplas till den lågst märkta noden  $v_1$  som har  $\deg(v_1) = 1$ . Nästa plats hittar vi nod  $v_3$  som då ska kopplas till nästa lågst märkta nod  $v_2$ , nu har vi kopplat två kanter till nod  $v_3$ .

På plats tre i  $P_t$  hittar vi nod  $v_4$  och eftersom nod  $v_3$  behöver en kant till kopplad till sig skapas det alltså en kant mellan nod  $v_3$  och  $v_4$ . Nästa plats har vi en till nod  $v_4$  som då kopplas till  $v_5$  som är lågst märkt med  $\deg(v_5) = 1$ .

Sista platsen har vi nod  $v_6$  som då kopplas till nod  $v_4$  för att få rätt grad  $\deg(v_4) = 3$  och till sist kopplas  $v_6$  till  $v_7$  för att även få rätt grad till nod  $v_6$  då  $\deg(v_6) = 2$ .

Det formeln säger är att för en sekvens  $S'$  på formen längd  $n - 2$  av märkena  $p_i \in \{1, 2, \dots, n\}$  kan vi skapa ett unikt märkt träd vars Prüfersekvens är  $S'$ . Det existerar alltså en bijektion mellan mängden märkta träd med  $n$  noder,  $T_n$ , och mängden av alla Prüfersekvenser. Då en Prüfersekvens har längd  $n - 2$  av märkena  $p_i \in \{1, 2, \dots, n\}$  blir antalet sekvenser  $n^{n-2}$  som betyder att även  $|T_n| = n^{n-2}$ .  $\square$

## 6 Polynom

Inför det sjätte beviset kommer en ny definition och en sats.

**Definition 6.1** (HOMOGENT POLYNOM). *Ett **homogent polynom** är ett polynom där alla termer har samma grad.*

### Exempel

Ett homogent polynom skulle kunna vara:

$$5x^4y + y^5 + 3x^2y^3.$$

**SATS 6.2** (Faktorsatsen). *Om ett polynom  $F(x_1, \dots, x_n)$  är sådant att  $F(x_1, \dots, x_{k-1}, \alpha, x_{k+1}, \dots, x_n) = 0$  är  $F$  delbart med  $(x_k - \alpha)$  och kan skrivas på formen  $F = (x_k - \alpha) \cdot Q_n$  för något polynom  $Q_n$ .*

## 6.1 Bevis 6 (Polynom)

Vi betraktar polynomet

$$F_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{t \in T_n} \prod_{i=1}^n x_i^{\deg(i)-1} \quad (6)$$

Vi summerar alltså över alla märkta träd på  $n$  noder. Vi vill nu visa att följande stämmer:

$$F_n = (x_1 + x_2 + \dots + x_n)^{n-2}.$$

Vi säger att

$$R_n = F_n - (x_1 + \dots + x_n)^{n-2} \quad (7)$$

och vi ska visa att  $R_n = 0$ .

Vi använder oss av induktion över  $n$ . Vi visar att  $R_n = 0$  stämmer för  $n = 1$  och  $2$ .

För  $n = 1$ :

$$R_1 = \sum_{t \in T_1} \left( \prod_{i=1}^1 x_i^{\deg(i)-1} \right) - x_1^{1-2} = x_1^{-1} - x_1^{-1} = 0.$$

För  $n = 2$ :

$$R_2 = \sum_{t \in T_2} \left( \prod_{i=1}^2 x_i^{\deg(i)-1} \right) - (x_1 + x_2)^{2-2} = x_1^0 \cdot x_2^0 - (x_1 + x_2)^0 = 1 - 1 = 0.$$

Vi vet att  $R_n$  kommer antingen vara ett homogent polynom av variablerna  $x_1, \dots, x_n$  av grad  $n - 2$  eller så är  $R_n = 0$ . Att graden av det homogena

polynomet skulle bli  $n - 2$  vet vi eftersom varje term i summan (6) har följande grad

$$(\deg(1) - 1) + (\deg(2) - 1) + \dots + (\deg(n) - 1) = \sum_{i=1}^n \deg(i) - n,$$

enligt **Lemma 2.7** vet vi att summan av graden av varje nod i ett träd blir  $2|E|$ , där  $E$  är mängden kanter i trädet, och enligt **Lemma 1.9** vet vi att  $2|E| = 2n - 2$ , alltså får vi att graden blir

$$\sum_{i=1}^n \deg(i) - n = 2n - 2 - n = n - 2.$$

Om vi nu väljer något  $1 \leq k \leq n$  och utvärderar  $R_n$  i punkt  $x_k = 0$ , vi får då

$$R_n|_{x_k=0} = R_{n-1}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)(x_1 + \dots + x_{k-1} + x_{k+1} + \dots + x_n). \quad (8)$$

Alla termer försvinner utom de där  $k$  har grad 1, det vill säga att nod  $k$  är ett löv. Det vi har gjort här är alltså att skapa alla träd för de  $n - 1$  noder som inte är nod  $k$  för att sedan lägga till löv  $k$ . När vi lägger till löv  $k$  kommer noden vi kopplar lövet till att öka en grad, därför multiplicerar vi nod  $x_1$  med alla termer i  $R_{n-1}$  sedan multiplicerar vi  $x_2$  med alla termer i  $R_{n-1}$  upp till och med nod  $x_n$ , utom nod  $x_k$  som ändå är lika med noll.

Nu antar vi att  $R_n = 0$  stämmer för  $n \leq p - 1$  för något heltal  $p \geq 2$ , vi vill nu visa att  $R_n = 0$  stämmer för  $n = p$ . För att visa detta tittar vi på fallet då  $x_k = 0$  för alla  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ , vi sätter in  $n = p$  i formel (8):

$$R_p|_{x_k=0} = R_{p-1} \cdot (x_1 + \dots + x_{p-1}).$$

Då vi antagit att  $R_{p-1} = 0$  blir  $R_p|_{x_k=0} = 0$ , för alla  $k \in \{1, \dots, p\}$ .

Om  $R_n \neq 0$  har vi sagt att  $R_n$  skulle bli ett homogent polynom av grad  $n - 2$ . Om vi säger att  $R_p \neq 0$ , då måste polynomet innehålla minst en term på formen  $x_1^{a_1} \cdot \dots \cdot x_p^{a_p}$  där  $a_1 + \dots + a_p = p - 2$ . Detta betyder att det existerar minst ett  $k$  där  $a_k = 0$ , men om  $x_k = 0$  betyder det att denna term kommer överleva och inte bli noll och därmed att  $R_p|_{x_k=0} \neq 0$ . Detta blir en motsägelse då vi kom fram till, genom induktion, att  $R_p|_{x_k=0} = 0$ . För att

$R_p|_{x_k=0} = 0$  ska stämma måste alltså  $R_p = 0$  alltid stämma. Vi har då visat att  $R_p = 0$  vilket leder till att  $R_n = 0$  för alla  $n \geq 1$ .  $\square$

Vi skulle även kunnat visa att  $R_p = 0$  med hjälp av faktorsatsen, **Sats 6.2**. Då vi vet att om  $x_k = 0$  blir  $R_p|_{x_k=0} = 0$ , om vi då sätter att alla  $x_i$  ger ett nollställe till  $R_p$  i  $\alpha = 0$  då kan vi säga att  $R_p = (x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) \cdot \dots \cdot (x_p - \alpha) \cdot Q_n$  för något polynom  $Q_n$ . Det kommer då existera en term  $x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdot \dots \cdot x_p^{a_p}$  där  $a_1 + \dots + a_p = 2p - 2$  som är en större grad än  $\deg(R_p) = p - 2$ . Det betyder att vi måste sätta  $Q_n = 0$  och därmed  $R_p = 0$ .

Eftersom vi nu visat att  $\sum_{t \in T_n} \prod_{i=1}^n x_i^{\deg(i)-1} = (x_1 + \dots + x_n)^{n-2}$  ser vi att om vi sätter alla variabler  $x_i = 1$  får vi att antalet märkta träd med  $n$  noder blir  $n^{n-2}$ .

## Referenser

- [1] Martin. Aigner and Günter M. Ziegler. *Proofs from THE BOOK*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 6th ed. 2018. edition, 2018.
- [2] Norman Biggs. *Discrete mathematics*. Oxford Univ. Press, Oxford, 2. ed. edition, 2002.
- [3] Andrew Lin. 18.212: Algebraic combinatorics. [https://ocw.mit.edu/courses/18-212-algebraic-combinatorics-spring-2019/f6113618a3e085ba86b799f65934886d\\_MIT18\\_212S19\\_lec23.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/18-212-algebraic-combinatorics-spring-2019/f6113618a3e085ba86b799f65934886d_MIT18_212S19_lec23.pdf). [Online; accessed 29-December-2023].
- [4] Wikipedia. Prüfer sequence — Wikipedia, the free encyclopedia. <http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Pr%C3%BCfer%20sequence&oldid=1156970069>, 2023. [Online; accessed 07-December-2023].