



# SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

## Hyperbolisk geometri

av

**Sirli Markeyan**

2024 - No L1



# Hyperbolisk geometri

Sirli Markeyan

---

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Håkan Granath

2024



## **Acknowledgments**

Jag vill tacka min handledare Håkan Granath, som har varit till stor hjälp under detta arbete med sin tillgänglighet, professionella vägledning och konsekventa stöd. Att kunna dra nytta av hans breda kunskaper och synpunkter har verkligen fördjupat arbetet. Tack för vägledningen och stödet!

## Sammanfattning

Denna studie ger en överblick över begrepp och historien om hyperbolisk geometri, en gren inom matematiken som skiljer sig från den mer välbekanta euklidiska geometrin. Vi undersöker de matematiska begreppen som ligger till grund för hyperboliska rum och analyserar dess axiomatiska struktur. Fokus riktas mot ersättningen av parallellpostulatet och utvecklingen av icke-euklidiska geometrier av matematiker som Lobatjevskij och Bolyai. Vi presenterar olika modeller för hyperbolisk geometri, med fokus på det övre halvplanet och en översiktligt genomgång av Poincarés enhetsdisk. Dessutom presenteras Möbiustransformationernas roll och hur de bidrar till konstruktionen av hyperbolisk geometri.

## Abstract

This study provides an overview of the concepts and history of hyperbolic geometry, a branch of mathematics distinct from the more familiar euclidean geometry. We delve into the mathematical concepts underlying hyperbolic spaces and analyze their axiomatic structure. The focus is on the replacement of the parallel postulate and the development of non-euclidean geometries by mathematicians such as Lobatjevskij and Bolyai. Various models for hyperbolic geometry are presented, with an emphasis on the upper half-plane and a brief overview of Poincaré's unit disk. Additionally, we highlight the role of Möbius transformations and their contribution to the understanding of hyperbolic geometry.

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Introduktion</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Grundbegrepp</b>	<b>5</b>
2.1	Komplexa tal och komplexa funktioner . . . . .	5
2.2	Matrisgruppen $SL(2, \mathbb{R})$ . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Övre halvplanet</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Gruppen <math>SL(2, \mathbb{R})</math> och automorfier av övre halvplanet</b>	<b>10</b>
<b>5</b>	<b>Hyperboliska linjer, geodeter och avståndsformeln i hyperbolisk geometri</b>	<b>15</b>
5.1	Hyperboliska linjer och geodeter . . . . .	15
5.2	Avståndsformeln i hyperbolisk geometri . . . . .	20
<b>6</b>	<b>Översiktligt om diskmodellen</b>	<b>22</b>
<b>7</b>	<b>Vinklar, hyperbolisk trianglar och hyperbolisk trigonometri</b>	<b>24</b>
7.1	Vinklar . . . . .	24
7.2	Hyperboliska trianglar . . . . .	24
7.3	Hyperbolisk trigonometri . . . . .	25
<b>8</b>	<b>Generaliserade trianglar, area och Gauss-Bonnets sats</b>	<b>26</b>
8.1	Generaliserade trianglar . . . . .	26
8.2	Hyperbolisk area . . . . .	27
8.3	Gauss-Bonnets sats . . . . .	28
<b>9</b>	<b>Förslag för vidare studier</b>	<b>30</b>

# 1 Introduktion

Tar vi fram en matematiklärobok avsedd för grundskolan eller gymnasiet som behandlar ämnet geometri är det mycket troligt att vi finner den euklidiska geometrin, som grundades av Euklides, som en genomgående princip i hela läroboken. Euklides har haft stor inflytande på geometri och därför har vår framställning av geometri huvudsakligen grundat sig på de postulater som var Euklides utgångspunkt i *Elementa* [1]. *Elementa* består av tretton böcker, och första boken inleds med definitioner, postulater och satser som ligger till grund för det vi idag kallar euklidisk geometri. Begrepp som punkt, rät linje, vinklar och avstånd är självförklarande och de egenskaper som är förknippade med dem är formulerade i de fem postulaten. De fem postulaten är intressanta och kan uttryckas på följande sätt:

**Postulat 1.** Genom två punkter går endast en rät linje.

**Postulat 2.** Ett linjesegment kan förlängas godtyckligt till ett längre linjesegment.

**Postulat 3.** Givet en central punkt, kan beskrivas en cirkel med en given radie.

**Postulat 4.** Alla räta vinklar är kongruenta, det vill säga de är lika med varandra.

**Postulat 5.** När två linjer skär en tredje linje på ett sätt att summan av de två inre vinklarna på samma sida om den skärande linjen är mindre än två räta vinklar, då kommer de två linjerna att skära varandra om de förlängs tillräckligt långt.

Redan tidigt ställdes frågan bland matematiker om det var möjligt att bevisa femte postulatet med hjälp av de fyra första. I arbetet med att försöka bevisa femte postulatet, som ofta kallas parallellpostulat och är mer komplicerat än de andra, visade det sig att det kunde formuleras på ett enklare sätt:

- Givet en linje och en punkt som inte ligger på linjen, finns det exakt en linje genom punkten som är parallell med den givna linjen.

Euklides själv använde inte parallellpostulatet för första 28 satserna i *Elementa*, men var tvungen att hänvisa till det för den 29:de satsen [1]. Flera matematiker och filosofer jobbade med detta under lång tid.

Janos Bolyai och Nikolaj Lobatjevskij, oberoende av varandra, insåg att det aldrig kommer att gå att bevisa parallellpostulatet enbart med hjälp av de fyra första postulaten. Bolyai och Lobatjevskij insåg att det var möjligt att konstruera en alternativ geometri där de första fyra postulaten stämmer, men det femte postulatet inte gällde. Det var inte förrän under 1800-talet som deras arbete vann allmän acceptans [8, s. 51]. Detta ledde till utvecklingen av den icke-euklidiska geometrin.

I försöket att visa att femte postulatet inte gäller, försökte Girolamo Saccheris hitta en motsägelse och undersökte andra möjliga postulater som kunde ersätta



femte postulatet. Han kom fram till två alternativa postulat [3]:

1. Genom en given punkt kan det dras mer än en rak linje som är parallell med en given linje.
2. Genom en given punkt kan inga raka linjer dras parallellt med en given linje.

Det andra alternativa postulatet relaterar till det som vi idag kallar för sfärisk geometri. I sfärisk geometri är linjerna inte raka utan snarare bildar cirklar som ansluter tillbaka till sig själva. Detta arbete kommer dock inte behandla sfärisk geometri. Istället kommer fokuset ligga på det första alternativa postulatet, vilket leder till hyperbolisk geometri. I denna geometri har orden punkt, linje, avstånd och så vidare, andra betydelse än i den klassiska euklidiska geometrin. Alltså alternativa postulatet som Saccheri kom fram var grunden om hur parallella linjer beter sig i hyperbolisk geometri.

## 2 Grundbegrepp

Innan vi fördjupar oss i hyperbolisk geometri kommer vi att introducera några begrepp som ligger till grund för arbetet.

### 2.1 Komplexa tal och komplexa funktioner

Alla punkter i det tvådimensionella planet  $\mathbb{R}^2$  kan representeras genom användning av två reella tal, som kallas koordinater för punkterna. Ett komplext tal är mer allmän typ av tal än de reella talen och möjliggör beräkningar med rötter av negativa tal. Ursprunget till namnet kommer från det latinska ordet complexus vilket översätts till sammansatt. Alltså de komplexa talen är sammansatta av reella och imaginära tal.

**Definition 2.1.** Ett komplext tal är ett tal på formen

$$z = x + yi$$

där  $x, y \in \mathbb{R}$  och  $i$  är imaginära enheten med egenskapen  $i = \sqrt{-1}$ .

Varje komplext tal kan associeras med en punkt  $p \in \mathbb{R}^2$  där  $p = (x, y)$ . En punkt  $p = (x, y) \in \mathbb{R}^2$  kan representeras som det komplexa talet  $z = x + yi$ . Det reella talet  $x$  är realdelen och kan skrivas som  $x = \operatorname{Re}(z)$ , samt talet  $y$  är imaginärdelen och kan skrivas som  $y = \operatorname{Im}(z)$ .

Detta arbete kommer inte fördjupa sig i teorin för komplexa funktioner, men vi behöver några egenskaper. Se [7, s. 3–11] för mer om komplex analys. En grund-

läggande egenskap är att komplexvärda funktioner  $f(z)$  kan ha komplext derivata med avseende på den komplexa variabeln  $z$ .

**Definition 2.2.** En funktion  $f(z)$  är komplext deriverbar vid  $c$  om gränsvärdet

$$\lim_{z \rightarrow c} \frac{f(z) - f(c)}{z - c}$$

existerar. Gränsvärdet betecknas då som  $f'(c)$  eller  $\frac{df}{dz}(c)$ . Genom variabelbyte  $z = c + h$  är  $f(z)$  komplext differentierbar vid  $c$  om och endast om gränsvärdet

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

existerar. Om detta gränsvärde existerar för varje punkt där funktionen är definierad, sägs funktionen vara komplext deriverbar eller holomorf [7, s. 4].

Man kan, lite förenklat, säga att komplext derivering fungerar på liknande sätt som vanlig derivering där de välkända räknereglerna, såsom kedjeregeln och produktregeln är också tillämpbara på komplexa derivator [6, s. 40]. Det vill säga, om  $p$  och  $q$  är holomorfa får vi produktregeln genom

$$(p(z)q(z))' = p'(z)q(z) + p(z)q'(z).$$

Om  $u = f(z)$ ,  $w = g(u)$  är holomorfa får vi kedjeregeln genom

$$\frac{dw}{dz} = \frac{dw}{du} \cdot \frac{du}{dz}.$$

En viktig egenskap som holomorfa funktioner har är att om  $f'(z) \neq 0$ , kommer avbildningen  $f$  att bevara vinklar, vilket betyder att den behåller vinkelrelationerna när den avbildar från ett område till ett annat. Alltså om vi tar två kurvor som skär varandra och har en viss vinkel så kommer dess avbildning att ha samma vinkel. Funktioner med denna egenskap, som bevarar vinklar, kallas konforma avbildningar [6, s. 53–56].

Vi återvänder till frågan om när en funktion,  $f(z) = u + vi$  där  $u(x, y)$  är realdelen och  $v(x, y)$  är imaginäradelen, är komplext differentierbar. För att den komplexa derivatan  $f'(z)$  ska existera, bör vi kunna beräkna den genom att närma oss  $z$  parallellt med antingen realaxeln eller imaginäraxeln. Detta innebär att

$$f'(z) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z + t) - f(z)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z + ti) - f(z)}{ti},$$

där  $t$  är reellt. I termer av  $u$  och  $v$  kan vi uttrycka på följande sätt:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z+t) - f(z)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x+t, y) + iv(x+t, y) - u(x, y) - v(x, y)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x+t, y) - u(x, y)}{t} + i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x+t, y) - v(x, y)}{t} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}\quad (2.3)$$

Om vi tar derivatan parallellt med imaginär axeln, får vi,

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(z+ti) - f(z)}{ti} &= -i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) + iv(x, y+t) - u(x, y) - v(x, y)}{t} \\ &= -i \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x, y+t) - u(x, y)}{t} + \lim_{t \rightarrow 0} \frac{v(x, y+t) - v(x, y)}{t} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.\end{aligned}\quad (2.4)$$

Genom att likställa de reella och imaginära delarna i (2.3) och (2.4) ser vi att en funktion är komplext deriverbar, då dess real och imaginärdelar uppfyller Cauchy-Riemann-ekvationerna [5]. Vi har därmed visat följande sats:

**Sats 2.5.** Om en funktion  $f(z) = u + vi$  är komplext differentierbar, måste dess reella och imaginära delar uppfylla Cauchy-Riemann-ekvationerna [7, s. 4]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{\partial u}{\partial y}.\end{aligned}\quad (2.6)$$

Dessutom ges dess komplexa derivatan  $f'(z)$  av:

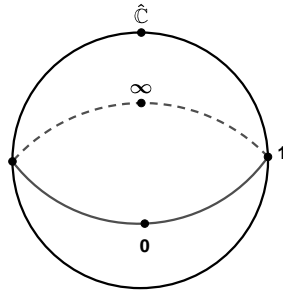
$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.\quad (2.7)$$

**Definition 2.8.** Övre halvplanet definieras som en del av komplexa talplanet och betecknas som  $\mathcal{H}$ . Övre halvplanet  $\mathcal{H}$  omfattar alla komplexa tal,  $z = x + yi$  där den imaginära delen  $y$  är positiv:

$$\mathcal{H} := \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}.$$

**Definition 2.9.** Riemannsfären  $\hat{\mathbb{C}}$  är mängden  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Ett element av  $\hat{\mathbb{C}}$  skrivs som antingen ett komplext tal eller  $\infty$ .

Den så kallade Riemannsfären är det komplexa talplanet  $\mathbb{C}$  med en extra punkt  $\infty$  som vi bildar sfär av. Vi identifierar denna sfär med enhetssfären, det vill säga med radie 1 och centrum i origo. Vi låter realaxeln vara ekvatorn där oändlighetspunkten hamnar längs ekvatorn. Norra halvklotet motsvarar övre halvplanet  $\mathcal{H}$  [6, s. 47]. Vi betraktar  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  som en cirkel som utgör randen till  $\mathcal{H}$ . Låt oss beteckna denna sfär med  $\hat{\mathbb{C}}$ .



Figur 1: Riemannsfären.

Vi kommer använda denna tankefigur för att motivera några resonemang, vilka vi kommer att presentera i kommande kapitel.

## 2.2 Matrisgruppen $SL(2, \mathbb{R})$

En grupp  $(G, \cdot)$ , har följande egenskaper:

1. Operationen är associativ, dvs

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in G.$$

2. Det finns ett identitets-element där

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a.$$

3. Till varje  $a \in G$  finns ett  $a^{-1} \in G$  sådant att

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1.$$

Den speciella linjära gruppen, betecknad som  $SL(2, \mathbb{R})$ , som kommer användas i denna studie, är en grupp av  $2 \times 2$  reella matriser med determinanten lika med ett:

$$SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad \text{där} \quad ad - bc = 1 \right\}. \quad (2.10)$$

Man kan enkelt kontrollera att  $SL(2, \mathbb{R})$  med operationen matrismultiplikation uppfyller egenskaperna för att vara en grupp. Det vill säga att  $SL(2, \mathbb{R})$  är associativ, enhetsmatrisen  $I$  är identitetsmatrisen och varje matris i  $SL(2, \mathbb{R})$  har en invers.

### 3 Övre halvplanet

För att få en bredare förståelse börjar vi med en liknande modell för euklidiska geometrin för att kunna jämföra dessa modeller. Vi låter  $\mathbb{C}$  vara det komplexa planet och använder oss av de vanliga notationerna för de reella och imaginära delarna av  $z = x + yi \in \mathbb{C}$  där  $\operatorname{Re}(z) = x, \operatorname{Im}(z) = y$ . Längden av en kurva fås genom att integrera det så kallade längdelementet  $ds$  längs kurvan, där

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Detta skall tolkas som att längden  $\int_{\gamma} ds$  av en kurva  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{C}$ , beräknas genom formeln

$$\int_{\gamma} ds = \int_I \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

I euklidisk geometri är avståndet längs en rät linje mellan två punkter kortare än längden längs alla andra kurvor som förbinder dem.

Vi kommer nu att konstruera en alternativ geometri, det vill säga hyperbolisk geometri, men istället för att använda det komplexa talplanet, kommer vi att fokusera på det övre halvplanet och modifiera sättet att beräkna avstånd. Under 1800-talet vann denna modell en allmän acceptans, bland annat tack vare Poincarés insatser. Poincarés arbete bidrog till att förenkla och förklara dessa teorier och det gjorde det möjligt att faktiskt rita bilder av hur det hyperboliska planet ser ut [6, s. 16].

Formeln för längdelementen för det hyperboliska planet ges av:

$$ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}. \quad (3.1)$$

Notera att faktorn  $\frac{1}{y}$  i nämnaren innebär att det hyperboliska avståndet blir större när man rör sig närmare den reella axeln  $\mathbb{R}$ . Vi kommer att se att de så kallade geodeterna, det vill säga den kortaste vägen mellan två punkter, ges av raka linjer och kurvor i form av halvcirklar som är vinkelräta mot reella axeln  $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(z) = 0\}$ . Med hjälp av längdelementen för det hyperboliska planet (3.1), kan vi definiera hyperboliska längden av kurvor  $\gamma$  i  $\mathcal{H}$ , vilket betecknas som  $h(\gamma)$ .

**Definition 3.2.** Låt  $I = [0, 1]$  och  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{H}$  vara en del av deriverbar väg med banan  $\gamma = \{z(t) = x(t) + yi(t) \in \mathcal{H} \mid t \in I\}$ . Den hyperboliska längden av kurvan ges av

$$h(\gamma) = \int_{\gamma} ds = \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left|\frac{dz}{dt}\right|}{\operatorname{Im}z(t)} dt. \quad (3.3)$$

**Anmärkning:** Formeln (3.3) kan också användas för att beräkna längden av en styckvis deriverbar väg  $\gamma$ .

Låt oss överväga hur vi kan definiera avståndet mellan punkt  $a$  till punkt  $b$  i hyperboliska planet. Vi tänker oss att vi har en mängd  $\Gamma = \{\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H} \mid \gamma(0) = a, \gamma(1) = b\}$ . Denna mängd representerar alla möjliga vägar från punkt  $a$  till punkt  $b$  och genom att beräkna längderna av dessa vägar får vi en mängd av reella tal.

**Definition 3.4.** Det hyperboliska avståndet mellan två punkter  $a$  och  $b$  i övre halvplanet  $\mathcal{H}$  definieras av formeln

$$p(a, b) = \inf h(\gamma),$$

där infimum tas över alla  $\gamma \in \Gamma$ .

Det hyperboliska avståndet mellan två punkter är icke-negativt eftersom vi tar infimum över alla integraler, och var och en av integralerna är icke-negativ. Avståndet är även symmetriskt, alltså avståndet mellan  $a$  till  $b$  är lika med avståndet mellan  $b$  till  $a$ .

Dessa hyperboliska avståden uppfyller triangelolikheten, det vill säga för tre punkter  $a, b$  och  $c$  i det hyperboliska planet gäller det att

$$p(a, b) \leq p(a, c) + p(c, b). \quad (3.5)$$

Avståndet från  $p(a, b)$  är infimum av längderna för alla möjliga vägar mellan  $a$  och  $b$ . Å andra sidan är högerledet i (3.5), det vill säga  $p(a, c) + p(c, b)$ , infimum av längderna för de vägar som passerar  $c$ .

## 4 Gruppen $SL(2, \mathbb{R})$ och automorfier av övre halvplanet

Nu ska vi titta på hur matriserna i  $SL(2, \mathbb{R})$ , som vi behandlade i kapitel 2.2, ger transformationer av komplexa planet  $\mathbb{C}$ . En sådan transformation kallas för Möbiustransformation. Möbiusavbildningen  $T = \Phi(A)$  för matriser  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , där  $\Phi$  är avbildningen som tar ett element i  $SL(2, \mathbb{R})$  och ger en transformation av komplexa talplanet på sig själv, får vi genom

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d}. \quad (4.1)$$

**Sats 4.2.** Gruppen  $SL(2, \mathbb{R})$  verkar på det övre halvplanet  $\mathcal{H}$ .

*Bevis.* Vi vill visa att varje transformation av formen  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  där  $a, b, c, d$  är reella tal och  $ad - bc = 1$  verkar på övre halvplanet  $\mathcal{H}$ . Alltså vi vill visa att om  $z \in \mathcal{H}$  så är också  $T(z) \in \mathcal{H}$ . Låt  $w = T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Då är

$$w = \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} \quad (4.3)$$

och för att ta reda på imaginärdelen av  $w$ , subtraherar vi dess komplexa konjugat och får att,

$$\begin{aligned} w - \bar{w} &= \frac{(az+b)(c\bar{z}+d) - (a\bar{z}+b)(cz+d)}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{ac|z|^2 + adz + bc\bar{z} + bd - (ac|z|^2 + ad\bar{z} + bcz + bd)}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{adz - ad\bar{z} + bc\bar{z} - bcz}{|cz+d|^2}. \end{aligned}$$

Vi kan nu förenkla detta genom att använda  $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$  och vi får att

$$\begin{aligned} w - \bar{w} &= \frac{ad(\operatorname{Im}(z)) - bc(\operatorname{Im}(z))}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{\operatorname{Im}(z)(ad - bc)}{|cz+d|^2}. \end{aligned}$$

Eftersom  $ad - bc = 1$  får vi slutligen att

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(w) &= \frac{\operatorname{Im}(z)(ad - bc)}{|cz+d|^2} \\ &= \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Eftersom  $\operatorname{Im}(z) > 0$  så gäller även att  $\operatorname{Im}(w) > 0$ . Vi har nu bevisat att varje transformation  $T = \Phi(A)$  för  $A \in SL(2, \mathbb{R})$  kommer att avbilda övre halvplanet på sig själv.

□

Transformationer  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  som ges av (4.1) bildar en grupp, som vi betecknar som  $\operatorname{Möb}(\mathcal{H})$ .

**Sats 4.5.** *Avbildningen  $\Phi : \text{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Möb}(\mathcal{H})$  utgör en gruppomomorfi.*

*Bevis.* För att visa att  $\Phi$  är en gruppomomorfi, antag att  $A, B \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ , om vi sätter  $\Phi(AB) = S$ ,  $\Phi(A) = T$  och  $\Phi(B) = U$  så har vi att

$$S(z) = T(U(z))$$

för alla  $z \in \mathcal{H}$ . Låt

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \quad \text{och} \quad B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Genom att multiplicera dessa matriser får vi att,

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 + b_1c_2 & a_1b_2 + b_1d_2 \\ c_1a_2 + d_1c_2 & c_1b_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}.$$

Det ger oss Möbiustransformationen:

$$S(z) = \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)}.$$

Nu är

$$T(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1} \quad \text{och} \quad U(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}.$$

Sammanställningen av dessa avbildningar ger oss,

$$\begin{aligned} T(U(z)) &= \frac{a_1 \cdot \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2} + b_1}{c_1 \cdot \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2} + d_1} = \frac{a_1(a_2z + b_2) + b_1(c_2z + d_2)}{c_1(a_2z + b_2) + d_1(c_2z + d_2)} \\ &= \frac{(a_1a_2 + b_1c_2)z + (a_1b_2 + b_1d_2)}{(c_1a_2 + d_1c_2)z + (c_1b_2 + d_1d_2)} = S(z). \end{aligned}$$

Det enda som återstår är att kontrollera villkoret  $(a_1a_2 + b_1c_2)(c_1b_2 + d_1d_2) - (a_1b_2 + b_1d_2)(c_1a_2 + d_1c_2) = 1$ , eftersom gruppen  $\text{SL}(2, \mathbb{R})$  har determinanten 1. Vi får att:

$$(a_1a_2 + b_1c_2)(c_1b_2 + d_1d_2) - (a_1b_2 + b_1d_2)(c_1a_2 + d_1c_2) = (a_1d_1 - b_1c_1)(a_2d_2 - b_2c_2) = 1.$$

Det följer även från determinantens räkneregel där  $\det(AB) = \det A \cdot \det B = 1 \cdot 1 = 1$ .  $\square$



Nu kan vi visa att Möbiusavbildningarna  $T$  är automorfier, det vill säga att de är inverterbara avbildningar. Om vi har matrisen  $A$ , som ger en Möbiusavbildning  $T(z)$ , så kommer  $A^{-1}$  ge den inversa avbildningen  $T^{-1}(z)$ . Detta medför att transformationen  $T(z)$  har en invers i formen av  $T^{-1}(z)$  eftersom inversen är en avbildning av samma typ. Alltså om  $\Phi(A) = T(z)$  då är  $\Phi(A^{-1}) = T^{-1}(z)$ . Så om vi har matrisen

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

ges dess invers av,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Detta ger oss att om

$$T(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{då är} \quad T^{-1}(z) = \frac{dz - b}{-cz + a}.$$

Vi kan nu säga att  $\Phi : \text{SL}(2, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Aut}(\mathcal{H})$  där de avbildar övre halvplanet på sig själv eller bevarar övre halvplanet.

Nu vill vi undersöka vilka matriser  $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$  som ger identitetsavbildningen på  $\mathcal{H}$ . Vi betraktar Möbiusavbildningen  $T = \Phi(A)$ . Om  $T = \Phi(A) = id$ , är identitetsavbildningen  $T(z) = z$  för alla  $z \in \mathcal{H}$ . Vi har

$$T(z) = z \iff \frac{az+b}{cz+d} = z \iff cz^2 + (d-a)z + b = 0.$$

Om vi har en andragradsekvation som uppfylls för oändlig många  $z$ , då måste alla koefficienterna vara lika med 0. Detta är ekvivalent med

$$c = d - a = b = 0.$$

Vi får att

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

som dessutom har  $\det(A) = a^2 = 1$ . Detta ger oss matrisen

$$A = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och det är de matriserna som ger oss identitetsavbildningen.

**Sats 4.6.** För matriser  $A, B \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$  som har samma Möbiusavbildning,  $\Phi(A) = \Phi(B)$ , gäller att  $A = \pm B$ .

*Bevis.* Vi har, med hjälp av ovanstående, att

$$\begin{aligned} \Phi(A) &= \Phi(B) \\ \iff \Phi(A)\Phi(B)^{-1} &= id \\ \iff \Phi(AB^{-1}) &= id \\ \iff AB^{-1} &= \pm I \end{aligned}$$

och detta är ekvivalent med att  $A = \pm B$ . Alltså har vi att om två matriser ger samma Möbiusavbildning så är det enda som kan skilja dem åt att den ena matrisen är minus den andra matrisen.  $\square$

Om man identifierar varje matris  $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$  med  $-A$ , får man den så kallade projektiva speciella linjära gruppen, betecknad som  $\text{PSL}(2, \mathbb{R})$ . Formellt kan det skrivas som  $\text{PSL}(2, \mathbb{R}) := \text{SL}(2, \mathbb{R}) / \{\pm I\}$  då  $I$  är identitetsmatrisen.

**Definition 4.7.** En transformation som bevarar avståndet mellan punkter i det övre halvplanet  $\mathcal{H}$  kallas en isometri av  $\mathcal{H}$ .

Vi kommer att beteckna mängden av isometrier av  $\mathcal{H}$  som  $\text{Iso}(\mathcal{H})$ .

**Sats 4.8.** Varje transformation  $T = \Phi(A)$  för  $A \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$  är en isometri  $T \in \text{Iso}(\mathcal{H})$ .

*Bevis.* Utifrån Sats 4.2 avbildar  $T$  övre halvplanet på sig själv. Låt  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{H}$  vara en styckvis differentierbar bana, där  $I$  är ett intervall. Vi vill nu visa att för varje  $T$  gäller att

$$h(T(\gamma)) = h(\gamma).$$

Alltså den hyperboliska båglängden längs  $T(\gamma)$  är lika med båglängden längs  $\gamma$ , vilket betyder att avståndet inte förändras när vi tillämpar  $T$ .

Låt  $z(t) = (x(t), y(t))$  vara parametriseringen av banan. Om vi tillämpar  $T$ , får vi  $w(t) = T(z(t)) = ut + vi(t)$  där  $u(t)$  och  $v(t)$  är de reella respektive imaginära delarna av  $T(z(t))$  och  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Vi har

$$\frac{dw}{dz} = T'(z) = \frac{a(cz+d) - c(az+b)}{(cz+d)^2} = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} = \frac{1}{(cz+d)^2}. \quad (4.9)$$

Utifrån (4.4) vet vi att  $v = \frac{y}{|cz+d|^2}$ , därmed  $|\frac{dw}{dz}| = \frac{v}{y}$ .

Vi har nu med komplex kedjeregeln, som vi nämnde i kapitel 2.1, att

$$h(T(\gamma)) = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dw}{dt} \right|}{v(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \right|}{v(t)} dt.$$

Vi använder oss av  $\frac{dw}{dz} = \frac{1}{(cz+d)^2}$  och  $v = \frac{y}{|cz+d|^2}$  och får att,

$$\int_0^1 \frac{\left| \frac{dw}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \right|}{v(t)} dt = \int_0^1 \frac{\left| \frac{1}{(cz+d)^2} \cdot \frac{dz}{dt} \right|}{\frac{y}{|cz+d|^2}} dt$$

och ser att både  $|cz+d|^2$  i nämnaren förkortas med varandra och vi får att

$$\int_0^1 \frac{\left| \frac{1}{(cz+d)^2} \cdot \frac{dz}{dt} \right|}{\frac{y}{|cz+d|^2}} dt = \int_0^1 \left| \frac{1}{y} \cdot \frac{dz}{dt} \right| dt = \int_0^1 \frac{\left| \frac{dz}{dt} \right|}{y(t)} dt = h(\gamma)$$

Vi har nu visat att

$$h(T(\gamma)) = h(\gamma)$$

som visar att  $T$  bevarar hyperboliska längder, så  $T$  är en isometri.  $\square$

## 5 Hyperboliska linjer, geodeter och avståndsformeln i hyperbolisk geometri

Vi kommer undersöka vilka kurvor i  $\mathcal{H}$  som utgör de räta linjerna i hyperbolisk geometri, det vill säga vilka kurvor som kommer att minimera det hyperboliska avståndet. Senare kommer vi härleda formler för avståndet i hyperbolisk geometri.

### 5.1 Hyperboliska linjer och geodeter

**Definition 5.1.** En delmängd  $L$  i det övre halvplanet  $\mathcal{H}$  kallas en hyperbolisk linje om  $L$  är en rät linje eller en halvcirkel vinkelrät mot den reella axeln.

**Lemma 5.2.** *Givet en hyperbolisk linje  $L$  finns det en Möbiusavbildning  $T$  som avbildar  $L$  på den imaginära axeln.*

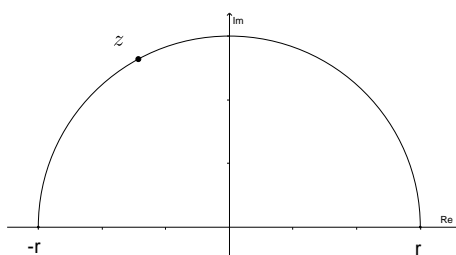
*Bevis.* För att bevisa detta lemma delar vi upp beviset i olika fall beroende på hur den hyperboliska linjen ser ut.

**Fall 1.** Vi har en linje  $L$  som är vinkelrät mot reella axeln, det vill säga  $L = \{z \in \mathcal{H} \mid \operatorname{Re}(z) = C\}$ .

För att avbilda  $L$  på den imaginära axeln använder vi transformationen  $T(z) = z - C$  med matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -C \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.3)$$

**Fall 2.** Vi har en cirkel  $L$  som har centrum i origo.



Här använder vi först den mentala bilden av  $\mathcal{H}$  som en halva av Riemannsfären, som vi definierade i Definition 2.9, för att hitta en lämplig kandidat till Möbiustransformation  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ . Vi vill att  $-r$  ska avbildas på origo och  $r$  på oändligheten. Detta uttrycker vi genom att sätta in  $r$  och  $-r$  i Möbiusavbildningen. För  $r$  får vi  $\frac{ar+b}{cr+d}$  som måste ge oss oändligheten, vilket innebär att nämnaren måste vara lika med noll. För  $-r$  får vi  $\frac{-ar+b}{-cr+d}$  som måste avbildas på origo, vilket innebär att täljaren måste vara lika med noll. Således får vi ett ekvationssystem:

$$\begin{cases} -ar + b = 0 \\ cr + d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = ar \\ d = -cr \end{cases}$$

vilket ger oss matrisen

$$B = \begin{pmatrix} a & ar \\ c & -cr \end{pmatrix}$$

med  $\det(B) = -2acr$ .

Vi vill att  $\det(B) = -2acr = 1$  där vi fortfarande har två parametrar,  $a$  och  $c$ . Genom att välja en av parametrarna, som till exempel  $c = 1$ , då får vi att  $a = -\frac{1}{2r}$ . Så matrisen blir

$$B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2r} & -\frac{1}{2} \\ 1 & -r \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

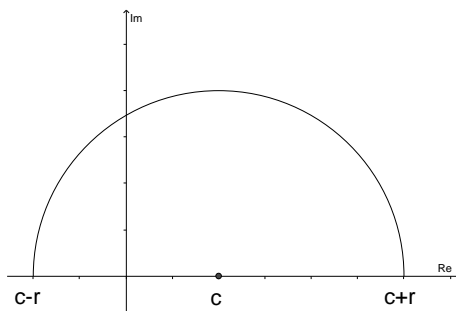
Så,  $T(z) = \frac{-\frac{1}{2r}z - \frac{1}{2}}{z - r} = -\frac{1}{2r} \cdot \frac{z+r}{z-r}$ .

För att kontrollera att  $T$  verkligen gör det vi vill, alltså alla punkter  $z$  med  $\text{Im}(z) > 0$  och  $|z| = r$  i halvcirkeln avbildas på imaginära axeln, kan vi beräkna om  $\text{Re}(T(z)) = 0$ . Detta görs genom att multiplicera transformationens realdel med nämnarens konjugat för att få en reell nämnare. Då är:

$$\text{Re}(T(z)) = -\frac{1}{2r} \text{Re} \left( \frac{z+r}{z-r} \right) = -\frac{1}{2r} \text{Re} \left( \frac{|z|^2 - r^2 + r(\bar{z} - z)}{|z-r|^2} \right) = 0.$$

Så, vi får att  $\text{Re}(T(z)) = 0$  vilket medför att  $T(z)$  ligger på imaginära axeln.

**Fall 3.** Vi har en halvcirkel  $L$  som inte har centrum i origo,



I detta fall använder vi först fall 1 och sedan fall 2, det vill säga att vi först flyttar halvcirkeln så att dess centrum hamnar i origo och sedan avbildar vi den på imaginära axeln. Detta gör vi genom multiplicera ihop matriserna 5.3 och 5.4. Detta ger

$$BA = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2r} & \frac{c-r}{2r} \\ 1 & -c-r \end{pmatrix}.$$

Då har vi visat att genom en Möbiusavbildning kan vi avbilda en godtycklig hyperbolisk linje  $L$  på den imaginära axeln.  $\square$

**Lemma 5.5.** *Den kortaste vägen mellan två punkter  $z_1$  och  $z_2$  i  $\mathcal{H}$  på imaginära axeln är längs imaginära axeln.*

*Bevis.* Låt  $z_1$  och  $z_2$  vara två punkter i  $\mathcal{H}$ . Antag att dessa punkter ligger längs den imaginära axeln, så  $z_1 = ai$  och  $z_2 = bi$  där  $a, b \in \mathbb{R}$  och antag vidare att  $\text{Im}(z_1) < \text{Im}(z_2)$  så att  $b > a$ . Låt  $\gamma_0$  vara raka vägen längs imaginära axeln, så  $\gamma_0(t) = ai + (b-a)ti$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Då är  $\gamma_0(0) = z_1$  och  $\gamma_0(1) = z_2$ .

Vi använder oss av formeln för hyperbolisk längd och börjar räkna ut  $\frac{dx}{dt}$  och  $\frac{dy}{dt}$  för den här parametriseringen. Eftersom  $x(t) = x_0$  är en konstant, får vi att,

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 0 \\ \frac{dy}{dt} &= b - a\end{aligned}$$

Genom att använda formeln för hyperbolisk längd får vi att

$$\begin{aligned}h(\gamma_0) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{|b-a|}{y(t)} dt = \int_0^1 \frac{b-a}{a+(b-a)t} dt \\ &= [\ln(a+(b-a)t)]_0^1 = \ln\left(\frac{b}{a}\right).\end{aligned}\tag{5.6}$$

Om vi tar en annan väg  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{H}$  med  $\gamma(0) = z_1$  och  $\gamma(1) = z_2$ , får vi att

$$\begin{aligned}h(\gamma) &= \int_0^1 \frac{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\left|\frac{dy}{dt}\right|}{y(t)} dt \geq \int_0^1 \frac{\frac{dy}{dt}}{y(t)} dt \\ &= [\ln(y(t))]_0^1 = \ln b - \ln a = \ln\left(\frac{b}{a}\right) = h(\gamma_0).\end{aligned}\tag{5.7}$$

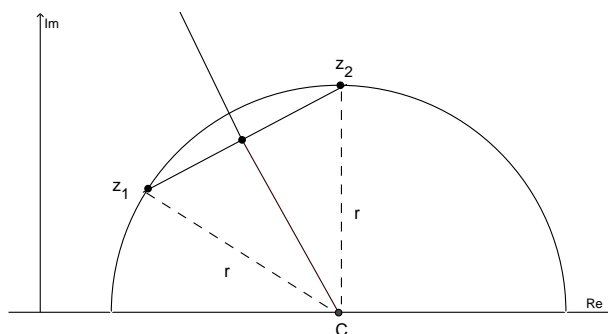
För varje kurva  $\gamma$  som är styckvis deriverbar mellan punkterna  $z_1$  och  $z_2$  i det övre halvplanet  $\mathcal{H}$ , där  $\gamma : I \rightarrow \mathcal{H}$  och  $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , kommer längden av den kortaste vägen längs den imaginära axeln,  $\ln\left(\frac{b}{a}\right)$ , att uppnås när kurvan  $\gamma$  är en rät linje  $\gamma_0$  mellan punkterna  $z_1$  och  $z_2$ . Det innebär att  $\gamma_0$  är geodeten mellan  $z_1$  och  $z_2$ .  $\square$

Vi har nu visat att geodeten, kortaste vägen, mellan två godtyckliga punkter  $z_1, z_2$  på imaginära axeln är längs imaginära axeln.

**Lemma 5.8.** *Givet två godtyckliga punkter  $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ , finns en entydig hyperbolisk linje  $L$ , som i Definition 5.1, som passerar genom dessa punkter.*

*Bevis.* För att bevisa detta, undersöker vi de olika fallen beroende på hur punkterna  $z_1$  och  $z_2$  ligger i förhållande till varandra.

Om punkterna har samma realdel,  $\operatorname{Re}(z_1) = \operatorname{Re}(z_2)$  i  $\mathcal{H}$ , så bildas en vertikal linje  $L$  som är vinkelrät mot den reella axeln och då är vi klar i det fallet. Om däremot  $\operatorname{Re}(z_1) \neq \operatorname{Re}(z_2)$ , kommer punkternas mittpunktsnormal att skära realaxeln i en punkt  $C$  eftersom den inte är parallell med reella axeln.



Figur 2: Konstruktion av hyperbolisk linje genom två punkter.

För varje punkt längs mittpunktsnormalen gäller, med hjälp av elementär euklidisk geometri, att avståndet till  $z_1$  och avståndet till  $z_2$  är lika stora. Därmed är det euklidiska avståndet från  $z_1$  till  $C$  lika långt som avståndet mellan  $C$  och  $z_2$ , alltså  $|z_1 - C| = |z_2 - C|$ . Därför kan vi dra slutsatsen att cirkeln med centrum i  $C$  och som passerar genom punkten  $z_1$ , också passerar genom punkten  $z_2$ .

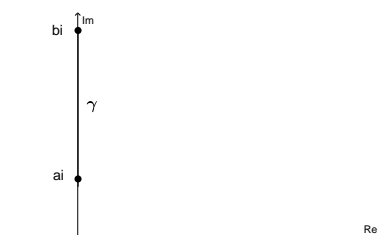
Således finns det alltid en entydig hyperbolisk linje enligt Definition 5.1 som passerar genom två godtyckliga punkter  $z_1$  och  $z_2$  i  $\mathcal{H}$ .  $\square$

Genom att använda dessa lemmor kan vi härleda följande sats.

**Sats 5.9.** *Geodeten, den kortaste vägen, mellan  $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$  är den del av  $L$  från Lemma 5.8 som ligger mellan punkterna.*

*Bevis.* Tag  $z_1, z_2 \in \mathcal{H}$ . Låt  $L$  vara hyperboliska linjen som förbinder punkterna enligt Lemma 5.8. Enligt Lemma 5.2 kan vi avbilda hela hyperboliska linjen  $L$  på imaginära axeln med en Möbiusavbildning  $T$ .

Låt  $\gamma$  vara linjestycket längs imaginära axeln som förbinder  $T(z_1) = ai$  och  $T(z_2) = bi$  där vi kan anta att  $b > a$ , annars byter vi bara namn på  $z_1$  och  $z_2$ .



Enligt Lemma 5.5 är geodeten mellan punkterna linjestycket längs imaginära axeln. Vi utnyttjar nu att  $T^{-1}$  också är en Möbiusavbildning och är isometri. Detta

innebär att den bevarar hyperboliska längder, så den avbildar geodeter på geodeter. Därmed är  $T^{-1}(\gamma)$  geodeten mellan  $z_1$  och  $z_2$ .

□

Därmed har vi visat att för två godtyckliga punkter i  $\mathcal{H}$  finns en Möbiusavbildning som avbildar  $L$  på imaginära axeln, där  $L$  är en halvcirkel eller en rät linje ortogonal mot den reella axeln  $\mathbb{R}$  som går igenom dessa två punkter. Detta är viktig egenskap eftersom Möbiusavbildningar är isometrier som bevarar avståndet i  $\mathcal{H}$ . På så sätt kan vi identifiera geodeten, den kortaste vägen mellan dessa punkter, som den delen av den cirkeln eller linjen som förbinder de två punkterna.

Vi har nu definierat hyperboliska linjer men vad menar vi med att två hyperboliska linjer är parallella? Om en hyperbolisk linje  $L_1$  inte skär  $L_2$  sägs linjerna vara parallella.

**Parallellpostulatet för den hyperboliska geometrin:** Givet en linje och en punkt som inte ligger på linjen, så finns det oändligt många linjer genom punkten som är parallell med den givna linjen.

Detta är uppfyllt i hyperbolisk geometri eftersom linjerna består av, som i Definition 5.1, räta linjer eller halvcirklar vinkelräta mot den reella axeln. När vi har en punkt utanför en given linje kan vi rita flera linjer genom punkten som inte skär den givna linjen. Denna formulering markerar skillnaden mellan hyperbolisk och euklidisk geometri.

## 5.2 Avståndsformeln i hyperbolisk geometri

Hittills har vi sett att hyperbolisk geometri har en metrik  $p$ , i Definition 3.4. Dock har vi ännu inte härlett en formel som tillåter oss att beräkna avståndet mellan två punkter. Vi ska nu härleda formeln för det hyperboliska avståndet mellan punkter i det övre halvplanet.

**Sats 5.10.** För  $z, w \in \mathcal{H}$ , ges det hyperboliska avståndet av

$$p(z, w) = \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}. \quad (5.11)$$

*Bevis.* Vi börjar med att visa att båda sidorna i ekvation (5.11) är invarianta under Möbiusavbildningar  $T$ . Vänsterledet är invariant eftersom, som vi har bevisat tidigare, Möbiusavbildningar bevarar avstånd i  $\mathcal{H}$ . För att visa att högerledet är invariant, måste vi visa att följande gäller:

$$\frac{|Tz - T\bar{w}| + |Tz - Tw|}{|Tz - T\bar{w}| - |Tz - Tw|} = \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}. \quad (5.12)$$



Vi låter att  $T$  ha matrisen  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$ . Detta ger,

$$\begin{aligned} |Tz - T\bar{w}| &= \left| \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a\bar{w} + b}{c\bar{w} + d} \right| \\ &= \frac{acz\bar{w} + adz + bc\bar{w} + bd - acz\bar{w} - ad\bar{w} - bcz - bd}{|cz + d| \cdot |c\bar{w} + d|} \\ &= \frac{(ad - bc)(z - \bar{w})}{|cz + d| \cdot |c\bar{w} + d|} \\ &= \frac{|z - \bar{w}|}{|cz + d| \cdot |c\bar{w} + d|}. \end{aligned}$$

På samma sätt får vi att

$$\begin{aligned} |Tz - Tw| &= \left| \frac{az + b}{cz + d} - \frac{aw + b}{cw + d} \right| \\ &= \frac{aczw + adz + bcw + bd - aczw - adw - bcz - bd}{|cz + d| \cdot |cw + d|} \\ &= \frac{(ad - bc)(z - w)}{|cz + d| \cdot |cw + d|} \\ &= \frac{|z - w|}{|cz + d| \cdot |cw + d|}. \end{aligned}$$

Vi får att

$$\begin{aligned} \frac{|Tz - T\bar{w}| + |Tz - Tw|}{|Tz - T\bar{w}| - |Tz - Tw|} &= \frac{\frac{|z - \bar{w}|}{|cz + d| \cdot |c\bar{w} + d|} + \frac{|z - w|}{|cz + d| \cdot |cw + d|}}{\frac{|z - \bar{w}|}{|cz + d| \cdot |c\bar{w} + d|} - \frac{|z - w|}{|cz + d| \cdot |cw + d|}} \\ &= \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|}. \end{aligned}$$

Så har visat att vänsterledet i ekvation (5.12) är också invariant under Möbiusavbildningen  $T$ .

För att bestämma avståndet mellan punkterna  $z$  och  $w$ , väljer vi först, enligt Lemma 5.2, en Möbiusavbildning  $T$  för att avbilda punkterna på imaginära axeln. Därefter bestämmer vi kortaste avståndet längs den imaginära axeln så att  $T(z) = ai$  och  $T(w) = bi$  där vi antar att  $b > a$  som i Lemma 5.5. Detta ger oss att

högerledet i ekvation (5.11) blir,

$$\begin{aligned} \ln \frac{|z - \bar{w}| + |z - w|}{|z - \bar{w}| - |z - w|} &= \ln \frac{|Tz - T\bar{w}| + |Tz - Tw|}{|Tz - T\bar{w}| - |Tz - Tw|} \\ &= \ln \frac{|ai - (-bi)| + |ai - (bi)|}{|ai - (-bi)| - |ai - (bi)|} \\ &= \ln \frac{|ai + bi| + |ai - bi|}{|ai + bi| - |ai - bi|}. \end{aligned}$$

Genom att bryta ut  $i$  och beräkna absolutbeloppet av uttrycket får vi,

$$\begin{aligned} \ln \frac{|ai + bi| + |ai - bi|}{|ai + bi| - |ai - bi|} &= \ln \frac{a + b + b - a}{a + b - b + a} \\ &= \ln \left( \frac{b}{a} \right). \end{aligned}$$

Eftersom avståndet är invariant under Möbiusavbildningen, då gäller även att vänsterledet i ekvation (5.11) blir som i beviset av Lemma 5.5. Alltså

$$p(z, w) = p(Tz, Tw) = p(ai, bi) = \ln \left( \frac{b}{a} \right).$$

Alltså både högerledet och vänsterledet i ekvation (5.11) är lika.  $\square$

## 6 Översiktligt om diskmodellen

Hittills har vi fokuserat på att utveckla den övre halvplansmodellen  $\mathcal{H}$  av det hyperboliska planet. Det finns ett antal andra modeller av det hyperboliska planet och diskmodellen är en av dessa. I detta kapitel kommer vi kort presentera Poincarés enhetsdisk, diskmodellen  $\mathbb{D}$ . Mer information kan man hitta i [2, s. 7–8].

**Definition 6.1.** I Poincarés diskmodell presenteras det hyperboliska planet som en enhetsdisk i en cirkel med radie 1 i det komplexa talplanet. Diskmodellen omfattar alla positiva komplexa tal med absolutbelopp mindre än 1,

$$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.$$

Vi kan avbilda varje punkt från övre halvplanet till enhetsdisken,  $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{D}$  där avbildningen  $T$  är injektiv, via den konforma avbildningen,

$$T(z) = \frac{zi + 1}{z + i}$$

för alla  $z \in \mathcal{H}$ .  $T$  har inversen

$$T^{-1}(z) = \frac{zi - 1}{-z + i},$$

så  $T$  är en bijektion från  $\mathcal{H}$  till  $\mathbb{D}$ . För  $z, w \in \mathbb{D}$ , ges det hyperboliska avståndet som vi betecknar som  $p^*(z, w)$  mellan dessa punkter av

$$p^*(z, w) = p(T^{-1}(z), T^{-1}(w)).$$

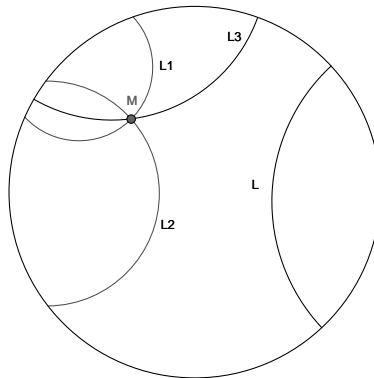
Formeln för längdelementen för enhetsdisken enligt [2, s. 7] ser ut på följande sätt:

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2}. \quad (6.2)$$

Cirkeln

$$\Sigma = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\},$$

kallas för enhetscirkeln med radie 1 i det komplexa talplanet. I enhetsdisken  $\mathbb{D}$  består geodeterna, de kortaste vägen mellan två punkter, av segment från euklidiska cirklar som är ortogonala mot enhetscirkeln  $\Sigma$  och enhetscirkelns diameter.



Figur 3: Hyperboliska linjer i enhetsdisken.

Dessa hyperboliska linjer i Figur 3 uppfyller även parallellpostulaten för den hyperboliska geometrin. Linjerna i figuren är representerade som cirkelbågar ortogonala mot enhetscirkeln. Det finns oändlig många linjer, såsom  $L1$ ,  $L2$ ,  $L3$ , som passerar genom punkten  $M$  och är parallell med linjen  $L$ .

## 7 Vinklar, hyperbolisk trianglar och hyperbolisk trigonometri

### 7.1 Vinklar

Vi börjar med att definiera en vinkel i hyperbolisk geometri.

**Definition 7.1.** Vinkeln mellan två hyperboliska skärande linjer i övre halvplanet  $\mathcal{H}$  definieras som vinkeln mellan de tangenter dessa linjer har vid skärningspunkten. Om två hyperboliska linjer skär varandra vid en punkt i  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , betraktas vinkeln mellan dem som noll.

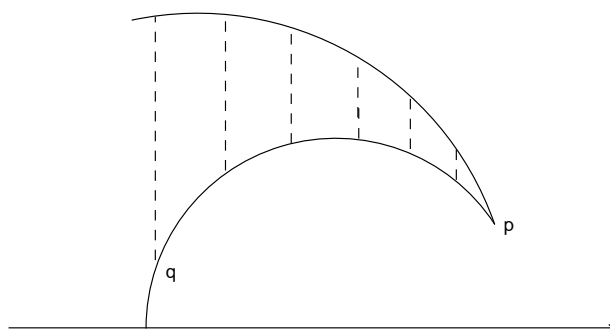
### 7.2 Hyperboliska trianglar

**Definition 7.2.** För tre punkter  $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{H}$ , där inte alla punkterna ligger på samma hyperboliska linje, bildas en hyperbolisk triangel när dessa punkter sammanbinds med hyperboliska linjesegment.

Hyperboliska trianglar har hyperboliska linjesegment av ändlig längd eftersom  $z_1, z_2, z_3 \in \mathcal{H}$ .

En intressant skillnad mellan hyperbolisk och euklidiska geometrin är vinkelsumman för trianglar. I det euklidiska planet, det välkända geometriska sammanhanget, har alla trianglar alltid en vinkelsumma på  $\pi$ , oberoende av triangelns storlek eller form. Detta gäller inte för det hyperboliska planet. I det hyperboliska planet, som vi kommer att se i kapitel 8.3, kommer trianglar alltid att ha en vinkelsumma strikt mindre än  $\pi$ . Detta utgör en grundläggande egenskap för hyperboliska vinklar. Dessutom kommer trianglar av olika storlekar att ha olika vinkelsummor, vilket är en unik egenskap hos hyperbolisk geometri. Detta illustreras i figur 4.

I figur 4 ser vi olika trianglar, där en vertikal sida markerad med streckade linjer rör sig fritt och de andra två är fixerade. När den vertikala sidan är nästan vid skärningspunkten  $p$  ser triangeln nästan ut som en euklidisk triangel och därför bör vinkelsumman vara nära  $\pi$ . När den vertikala sidan rör sig åt vänster är det mer tydligt att det bildas en hyperbolisk triangel och då kommer vinkelsumman bli mindre än  $\pi$ .



Figur 4: Olika stora hyperboliska trianglar.

### 7.3 Hyperbolisk trigonometri

En närmare undersökning av vinklar i hyperboliska trianglar involverar hyperbolisk trigonometri. De grundläggande hyperboliska trigonometriska funktionerna är:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

I euklidisk geometri är formeln för trigonometriska ettan,  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ . Dess motsvarighet för hyperboliska trigonometriska funktionerna är

$$\cosh(x)^2 - \sinh(x)^2 = 1.$$

Dessa funktioner spelar en central roll när vi utforskar relationer mellan sidor och vinklar i hyperboliska trianglar.

Formlerna för att beräkna trigonometriska relationerna skiljer sig från euklidiska geometrin. Vi kommer inte att presentera bevisen för dessa relationer här, utan kommer endast härleda formeln. Detaljerade bevis kan man hitta i [2, s. 16–18]. Om vi betraktar den allmänna hyperboliska triangeln med sidor av hyperbolisk längd  $a, b, c$  med motsvarande vinklar  $A, B, C$ , uttrycks de trigonometriska relationerna på följande sätt:

(i) Sinussatsen

$$\frac{\sinh a}{\sin A} = \frac{\sinh b}{\sin B} = \frac{\sinh c}{\sin C}. \quad (7.3)$$

(ii) Cosinussatsen I

$$\cosh c = \cosh a \cosh b - \sinh a \sinh b \cos C. \quad (7.4)$$

(iii) Cosinussatsen II

$$\cosh c = \frac{\cos A \cos B + \cos C}{\sin A \sin B}. \quad (7.5)$$

Observera att det finns hyperbolisk Cosinussats II som inte riktigt har någon motsvarighet i euklidisk geometri eftersom den uttrycker att längderna på sidorna i en hyperbolisk triangel bestäms av dess inre vinklar. Inom hyperbolisk geometri innebär det att om två trianglar har samma vinklar, så finns det en isometri, en avbildning som bevarar avstånd, som avbildar det ena triangeln på den andra.

En sak som är intressant inom hyperboliska trigonometriska funktionerna är Pythagoras sats som skiljer sig från den euklidiska geometrin. För att förstå detta samband, börjar vi med att betrakta en rätvinklig triangel i det euklidiska planet. I euklidisk geometri beräknar vi sidorna av triangeln med hjälp av sambandet  $c^2 = a^2 + b^2$  där  $c$  är hypotenusan och  $a$  och  $b$  är kateterna.

Nu betraktar vi en rätvinklig hyperbolisk triangel i det hyperboliska geometrin, där  $C$  är den rätvinkliga vinkeln, då är  $\cos C = 0$  i ekvation (7.4). Vi får kvar  $\cosh c = \cosh a \cosh b$ . Det vill säga, om  $a$  och  $b$  är två kateterna av en hyperbolisk rätvinklig triangel, då representerar  $\cosh$  funktionen längderna av sidorna. Då blir längden av hypotenusan  $c$  bestämd av

$$\cosh c = \cosh a \cosh b.$$

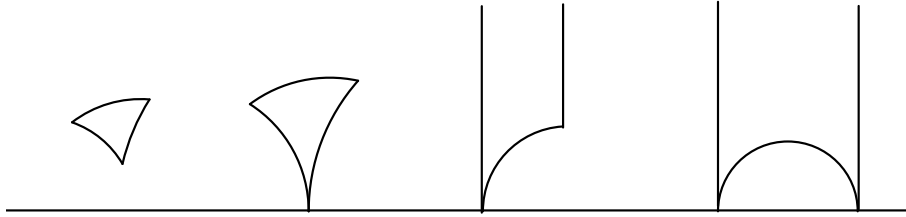
Detta är alltså den hyperboliska versionen av Pythagoras sats.

## 8 Generaliserade trianglar, area och Gauss-Bonnets sats

### 8.1 Generaliserade trianglar

I hyperbolisk geometri kan vi generalisera begreppet triangel en aning där vi tillåter ett, två eller tre hörn ligga längs randen av det hyperboliska planet. Randen utgörs av  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . I dessa trianglar sträcker sig sidorna oändligt långt mot denna rand.

I figuren nedan illustreras fyra olika typer av hyperboliska och generaliserade hyperboliska trianglar beroende på hur många av deras hörn ligger på reella axeln  $\mathbb{R}$  eller i oändligheten.



Figur 5: Generaliserade hyperboliska trianglar.

Dessa representerar olika generaliserade trianglar som har 0, 1, 2 eller 3 hörn i oändligheten.

## 8.2 Hyperbolisk area

Ett sätt att tänka på hyperbolisk area är att mäta storleken på delmängder av  $\mathcal{H}$ .

**Definition 8.1.** För en delmängd  $A \subseteq \mathcal{H}$  definierar vi  $\text{Area}(A)$ , den hyperboliska arean av  $A$  som,

$$\text{Area}(A) = \iint_A \frac{dx dy}{y^2} \quad (8.2)$$

om denna integral existerar och är konvergent.

**Sats 8.3.** *Hyperboliska arean är invariant under Möbiusavbildningar  $T$ . Om området  $A \subseteq \mathcal{H}$  gäller*

$$\text{Area}(T(A)) = \text{Area}(A).$$

*Bevis.* Låt  $z = x + yi$  och låt transformationen  $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  där  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2, \mathbb{R})$  samt låt  $w = u + vi = T(z)$ . Genom att använda Cauchy-Riemanns ekvation (2.6)

beräknar vi Jacobianen,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\
 &= \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - \left(-\frac{\partial v}{\partial x}\right) \cdot \frac{\partial v}{\partial x} \\
 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \\
 &= \left|\frac{dT}{dz}\right|^2 \\
 &= \frac{1}{|cz + d|^4}.
 \end{aligned}$$

Enligt formeln för variabelbyte för dubbelintegraler [4, s. 240–252] och med hänsyn till  $v = \frac{y}{|cz+d|^2}$  enligt (4.4), gäller det att,

$$\begin{aligned}
 Area(T(A)) &= \iint_{T(A)} \frac{1}{v^2} dudv \\
 &= \iint_A \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)v^2} dxdy \\
 &= \iint_A \frac{1}{|cz + d|^4} \cdot \frac{|cz + d|^4}{y^2} dxdy \\
 &= \iint_A \frac{dxdy}{y^2} = Area(A).
 \end{aligned} \tag{8.2}$$

Så den hyperboliska arean är invariant under Möbiusavbildningar  $T$ . □

### 8.3 Gauss-Bonnets sats

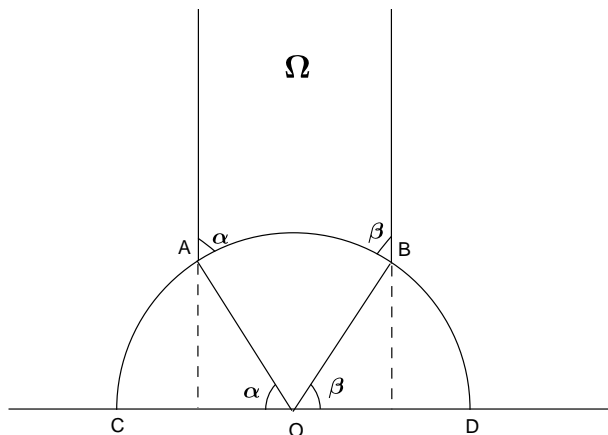
Arean av hyperboliska trianglar kan beräknas med hjälp av Gauss-Bonnets formeln, som vi snart kommer att visa. Det intressanta med denna formel är att den visar att den hyperboliska arean av en triangel endast beror på dess vinklar. Arean av en hyperbolisk triangel är direkt proportionell mot skillnaden mellan  $\pi$  och triangelns vinkelsumma. Det vill säga att ju större triangel är, desto mindre blir vinkelsumman (se Figur 4).

**Sats 8.4.** *Låt  $\Omega$  vara en möjligen generaliserad hyperbolisk triangel med vinklarna  $\alpha, \beta, \gamma$ . Då är*

$$Area(\Omega) = \pi - \alpha - \beta - \gamma. \tag{8.5}$$



*Bevis. Fall 1.* Vi antar först att  $\gamma = 0$ . Om motsvarande hörn av triangeln ligger i oändlighetspunkten  $\infty$ , så är sidorna av denna triangel två vertikala linjer som möter en euklidisk halvcirkel. Genom att tillämpa en kombination av transformationer av formen  $T(z) = z + k$  och  $T(z) = \lambda z$  där  $k, \lambda \in \mathbb{R}$  och  $\lambda > 0$  kan vi anta att halvcirkeln har centrum 0 och radie 1. Eftersom hyperboliska arean är invariant under Möbiusavbildningar enligt Sats 8.3, så ändras inte hyperboliska arean för triangeln, dessutom bevaras vinklarna.



Vinklarna  $AOC$  och  $BOD$  är lika med  $\alpha$  och  $\beta$ . Genom att anta att de två vertikala linjerna  $A$  och  $B$  har ekvationen  $x = a$  respektive  $x = b$ , där  $a = -\cos \alpha$  och  $b = \cos \beta$ , kan vi beräkna området för  $\Omega$  på följande sätt:

$$\begin{aligned} \text{Area}(\Omega) &= \iint_{\Omega} \frac{dx dy}{y^2} \\ &= \int_a^b \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{1}{y^2} dy dx \\ &= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx. \end{aligned}$$

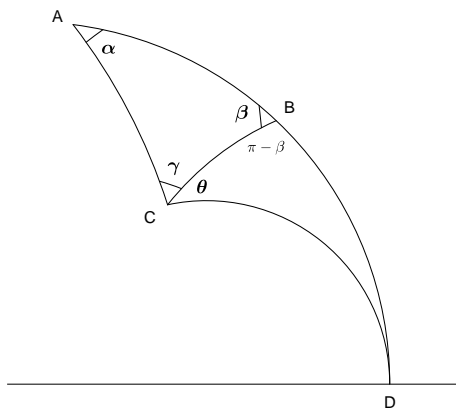
Vi utför variabelbyte och får att,

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \left[ \begin{array}{l} x = \cos \theta \\ dx = -\sin \theta d\theta \end{array} \right] = \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{1-\cos^2(\theta)}} \cdot (-\sin \theta) d\theta \\ &= \int_{\pi-\alpha}^{\beta} \frac{-\sin \theta}{\sin \theta} d\theta = \pi - \alpha - \beta. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Om vi har en triangel där  $\gamma = 0$  men hörnet ligger på den reella axeln, då kan vi avbilda hörnet på  $\mathbb{R}$  till oändligheten utan att ändra på arean eller vinklarna för

triangeln genom att tillämpa en transformation. Således blir  $\text{area}(E) = \pi - \alpha - \beta$  om de två andra vinklarna som inte är noll i  $E$  är  $\alpha$  och  $\beta$ . På liknande sätt om  $E$  har två hörn på den reella axeln och tredje hörnet inte på  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , kan vi återigen avbilda en av punkterna som är på den reella axeln till oändligheten och vårt tidigare resultat gäller igen.

**Fall 2.** Vi har nu fallet där inga hörn ligger i  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ . Antag att triangeln  $\Omega$  har hörn  $A, B, C$ , med vinklarna  $\alpha, \beta, \gamma$  som motsvarar hörnen  $A, B, C$ . Observera att vi kan förlänga linjesegmentet  $AB$  så att det möter den reella axeln vid en punkt  $D$ .



I den här fallet är triangeln delat i två delar,  $\Omega_1 = \triangle ADC$  och  $\Omega_2 = \triangle CBD$ . Vi kommer också att beteckna vinkeln  $BCD$  som  $\theta$  och vinkeln  $DBC$  är  $\pi - \beta$ .

Eftersom  $\Omega_1 = \Omega \cup \Omega_2$  kan vi tillämpa resultatet från fall 1 för att beräkna arean av triangeln. Vi får att,

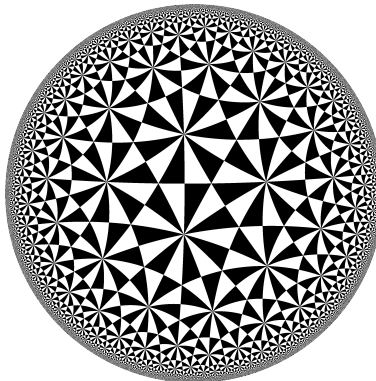
$$\begin{aligned} \text{Area}(\Omega) &= \text{Area}(\Omega_1) - \text{Area}(\Omega_2) \\ &= (\pi - \alpha - (\gamma + \theta)) - (\pi - \theta - (\pi - \beta)) \\ &= \pi - \alpha - \beta - \gamma. \end{aligned}$$

□

## 9 Förslag för vidare studier

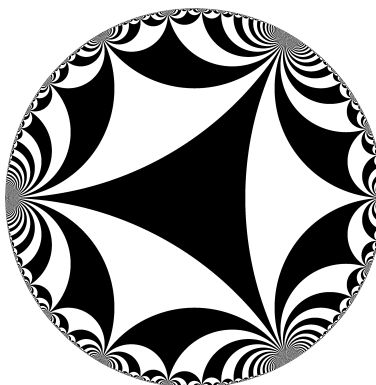
En intressant ansats för vidare studier är att undersöka triangel-tesselleringar av det hyperboliska planet. Det är intressant att studera möjligheten att konstruera tesselleringar genom att analysera samspelet mellan vinklar och sidlängder i hyperboliska trianglar. Exempelvis har konstnärer som M.C. Escher, se till exempel [9], inspirerat av och använt sig av diskmodellen för att skapa verk som

bygger på hyperboliska triangel-tesselleringar. Ett exempel på triangel-tesselering är följande:



Figur 6: Här är vinklarna  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{7})$ .

Det visar sig att detta är den triangel-tessellering vars trianglar har den minsta arean. Ett annat exempel på triangel-tessllering är:



Figur 7: Här är vinklarna  $(0, 0, 0)$ .

Det här fallet är ett speciellt fall där alla vinklar ligger på randen, vilket betyder att vinkelsumman är noll, vilket innebär att arean av trianglarna är den största möjliga. Triangel-tesselleringar och deras egenskaper är ett intressant område för vidare studier.

## Referenser

- [1] Joyce, D.E. (1996). *Euclid's Elements*. Clark University. Länk.
- [2] Katok, Svetlana. (1992). *Fuchsian Groups*. The University of Chicago Press.
- [3] Norton, J.D. (2022). *Euclid's Postulates and Some Non-Euclidian Alternatives*. Department of History and Philosophy of Science. University of Pittsburgh. Länk.
- [4] Persson, Arne och Böiers, Lars-Christer. (2005). *Analys i flera variabler*. 3:e upplagan. Studentlitteratur.
- [5] Ponce Campozano, J. C. (2019 - 2023). *Complex Analysis: A visual and interactive introduction*. Länk.
- [6] Sola, Alan. (2009). *Hyperbolisk Geometri*. Institutionen för matematik: KTH. Länk.
- [7] Stormark, Olle. *Komplexa funktioner*. Institutionen för matematik: KTH. Länk.
- [8] Tengstrand, Anders. (2005). *Åtta kapitel om geometri*. Studentlitteratur, Lund.
- [9] Wikipedia. *Circle Limit III*. Senast uppdaterad den 2 September 2023. Länk.