



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Tornpolynom

av

Emilija Milosevic

2023 - No L2

Tornpolynom

Emilija Milosevic

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Per Alexandersson

2023

Abstract

A rook polynomial is a generating polynomial that calculates the number of ways to place rooks on a board structured like a chessboard, where the rooks do not attack each other. It takes into account the restriction that there should not be two rooks in the same row or column on the board and generates a polynomial whose terms represent different arrangements of the rooks satisfying these criteria. In combinatorics, a rook polynomial enables the method to calculate permutations with restricted positions. The aim of this research is to convey a fundamental understanding of rook polynomials and how they are calculated for various types of boards, such as quadratic, disjoint and Ferrers boards, including others. Furthermore, within the research, we will focus on three theorems: the theorem on the relationship between rook polynomials and hit numbers, the factorization theorem for Ferrers boards and the Rook Reciprocity Theorem. These theorems describe the relationship between rook polynomials and other mathematical concepts, primarily within combinatorics. All theorems will be presented with proofs and examples to deepen the understanding.

Sammanfattning

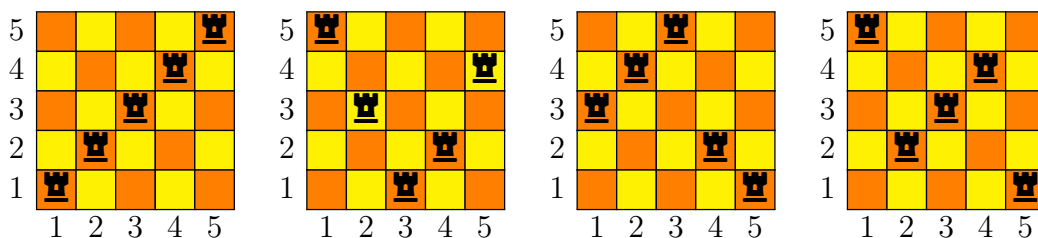
Tornpolynomet är en genererande polynom som beräknar antalet sätt att placera torn på ett bräde strukturerat som ett schackbräde, där tornen inte attackerar varandra. Det tar hänsyn till begränsningen att det inte får finnas två torn på samma rad eller kolumn på brädet och genererar ett polynom vars termer representerar olika arrangemang av tornen som uppfyller dessa kriterier. Inom kombinatoriken möjliggör tornpolynomet en metod för att beräkna permutationer med begränsade positioner. Syftet med denna uppsats är att förmedla en grundläggande förståelse för tornpolynom och hur de beräknas för olika typer av bräden, såsom kvadratiska, disjunkta och Ferrersbräden bland annat. Vidare kommer vi inom uppsatsen fokusera på tre satser: satsen om relationen mellan tornpolynom och träfftalpolynom, faktoriseringssatsen för Ferrersbräden och Tornreciprocitetsatsen. Dessa satser beskriver sambandet mellan tornpolynom och andra matematiska koncept, främst inom kombinatoriken. Samtliga satser kommer presenteras med bevis och exempel för att fördjupa förståelsen.

Innehåll

1	Introduktion	5
2	Tornpolynom för olika brädtyper	6
3	Relationen mellan tornpolynom och träfftalpolynom	15
4	Faktoriseringssatsen för Ferrersbräden	21
5	Reciprocitetsformeln för tornpolynom	25

1 Introduktion

Schack är ett av världens äldsta och mest välkända strategispel, som har spelats i över 1500 år. Spelet utmärks av det svartvita schackbrädet och de åtta spelpjäser med unika rörelsemönster. Ett torn i schack har möjligheten att förflytta sig antingen horisontellt över rader eller vertikalt längs kolumner på brädet. Om två torn befinner sig på samma rad eller kolumn, innebär det att de attackerar varandra. Vad skulle hända om vi enbart hade tornpjäser och ville placera det maximala antalet icke-attackerande torn på ett kvadratisk 5×5 bräde? På hur många sätt kan detta åstadkommas? Det är naturligtvist genomförbart att lösa problemet genom att visuellt illustrera alla 120 möjluga schackbräden. Däremot skulle det vara tidskrävande och utmanande att säkerställa inkluderingen av samtliga konstellationer. Vi är medvetna om att det endast är möjligt att placera ett torn per rad och kolumn för att undvika ömsesidiga attacker. Därmed är 5 det maximala antalet icke-attackerande torn som kan placeras på ett 5×5 bräde. I Figur 1 illustreras fyra olika tornarrangemang av 5 torn.



Figur 1: Fyra sätt att placera 5 icke-attackerande torn på ett 5×5 bräde.

Vi observerar att det finns fem möjliga positioner att placera det första tornet på den första raden. Det andra tornet kan positioneras på fyra olika rader, exklusive den rad där det första tornet är placerat. Vidare finns det tre olika positioner för det tredje tornet, två för det fjärde tornet, och slutligen bara en ruta för det femte tornet. Därmed leder detta till att det finns $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$ möjliga tornarrangemang. Baserat på det tidigare exempel framgår det att det finns 40320 sätt att placera åtta torn på ett traditionellt 8×8 schackbräde och $50! \approx 3.04140932 \cdot 10^{64}$ sätt att placera 50 torn på ett 50×50 schackbräde.

Om vi istället strävar efter att bestämma det totala antalet sätt att placera icke-attackerande torn, utan att specificera det exakta antalet torn, observeras en ytterligare ökning av tornarrangemang. Beräkningen av dessa tornarrangemang kommer utgöra kärnan i denna uppsats.

År 1946 introducerade matematikerna Riordan och Kaplansky [KR46] den klassiska torn-teorin. Denna teori baseras på deras forskning om permutationer med otillåtna positioner och kortmatchningsproblem. För en mer ingående förståelse av bakgrundsforhållningen hänvisas läsaren till [Rio78]. I samband med deras forskning formulerades det matematiska begreppet tornpolynom. Målet med denna uppsats är att beräkna tornpolynom för olika brädtyper och samtidigt fördjupa förståelsen av tornpolynomets konstruktion genom att undersöka de kombinatoriska sambanden mellan polynomet och andra matematiska begrepp, såsom träfftal, Ferrersbräden och komplementbräden.

2 Tornpolynom för olika brädtyper

I introduktionen observerade vi antalet sätt att placera ett maximalt antal icke-attackerande torn på ett kvadratisk schackbräde. Vi utvidgar nu vår undersökning bortom enbart kvadratiska bräden och inkluderar mer generella bräden. I fortsättningen kommer vi främst fokusera på kvadratiska, Ferrersbräden och bräden med otillåtna positioner. Vidare undersöker vi samtliga tornarrangemang på olika brädtyper, vilket innebär olika sätt att positionera torn på ett bräde så att inget par av torn delar samma rad eller kolumn. Vi kommer att beräkna antalet tornarrangemang för varierande antal torn, från inga torn upp till det maximala antalet tillåtna torn på brädet. Denna beräkning genomförs med hjälp av tornpolynom, en genererande funktion som kvantifierar antalet sätt att placera k stycken icke-attackerande torn på ett generaliserat bräde.

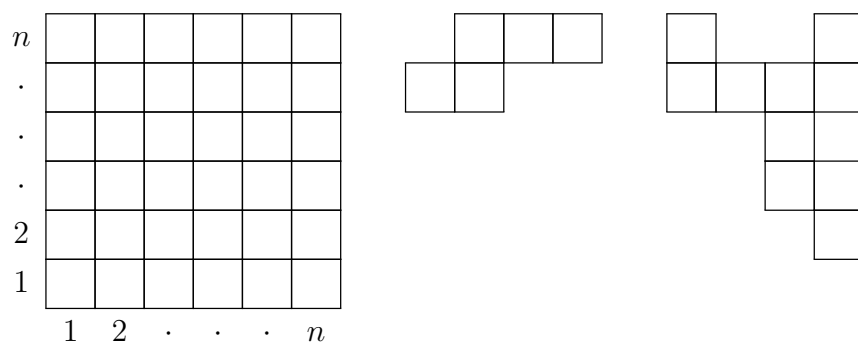
Inledningsvis kommer uppsatsen granska Kaplanskys och Riordans ([KR46]) bevisföring för satsen som behandlar den fundamentala relationen mellan tornpolynom och träfftal på bräden med otillåtna positioner. Däremot innan vi fördjupar oss inom tornpolynomets kombinatoriska egenskaper, undersöker vi olika varianter av bräden och teorin bakom otillåtna positioner. I fortsättningen kommer vi förutsätta att tornen inte attackerar varandra, såvida inget annat specificeras.

Definition 2.1 (Torn). Tornet utgör en av de sex klassiska schackpjäserna och har förmågan att förflytta sig längst raka linjer, antingen horisontellt eller vertikalt, över schackbrädet. Tornet kan röra sig över ett obegränsat antal schackrutor i en given riktning, förutsatt att ingen annan pjäs blockerar dess väg.

Definition 2.2 (Bräde). Ett bräde är en delmängd av $[n] \times [n]$, där n är ett positivt heltal bland de naturliga heltalen \mathbb{N} . Här representerar $[n]$ mäng-

den av heltal från 1 till n , definierat som $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$. Brädet kan visuellt representeras som en mängd schackrutor organiserade i rader och kolumner. Raderna i $[n] \times [n]$ -rutnätet markeras nedifrån och upp som $1, 2, 3, \dots$, medan kolumnerna markeras från vänster till höger som $1, 2, 3, \dots$. Varje schackruta kan identifieras med sina koordinater (i, j) , där i representerar radnumret och j representerar kolumnnumret.

Ett *kvadratisk bräde* definieras som en uppsättning schackrutor där antalet rader och kolumner är lika. Ett *generaliserat bräde* kan däremot variera i form och struktur där olika arrangemang av schackrutor är tillåtna. Samtliga bräden kan klassificeras som generella bräden, även kvadratiska bräden.



Figur 2: Ett kvadratisk bräde och två generaliserade bräden.

Definition 2.3 (Tornpolynom). Inom kombinatorik representerar ett *tornpolynom* en genererande funktion som beskriver antalet sätt att placera ut icke-attackerade torn på ett schackbräde. Ett tornpolynom betecknas som $R_B(x)$ för brädet B och definieras av:

$$R_B(x) = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} r_k(B)x^k. \quad (1)$$

Här representerar tornpolynomskoefficienterna $r_k(B)$ antalet sätt att placera k icke-attackerande torn på brädet B . Ett bräde kan inte inkludera fler torn än det minsta antalet rader eller kolumner, vilket uttrycks $\min(m, n)$, där m representerar antalet rader och n representerar antalet kolumner på brädet B . Det finns endast ett sätt att inte placera något torn på brädet, $r_0(B) = 1$.

Om vi utvecklar summan kan det generella tornpolynomet skrivas som

$$R_B(x) = 1 + r_1(B)x + r_2(B)x^2 + \cdots + r_n(B)x^n.$$

Även om det generella tornpolynomet liknar en oändlig serie, består uttrycket av ett ändligt antal termer, vilket klassificerar det som ett polynom. Denna begränsning härleds från det faktum att antalet torn på ett bräde inte kan överstiga det totala antalet rader eller kolumner. Nijenhuis [Nij76] har bevisat att rötterna till tornpolynom för generella bräden alltid är reella. Detta är ett specialfall av en mer allmän sats som fastslår att rötterna till matchningspolynom alltid är reella. Vi kommer inte att fördjupa oss i diskussionen om reella rötter, men för de intresserade hänvisar vi till kapitel 2 i [BHR91] för en mer omfattande förklaring av Nijenhuis bevis och sambandet mellan tornpolynom, matchningspolynomet och Laguarrepolynomen. Inom kombinatoriken och andra matematiska områden anses reella rötter vara särskilt användbara och praktiska, eftersom de möjliggör etableringen av relationer med andra matematiska egenskaper.

Ett tornpolynom uppvisar invarians vid permutation av rader och kolumner, rotation samt tillägg eller borttagning av tomma rader eller kolumner.

Definition 2.4 (Rektangulärt bräde). Ett *rektangulärt bräde* B definieras som ett bräde med m rader och n kolumner. Detta betecknas som $B = [m] \times [n]$, där $[m] = \{1, 2, \dots, m\}$ och $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ för $m, n \in \mathbb{N}$.

Vi vill beräkna antalet sätt att placera k icke-attackerande torn på ett rektangulärt bräde $[m] \times [n]$. För att fördela k torn över k rader och k kolumner på det rektangulära brädet, beräknar vi det totala antalet sätt som $\binom{m}{k} \binom{n}{k}$. Här representerar $\binom{m}{k}$ antalet sätt att välja k rader från de tillgängliga m , och $\binom{n}{k}$ representerar antalet sätt att välja k kolumner från det tillgängliga n . Eftersom k rader och k kolumner skär varandra i k^2 rutor, tar vi bort de rader och kolumner som inte har några torn. Detta medför att de återstående raderna och kolumnerna utgör ett mindre bräde med dimensionen $k \times k$. På det mindre brädet kan tornen placeras på $k!$ sätt utan att attackerar varandra.

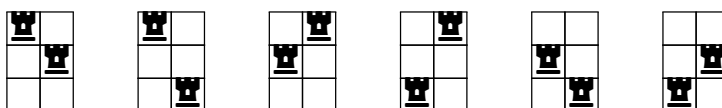
Sammanlagt blir det totala antalet sätt att placera k icke-attackerande torn på det rektangulära brädet B :

$$r_k(B) = \binom{m}{k} \binom{n}{k} k! = \frac{m!n!}{k!(m-k)!(n-k)!}. \quad (2)$$

Tornpolynomet med explicita koefficienter kan uttryckas som:

$$R_B(x) = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \frac{m!n!}{k!(m-k)!(n-k)!} x^k. \quad (3)$$

Betrakta ett exempel där vi undersöker det totala antalet arrangemang för att placera två icke-attackerande torn på ett 3×2 bräde. Vi illustrerar det olika positionerna grafiskt och räknar ut att det finns sex möjliga arrangemang, se Figur 3.



Figur 3: Det 6 sätten att placera två torn på ett 3×2 bräde.

Alternativt ges samma resultat av den matematiska beräkningen $\frac{3!2!}{2!1!0!} = 6$. I Figur 3 är det värt att notera att för varje möjligt sätt att placera två torn på brädet 3×2 resulterar det i att en rad utesluts och inte har något torn. Genom att tillämpa Ekvation 2 kan vi beräkna tornpolynomscoeffienterna när ett eller inget torn placeras på brädet, det vill säga när $k = 1$ och $k = 0$. Detta ger tornpolynomscoeffienterna:

$$k = 1 \quad \frac{3!2!}{1!2!1!} = 6$$

och

$$k = 0 \quad \frac{3!2!}{0!3!2!} = 1.$$

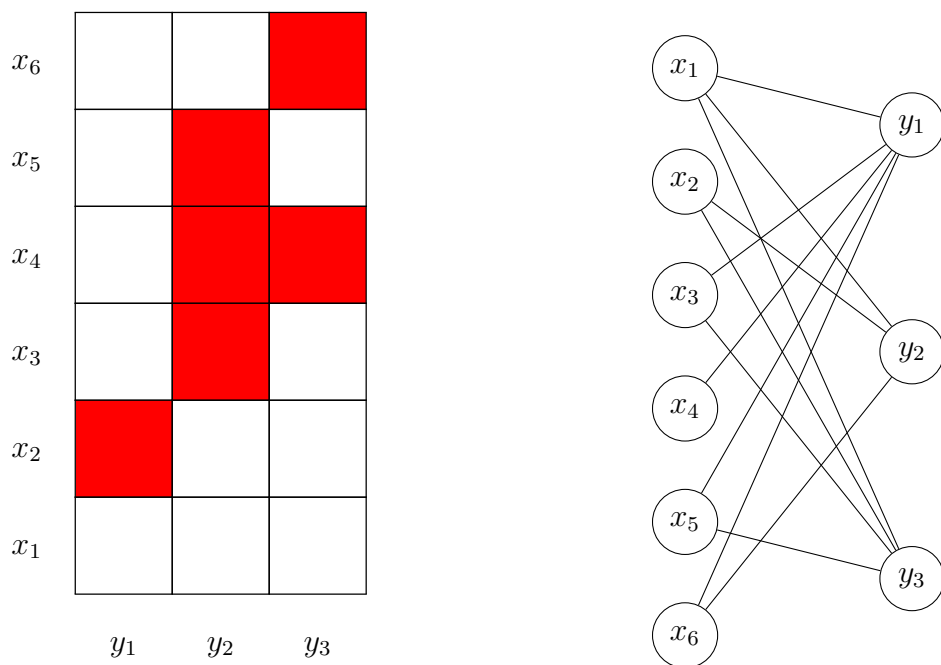
Tornpolynomet för det rektangulära brädet i Figur 3 kan därmed uttryckas som

$$R_{3 \times 2}(x) = \sum_{k=0}^{\min(3,2)} \frac{3!2!}{k!(3-k)!(2-k)!} x^k = 6x^2 + 6x + 1.$$

Definition 2.5 (Bipartit graf). En formell representation inom grafteorin är att betrakta ett bräde som en *bipartit graf*, där $m = |X|$ och $n = |Y|$. Varje nod i X motsvarar en rad medan varje nod i Y motsvarar en kolumn på brädet. Låt x_i i X beteckna den i :te raden och y_j i Y den j :te kolumnen.

För att förstå samspelet mellan ett schackbräde och en bipartit graf betraktar vi schackrutan $(i, j) \in B$. Denna ruta anses vara en del av brädet omm $\{x_i, y_j\}$ utgör en kant i den bipartita grafen. Om det inte finns någon kant mellan två noder indikerar det att schackrutan representerar en

förbjuden position på brädet. En central egenskap hos bipartita grafer är uppdelningen av noder i två mängder, där inga kanter förbinder noder inom samma mängd. I vårt fall kan varje schackbräde representeras med en bipartiti graf där en möjlig tornplacering utgör en partiell matchning i grafen.



Figur 4: Ett bräde $B_{6,3}$ och den tillhörande bipartita grafen $G_{6,3}$.

En *komplett bipartit graf* skapas genom att varje nod i en nodmängd är förbunden med varje nod i den andra nodmängden via en kant. Detta innebär att inga otillåtna positioner finns på brädet. En *perfekt matchning* uppstår när varje nod är kopplad till exakt en nod i den andra nodmängden, vilket betyder att ingen nod är ensamstående. På ett schackbräde motsvarar en perfekt matchning att placera ett torn i varje rad eller kolumn så att inga torn attackerar varandra. Vi betraktar ett konkret exempel för att illustrera hur ett tornarrangemang korresponderar med en perfekt matchning i en bipartit graf.

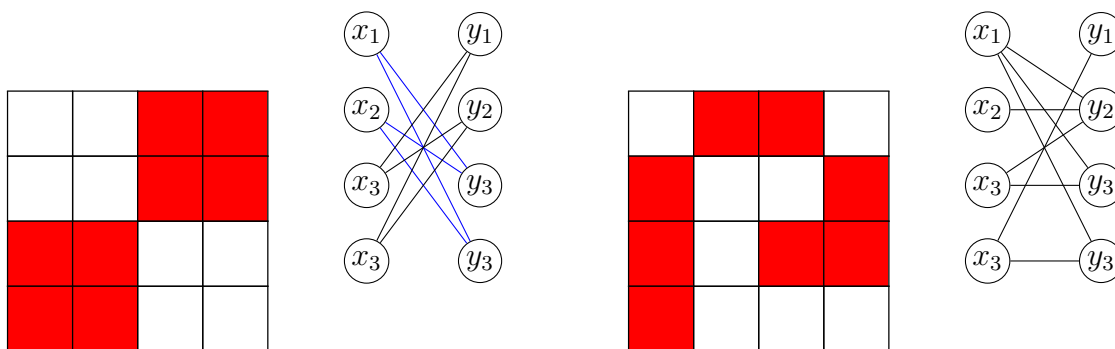
Exempel 2.1. Givet ett kvadratisk 3×3 bräde vill vi placera tre icke-attackerande torn. Detta åstadkommer vi visuellt genom att rita upp brädet och markerar dess koordinater. Dessutom representerar vi brädet med en motsvarande bipartita graf. Därefter placerar vi ut tre icke-attackerande torn. Tornplaceringarna representeras av gröna cirklar på brädet och i den bipartita grafen som kanter mellan motsvarande noderna, se Figur 5.



Figur 5: Den visuella representationen av att placera tre torn på ett 3×3 bräde och den motsvarande bipartita grafen.

Vi observerar att varje nod är ansluten till exakt en nod i den andra nodmängden. Detta kännetecknar en perfekt matchning.

Definition 2.6 (Disjunkta bräden). Ett bräde B klassificeras som *disjunkt* om det kan delas upp i två disjunkta underbräden, B_1 och B_2 , där varken rader eller kolumner delas mellan dem. De rader som tillhör underbrädet B_1 får inte användas av B_2 , och samma gäller för kolumnerna. Om ett bräde är konstruerat av två disjunkta underbräden kan tornpolynomet för hela brädet beräknas med hänsyn till tornpolynomen för de individuella underbrädorna.



Figur 6: Jämförelse mellan ett disjunkt och ett icke-disjunkt bräde samt deras motsvarande bipartita grafer. Det vänstra brädet representerar ett disjunkt bräde, medan det högra inte är disjunkt.

Skillnaden mellan brädorna i Figur 6 är att det disjunkta brädet kan representeras av en bipartit graf där hörnmängderna kan delas upp i flera separata bipartita grafer. Å andra sidan motsvarar det högra brädet en bipartit graf där hörnmängderna är sammanbundna och inte kan delas upp på samma sätt.

Sats 2.1 (Dekomposition av disjunkta bräden). *Antag att B_1 och B_2 är bräden som inte delar några rader eller kolumner med varandra. Tornpolynommet för unionen av dessa bräden, $B_1 \cup B_2$, kan uttryckas som produkten av tornpolynomen för varje individuellt bräde, vilket ges av*

$$R_B(x) = R_{B_1}(x)R_{B_2}(x). \quad (4)$$

Bevis. Låt $R_{B_1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(B_1)x^k$ och $R_{B_2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(B_2)x^k$ vara tornpolynomen för B_1 och B_2 . Betrakta antalet sätt att placera k torn på $B_1 \cup B_2$. Vi kan placera k torn på B_1 och inga torn på B_2 , på $r_k(B_1) \times r_0(B_2)$ sätt. Vi kan placera $k-1$ torn på B_1 och ett torn på B_2 , på $r_{k-1}(B_1) \times r_1(B_2)$ sätt, och så vidare. Därmed är antalet sätt att placera k torn på $B_1 \cup B_2$ givet av $\sum_{i=0}^k r_{k-i}(B_1) \times r_i(B_2)$, vilket är tornpolynomkoefficienterna för x^k i $R_{B_1}(x) \times R_{B_2}(x)$. Följaktligen är $R_{B_1 \cup B_2}(x) = R_{B_1}(x) \times R_{B_2}(x)$. \square

Vad händer om vi vill beräkna tornpolynommet för ett generellt bräde som inte kan delas upp i två disjunkta bräden? En liknande metod, känd som [dekomposition av schackrutor](#), tillåter oss uttrycka tornpolynommet för ett generellt bräde genom att bryta ner det i mindre bräden. Denna metod härleds från observationen att tornarrangemang kan delas upp i två olika fall: Om det finns ett torn i en given ruta, är det viktigt att inget annat torn placeras på en ruta i samma rad eller kolumn. Dessa arrangemang på ett bräde där denna rad och kolumn har tagits bort betecknas som C_i för att visa inkludering av rutan. Om det inte finns ett torn i den givna rutan, tas endast denna ruta bort, och brädet som skapas efter exkludering av den givna rutan betecknas som C_e . Genom att beräkna dessa två fall och addera resultaten erhålls formeln för tornpolynommet för brädet C .

Sats 2.2 (Dekomposition av generella bräden). *Låt C vara ett generaliserat bräde. Vi definierar C_i som det bräde som erhålls genom att ta bort raden och kolumnen som motsvarar en given ruta från C . Låt C_e vara brädet som erhålls genom att ta bort samma ruta från C . Tornpolynommet för C kan då beräknas enligt följande formel:*

$$R_C(x) = xR_{C_i}(x) + R_{C_e}(x). \quad (5)$$

Denna sats går ut på att sönderdela bräden och ger en rekursiv metod för att beräkna tornpolynommet för ett generellt bräde.

Bevis. Vårt mål är att beräkna tornpolynommet för ett generellt bräde, vilket innebär att bestämma det totala antalet sätt att placera k icke-attackerande torn på brädet. Den allmänna metoden för beräkna ett tornpolynom baseras på en uppdelning av det ursprungliga brädet och kan tillämpas på vilket brädetyper som helst.

Tornen på brädet kan arrangeras på två olika sätt: I det första fallet förutbestäms placeringen av ett torn i en specifik ruta. Detta innebär att de återstående tornen kan placeras på $k - 1$ sätt. I det andra fallet förutbestäms att det inte finns ett torn i denna ruta, vilket resulterar i att alla k torn befinner sig i de andra rutorna. Tidigare har vi definierat brädorna C_i och C_e för att representera de två fallen. Genom att tillämpa dessa två definitioner kan vi uttrycka sambandet mellan tornpolynomscoefficienterna för brädet C enligt:

$$r_k(C) = r_{k-1}(C_i) + r_k(C_e). \quad (6)$$

För att uttrycket ska likna ett polynom multipliceras x^k till båda leden och en summa tas över alla termer när variabeln k antar värden från 1 till n . Vi får då tornpolynomet med explicita koefficienter:

$$\sum_{k=1}^n [r_k(C)] x^k = \sum_{k=1}^n r_{k-1}(C_i) x^k + \sum_{k=1}^n r_k(C_e) x^k. \quad (7)$$

Vi adderar konstanten 1 till båda leden eftersom inga torn på brädet endast kan ordnas på ett sätt. Sedan faktoriserar vi ut x och får:

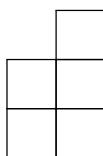
$$\sum_{k=1}^n [r_k(C)] x^k + 1 = x \left[\sum_{k=1}^n r_{k-1}(C_i) x^{k-1} \right] + \sum_{k=1}^n r_k(C_e) x^k + 1. \quad (8)$$

Nu kan vi skriva om uttrycket till tornpolynomet:

$$R_C(x) = xR_{C_i}(x) + R_{C_e}(x). \quad (9)$$

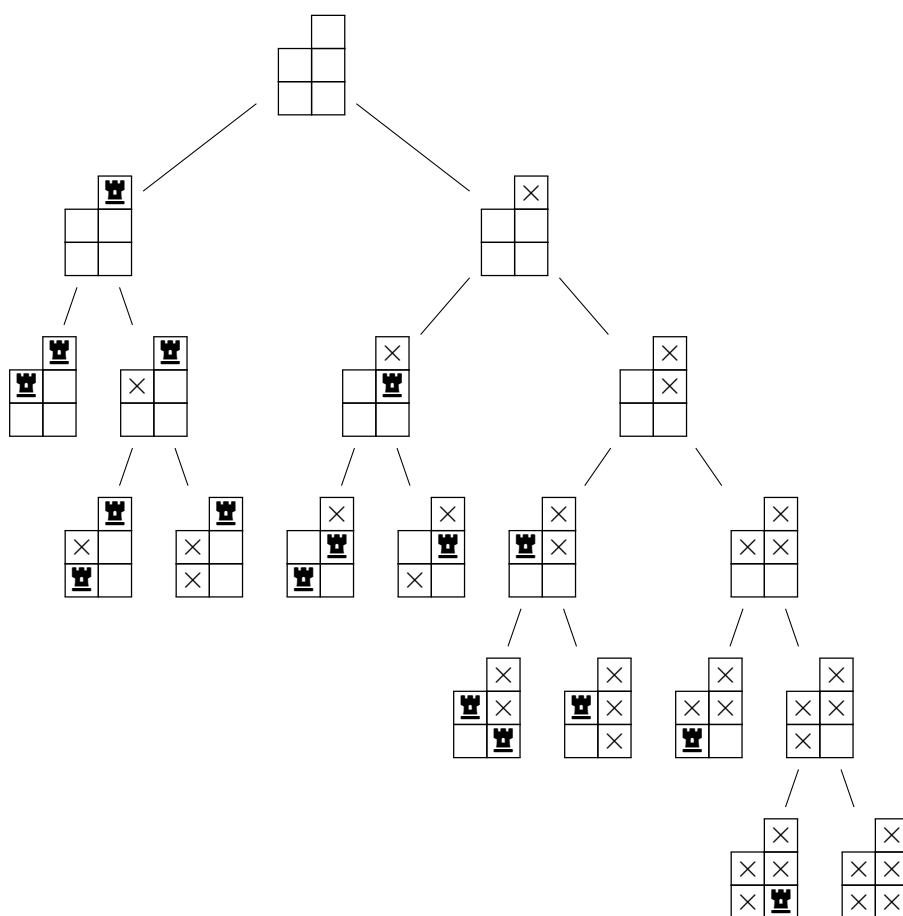
□

Exempel 2.2. För att beräkna tornpolynomet för brädet D ,



tillämpar vi Sats [2.2](#). Vi väljer att utgå från rutan längst upp till höger på brädet, vilket ger oss två möjliga fall: antingen har rutan ett torn eller inte. Baserat på de två fallen konstrueras två bräden. Brädernas uppdelning fortsätter tills det inte återstår några fler möjliga tornplaceringar. Träddiagrammet illustrerar hur brädet D bryts ner i mindre delar och visar på så sätt det totala antalet sätt att placera ut icke-attackerande torn på brädet. Se träddiagrammet i Figur [7](#).

De slutliga utfallen i träddiagrammet representerar alla möjliga sätt att placera icke-attackerande torn på brädet D . Om vi enbart observerar bräderna längst ner i träddiagrammet ser vi att det utgör koefficienterna i det



Figur 7: Ett träd-diagram på nedbrytningen av ett bräde.

motsvarande tornpolynom. Vi vet sedan tidigare att det endast finns ett sätt att inte placera ut några torn på brädet D , detta kommer motsvara ettan i tornpolynom. Det är fem bräden med ett torn och fyra bräden med två torn, vilket resulterar i tornpolynom:

$$R_D(x) = x(1 + 2x) + 1 + 4x + 2x^2 = 1 + 5x + 4x^2. \quad (10)$$

Dekompositionsformeln utgör den allmänna metoden för att beräkna tornpolynom och kan tillämpas på samtliga bräden. Däremot kan metoden vara mycket tidskrävande att använda för bräden med ett stort antal schackrutor. Fortsättningsvis i uppsatsen kommer vi att analysera och exemplifiera ett samband som möjliggör en snabbare och effektivare metod för att beräkna tornpolynom för bräden med otillåtna positioner.

3 Relationen mellan tornpolynom och träfftalpolynom

Många problem som innefattar uppräknigen av permutationer med begränsade positioner kan representeras genom ett tornpolynom. Detta forskningsområde initierades av Kaplansky och Riordan år 1946 [KR46]. Ursprungligen tillämpat på kortmatchningsproblem, lyfte Riordans arbete år 1958 [Rio78] fram den grundläggande systematiska analysen av tornpolynom och etablerade det som en klassisk referens. Under de senaste åren har forskaren J. Haglund haft en betydande inverkan inom ämnet [Hag96, HR01]. Han har författat flera artiklar som handlar om formeln för relationen mellan tornpolynom och permutationer med otillåtna positioner, samt beräkningen av tornpolynom för ett Ferrersbräde. Dessa två formler utforskas ingående i denna uppsats. Haglund har också analyserat olika samband mellan tornpolynom och andra matematiska områden, såsom hypergeometriska serier, uppräknig av matriser över ändliga fält och grupprepresentationsteori. Dessutom har tornpolynom funnit relevans inom olika grafteoretiska ämnen, inklusive matchningsteori och kromatisk teori, samt nya tillämpningar inom kvantmekanik, se [Rio78, GJW78]. Inom kombinatoriken kopplas tornpolynom fortfarande främst till permutationer och matchningar.

Definition 3.1 (Permutation). En permutation av en ändlig mängd, $\{1, 2, \dots, n\}$, är en bijektion från $\{1, 2, \dots, n\}$ till $\{1, 2, \dots, n\}$. Mängden av permutationer på $\{1, 2, \dots, n\}$ bildar en grupp, vilken kallas den symmetriska gruppen S_n .

Exempel 3.1. Låt $M=\{1,2,3,4,5\}$. Definiera

$$\alpha(1) = 4 \quad \alpha(2) = 2 \quad \alpha(3) = 5 \quad \alpha(4) = 1 \quad \alpha(5) = 3.$$

Då är α en permutation.

I den symmetriska gruppen S_n kan varje permutation skrivas som en $n \times n$ *permutationsmatris*. I vårt fall kan en tornplacering representeras med en permutationsmatris där varje rad och kolumn motsvarar en specifik ruta på brädet. En etta i matrisen indikerar att det finns ett torn på den angivna positionen. Betrakta permutationen α där $\alpha(1) = 4$. Detta innebär att permutationsmatrisen kommer ha en etta i rad ett och kolumn fyra. På samma sätt försätter vi med de övriga positionerna som definierades i Exempel 3.1, vilket genererar permutationsmatrisen i Figur 8.

Definition 3.2 (Träfftal). Låt S_n vara en gruppen av permutationer av $\{1, \dots, n\}$. Vi identifierar varje permutation σ med dess motsvarande tornplacering $p_\sigma = \{(i, j) : \sigma(i) = j\}$. För ett givet bräde $B \subseteq [n] \times [n]$ definierar

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Figur 8: Permutationsmatrisen för permutationen α från Exempel 3.1.

vi *träfftalet* $H_{n,k}(B)$ som antalet permutationer $\sigma \in S_n$ sådana att antalet icke-attackerande torn som 'träffar' brädet B är k , $|p_\sigma \cap B| = k$. Formellt uttryckt är träfftalerna definierade som

$$H_{n,k}(B) = |\{\sigma \in S_n : |\{(i, j) \in B : \sigma(i) = j\}| = k\}|.$$

Här representerar k antalet icke-attackerade torn på brädet B , och $|\cdot|$ kardinaliteten.

Inom kombinatoriken behandlas ett koncept som kallas *oordningsproblem*. Detta syftar till att beräkna antalet permutationer $\sigma \in S_n$, där varje element i förflyttas till en position $\sigma(i) \neq i$. När vi tillämpar oordningsproblem på bräden står vi inför ett specialfall där vi inte kan placera några torn på brädets diagonal. Detta beror på det tidigare definierade villkoret $\sigma(i) \neq i$, som måste vara uppfyllt. Vi observerar följande Exempel 3.2 på specialfallet.

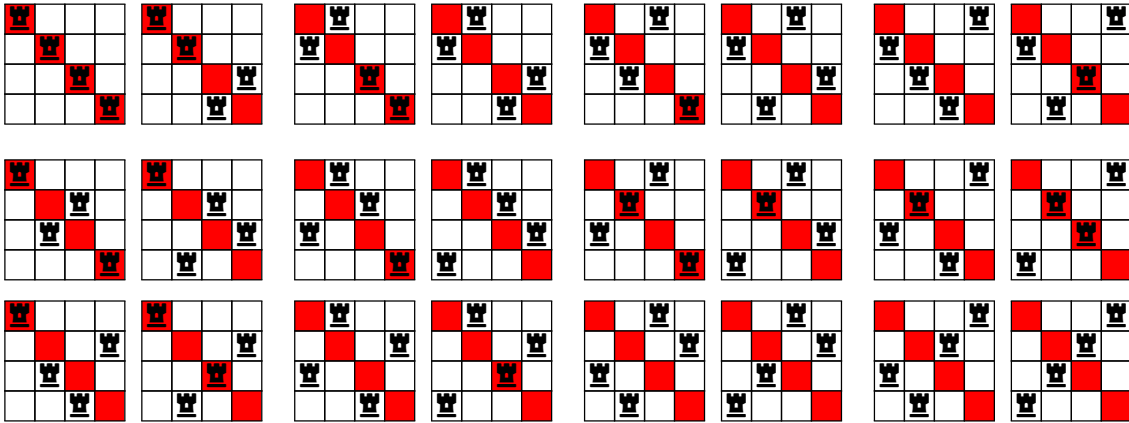
Exempel 3.2. Från mängden $\{1, 2, 3, 4\}$ konstuerar vi brädet $Q = [4] \times [4]$. Vi vill beräkna antalet tornarrangemang på brädet Q där inget torn placeras på brädets diagonal. Diagonalen representerar otillåtna positioner på brädet och är markerade i rött. Det totala antalet sätt att placera fyra torn på brädet Q är $4! = 24$ och illustreras i Figur 9.

Genom att observera Figur 9 kan vi besvara oordningsproblemet och fastställa att det finns nio sätt att placera tornen så att inget torn befinner sig längs brädet diagonal. Dessa tornarrangemang kan representeras som träfftalet $H_{4,4}(Q) = 9$, enligt Definition 3.2.

Sats 3.1 (Relationen mellan tornpolynom och träfftal). *För ett godtyckligt bräde $B \subseteq [n] \times [n]$ gäller följande samband mellan träfftalerna $H_{n,k}(B)$ och tornpolynomskoefficienterna $r_k(B)$:*

$$\sum_{k=0}^n H_{n,k}(B)x^k = \sum_{k=0}^n r_k(B)(n-k)!(x-1)^k, \quad (11)$$

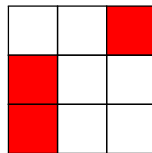
där k är antalet icke-attackerande torn på brädet B .



Figur 9: Det 24 sätten att placera fyra icke-attackerande torn på brädet Q .

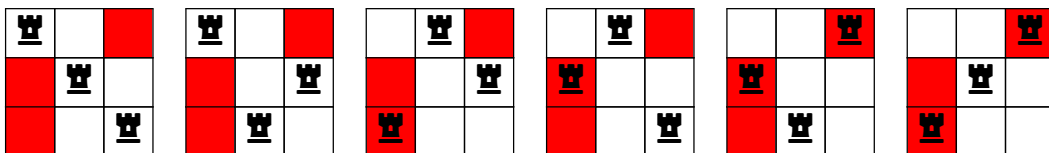
Det är viktigt att notera att att formuleringen och beteckningen av Sats 3.1 kan variera beroende på källa. Inom ramen för denna diskurs kommer vi att följa Haglunds [HRO1] notation och konventioner. I följande exempel kommer vi tillämpa satsen för att försäkra oss om dess giltighet.

Exempel 3.3. För brädet $J \subseteq 3 \times 3$ med en given permutation $\sigma \in S_3$ går det maximalt att placera ut 3 icke-attackerande torn på brädet J samtidigt.



Figur 10: Brädet J med otillåtna positioner rödmarkerade.

För att beräkna antalet sätt att placera 3 icke-attackerande torn på brädet J ritar vi upp alla möjliga tornplaceringar, som i Figur 11 nedan, och konstaterar att det finns 6 sätt.



Figur 11: Det 6 tornplaceringarna dom motsvaras av elementen i S_3 .

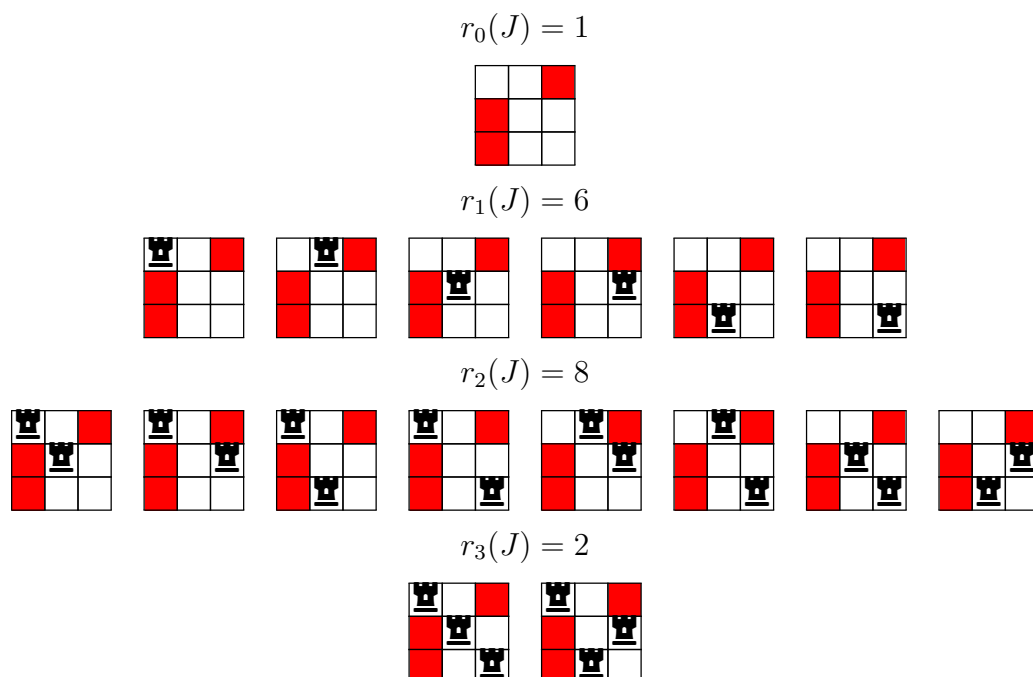
Utifrån Figur 11 avläser vi antalet torn som inte befinner sig på otillåtna positioner, det vill säga vi beräknar antalet torn som befinner sig på det vita schackrutorna för varje konfiguration. Till exempel kan vi observera att brädet längst till vänster i Figur 11 har alla sina tre torn placerade på vita schackrutor, medan brädet längst till höger endast har ett torn på en vit schackruta, och de återstående två tornen är placerade på röda schackrutor. Antalet torn på det vita schackrutorna är våra träfftal enligt Definition 3.2. I vårt fall får vi

$$H_{3,3}(J) = 2 \quad H_{3,2}(J) = 2 \quad H_{3,1}(J) = 2 \quad H_{3,0}(J) = 0.$$

Vi har nu fått fram polynomet för alla träfftal på J vilket motsvarar vänsterledet (11). Vårt vänsterled blir därmed

$$\sum_{k=0}^3 H_{3,k}(J)x^k = 2x^3 + 2x^2 + 2x + 0. \quad (12)$$

För att säkerställa sambandets giltighet beräknar vi högerledet i Ekvation 11. Vi undersöker antalet sätt att placera k icke-attackerande torn på brädet J genom att beräkna tornpolynomkoefficienterna $r_k(J)$ för $0 \leq k \leq 3$:



Figur 12: Tornpolynomkoefficienterna $r_k(J)$ för utplaceringen av 0, 1, 2 och 3 torn på brädet J .

Vi sätter in det beräknade tornpolynomkoefficienterna i högerledet (11),

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^3 r_k(J)(3-k)!(x-1)^k &= \\ 1(3-0)!(x-1)^0 + 6(3-1)!(x-1)^1 + 8(3-2)!(x-1)^2 + 2(3-3)!(x-1)^3 &= \\ 12(x-1) + 8(x^2 - 2x + 1) + 2(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) &= 2x^3 + 2x^2 + 2x, \end{aligned}$$

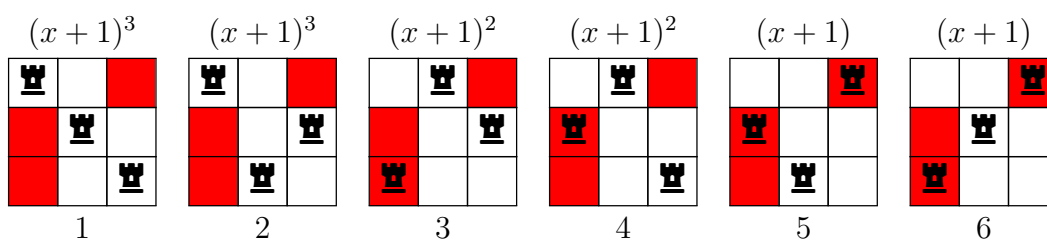
vilket överensstämmer med vårt vänsterled.

Vi kommer nu presentera beviset för Sats 3.1 och använda illustrationer från Exempel 3.3 för att tydliggöra och göra beviset mer lättförståeligt.

Bevis av satsen om relationen mellan tornpolynom och träfftal. Genom att substituera x med $x + 1$ i Ekvation (11) behöver vi bevisa att

$$\sum_{k=0}^n H_{n,k}(B)(x+1)^k = \sum_{k=0}^n r_k(B)(n-k)!x^k. \quad (13)$$

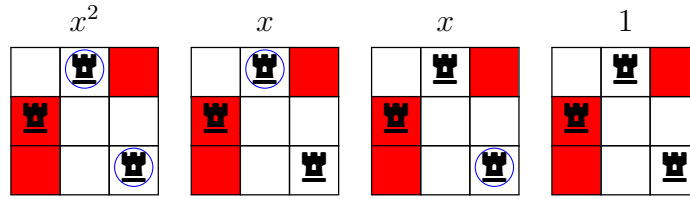
För att förtydliga detta resonemang kan vi, med utgångspunkt från Exempel 3.3, representera varje bräde med motsvarande x^k och genomföra samma substitution. Detta resulterar i bräderna i Figur 13.



Figur 13: Sex olika sätt att placera tre icke-attackerande torn på brädet B , där varje bräde representeras med motsvarande term $(x+1)^k$.

Vi börjar med att analysera vänsterledet i Ekvation 13 genom att betrakta en samling av objekt, betecknas O , som konstrueras enligt följande. För varje torn r på $\sigma \in B$ görs ett beslut om att antingen ringa in tornet eller inte. För det fjärde brädet i Figur 13 finns det 4 olika val, vilka presenteras i Figur 14.

Dessa val utförs även för brädorna 1, 2, 3, 5 och 6 i Figur 13. För varje objekt O som konstrueras på detta sätt tilldelar vi en vikt $x^{circ(O)}$, där $circ(O)$

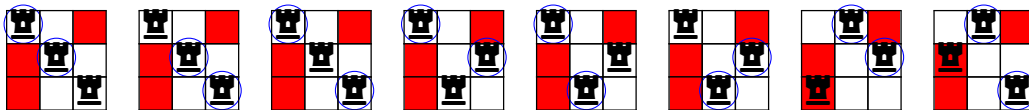


Figur 14: Det fyra valen att antingen ringa in eller inte ringa in torn på fjärde brädet.

representerar antalet inringade torn i O . Om O_B betecknar uppsättningen av objekt konstruerade med detta tillvägagångsätt, får vi uttrycket

$$\sum_{k=0}^n H_{n,k}(B)(x+1)^k = \sum_{O \in O_B} x^{\text{circ}(O)}. \quad (14)$$

Vi vill nu tolka högerledet i Ekvation (13) på ett liknande tillvägagångsätt. Först fastställs k inringade torn. Därefter väljs de inringade tornen som bildar en placering P av icke-attackerande torn på brädet B , vilket kan göras på $r_k(B)$ sätt. Om vi utgår från Exempel 3.3 och väljer att inringa två torn. Sedan väljer de tornarrangemangen där de inringade tornen inte attackerar varandra. Observera att det finns två sådana arrangemang, vilket motsvarar $r_2(J) = 8$ i Exempel 3.3.



Figur 15: Det åtta möjliga sätten att ha två inringade torn på brädet J från Exempel 3.3.

Till sist positioneras de $n - k$ övriga tornen som inte är inringade. Detta görs genom att utvidga P till en placering som motsvarar en permutation $\sigma \in S_n$, där de torn som inte är inringade kan placeras på $(n - k)!$ sätt. Detta resulterar i

$$\sum_{O \in O_B} x^{\text{circ}(O)} = \sum_{k=0}^n r_k(B)(n - k)!x^k, \quad (15)$$

vilket bevisar att Sats 3.1. □

4 Faktoriseringsatsen för Ferrersbräden

Hittills har vi utforskat metoder för att beräkna tornpolynom för kvadratis- ka, generaliserade, rektangulära och disjunkta bräden. Dessutom har vi betraktat representationen av bräden genom bipartita grafer och matriser bestående av endast ettor och nollor, se Figur 8. I detta avsnitt kommer vi fokusera på att beräkna tornpolynomet för en specifik brädtyp, Ferrersbräden. När vi presenterar faktoriseringsatsen för Ferrersbräden kommer vi att använda beviset av Goldman, Joichi och White [JGW75], men med vissa inslag av notation från Haglund [BCH14]. Inledningsvis kommer vi att definiera ett Ferrersbräde tillsammans med andra relevanta matema- tiska begrepp. Därefter presenteras satsen, dess bevis och ett illustrativt exempel. Målet är att underlätta förståelsen av satsen och dess bevis.

Definition 4.1 (Ferrersbräde). Ett bräde B klassificeras som ett *Ferrersbräde* om det existerar en monoton, icke-avtagande ändlig följd av positiva heltal, $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{P}$, så att brädets rutor ges av $\{(i, j) : 1 \leq i \leq n \text{ och } 1 \leq j \leq b_i\}$. Brädet kan därmed betecknas $B = F(b_1, b_2, \dots, b_n)$.

Formellt sett är ett Ferrersbräde en uppsättning av intilliggande kolum- ner definierade av rutor med en gemensam nedre kant. Höjden på varje kolumn, ordnad från vänster till höger, bildar en icke-avtagande sekvens.

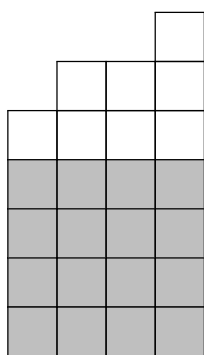
Innan vi presenterar faktoriseringsatsen för Ferrersbräden definierar vi det *fallande faktoriella polynomet* $(x)_k$ som $(x)_0 = 1$ och $(x)_k = x(x-1)(x-2) \cdot \dots \cdot (x-(k-1))$ för $k \in \mathbb{P}$.

Sats 4.1. (Faktoriseringsatsen för Ferrersbräden)

Låt $B = F(b_1, b_2, \dots, b_n)$ vara ett Ferrersbräde. Då gäller

$$\prod_{i=1}^n (x + b_i - (i - 1)) = \sum_{k=0}^n r_{n-k}(B)(x)_k. \quad (16)$$

Bevis. Eftersom polynomen är av begränsad grad räcker det att bevisa att Ekvation (16) gäller för alla positiva heltal x . För ett positivt heltal x , definiera B_x som ett bräde konstruerat från $B = F(b_1, \dots, b_n)$ genom att fästa x rader med längd n under B , där högerkolumnerna är justerade. Som ett exempel, om $D = F(1, 2, 2, 3)$, illustreras D_4 i Figur 16 där de gråmarkerade rutorna representerar de tillagda x raderna.



Figur 16: Brädet D_4 för $D = F(1, 2, 2, 3)$

Låt $N_n(B_x)$ beteckna mängden av alla arrangemang av n icke-attackerande torn på brädet B_x , där varje kolumn endast kan innehålla ett torn. Vi påstår att Ekvation (16) härleds från två olika metoder att räkna $|N_n(B_x)|$. Först analyserar vi vänsterledet i Ekvation (16) genom att betrakta antalet sätt att successivt placera ett torn i varje kolumn från vänster till höger på brädet B_x . Låt b_i representera antalet befintliga torn i den i :te kolumnen. Vi har $x + b_1$ val att placera ett torn i den första kolumnen. Därefter har vi $x + b_2 - 1$ sätt att placera tornet i den andra kolumnen. Vi subtraherar 1 eftersom det inte är tillåtet att placera tornet på samma rad som det första tornet. Genom att utnyttja förutsättningen $b_1 \leq b_2$, vilket innebär att varje rad i den första kolumnen också är en rad i den andra kolumnen. Vidare har vi $x + b_2 - 2$ sätt att placera ett torn i den tredje kolumnen, där -2 kommer från att vi inte kan placera tornet i samma rad som de första två kolumnerna. Fortsätter vi på samma sätt ser vi att det totala antalet sätt att placera n icke-attackerande torn på B_x är givet av

$$|N_n(B_x)| = \prod_{i=1}^b (x + b_i - (i - 1)),$$

vilket motsvarar vänsterledet i Ekvation (16).

Den andra metoden att beräkna $N_n(B_x)$ är genom att först fastställa en placering P av $n - k$ icke-attackerande torn på brädet B . Vi hävdar att antalet sätt att utöka P till en placering $Q \in N_n(B_x)$, så att $Q \cap B = P$, är $(x)_k$. Det innebär att vi vill räkna hur många olika sätt vi kan utöka P genom att placera k torn på den utökade delen. Om vi betraktar den vänstra tillgängliga kolumnen på den utökade delen där ett torn kan placeras finns det x möjliga rutor. För varje kolumn vi förflyttar oss åt höger kommer den nästkommande tillgängliga kolumnen på den utökade delen att ha $x - 1$ möjliga rutor där ett torn kan placeras. Denna subtraktion av -1 härleds av samma princip som tidigare, att det inte är tillåtet att placera två torn i samma rad. Detta innebär att varje val av en tornplacering på någon av de

x raderna resulterar i att en rad utesluts. Genom att fortsätta på samma sätt observerar vi att Q är $x(x-1) \cdot \dots \cdot (x-(k-1)) = (x)_k$. Med andra ord finns det $(x)_k$ sätt att placera ut k torn på de x raderna på den utökade delen. Vi ser att med omskrivning så får vi

$$|N_n(B_x)| = \sum_{k=0}^n \sum_{P \in N_{n-k}(B)} (x)_k = \sum_{k=0}^n (x)_k |N_{n-k}(B)| = \sum_{k=0}^n (x)_k r_{n-k}(B),$$

vilket motsvarar faktoriseringssatsens högerled (16). Genom att jämföra resultaten av de två beräkningarna av antalet sätt att placera n icke-attackerande torn på brädet B_x härleder vi en polynomidentitet som gäller för alla positiva heltal x . \square

Exempel 4.1. För en given brädtyp D_4 , där $D = F(1, 2, 2, 3)$ (Se Figur 16), beräknar vi antalet sätt att placera n icke-attackerande torn genom att tillämpa faktoriseringssatsen för Ferrersbräden. Vi vill säkerställa att resultatet av beräkningarna för vänsterledet och högerledet (16) överensstämmer. Primärt beräknar vi vänsterledet för brädet D_4 genom att avläsa antalet rutor i varje kolumn samt varje kolumns index. Detta ger oss följande:

$$\begin{aligned} \prod_{i=a}^b (x + b_i - (i-1)) &= \\ (x+1 - (1-1)) \cdot (x+2 - (2-1)) \cdot (x+2 - (3-1)) \cdot (x+3 - (4-1)) &= \\ (x+1) \cdot (x+1) \cdot x \cdot x &= \\ x^4 + 2x^3 + x^2. \end{aligned}$$

Fortsättningsvis beräknar vi antalet sätt att placera $n = 4$ icke-attackerande torn på D_4 genom att använda högerledet (16). Vi börjar med att beräkna tornpolynomkoefficienterna för brädet D , vilket ger

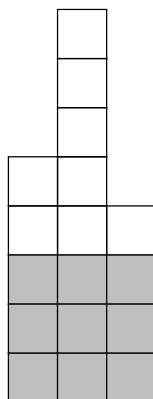
$$r_0(D) = 1 \quad r_1(D) = 8 \quad r_2(D) = 14 \quad r_3(D) = 4 \quad r_4(D) = 0.$$

Därefter sätter vi in dessa värden i högerledet av Ekvation (16) och får

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n r_{n-k}(B)(x)_k &= \\ 0 \cdot 0 + 4 \cdot x + 14 \cdot x(x-1) + 8 \cdot x(x-1)(x-2) + 1 \cdot x(x-1)(x-2)(x-3) &= \\ 4x + 14x^2 - 14x + 8x^3 - 24x^2 + 16x + x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x &= \\ x^4 + 2x^3 + x^2. \end{aligned}$$

Resultatet av beräkningarna för vänsterledet respektive högerledet överensstämmer, därmed gäller faktoriseringssatsen för Ferrersbrädet D_4 .

En grundläggande förutsättning för att Sats 4.1 ska vara giltig är att brädet måste vara ett Ferrersbräde, det vill säga en struktur med en icke-avtagande sekvens av kolumner. Betrakta brädet i Figur 17, vilket inte uppfyller kriterierna för ett vara ett Ferrersbräde. Om vi försöker tillämpa faktoriseringsatsen 4.1 och utgår från vänsterledet i Ekvation 16 så ser vi att det första tornet kan placeras på $x + b_1$ sätt, och det andra valet av tornplacering kan göras på $x + b_2 - 1$ sätt. Enligt satsen kan nästa tornplacering väljas på $x + b_3 - 2$ sätt, men om vi betraktar brädet i Figur 17 ser vi att det endast finns en ruta i den tredje kolumnen. Genom att utföra subtraktionen $x + b_3 - 2$ får vi $x - 1$ möjliga val, vilket inte är möjligt eftersom det skulle innebära att vi måste välja en rutan som befinner sig utanför kolumnen. Därav måste brädet vara utformat som ett Ferrersbräde, där $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathbb{P}$, för att Sats 4.1 ska kunna tillämpas.



Figur 17: Brädet K_3 där $K = F(2, 5, 1)$ är inte är ett Ferrers bräde.

Vi kan bekräfta det ovanstående antagandet genom att tillämpa faktoriseringsatsen 4.1 på brädet i Figur 17 med konkreta numeriska värden. Vi beräknar vänsterledet som

$$\begin{aligned} \prod_{i=a}^b (x + b_i - (i - 1)) &= (x + 2 - (1 - 1)) \cdot (x + 5 - (2 - 1)) \cdot (x + 1 - (3 - 1)) \\ &= (x + 2) \cdot (x + 4) \cdot (x - 1) \\ &= x^3 + 5x^2 + 2x - 8, \end{aligned}$$

och högerledet som

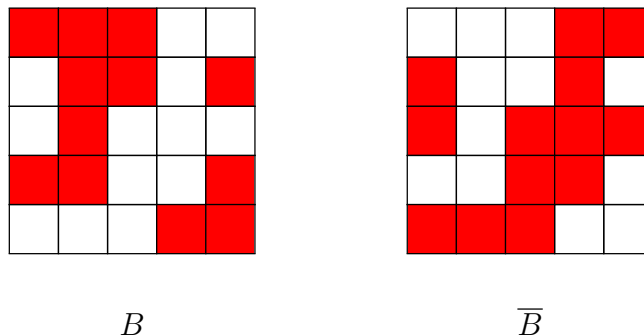
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n r_{n-k}(B)(x)_k &= (1 \cdot 1) + 8 \cdot x(x - 1) + 8 \cdot x(x - 1) + 1 \cdot x(x - 1)(x - 2) \\ &= 1 + 10x + 8x^2 - 8x + x^3 - 3x^2 + 2x \\ &= x^3 + 5x^2 + 4x + 1. \end{aligned}$$

Vi observerar att resultatet som presenterades av vänsterledet och högerledet inte är lika, vilket innebär att faktoriseringsatsen för Ferrersbräden inte gäller för brädet K_4 .

5 Reciprocitetsformeln för tornpolynom

I vår tidigare analys har vi behandlat och beräknat tornpolynom för olika brädtyper, inklusive de bräden med otillåtna positioner. Vi har noga studerat tornpolynomskoefficienterna $r_k(B)$ och träfftalen $H_{n,k}$. I den avslutande sektionen kommer vi fördjupa oss om ett samband mellan ett bräde och dess komplementbräde, vilket kommer benämnas Reciprocitetsformeln för tornpolynom.

Definition 5.1 (Komplementbräde). För det givna brädet B med dimensionerna $[n] \times [n]$ och otillåtna positioner definieras dess *komplementära bräde*, betecknat \overline{B} , som $[n] \times [n] \setminus B$. Detta innebär att alla otillåtna schackrutur på brädet B motsvarar de tillåtna schackrutorna på komplementbrädet \overline{B} , och vice versa.



Figur 18: Ett bräde B tillsammans med sitt komplementbräde \overline{B} .

För att fördjupa förståelsen av komplementbräden hänvisas läsaren att studera Riordans artikel [Rio78]. Precis som för tornpolynom kan tornpolynomkoefficienterna $r_k(\overline{B})$ för komplementbrädet \overline{B} definieras och beräknas enligt 2.3. Tidigare forskning [Rio78] har identifierat en relation mellan tornpolynomskoefficienterna för B och \overline{B} enligt följande polynomiella identitet:

$$\sum_{k=0}^n r_k(B)(n-k)!x^k = \sum_{k=0}^n (-1)^k r_k(\overline{B})(n-k)!x^k(x+1)^{n-k}. \quad (17)$$

Detta icke-trivala samband är känt som reciprocitetssatsen för torn. Ekvation [17](#) föreslår att tornpolynomkoefficienterna för B påverkar tornpolynomkoefficienterna för \bar{B} . Genom att använda summation och produktutveckling skapas polynom på båda sidorna av ekvationen.

Chow [\[Cho96\]](#) hänvisar till upptäckten av en mer förneklad formulering av den polynomiella identiteten [17](#). Denna formulering kommer att användas när vi uttrycker, bevisar och exemplifierar reciprocitetssatsen. Vi definierar en modifierad variant av tornpolynomet där x^k ersätts av det fallande faktorialet $(x)_k$. Det *modifierade tornpolynomet* skrivs på följande sätt:

$$\hat{R}_B(x) = \sum_{k=0}^n r_k(B)(x)_{n-k}. \quad (18)$$

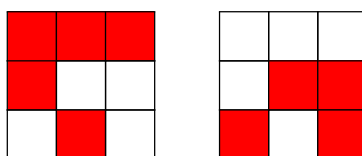
Sats 5.1 (Reciprocitetssatsen för torn). *För ett bräde $B \subseteq [n] \times [n]$ gäller*

$$\hat{R}_{\bar{B}}(x) = (-1)^n \hat{R}_B(-x - 1). \quad (19)$$

Innan vi analyserar beviset för satsen, tillämpar vi den praktiskt på ett bräde för att förstå hur den används.

I det kommande exemplet kommer vi tillämpa Reciprocitetssatsen på ett bräde för att observera sambandet mellan tornpolynomkoefficienterna för brädet och dess komplementbräde.

Exempel 5.1. Visa att reciprocitetssatsen för torn gäller för brädet $E \subseteq [3] \times [3]$, där $n = 3$, se [Figur 19](#).



Figur 19: Brädet E och komplementbrädet \bar{E} .

Vi skriver om reciprocitetsformeln [\(19\)](#) med hjälp av det modifierade tornpolynomet [\(18\)](#) och får

$$\sum_{k=0}^n r_k(\bar{E})(x)_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^n r_k(E)(-1-x)_{n-k}. \quad (20)$$

Inledningsvis analyserar vi vänsterledet [\(20\)](#) genom att beräkna tornpolynomkoefficienterna $r_k(\bar{E})$, detta resulterar i:

$$r_0(\bar{E}) = 1 \quad r_1(\bar{E}) = 5 \quad r_2(\bar{E}) = 5 \quad r_3(\bar{E}) = 1.$$

Därefter utvecklar vi vänsterledet [20](#) och sätter in våra värden, vilket ger:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^3 r_k(\bar{E})(x)_{3-k} &= r_0(\bar{E})(x)_{3-0} + r_1(\bar{E})(x)_{3-1} + r_2(\bar{E})(x)_{3-2} + r_3(\bar{E})(x)_{3-3} \\ &= x(x-1)(x-2) + 5x(x-1) + 5x + 1 \\ &= x^3 + 2x^2 + 2x + 1. \end{aligned}$$

Vi vill nu undersöka högerledet i Ekvation [20](#) och inleder på samma sätt som tidigare genom att beräkna tornpolynomkoefficienterna $r_k(E)$:

$$r_0(E) = 1 \quad r_1(E) = 4 \quad r_2(E) = 3.$$

Baserat på tornpolynomkoefficienterna observerar vi att det maximala antalet icke-attackerande torn som kan placeras ut på brädet E är två. Genom att substituera x med $-x - 1$ får vi:

$$\begin{aligned} (-1)^3 \sum_{k=0}^3 r_k(E)(-1-x)_{3-k} &= (-1)^3 [(-x-1)^{3-0} + (-x-1)^{3-1} + (-x-1)^{3-1}] \\ &= -[-x^3 - 3x^2 - 3x - 1 + x^2 + 2x + 1 - x - 1] \\ &= x^3 + 2x^2 + 2x - 1. \end{aligned}$$

Vi noterar att beräkningen inte inkluderar termen $(-x-1)^{3-3} = (-x-1)^0 = 1$, eftersom brädet inte kan innehålla tre icke-attackerande torn. Genom att beräkna både vänsterledet och högerledet i Ekvation [20](#) har vi nu fått samma polynom, nämligen $x^3 + 2x^2 + 2x - 1$. Detta tyder på existensen av ett samband mellan tornpolynomkoefficienterna för brädet E och komplementbrädet \bar{E} .

Bevis av Reciprocitetssatsen för torn. Inledningvis skriver vi om högerledet i Ekvation [19](#). Vi utvecklar det fallande faktoriallet och multiplicerar sedan in $(-1)^n$ i summan samtidigt som vi faktorerar ut minsutecknet från det fallande faktorialet. Detta resulterar i

$$\begin{aligned} (-1)^n \hat{R}_B(-x-1) &= \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^n r_k(B)(-x-1)(-x-1-1) \cdots ((-x-1) - (n-k) + 1) = \\ &= \sum_{k=0}^n r_k(B)(-1)^n (-1)^{n-k} (x+1)(x+2)(x+3) \cdots (x+n-k). \end{aligned}$$

Observera att $(-1)^n (-1)^{n-k} = (-1)^{2n} (-1)^{-k}$, där exponenten i $(-1)^{2n}$ är jämn och blir 1, medan $(-1)^{-k}$ motsvarar $(-1)^k$. Högerledet i Ekvation [19](#) kan efter omskrivning uttryckas som

$$\sum_{k=0}^n r_k(B)(-1)^k (x+1)(x+2)(x+3) \cdots (x+n-k) = \sum_{k=0}^n r_k(B)(-1)^k (x+n-k)_{n-k}. \quad (21)$$

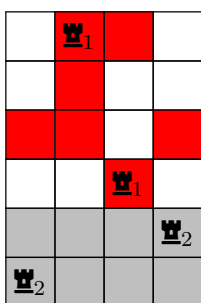
För att bevisa Sats [5.1](#) vill vi därför visa att

$$\sum_{k=0}^n r_k(\overline{B})(x)_{n-k} = \sum_{k=0}^n r_k(B)(-1)^k(x+n-k)_{n-k}, \quad (22)$$

gäller för stora tal x . För ett givet positivt heltal x utökar vi brädet $B \subseteq [n] \times [n]$ genom att lägga till x rader längst ner på brädet. Detta resulterar i konstruktionen av ett bräde med dimensionerna $(n+x) \times n$. Observera att vänsterledet i Ekvation [\(22\)](#) beräknar antalet sätt att placera n torn på det utvidgade brädet $(n+x) \times n$, utifrån följande två steg:

1. Placera k icke-attackerande torn på komplementbrädet \overline{B} , vilket representeras av $r_k(\overline{B})$.
2. Placera de återstående $n-k$ tornen på de extra x raderna på $(x)_{n-k}$ sätt.

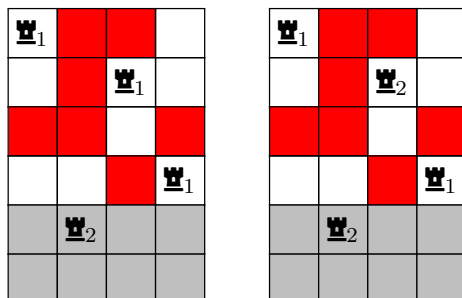
Genom att multiplicera dessa två stegen så får vi antalet sätt att placera n torn på det utvidgade $(n+x) \times n$ brädet. För att exemplifiera de två stegen, illustrerar vi ett möjlig tornarrangemang på ett godtyckligt utvidgat bräde. Detta visas av [Figur 20](#).



Figur 20: Ett utvidgat bräde 6×4 . \mathbb{M}_1 representerar de k icke-attackerande tornen som placeras i första steget. \mathbb{M}_2 representerar det återstående $n-k$ tornen som placeras på de x extra raderna.

Vi analyserar nu högerledet i [\(22\)](#) för att säkerställa att uttrycket beräknar antalet sätt att placera n torn på det utvidgade brädet $(n+x) \times n$. På ett liknade sätt som tidigare väljer vi tornens placering utifrån två steg. Först placeras k icke-attackerande torn på brädet B , vilket representeras av $r_k(B)$. Det andra steget är att placera de återstående tornen på $(x+n-k)$ lediga rader. Dessa torn kan placeras på brädet B , komplementbrädet \overline{B} eller på de x extra raderna, så att inga andra torn attackerar varandra. Eftersom det är möjligt att placera torn på brädet B under båda stegen, kan

vissa tornarrangemang dubbelräknas. Utgår vi från det utvidgade brädet i Figur 20, observerar vi att samma tornarrangemang kan erhållas genom olika utföranden av det två stegen, se Figur 21.

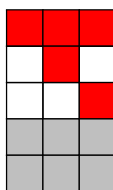


Figur 21: Två bräden med samma tornarrangemang men olika implementeringar av det två stegen.

Denna dubbelräkning av tornarrangemang undviks genom tillämpningen av principen för inklusion och exklusion. I vårt fall är det $(-1)^k$ som styr dubbelräkningen. Tornarrangemangen där minst ett torn finns på brädet B kommer utjämnas varandra i summan eftersom de inkluderas och exkluderas med alternerande tecken. De tornarrangemang som inte har något torn på brädet B kommer eventuellt ha sina torn utplacerade på de utökande x raderna eller komplementbrädet \bar{B} . Dessa tornarrangemang utjämnas inte av ovanstående inklusion och exklusion, utan kommer att finnas kvar i summan. De återstående tornarrangemangen betecknas som $\hat{R}_{\bar{B}}(x)$, vilket motsvarar vänsterledet i Ekvation 22 innan omskrivning. Vi har nu bevisat att satsen gäller för alla positiva heltal x , därmed gäller det även som en likhet mellan polynom. \square

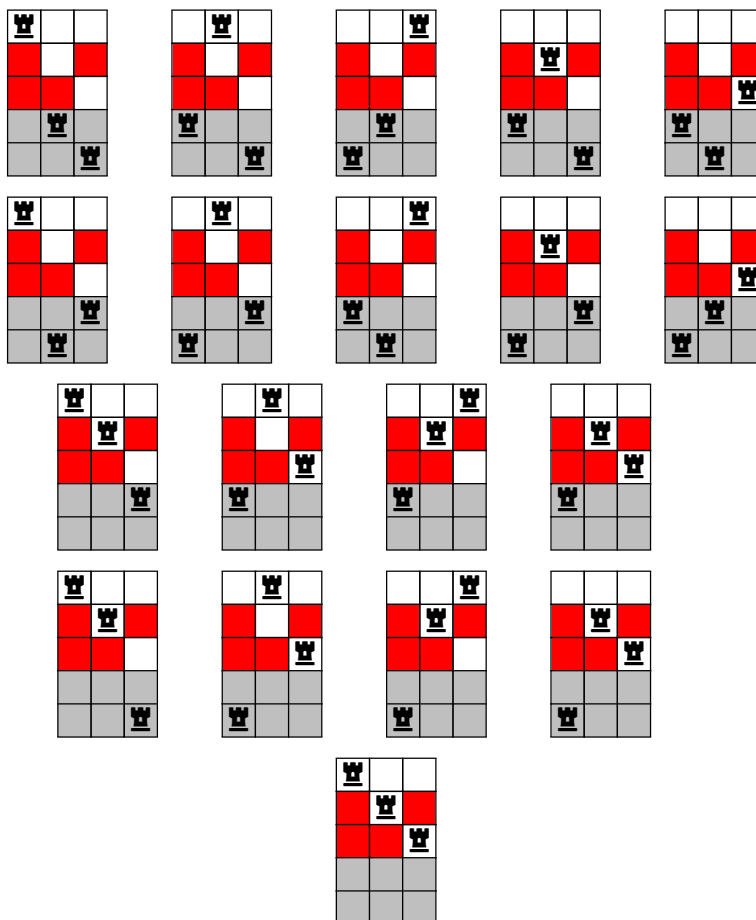
I följande exempel demonstrerar vi bevisets funktionalitet genom att betrakta ett specifikt bräde.

Exempel 5.2. Vi vill visa att Ekvation 22 gäller för det utvidgade brädet $(3+2) \times 3$, som konstueras av $B \subseteq [3] \times [3]$ och två extra rader. Brädet visas av Figur 22.



Figur 22: Brädet B med 2 extra rader och några otillåtna positioner.

Inledningvis granskar vi vänsterledet i Ekvation (22) som representerar alla sätt att placera tre icke-attackerande torn på det utvidgade brädet med k torn på komplementbrädet \bar{B} . Alla sätten visas i Figur 23.



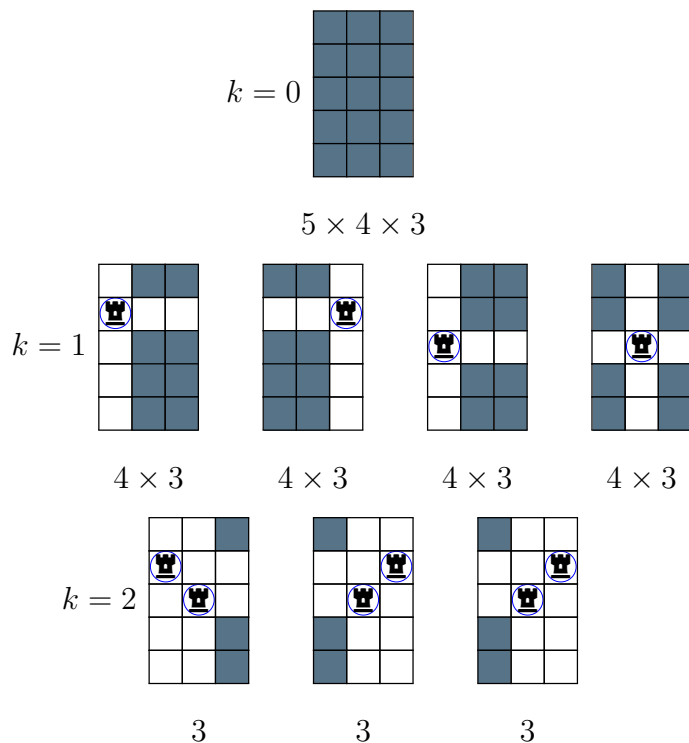
Figur 23: Antalet sätt att placera tre torn på \bar{B} och de 2 extra raderna.

Totalt beräknas vänsterledet till

$$\sum_{k=0}^3 r_k(\bar{B})(x)_{3-k} = 0 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 21. \quad (23)$$

Vi kommer nu verifiera att summan i högerledet av Ekvation (22) överensstämmer med vänsterledet. Först beräknar summan antalet sätt att placera k inringade torn på brädet B , $r_k(B)$. Därefter används det fallande faktorialet för att räkna antalet möjliga sätt att placera de återstående tornen någonstans på det utvidgade brädet så att tornen inte attackerar varandra. Det ska totalt finnas tre torn utplacerade. Det alternerande minustecknet ser till att varje tornarrangemang enbart räknas en gång i summan, vilket innebär att det inte blir någon dubbelräkning. Detta illu-

streras genom att rita upp tornarrangemangen där vi placerar ut k inringade torn och skuggar de möjliga rutorna att placera de återstående $n - k$ tornen, se Figur 24.



Figur 24: Antalet sätt att placera de återstående $n - k$ tornen på brädet B .

Sätter vi in våra värden för k i högerledet (22) får vi:

$$\sum_{k=0}^3 r_k(B)(-1)^k(x+3-k)_{3-k} =$$

$$(-1)^0 r_0(B)(x+3-0)_3 + (-1)^1 r_1(B)(x+3-1)_2 + (-1)^2 r_2(B)(x+3-2)_1$$

Vi utvecklar de fallande faktorialen och sätter in värdena på tornpolynomkoefficienterna samt $x = 2$ i ovanstående ekvation, detta ger

$$(x+1)(x+2)(x+3) - 4(x+1)(x+2) + 3(x+1) = 3 \cdot 4 \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 3$$

$$= 60 - 48 + 9$$

$$= 21.$$

Både högerledet och vänsterledet summeras till 21. Detta bekräftar att reciprocitetssatsen är applicerbar på brädet B och visar metoden bakom beviset.

Referenser

- [BCHR14] F. Butler, M. Can, J. Haglund, and J. B. Remmel. Rook theory notes. <https://www2.math.upenn.edu/~jhaglund/books/rookchap1.pdf>, 2014.
- [BHR91] F. Butler, J. Haglund, and J.B. Remmel. Notes on rook polynomials. <https://www2.math.upenn.edu/~jhaglund/books/rook.pdf>, 1991.
- [Cho96] Timothy Chow. A short proof of the rook reciprocity theorem. *the electronic journal of combinatorics*, 3(1):1–2, 1996.
- [GJW78] J.R Goldman, J.T Joichi, and D.E White. Rook theory III. Rook polynomials and the chromatic structure of graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 25(2):135–142, 1978.
- [Hag96] J. Haglund. Rook theory and hypergeometric series. *Advances in Applied Mathematics*, 17(4):408–459, 1996.
- [HR01] J. Haglund and J.B. Remmel. Rook theory for perfect matchings. *Advances in Applied Mathematics*, 27(2–3):438–481, August 2001.
- [JGW75] J.T. Joichi J.R. Goldman and D.E. White. Rook theory. I. Rook equivalence of Ferrers boards. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 52(1):485–492, 1975.
- [KR46] I. Kaplansky and J. Riordan. The problem of the rooks and its applications. *Duke Mathematical Journal*, 13(2), June 1946.
- [Nij76] Albert Nijenhuis. On permanents and the zeros of rook polynomials. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 21(2):240–244, September 1976.
- [Rio78] J. Riordan. *An Introduction to Combinatorial Analysis*. Princeton University Press, 1978.