



# SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

## En Geometrisk Odysseé på Sfären

av

**Joakim Brådman**

2024 - No L3



# En Geometrisk Odysseé på Sfären

Joakim Brådman

---

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Salvador Rodriguez-Lopez

2024

## Abstract

Sfärisk geometri, en oskiljaktig följeslagare för äventyrliga sjöfarare och noggranna astronomer genom tiderna, har varit grundläggande för att förstå och navigera i den komplexa världen av sfäriska ytor. Trots att dess popularitet har förskjutits till förmån för den plana geometrin under 1900-talet, förblir dess betydelse stark och tidlös. Denna uppsats fördjupar sig i sfärisk geometri genom att erbjuda en kompakt historisk översikt, presentera fundamentala satser med tillhörande bevis, och avsluta med praktiska exempel som belyser tillämpningar inom sjöfart och astronomi. Min forskning är inspirerad av två framstående verk: *Textbook on Spherical Astronomy* författad av W.M Smart och *Heavenly Mathematics* skriven av Glen Van Brummelen. Genom att kombinera teoretisk insikt med tillämpningar demonstrerar denna uppsats sfärisk geometris relevans och användbarhet för dagens och morgondagens äventyrare och forskare.

Spherical geometry, an inseparable companion for adventurous sailors and meticulous astronomers throughout history, has been fundamental in comprehending and navigating the intricate realm of spherical surfaces. Despite its prominence yielding to planar geometry in the latter half of the 20th century, its significance remains robust and timeless. This essay delves into *spherical geometry* by providing a concise historical overview, presenting foundational theorems with accompanying proofs, and concluding with practical examples that illuminate applications in navigation and astronomy. My research is inspired by two prominent works: *Textbook on Spherical Astronomy* authored by W.M Smart and *Heavenly Mathematics* written by Glen Van Brummelen. By melding theoretical insights with practical applications, this essay showcases the relevance and utility of spherical geometry for today's and tomorrow's adventurers and researchers.

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Historisk Bakgrund och Utveckling av Sfärisk Geometri</b>	<b>6</b>
1.1	Axiom och Postulat i Euklides Elementa: En Resa i Matematikens Grundläggande Strukturer	6
<b>2</b>	<b>Sfärisk geometri, hur definieras det?</b>	<b>7</b>
2.1	Sfäriska Linjer	7
2.2	Sfäriska vinklar	9
2.3	Antipodala Punkter, Longitud och Latitud	10
<b>3</b>	<b>Sfäriska Trianglar</b>	<b>10</b>
3.1	Omkrets på sfäriska trianglar	10
3.2	Den polära triangeln	11
3.3	Den Polära Dualitetssatsen	12
<b>4</b>	<b>Sfärisk trigonometri</b>	<b>12</b>
4.1	Trigonometriska identiteter på sfären	13
4.2	Pythagoras sats på sfären	15
4.3	Sfäriska Sinussatsen	16
4.4	Sfäriska Cosinussatsen	17
4.5	Alternativt bevis av Sfäriska Sinussatsen	18
<b>5</b>	<b>Applikationer på Astronomi</b>	<b>19</b>
5.1	Altitud, Zenitavstånd och Azimut	19
5.2	Exempel med sinussatsen	20
5.3	Kort om deklination, timvinkel och rektascension	20
5.4	Exempel med cosinussatsen	20
<b>6</b>	<b>Navigation med sfärisk trigonometri</b>	<b>21</b>
6.1	Exempel med cosinussatsen	21
6.2	Exempel med cosinussatsen för vinklar	22
6.3	Exempel med sinussatsen.	22
<b>7</b>	<b>Kort om Haversinsatsen</b>	<b>22</b>
<b>8</b>	<b>Avslutande Ord</b>	<b>24</b>
8.1	Den Individuella Processen	24
8.2	Svårigheter	24

# 1 Historisk Bakgrund och Utveckling av Sfärisk Geometri

Geometrin, såsom den ofta presenteras i läroböcker, har traditionellt varit förknippad med undersökningen av geometriska objekt i planet. Denna planära fokus har länge varit normen, men det är viktigt att komma ihåg att geometriens rika historia innehåller en betydande dimension av sfärisk geometri, vars rötter sträcker sig tillbaka till antiken.

Sfärisk geometri, även känd som den geometriska studien av sfäriska ytor, har sina tidiga spår hos den grekiske filosofen Thales, en pionjär under 600-talet f.Kr. Thales utforskade egenskaperna hos cirklar på en sfärisk yta och banade därmed vägen för ytterligare undersökningar inom detta område. Hans insikter, tillsammans med bidragen från efterföljare som Anaximander, markerade de tidiga skedena av sfärisk geometris framväxt.

En central person inom sfärisk geometri var den grekiske matematikern Euklides, som under 300-talet f.Kr. presenterade sitt monumentala arbete *Elementa*. Inom ramen för detta arbete behandlade Euklides inte bara plan geometri utan inkluderade även avsnitt om sfärisk geometri. Genom att formulera axiom och bevisa teorem relaterade till sfäriska ytor lade han grunden för en teoretisk förståelse av detta område.

Den islamska guldåldern på 800- och 900-talet e.Kr. blev en nyckelperiod för sfärisk geometris fortsatta utveckling. Den persiske matematikern och astronomen al-Khwarizmi, mest känd för sitt arbete "Kitab al-Jabr wal-Muqabaladär termen "älgebra" introducerades, ägnade också uppmärksamhet åt sfärisk geometri. Hans verk innehöll sektioner som utforskade tillämpningarna av sfärisk geometri inom astronomi och kartografi och bidrog därmed till dess praktiska tillämpningar.

En annan betydande gestalt från den islamska guldåldern, al-Biruni, född 973 e.Kr., gjorde framsteg inom sfärisk trigonometri. I hans arbete "Kitab al-Muhitdiskuterade al-Biruni metoderna för att mäta jordens omkrets och diameter med hjälp av sfärisk trigonometri. Han föreslog användningen av astrolabiet för exakta mätningar av himlakroppars positioner, vilket i sin tur revolutionerade navigation och kartläggning.

Under den europeiska upptäcktsåldern på 15- och 1600-talen spelade sfärisk geometri och trigonometri en avgörande roll när utforskare och navigatörer använde dess principer för att kartlägga och navigera jorden. Utvecklingen av navigationsinstrument som kvadrant och sextant var direkta resultat av tillämpningen av sfärisk geometri och bidrog till den framsteg inom sjöfart och geografisk kartläggning. Sammantaget har sfärisk geometri inte bara varit en teoretisk disciplin utan har också haft en djupgående inverkan på praktiska tillämpningar och vetenskapliga framsteg genom historien.

## 1.1 Axiom och Postulat i Euklides Elementa: En Resa i Matematikens Grundläggande Strukturer

Redan tre århundraden före vår tideräkning formulerade den inflytelserike grekiske matematikern Euklides sitt mästerverk "Elementa". Denna banbrytande bok utgjorde grunden för hela hans geometriska system och vilade på noga utvalda axiom och Postulat, som tillsammans formade den underliggande strukturen för den euklidiska geometrin.

### Axiom:

- A 1. Storheter som är lika med en och samma storhet är sinsemellan lika.
- A 2. När man adderar lika storheter till lika storheter, blir även summorna lika storheter.
- A 3. När lika storheter subtraheras från lika storheter, blir även resterna lika storheter.
- A 4. Storheter som täcker varandra är lika stora.
- A 5. Det hela är större än sin del.

### Postulat:

- P 1. Det fordras att man kan dra en rät linje från en punkt till en annan.
- P 2. Varje begränsad rät linje kan förlängas obegränsat.
- P 3. Kring varje medelpunkt kan man rita en cirkel med given radie.

- *P 4.* Alla räta vinklar är lika.
- *P 5.* När en rät linje träffar två andra räta linjer, och de båda inre vinklarna på samma sida om den skärande räta linjen är mindre än två räta, så kommer de båda räta linjerna, om de förlängs obegränsat, att råka på den sida om den skärande räta linjen där de båda vinklarna ligger som är mindre än två räta.

Euklides fem axiom och fem Postulat utgjorde stommen i den euklidiska geometrin i över två tusen år. Men det var det femte Postulatet som, trots ansträngningar, aldrig kunde bevisas med hjälp av de tidigare fyra. Denna utmaning gav upphov till nya perspektiv och banade väg för vad som senare skulle kallas icke-euklidisk geometri, där det femte Postulatet förkastades eller modifierades.

Det femte och sista Postulatet kunde dock aldrig bevisas med de föregående fyra och detta gav upphov till nya former av geometri som kom att kallas icke-Euklidisk geometri eftersom det femte Postulatet inte används. I denna avhandling kommer vi att använda oss av Postulat 20 som finns i bok II i Elementa. Detta Postulat bevisades utan att använda Postulat 5, vilket gör det applicerbart på sfärisk geometri såväl som planär.

## 2 Sfärisk geometri, hur definieras det?

### 2.1 Sfäriska Linjer

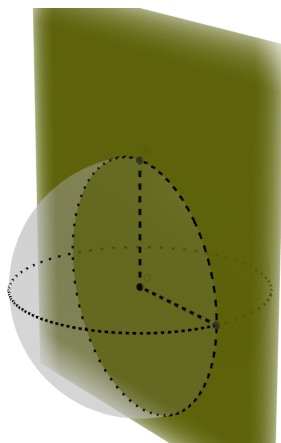
Sfärisk geometri stiger fram som en distinkt gren av matematiken, skiljande avsevärt från den planära geometrin. Dess grundläggande principer förankras i icke-euklidisk geometri, där det femte Postulatet, det så kallade parallellPostulatet, inte tillämpas på samma sätt som i den välkända euklidiska plana geometrin.

På ytan av en sfär framträder fenomen som bryter mot vår vanliga planära uppfattning om geometriska figurer. Trianglar på en sfär kan, till exempel, ha tre vinkelräta hörn. För att förklara detta koncept, kan vi föreställa oss två individer som börjar sina vandringar från nordpolen och rör sig vinkelrätt ifrån varandra. När de når ekvatorn vänder de sig rakt mot varandra och bildar därmed en triangel med tre vinkelräta hörn – en egenskap som strider mot de konventionella tankarna om plana trianglar.

En central grundbult inom sfärisk geometri är insikten att räta linjer, som vi känner dem i plana geometriska sammanhang, saknas på ytan av en sfär, då dessa alltid skulle vara krökta. Istället introduceras begreppet cirkelbågar, som ersätter de raka linjerna. Det är av vikt att poängtera att detta resonemang grundas på att antalet räta linjer på en sfär är noll, vilket ytterligare understryker skillnaderna gentemot den plana geometrin.

För att visualisera detta koncept, låt oss göra ett mentalt experiment och ställa oss på jorden, som, även om den inte är en perfekt sfär, likväl fungerar för detta ändamål. Antag att vi kan vandra rakt fram från Stockholms universitet till sydpolen, fortsätta i samma riktning till nordpolen, och återvända till campus genom att vandra rakt fram. Trots vår subjektiva upplevelse av att ha gått rakt fram har vi i själva verket följt en stor cirkelbåge runt jorden. Detta exemplifieras i Figur 1 nedan, där en sfär skärs av ett plan i origo, och cirkelbågen illustrerar vår vandring snarare än en rak linje. Vi betecknar sådana bågar som storcirkelbågar och betraktar dem som linjer på sfären för att underlätta resonemanget.

Det sfäriska perspektivet på linjer öppnar upp en fascinerande värld av geometriska abstraktioner och utmanar vår konventionella förståelse av rum och form. Denna komplexa dynamik av sfäriska linjer förblir en hörnsten i icke-euklidisk geometri och en nyckelaspekt av den rika matematiska arvet genom tiderna.



Figur 1. Storcirkel skär sfären.

I Figur 1 ovan ser vi en storcirkelskiva skapad av ett plan som skär en sfär. Av detta följer våra första definitioner nedan:

**Definition 2.1.** När något plan skär en sfär genom dess center så bildas en storcirkel.

**Definition 2.2.** När något plan skär en sfär någon annan stans än genom dess centrum så bildas en småcirkel.

Det följer av Definition 2.1 att radien och således även diametern av en storcirkel är densamma som sfärens radie och diameter. Som tidigare nämnt är sfärisk geometri så kallad icke-Euklidisk geometri. Det är dock bara Postulat 5 som inte används inom sfärisk geometri. Euklides Postulat 20 är ekvivalent med triangelolikheten, som alltså är applicerbar på sfären. Vi kommer senare i avhandlingn använda oss av triangelolikheten som säger att summan av två sidor av en triangel alltid är större än eller lika med den tredje sidan.

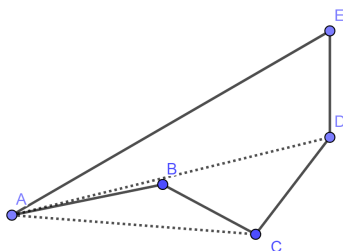
Med dessa definitioner i bagaget tar vi oss vidare med påståendet att den kortaste vägen mellan två punkter på sfären utgörs av en cirkelbåge på en storcirkel.

**Sats 2.1.** Det kortaste avståndet mellan två punkter på sfären utgörs av den storcirkels cirkelbåge som går mellan dem.

*Bevis.* Låt  $A, B$  och  $C$  vara punkter i planet. Fall 1:

Om  $C$  är en punkt som inte ligger på  $AB$  kommer  $AB$  alltid att vara kortare än  $ACB$ , vilket är ekvivalent med *triangelolikheten* som säger att summan av längden på två sidor i en triangel alltid överstiger längden på den tredje sidan.

Fall 2:



Figur 2. Kortast avstånd.

Fall 2:

Betrakta Figur 2 som illustrerar fem punkter i planet och linjer mellan dem. Vi vill visa att avståndet  $AE$  är kortare än sträckan  $ABCDE$ . Enligt resonemanget i föregående fall har vi att  $AC < ABC$ . På samma sätt är  $AD < ACD$  och slutligen är då  $AE < ADE$ . Vi kan uttrycka detta som att för någon sträcka  $X_1X_n$  gäller att  $X_1X_n < X_1X_n - 1X_n$  givet att  $X_n - 1$  inte ligger på linjen  $X_1X_n$ .

Fall 3:

Vi föreställer oss nu en rutt, liknande Figur 2, som istället för räta linjer har kurvade segment mellan punkterna, något som kan liknas vid en vanlig skogspromenad där stigarna slingrar sig genom skogen. Vi vill ta oss från punkt  $A$  till  $E$  på kortast möjliga väg. Om vi då approximerar sträckorna mellan varje punkt till en rät linje, fågelvägen får vi sträckorna  $AE, AB, BC, CD, DE$ . Med denna approximation av

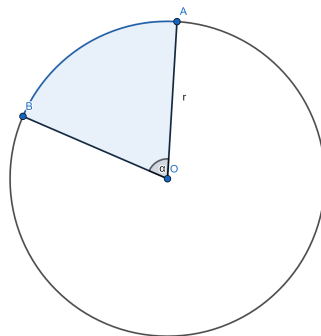


en kurva till en rät linje kan vi använda samma argument som i fallen 1 och 2 för att övertyga oss om att den snabbaste vägen från  $A$  till  $E$  är de facto sträckan  $AE$ .

Eftersom triangelolikheten gäller i såväl planet som på sfären innebär det att beviset är överförbart på den sfäriska motsvarigheten till planets linjer, nämligen storcirkelbågar. Därmed har vi bevisat att den kortaste sträckan mellan  $A$  och  $B$  är den storcirkelbåge  $AB$  som går mellan dem.  $\square$

Vi ser att det kortaste avståndet mellan vilka två punkter som helst på sfären är den storcirkelbåge som går mellan dem (antipodala punkter har oändligt med storcirkelbågar som förbinder dem). Innan vi går vidare till sfäriska trianglar och dess egenskaper fortsätter vi ett stycke till med linjer, eller storcirkelbågars egenskaper på sfären. I nästa sats visar vi hur vinkeln mellan två punkter i origo är ekvivalent med storcirkelbågen, vars längd dras mellan punkterna.

**Sats 2.2.** *Avståndet mellan två godtyckliga punkter  $A$  och  $B$  är ekvivalent med vinkeln mellan dessa i origo  $O$ .*



Figur 3. Cirkelsektor av storcirkel.

Betrakta Figur 3 ovan som en storcirkelbåge i planet, denna skär en enhetssfär i punkterna  $A$  och  $B$ . Detta skapar två cirkelbågar, varav en är längre och en är kortare. Vi intresserar oss för den mindre vinkeln i  $O$  som vi kan kalla för  $\alpha$ . Vi vill då visa att sträcka  $AB = \alpha$ . Vi påminner oss om att vi räknar ut en cirkelbåge genom att dividera vinkeln  $\alpha$  med  $2\pi$  och sedan multiplicera med cirkelns hela omkrets alltså  $2\pi \cdot r$ .

*Bevis.* Låt  $AB$  vara en godtycklig cirkelbåge på enhetscirkeln. Då gäller

$$AB = \frac{\alpha}{2\pi} \cdot 2\pi r = \alpha r.$$

Eftersom enhetscirkeln har radien 1 har vi visat att  $AB = \alpha$ .  $\square$

Med andra ord, om vi försöker hitta den kortaste sträckan mellan två punkter på sfären, kommer vi att se att längden av sträckan  $AB$  är mindre än längden av någon annan båge på sfären med samma radie som sfären själv. Eftersom storcirkelbågar har exakt samma radie som sfären och inga kortare bågar med samma radie finns, är den kortaste sträckan mellan två punkter på sfären en storcirkelbåge.

Det kan heller inte existera några parallella linjer på en sfär. Eftersom alla linjer är cirklar kommer dessa per definition att skära varandra vid minst två punkter på sfären. Till skillnad från två punkter i planet mellan vilka endast en linje kan dras har vi på sfären förhållandet att mellan två punkter (förutsatt att dessa är antipodala punkter) kan oändligt många linjer dras i deras egenskap av storcirklar på sfären.

## 2.2 Sfäriska vinklar

För att undvika förvirring i avhandlingn behöver vi också definiera sfäriska vinklar.

**Definition 2.3.** *En sfärisk vinkel är den vinkel som ligger mellan två storcirklar som skär varandra någonstans på sfären. Den mäts i vinkeln mellan planen som innehåller storcirklarna.*

## 2.3 Antipodala Punkter, Longitud och Latitud

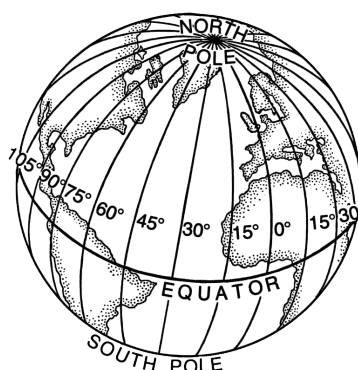
Vår resa genom sfärisk geometri fördjupas när vi utforskar begreppet *antipodala punkter*.

**Definition 2.4.** *Två punkter på en sfär betraktas som antipodala om avståndet mellan dem är, mätt i grader,  $180^\circ$ .*

Av definitionen ovan följer att alla par av punkter som inte uppfyller denna definition är *icke-antipodala punkter*.

I jordens kontext identifierar vi dessa antipodala punkter som Nordpolen och Sydpolen. Genom att koppla dessa punkter har vi infört longitud, linjer som sträcker sig från pol till pol, med ursprung i den berömda Greenwich-meridianen i London. Att mäta vinkelavståndet öst och väst från denna meridian ger oss vår longitud. Trots att vi teoretiskt sett skulle kunna dra oändligt många longituder, begränsar vi oss till några få för navigationsändamål.

Latitud, å andra sidan, representeras av småcirkel (förutom ekvatorn, som är en storcirkel) som skär jordklotet vinkelrätt mot longituderna. Det är den vinkel mellan vår position och ekvatorn och varierar mellan  $0^\circ$  och  $90^\circ$  nord eller syd. Denna sfäriska kompass ger oss verktyg för att kartlägga och navigera genom det komplexa nätverket av linjer och cirkel som utgör sfärisk geometri.



Figur 4. Longituder på jordklotet

De längdenheter som används för att mäta avstånd på en sådan skala kallas för *nautiska mil*, *sjömil* eller *bågminut*. Dessa motsvarar  $\frac{1}{60}^\circ$ . För att mäta avstånd till sjöss och inom astronomi, såväl historiskt som i nutid har vi använt grader med utgångspunkter i Greenwich meridianen, och ekvatorn, som de två centrala planen på jordklotet. Detta innebär att vi kan översätta avstånd i vinklar till sjömil genom att multiplicera vårt resultat i grader med 60. Just bågminut kommer av att vi historiskt översatt vinkeltal till vinkelminuter och timmar på ett sådant sätt att  $0^\circ \geq 360^\circ$  motsvarar  $0h \geq 24h$ . Vi kommer ha användning av denna kunskap när vi i senare kapitel illustrerar hur vi kan använda de olika sfäriska formlerna för att beräkna avstånd på jordklotet och den celestiska sfären.

## 3 Sfäriska Trianglar

Trianglar på sfären är uppbyggda av tre punkter på sfären och de linjesegment som dras mellan dem. I planet har vi punkter och linjer medan vi på sfären har punkter och storcirkelbågar.

**Definition 3.1.** *En sfärisk triangel består av punkter  $A$ ,  $B$  och  $C$  på sfären, vilka definierar triangelns hörn, och kanterna definieras av de storcirkelbågar som utgör det kortaste avståndet mellan dessa punkter.*

En väsentlig skillnad mellan planära och sfäriska trianglar är att de sistnämnda har en vinkelsumma som alltid är större än  $180^\circ$  och alltid mindre än  $540^\circ$ . Det senare innebär en triangel som upptar nästan halva sfären. Sättet vi hanterar detta på är att för varje vinkel i en sfärisk triangel har vi en så kallad överskottsvinkel eller supplement till en vinkel. Vi kommer i ett par segment nedan att bevisa dessa påståenden.

### 3.1 Omkrets på sfäriska trianglar

Vi ska nu prata lite om omkretsen av sfäriska trianglar, eller närmare bestämt en övre begränsning av omkrets. Det nämndes nyligen att vinkelsumman, och alltså då sidlängderna alltid är mindre än  $540^\circ$  eftersom man inom sfärisk geometri oftast kräver att en sida inte får överskrida  $180^\circ$  av två anledningar; först av allt kan vi alltid ersätta en triangel med sidlängd större än  $180^\circ$  med en som är mindre, helt

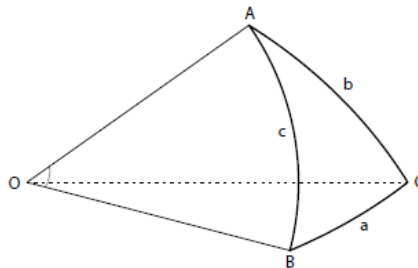
enkelt genom att sätta ihop ändpunkterna på ändra sidansfären istället. För det andra blir matematiken betydligt mer komplicerad om vi ska tillåta dessa märkliga entiteter. Vi ska nu bevisa den övre begränsningen av omkrets för sfäriska trianglar. Vi håller oss till den övre begränsningen eftersom den undre kan bli så liten som vi själva kan rita. För beviset tar vi hjälp av följande lemma:

**lemma 3.1.** *För någon sfärisk triangel gäller att den tredje sidan inte kan överstiga summan av de andra två.*

För att övertyga oss om detta betraktar vi Figur 5 nedan. Om vi undersöker vinklarna vid  $O$  och föreställer oss att vi låter linjesegmentet  $OA$  falla ner på planet  $OBC$  så ser vi att vinklarna  $\angle AOB, \angle AOC$  får plats i vinkeln  $\angle O$  i planet  $OBC$ . Om vi nu reser  $OA$  upp igen växer de två vinklarna och vinkelsumman måste därmed också växa. Vi nöjer oss med detta något informella argument för lemmat med tanke på att Euklides står på vår sida i detta!

Vi minns att Euklides Proposition 20 i Elementa bok II är ekvivalent med triangelolikheten. Denna är överförbar till sfärisk geometri ty Postulat 5 behövdes inte för att bevisa denna Proposition. Vi är nu redo att tackla beviset!

**Sats 3.2.** *Summan av sidorna på en sfärisk triangel kan inte överstiga  $360^\circ$ .*



Figur 5. *En sfärisk triangel.*

*Bevis.* Betrakta Figur 5 som föreställer en sfärisk triangel  $\triangle ABC$  på en sfär med centrum i origo  $O$ . Vi drar räta linjer mellan  $ABC$  och får en planär triangel. Vi drar linjer till  $O$  och får en tetraed  $OABC$ . De nio vinklarna i tetraeden, då vi utesluter vinklarna i  $\triangle ABC$  måste producera  $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$  eftersom dessa nio vinklar bildar tre planära trianglar. Då, eftersom summan av två av dessa nio vinklar finns vid  $A$  använder vi lemmat för att konstatera att summan av dessa två överstiger  $\angle A$  i den planära triangeln  $\triangle ABC$ . Analogt för vinkelparen vid  $B$  och  $C$ . Vi kallar summan av sidorna för  $S$  och vinklarna vid origo för  $VO$ . Vi har då uttrycket

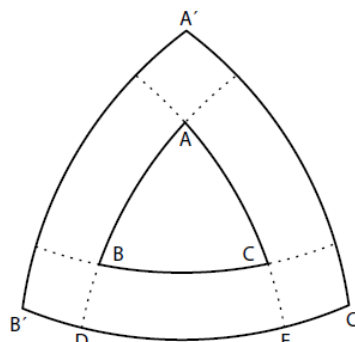
$$S = VO = 540^\circ - (\text{vinklar vid } A + \text{vinklar vid } B + \text{vinklar vid } C) < 540^\circ - (\angle A + \angle B + \angle C)$$

$$\Leftrightarrow S = 540^\circ - 180^\circ = 360^\circ.$$

□

### 3.2 Den polära triangeln

Den polära triangeln kommer till stor nytta för flera beräkningar inom sfärisk trigonometri. Vi kan börja med att definiera den genom att betrakta Figur nedan.



Figur 6. *Den polära triangeln.*

**Definition 3.2.** *Betrakta figur 6. Låt  $\triangle ABC$  vara en sfärisk triangel med storcirkelbågen  $AB$ . Förläng denna båge så att den bildar en ekvator. Vi kan då sätta en punkt  $C'$  som pol till denna ekvator om vi följer en vinkelrät linje från  $AB$  genom  $C$  som Figur 6 illustrerar. Vi gör samma sak med resterande sträckor och har nu en ny triangel  $\triangle A'B'C'$  som bildas av polerna. Detta är den polära triangeln till  $\triangle ABC$ .*

En vacker egenskap hos polära trianglar är att den polära triangeln till den polära triangeln är den ursprungliga triangeln.

**Sats 3.3.** *En polär triangelns polära triangel är den ursprungliga triangeln.*

*Bevis.* Förläng cirkelbågarna i Figur 6 så att de skär den yttre triangeln. Vi ser då att eftersom  $C'$  är en pol till  $AB$  och  $A'$  är en pol till  $BC$  så ligger  $C'$  och  $A'$  med  $90^\circ$  från  $B$ . Detta bevisar att  $B$  är en pol till sträckan  $A'C'$ . Analogt för de andra cirkelbågarna.  $\square$

### 3.3 Den Polära Dualitetssatsen

En annan viktig egenskap hos polära trianglar är den så kallade polära dualitetssatsen. Vi ska först definiera vad som menas med ett supplement till en vinkel innan vi går vidare med att bevisa den polära dualitetssatsen.

**Definition 3.3.** *Supplementet till en vinkel  $\alpha$  är  $180^\circ - \alpha$*

**Sats 3.4.** *En polär triangelns sidor är lika med motstående vinklars supplement i den ursprungliga triangeln.*

*Bevis.* Betrakta triangeln i Figur 6 i föregående kapitel. Per konstruktion ligger punkterna  $D$  och  $E$   $90^\circ$  ifrån punkten  $A$  av vilket följer att  $\angle A = DE$ . Vi observerar också att  $B'$  är pol till sträckan  $ACE$ , analogt är  $C'$  pol till sträckan  $ABD$ . Från detta följer att sträckorna  $B'E$  och  $C'D$  båda är  $90^\circ$  långa. Vi kan då uttrycka följande

$$B'C' = B'E + C'D - DE = 180^\circ - DE = 180^\circ - \angle A.$$

Analogt bevisas resterande sidor.

Vi har nu bevisat att sidorna i en polär triangel är supplement till motsvarande vinkel i originaltriangeln. Så för att bevisa att vinklarna hos den polära triangeln är supplement till sidorna hos den ursprungliga triangeln tar vi åter en titt på Figur 6. Vi har per konstruktion att  $B$  är pol till sträckan  $A'C'$  och  $C$  är pol till sträckan  $A'B'$ . Då har vi med samma resonemang att  $\angle A' = 180^\circ - BC$ .

Analogt bevisas resterande sidor.  $\square$

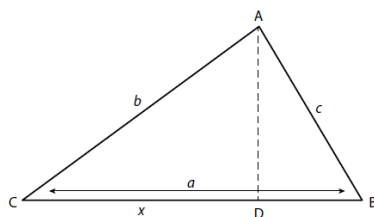
Denna sats ger oss alltså ett kraftfullt verktyg för att ta reda på en triangelns sidor om vi känner till dess vinklar och vice versa.

## 4 Sfärisk trigonometri

Vi ska i detta avsnitt härleda flera trigonometriska identiteter och slutligen de sfäriska sinus- och cosinus-satserna. Men innan vi kommer in på identiteterna ska vi först färdas tillbaka i tiden till Euklides, och hans verk *Elementa*. I processen att skriva denna avhandling kastades jag fram och tillbaka mellan olika tidsepoker och fann det bitvis svårt att navigera mellan dessa; huruvida fokus ska ligga på den historiska utvecklingen av forskningsfältet eller på fynden som gjorts i en modern tappning. Jag väljer att ta med detta giftemål mellan historiska insikter och modern matematik för att illustrera vilket genomslag såväl Euklides, som Pythagoras haft även på detta matematiska område.

*Van Brummelen* tar sig friheten att översätta Euklides *Elementa* bok II, Proposition 13 som hanterar spetsvinkliga trianglar. Vi betraktar Figur 7 nedan, vilken Euklides beskriver som:

*"In acute-angled triangles the square on the side subtending the acute angle is less than the squares on the sides containing the acute angle by twice the rectangle contained by one of the sides about the acute angle, namely that on which the perpendicular falls, and the straight line cut off within by the perpendicular towards the acute angle" [1].*



Figur 7. *Euklides Bevis.*

Vi betraktar återigen Figur 7 för den potentiellt anakronisktiska översättningen till modern matematisk symbolism:

I triangeln  $\triangle ABC$  med en spetsig vinkel vid  $C$  och en vinkelrät linje som släpps från  $A$  på  $BC$  vilket definierar punkten  $D$ , gäller  $c^2 = a^2 + b^2 - 2AD \cdot BC$ .

*Van Brummelen* fortsätter sedan att beskriva hur  $BC = a$  och  $AD = b \cos C$  (vilket jag själv får till  $AD = b \sin C$ , vilka är ekvivalenta då  $AD = CD$ ) och drar sedan slutsatsen att Euklides hade cosinussatsen i sina händer över ett århundrade före det att Hipparchus uppfann trigonometrin.

Vi följer nu *Van Brummelen's* parafrasering av Euklides bevis då han konstaterar att:

*Bevis.* Låt  $x = CD$ , som vi minns är samma som  $b \cos C$  (för att detta ska vara sant krävs det att  $AD = CD$ ). Då finner Euklides att

$$a^2 + x^2 = 2ax + (a - x)^2.$$

Vi lägger nu till  $DA^2$  till båda sidor så att

$$DA^2 + a^2 + x^2 = DA^2 + 2ax + (a - x)^2.$$

Vi applicerar Pythagoras sats och ser att  $x^2 + DA^2 = b^2$  och  $(a - x)^2 + DA^2 = c^2$ . Dessutom känner vi sedan tidigare till att  $x = b \cos c$  vilket ger oss

$$a^2 + b^2 = 2ax + c^2 \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

□

Beviset för den sfäriska cosinussatsen kommer senare i detta kapitel och är en riktig grundbult inom den sfäriska trigonometrin.

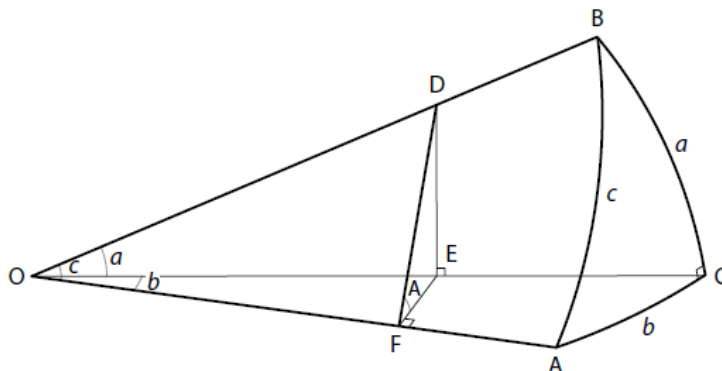
Den sfäriska cosinussatsen kan användas för att beräkna en hörnvinkel om man har de tre sidorna i en sfärisk triangel givna, eller beräkna den återstående sidan om man har två sidor och den mellanliggande hörnvinkeln given. Övriga hörnvinklar beräknas lämpligen med någon av de sfäriska cotangensformlerna, som inte berörs i denna avhandling, eller med den sfäriska sinussatsen som är enklare.

Den duala cosinussatsen kan på motsvarande sätt användas om de tre hörnvinklarna är givna (till skillnad från en plan triangel är sidorna i en sfärisk triangel bestämda om alla tre hörnvinklarna är det) eller om två hörnvinklar och den mellanliggande sidan är given. Även här används lämpligen cotangensformlerna eller den sfäriska sinussatsen för att beräkna de båda övriga sidorna.

Innan vi tar oss an bevisen för cosinus- och sinussatsen på sfären vill vi etablera vissa essentiella trigonometriska identiteter. Detta får inleda följande kapitel!

## 4.1 Trigonometriska identiteter på sfären

Vi ska nu med hjälp av Figur 8 nedan, härleda flertalet trigonometriska identiteter på sfären.



Figur 8. *Tetraed på sfären.*

Vårt mål är att kunna bearbeta informationen kring den sfäriska triangeln  $\triangle ABC$  som om den vore rätvinklig. Då det är sant att mycket små sfäriska trianglar kan approximeras till planära motsvarigheter är det inte så att vi alltid kan arbeta med små trianglar på en himmlakropp. Vi behöver därför konstruera en rätvinklig planär triangel bakom den sfäriska för att kunna konvertera vinklarna  $\angle A$  och  $\angle B$  från sfäriska till planära. Vi börjar med att behandla  $\angle A$  som en vinkel i  $OAC$  och en vinkel i  $OAB$ , motsvarande gör vi för vinkel  $\angle B$ . Såväl  $OAC$  som  $OAB$  är storcirkelsektorer skapade av plan som skär sfären genom origo. Vi påminner oss om att den planära motsvarigheten till en storcirkel är en linje. Vi vill därför kunna uttrycka vinklarna  $\angle A$  och  $\angle B$  som vinklar mellan linjer snarare än plan. Vi väljer därför en punkt  $D$  på  $OB$  och drar sedan en vinkelrät linje från  $D$  till punkten  $E$  på  $OC$  och sedan en vinkelrät linje från  $E$  till punkten  $F$  på  $OA$ . Detta formar en rätvinklig triangel  $\triangle DEF$  inuti sfären. Från konstruktion har vi att  $\triangle ODE$ ,  $\triangle DEF$  och  $\triangle OEF$  är rätvinkliga. Vid en första anblick ser även  $\triangle ODF$  ut att vara rätvinklig men att gissa duger inte, vi vill säkerställa att så är fallet. Vi börjar med att konstruera hypotenusan  $OD^2$  till vår förhoppningsvis rätvinkliga triangel och bevisar att det faktiskt är en rätvinklig triangel med Pytagoras sats.

$$\text{Bevis. } OD^2 = OE^2 + DE^2 = (OE^2 + EF^2) + (DE^2 - EF^2) = OF^2 + DF^2 \quad \square$$

Vi kan nu konstatera att  $\triangle ODF$  är rätvinklig i likhet med resterande sidor av tetraedern  $ODEF$ . Från detta följer att  $DF$  är vinkelrät mot  $OA$ , precis som  $EF$ , vilket i sin tur för med sig att vinkeln  $\angle DFE$  är vinkeln mellan planen  $OAC$  och  $OAB$  och är alltså lika med vinkeln  $\angle A$ .

Utifrån denna konstruktion kan vi härleda flertalet trigonometriska identiteter genom att först välja en kvot mellan två linjesegment, exempelvis

$$\sin a = \frac{DE}{OD}$$

och sedan lägga till ytterligare en kvot

$$\sin a = \frac{DE}{DF} \cdot \frac{DF}{OD} = \sin A \cdot \sin c.$$

Detta gör att vi kan tolka dessa två kvoter som trigonometriska funktioner.

Vi har nu härlett en identitet och på samma sätt kan vi härleda sex ytterligare identiteter:

$$\sin b = \frac{FE}{OE} = \frac{FE}{DE} \cdot \frac{DE}{OE} = \cot A \tan a,$$

$$\cos A = \frac{FE}{FD} = \frac{FE}{OF} \cdot \frac{OF}{FD} = \tan b \cot c,$$

$$\cos c = \frac{OF}{OD} = \frac{OE}{OD} \cdot \frac{OF}{OE} = \cos b \cos a.$$

När vi konstruerade vår triangel valde vi godtyckliga punkter  $A$ ,  $B$  och  $C$ . Genom att byta plats på  $A$  och  $B$  och deras motstående sidor  $a$  och  $b$  kan vi härleda ytterligare tre formler:

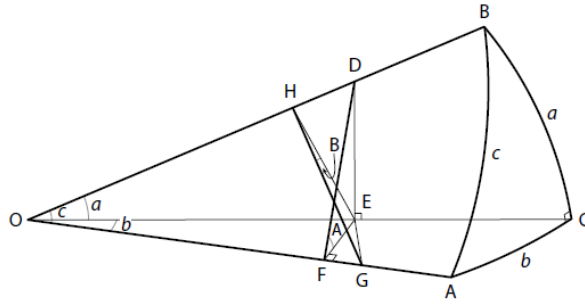
$$\sin b = \frac{DE}{OD} = \frac{DE}{DF} \cdot \frac{DF}{OD} = \sin B \sin c,$$

$$\sin a = \frac{FE}{OE} = \frac{DE}{OE} \cdot \frac{FE}{DE} = \tan b \cot B,$$

och slutligen

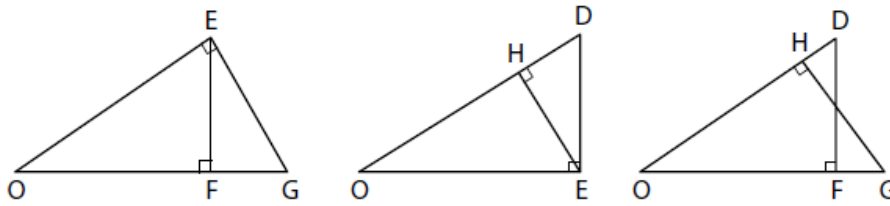
$$\cos B = \frac{FE}{DF} = \frac{FE}{OF} \cdot \frac{OF}{DF} = \tan a \cot c.$$

Dessa sju identiteter är de vi kan härleda från Figur 8. För att få fram resterande tre kan vi antingen ta den algebraiska vägen, eller så konstruerar vi en planär triangel för vinkeln  $\angle B$  också eftersom vi nu saknar identiteter som refererar till både vinklarna  $\angle A$  och  $\angle B$ . Detta liknar mycket det vi gjorde för vinkeln  $\angle A$ . Observera Figur 8 nedan:



Figur 9. Vinkelrät sfärisk triangel för vinkeln  $\angle B$ .

och låt oss välja en punkt  $G$  på  $OA$  sådan att vi kan dra en vinkelrät linje till  $E$  på  $OC$ . Vi fortsätter med att dra en vinkelrät linje från  $E$  till  $H$  på  $OB$  och slutligen sätter vi ihop  $HG$  och med samma resonemang som i tidigare härledningar och får att  $\triangle OHG$  är rätvinklig och att vinkeln  $\angle B = \angle EHG$ . Vardera av de plan som innehåller  $O$  innehåller nu de trianglar som visas i Figur 10 nedan.



Figur 10. Trianglar i planet från Figur 9.

Tanken är nu att vi väljer någon kvot, exempelvis  $\cos c = \frac{OF}{OD}$  och skjuter in linjesegment likt det vi gjort tidigare och använder oss av de tre planära trianglarna i Figur 10. Detta ger oss

$$\cos c = \frac{OF}{OD} = \frac{OF}{OE} \cdot \frac{OE}{OD} = \frac{EF}{EG} \cdot \frac{EH}{DE} = \frac{EF}{DE} \cdot \frac{EH}{EG} = \cot A \cot B.$$

Två ytterligare identiteter härleds på samma sätt men detta överlämnar vi till läsaren och nöjer oss med att lista de nedan:

$$\cos A = \cos a \cdot \sin B,$$

$$\cos B = \cos b \cdot \sin A.$$

## 4.2 Pythagoras sats på sfären

Vi använder ofta sfärisk trigonometri på väldigt stora sfärer, vilket medför väldigt stora sfäriska trianglar. Dock kan en tänka sig att det går att skapa en planär triangel på en sfär, exempelvis genom att rita en triangel på marken där en står på jordklotet som är en sfär. Denna triangel kommer i all väsentlighet vara en plan triangel. Så om vi låter  $(a, b, c) \rightarrow 0$  får vi en planär motsvarighet till trigonometriska identiteter. Observera till exempel:

### Sfäriska formeln

$$\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$$

$$\cos A = \frac{\tan b}{\tan c}$$

$$\tan A = \frac{\tan a}{\sin b}$$

### Planära Formeln

$$\sin A = \frac{a}{c}$$

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

$$\tan A = \frac{a}{b}.$$

När vi undersöker vad som händer med den tidigare härledda identiteten  $\cos c = \cos a \cos b$  när vi låter  $(a, b, c) \rightarrow 0$  så ser vi att vi landar i  $1 \cdot 1 = 1$ . Om vi däremot använder oss av vår gamla vän MacLauryn's utveckling för cosinus händer det något spännande. Vi påminner oss om att utvecklingen är

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \dots$$

Om nu  $x$  är fantastiskt litet räcker det för oss att approximera de första två termerna i högerledet. Vi kan då skriva vår utveckling som

$$1 - \frac{c^2}{2} \approx \left(1 - \frac{a^2}{2}\right)\left(1 - \frac{b^2}{2}\right).$$

När vi utvecklar detta kan vi skriva uttrycket som

$$c^2 = a^2 + b^2 + O(a^2b^2) + O(c^2).$$

När vi då låter  $(a, b, c) \rightarrow 0$  så blir den sista termen försummbart liten och vi lämnas kvar med uttrycket

$$c^2 = a^2 + b^2$$

som vi känner igen som Pythagoras sats i planet. Även om likheten inte är uppenbar vid första anblick kan vi se att den sfäriska motsvarigheten till Pythagoras sats är

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

### 4.3 Sfäriska Sinussatsen

Sfäriska sinussatsen är den sfäriska motsvarigheten till den välkända sinussatsen inom plan geometri. Denna sats är ett nyckelelement inom sfärisk trigonometri och används för att beskriva förhållandet mellan sidorna och vinklarna i en sfärisk triangel.

Precis som sin motsvarighet i plan geometri, relaterar sfäriska sinussatsen längderna av sidorna i en sfärisk triangel till sinusvärdet av dess motsvarande vinklar. Detta erbjuder en kraftfull metod för att förstå och analysera geometriska konfigurationer på en sfär.

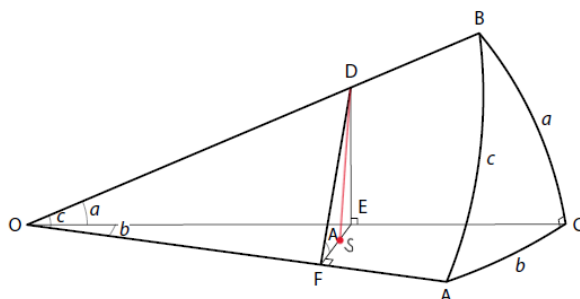
I korthet uttrycker sfäriska sinussatsen relationen som styr vinklarna och sidorna i sfäriska trianglar, och dess tillämpningar sträcker sig över områden som astronomi, navigation och kartografi där sfärisk geometri spelar en central roll.

Den sfäriska motsvarigheten till sinussatsen lyder som följer;

**Sats 4.1.** För en sfärisk triangel  $\triangle ABC$  gäller

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

*Bevis.* Vi betraktar Figur 11 nedan. Den är lik Figur 8 i kapitel 4.1, men för tydlighetens skull går vi igenom linjerna och dess förhållanden igen. Vi väljer först en punkt  $D$  på  $OB$  från vilken vi drar en linje  $DE$  vinkelrät mot  $OC$  och en linje  $DF$  vinkelrät mot  $OA$ . I planet  $OAC$  drar vi linjen  $FS$  vinkelrät mot  $OA$  samt  $ES$  vinkelrät mot  $OC$ . Dessa vinkelräta linjer möts sedan i punkten  $S$  som vi sätter ihop med  $P$  och  $O$  för triangeln  $\triangle POS$ . Vi använder samma resonemang som tidigare, i Figur 8, och får att vinkeln  $\angle DFS = \angle A$  i den sfäriska triangeln  $\triangle ABC$ . På liknande sätt är  $\angle DES = \angle C$ ,  $\angle BOC = a$ ,  $\angle AOC = b$  och  $\angle AOB = c$ . I likhet med tidigare (kap 4.1) vill vi nu övertyga oss om att  $DS$  är vinkelrät mot planet  $AOC$ . Vi har per konstruktion att  $OF$  är vinkelrät mot både  $DF$  och  $FS$  och alltså mot hela planet  $DFS$ . Detta innebär att  $OF$  är vinkelrät mot  $DS$  då detta är en linje i planet  $DFS$ . Med samma resonemang hävdar vi att  $OE$  är vinkelrät mot  $DS$ , som i sin tur för med sig att  $DS$  är vinkelrät mot hela planet  $OAC$  i allmänhet och mot  $OS$ ,  $SF$  och  $SE$  i synnerhet. Således är  $\triangle DFS$  och  $\triangle DES$  rätvinkliga.



Figur 11. *Bevis för sinussatsen på sfären.*



Från de rätvinkliga trianglarna  $\triangle OFD$  och  $\triangle OED$  har vi följande förhållanden;  
 $DF = OD \sin c$  och  $DE = OD \sin a$ . Vi har också att  $DS = DF \sin \angle DFS = DF \sin A$ ,  $DS = DE \sin \angle DES = DE \sin C$ . Alltså är  $DF \sin A = DE \sin C$  och eftersom  $DF = OD \sin c$  och  $DE = OD \sin a$  har vi att  $OD \sin c \sin A = OD \sin C \sin a = OD \frac{\sin A}{\sin a} = OD \frac{\sin C}{\sin c}$ . Analogt bevisas att  $OD \frac{\sin A}{\sin a} = OD \frac{\sin B}{\sin b}$ .  $\square$

#### 4.4 Sfäriska Cosinussatsen

Sfäriska cosinussatsen utgör den sfäriska motsvarigheten till den klassiska cosinussatsen i plan geometri. Denna sats är en fundamentell byggsten inom sfärisk trigonometri och tjänar som ett kraftfullt verktyg för att förstå förhållandena mellan vinklar och sidor i sfäriska trianglar.

På liknande sätt som i plan geometri relaterar sfäriska cosinussatsen längderna av sidorna i en sfärisk triangel till cosinus av dess motsvarande vinklar. Denna relation erbjuder en djupare insikt i sfärisk geometri och möjliggör noggranna analyser av sfäriska konfigurationer.

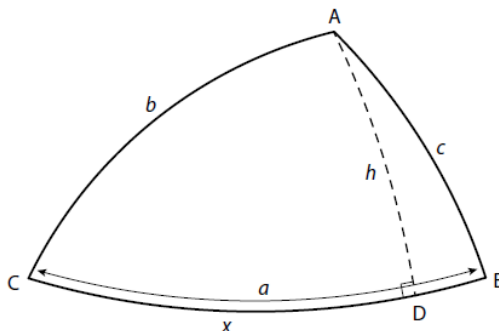
Sfäriska cosinussatsen är av central betydelse inom ämnen som astronomi, navigation och geografi där sfärisk geometri spelar en avgörande roll. Genom att ge oss verktyg för att kvantifiera och förstå de sfäriska dimensionerna, möjliggör denna sats en mätning av rymdens geometriska förhållanden.

Den sfäriska motsvarigheten till cosinussatsen lyder som följer;

**Sats 4.2.** För en sfärisk triangel  $\triangle ABC$  gäller

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C.$$

*Bevis.* Betrakta Figur 12 som föreställer den sfäriska triangeln  $\triangle ABC$ . Vi drar en vinkelrät linje från punkten  $A$  ner till punkten  $D$  som ligger på linjen  $BC$ . Detta delar av  $\triangle ABC$  i två vinkelräta trianglar.



Figur 12. *Bevis för cosinussatsen på sfären.*

Vi använder oss nu av Pythagoras sats på sfären på de två rätvinkliga trianglarna

$$\cos b = \cos h \cos x$$

och

$$\cos c = \cos h \cos(a - x).$$

Vi vill nu lösa för  $h$  eftersom denna variabel är lika för båda trianglarna. Vi kan då skriva uttrycken som

$$\cos h = \frac{\cos b}{\cos x}$$

och

$$\cos h = \frac{\cos c}{\cos(a - x)}.$$

Vi ser att båda högerleden är likställda varandra

$$\begin{aligned} \frac{\cos b}{\cos x} &= \frac{\cos c}{\cos(a - x)} \\ \Leftrightarrow \cos b \cos(a - x) &= \cos c \cos x. \end{aligned}$$

Vi löser nu för  $c$  och för att förenkla uttrycket använder subtraktionssatsen för cosinus som säger att

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$

Vi kan då skriva vårt uttryck som

$$\cos c \cos x = \cos b(\cos a \cos x + \sin a \sin x)$$

$$\Leftrightarrow \cos c = \cos b \cos a + \sin a \cos b \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \cos c = \cos b \cos a + \sin a \cos b \tan x.$$

Enligt de tidigare presenterade trigonometriska identiteterna så gäller  $\cos A = \tan b \cot c$  och  $\cot a = \frac{\cos a}{\sin a}$ . Vi applicerar detta och får att

$$\tan x = \frac{\cos C}{\cot b} = \frac{\cos C}{\frac{\cos b}{\sin b}} = \cos C \frac{\sin b}{\cos b}.$$

Vi kan nu ersätta  $\tan x$  i vårt uttryck och få

$$\cos c = \cos b \cos a + \sin a \cos b \cos C \frac{\sin b}{\cos b}$$

$$\Leftrightarrow \cos c = \cos b \cos a + \sin a \sin b \cos C.$$

□

Två andra formler härleds analogt och lyder

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

$$\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B.$$

Denna sats kan användas för att beräkna en hörnvinkel om de tre sidorna i en sfärisk triangel är givna, eller beräkna den återstående sidan om två sidor och den mellanliggande hörnvinkeln är givna.

## 4.5 Alternativt bevis av Sfäriska Sinussatsen

**Sats 4.3.** *Den sfäriska motsvarigheten till sinussatsen är*

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

*Bevis.* Från cosinussatsen har vi att

$$\sin b \sin c \cos A = \cos a - \cos b \cos c.$$

Vi kvadrerar uttrycket och får

$$\sin^2 b \sin^2 c \cos^2 A = \cos^2 a - 2 \cos a \cos b \cos c + \cos^2 b \cos^2 c.$$

Vi kan skriva vänsterledet som

$$\sin^2 b \sin^2 c - \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A$$

eller

$$1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cos^2 c - \sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A.$$

Vi har då att

$$\sin^2 b \sin^2 c \sin^2 A = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c.$$

Vi låter nu någon positiv mängd  $X$  definieras som

$$X^2 \sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2 \cos a \cos b \cos c.$$

Då har vi från tidigare ekvation att

$$X^2 = \frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} \Rightarrow X = \pm \frac{\sin A}{\sin a}.$$

Eftersom vi inte kan ha en negativ vinkel så faller den negativa delen bort efter rotberäkningen och kvar blir alltså den positiva delen  $X = \frac{\sin A}{\sin a}$ .

Med samma resonemang kan vi från  $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A$  härleda att  $X = \frac{\sin B}{\sin b}$ , och från  $\cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B$  härleds att  $X = \frac{\sin C}{\sin c}$ . Således drar vi slutsatsen att

$$X = \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}.$$

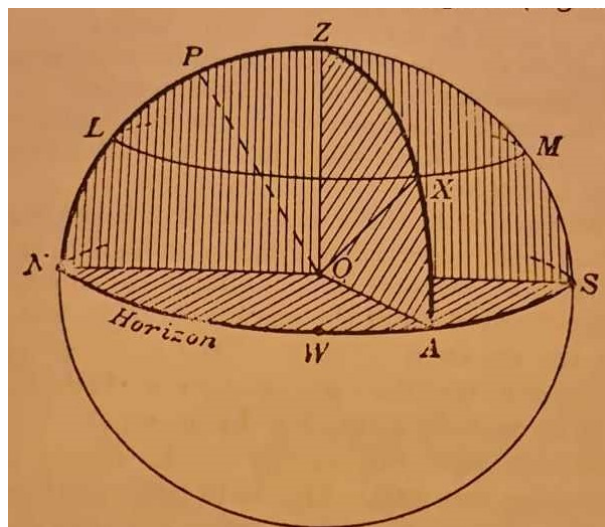
□

Vi har nu härlett fundamentala identiteter och satser för att på ett effektivt sätt kunna navigera såväl på jordklotet som på den celestiska sfären. Vi beger oss härifrån till användningsområden för att få några praktiska exempel på hur dessa kan tillämpas. Även om det finns betydligt fler användningsområden väljer jag att fokusera på astronomi följt av navigation i kapitlen nedan.

## 5 Applikationer på Astronomi

### 5.1 Altitud, Zenitavstånd och Azimut

I detta avsnitt undersöker vi användningen av sfärisk geometri inom astronomi genom att introducera himlens geometriska koordinater: altitud, zenitavstånd och azimut. Dessa koordinater, illustrerade i Figur 13, spelar en central roll i himmelsobservationer och bidrar till en djupare förståelse av objektens position och rörelser på den himmelska sfären.



Figur 13. Den celestiska sfären.

Betrakta Figur 13 där vi låter  $O$  vara observatören på jordklotet, som är centrum för himlens sfären. Låt  $Z$  vara zenit, som är punkten på den celestiska sfären vertikalt över  $O$ . Linjen  $OZ$  som dras mellan, kan ses fortsätta rakt igenom jordens centrum. Det plan som ligger vinkelrätt mot  $OZ$  genom  $O$  kallas för horisonten. Denna horisont delar den celestiska sfären i två hemisfärer. Vi låter  $X$  vara en stjärnas position på den celestiska sfären vid en given tidpunkt. I planet  $ZXA$  kallas vinkeln  $\angle AOX$  eller storcirkelbågen  $AX$  för *altitud* och förkortas med  $a$ . Eftersom  $OZ$  ligger vinkelrätt mot horisonten är storcirkelbågen  $ZA = 90^\circ$ ; därför är  $ZX = 90^\circ - a$ . I denna Figur är  $ZX$  *zenithavståndet* för stjärnan  $X$  och förkortas med  $z$ . Alltså är  $z = 90^\circ - a$ .

I Figur 13 ligger stjärnans position  $X$  på den västra delen av den celestiska sfären. Vi kallar då den sfäriska vinkeln  $\angle PZX$ , eller storcirkelbågen  $NA$  för *azimut*.

## 5.2 Exempel med sinussatsen

Anta att en astronom observerar en stjärna från två olika platser på jorden. Astronomen känner till avståndet mellan de två observationsplatserna och vinkeln mellan stjärnan och horisonten vid varje plats. Astronomen vill nu beräkna stjärnans höjd över horisonten (zenitavståndet) som vi förkortar  $z$ .

Låt  $d$  vara avståndet mellan platserna och  $A$  och  $B$  vara vinklarna mellan stjärnan och horisonten vid de valda platserna.

Då kan vi använda den sfäriska sinussatsen för att beräkna zenitavståndet enligt följande:

$$\frac{\sin z}{\sin(90^\circ - A)} = \frac{\sin B}{\sin(90^\circ - B)}$$

där  $z$  är zenitavståndet.

Antag att vi känner till värdena för  $A = 30^\circ$  och  $B = 45^\circ$ . Vi kan nu beräkna  $z$  genom att använda formeln:

$$\begin{aligned}\frac{\sin z}{\sin(90^\circ - 30^\circ)} &= \frac{\sin(45^\circ)}{\sin(90^\circ - 45^\circ)} \\ \Leftrightarrow \sin z &= \sin(90^\circ - 30^\circ) \cdot \frac{\sin(45^\circ)}{\sin(90^\circ - 45^\circ)}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin(z) = \sin(60^\circ).$$

Vi använder sinusinversen för att lösa ut  $z$  och erhåller

$$z = 60^\circ$$

Således erhåller vi att stjärnans zenitavstånd är  $60^\circ$ .

## 5.3 Kort om deklination, timvinkel och rektascention

Likt latitud och longitud på jordklotet använder vi oss av *deklination* och *rektascention* respektive för den celestiska sfären. Deklinationen uttrycks ofta från  $-90^\circ$  till  $+90^\circ$ , där minus ligger på södra hemisfären och plus på den norra hemisfären från den celestiska ekvatorn. Rektascention mäts från öst till väst med nollpunkt då solens bana skär den celestiska ekvatorn, en punkt vi känner som *vårdtaggämningen*.

Som tidigare nämnt används också måttet *timvinkel* främst för att bestämma ett objekts position på den celestiska sfären. Det är vinkeln mellan timhalvcirkeln som innehåller objektet och den lokala meridianen som mäts västerifrån utmed den celestiska ekvatorn.

När vi specificerar en stjärnas position på den celestiska sfären är en koordinat konstant, nämligen deklinationen, medan timvinkeln ökar mellan  $0h$  till  $24h$ .

## 5.4 Exempel med cosinussatsen

Antag att en astronom

Antag att du är en astronom som vill beräkna vinkelavståndet mellan två planeter  $PX$  och  $PY$ , observerat från jorden vid en specifik tidpunkt. Vi låter följande vara givet:

- Rektascention ( $RA_1$ ) för  $PX$  är  $12h$  eller  $180^\circ$ .
- Deklination ( $DE_1$ ) för  $PX$  är  $+15^\circ$ .
- Rektascention ( $RA_2$ ) för  $PY$  är  $9h$ .
- Deklination ( $DE_2$ ) för  $PY$  är  $-10^\circ$ .

Den sfäriska cosinussatsen ger oss att

$$\cos(c) = \sin(DC_1) \cdot \sin(DC_2) + \cos(DC_1) \cdot \cos(DC_2) \cdot \cos(RA_1 - RA_2).$$

Vi beräknar värdena för de trigonometriska funktionerna och sätter in dessa i formeln och får då

$$\cos(c) = 0.2588 \cdot (-0.1736) + 0.9659 \cdot 0.9848 \cdot (-1)$$

$$\Leftrightarrow \cos c \approx -0.9963.$$

Vi tar nu inversen för cosinus och får fram att

$$c \approx 168.4^\circ.$$

Vinkelavståndet mellan  $PX$  och  $PY$  vid en viss tidpunkt är alltså ungefär  $168.4^\circ$ .

## 6 Navigation med sfärisk trigonometri

Vi seglar vidare in i navigationens värld och ser vilka avändningsområden våra kära sfäriska formler kan ha här.

### 6.1 Exempel med cosinussatsen

Den *sfäriska cosinussatsen* hänvisar till trianglar då alla tre sidor samt en vinkel är känd. Detta är användbart inom astronomi och navigation där tonvikten ligger på avstånd snarare än vinklar. Vi lånar ett exempel ur *Wheeler (1895)* där eleverna ombedes beräkna avståndet mellan då Queenstown, Irland (nu Cobh, latitud  $51.78^\circ\text{N}$ , longitud  $8.18^\circ\text{W}$ ) till Sandy Hook, New York Harbor (latitud  $40.47^\circ\text{N}$ , longitud  $74.13^\circ\text{W}$ ). Denna rutt är känd som det planerade rutten för RMS Titanic år 1912.

För att lösa problemet skapar vi en sfärisk triangel genom att knyta ihop dessa punkter, Queenstown( $Q$ ) och New York( $Y$ ) med Nordpolen( $N$ ) som illustreras i Figur 14 nedan.



Figur 14. RMS Titanic voyage.

Då är  $\widehat{QN} = 90^\circ - 51.78^\circ = 38.22^\circ$  och  $\widehat{YN} = 90^\circ - 40.47^\circ = 49.53^\circ$  samt vinkeln  $\angle N$  är differensen mellan de två längituderna,  $65.95^\circ$ . Om vi sätter in dessa värden i cosinussatsen har vi

$$\cos \widehat{QY} = \cos(38.22^\circ) \cos(49.53^\circ) + \sin(38.22^\circ) \sin(49.53^\circ) \cos(65.95^\circ).$$

Beräknar vi detta erhåller vi  $\cos \widehat{QY} = 45.43^\circ$ . För att översätta detta till nautiska mil multiplicerar vi gradtalet med 60 och får att avståndet mellan Queenstown och New York är ungefär 2726 nautiska mil.

För ett annat exempel påminner vi oss om den polära dualitetssatsen som introducerades i tidigare segment. Vi kan nämligen applicera den på Cosinussatsen för sfäriska trianglar. Det ger oss *sfäriska cosinussatsen för vinklar*.

**Sats 6.1.** *Sfäriska cosinussatsen för vinklar är*

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.$$

Genom tidigare nämnda applikation av *polära dualitetssatsen* på *sfäriska cosinussatsen* erhåller vi

$$\cos(180 - C) = \cos(180 - A) \cdot \cos(180 - B) + \sin(180 - A) \cdot \sin(180 - B) \cdot \cos(180 - c),$$

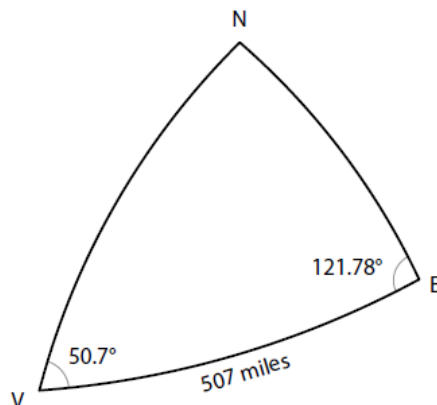
som kan förenklas till

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c.$$

## 6.2 Exempel med cosinussatsen för vinklar

Den *sfäriska cosinussatsen för vinklar* används för att hantera trianglar då två vinklar samt sidan emellan är kända. För att illustrera ett exempel på detta antar vi att vi ska flyga från Vancouver till Edmonton i Kanada över en storcirkelrutt. Vi mäter avståndet som vi flyger såväl som riktningen vid avfärd och landning. I detta läge kan vi använda oss av *sfäriska cosinussatsen för vinklar* så att vi får fram skillnaden i longitud mellan dessa städer, och från detta följer även båda latituder.

Avståndet mellan städerna är 440.9 nautiska mil, vilket dividerat med 60 innebär  $7.35^\circ$ . Vid avfärd har vi riktningen  $50.7^\circ$  öst om nord, och vid landning har vi riktning  $58.22^\circ$  öst om nord. Vi använder oss än igen av nordpolen och skapar en sfärisk triangel mellan städerna och nordpolen enligt Figur 15 nedan.



Figur 15. Vancouver-Edmonton.

Vi kan se att  $\angle V = 50.7^\circ$  och  $\angle E = 180^\circ - 58.22^\circ = 121.78^\circ$ .

Låt oss stoppa in dessa värden i *sfäriska cosinussatsen för vinklar* där vi låter  $c = \widehat{VE}$ . Vi har då att

$$\cos(N) = -\cos(50.7^\circ)\cos(121.78^\circ) + \sin(50.7^\circ)\sin(121.78^\circ)\cos(7.35^\circ) \approx \cos(0.985^\circ).$$

Vi använder cosinusinversen i bägge led och får att

$$N = 9.6^\circ.$$

Vi har då att  $\angle N = 9.6^\circ$  som är skillnaden i longitud mellan städerna.

## 6.3 Exempel med sinussatsen.

Vi fortsätter där vi slutade i förra sektionen med Figur 15. Låt oss nu ta hjälp av sinussatsen för att beräkna städernas latituder. Vi kallar Vancouvers latitud för  $v$  och Edmontons för  $e$ .

$$v = 90^\circ - \arcsin\left(\sin(50.7^\circ)\frac{\sin(7.35^\circ)}{\sin(9.6^\circ)}\right) = 49.3^\circ.$$

$$e = 90^\circ - \arcsin\left(\sin(121.78^\circ)\frac{\sin(7.35^\circ)}{\sin(9.6^\circ)}\right) = 53.6^\circ.$$

## 7 Kort om Haversinsatsen

Många beräkningar, särskilt inom astronomi och navigation är väsentligt förkortade av den så kallade haversinsatsen. Formeln används för att beräkna det kortaste avståndet mellan två punkter på en sfär då vi har information om längitud och latitud, eller deklination och rektascension. Även om vi inte kommer att implementera denna formel i konkreta exempel, är dess närvaro i sfärisk trigonometri en viktig aspekt som förtjänar uppmärksamhet.

**Definition 7.1.** *Haversin för vinkeln  $\theta$  definieras som*

$$\text{hav}(\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\theta)) = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Vi kan nu konvertera cosinussatsen till den haversinska motsvarigheten.

**Sats 7.1.** Den sfäriska cosinussatsen översatt till haversin är

$$\text{hav}(a) = \text{hav}(b - c) + \sin b \sin(c) \text{hav}(A).$$

*Bevis.* Eftersom  $\cos \theta = 1 - 2 \sin^2(\frac{\theta}{2})$  har vi att  $\cos(\theta) = 1 - 2\text{hav}(\theta)$ .

Vi modifierar nu den sfäriska cosinussatsen, där vi ersätter  $\cos a$  med  $(1 - 2\text{hav}(a))$  och  $\cos(A)$  med  $(1 - 2\text{hav}(A))$ . Då har vi

$$1 - 2\text{hav}(a) = \cos(b - c) - 2 \sin b \sin c \text{hav}(A).$$

Sedan byter vi ut  $\cos(b - c)$  mot  $\text{hav}(b - c)$  och erhåller den slutliga formen för haversinsatsen

$$\text{hav}(a) = \text{hav}(b - c) + \sin(b) \sin(c) \text{hav}(A).$$

□

## 8 Avslutande Ord

Vi har nu kommit till vår slutdestination, allt som återblickar slängs åt en resa genom den fascinerande världen av sfärisk geometri. Även om vi endast skrapat på ytan av detta omfattande ämne, har vi introducerats till några av dess mest centrala och fundamentala koncept. Från utforskandet av sfäriska trianglar och deras unika egenskaper till tillämpningen av trigonometriska identiteter på sfären, har vi berört den djupgående kopplingen mellan teori och praktik.

Sfärisk geometri visar sig vara en oundgänglig komponent inom ämnen som astronomi och navigation. Genom att förstå de sfäriska trianglarnas dynamik och tillämpa de härledda identiteterna, öppnar vi upp möjligheter för mer exakta beräkningar och noggrannare navigering. Vi har även utforskat begreppet antipodala punkter, longitud och latitud, och hur dessa aspekter spelar en avgörande roll i att fastställa riktningar och positioner på jordklotet.

Vår resa har inkluderat en del historiska avstamp, intressanta avsnitt om storcirkelbågar och hur vi definierar den kortaste vägen mellan två punkter på en sfär. Genom att applicera sfäriska trigonometriska satser, såsom cosinussatsen och sinussatsen, har vi fått en inblick i verktyg och formler som förenklar beräkningar inom astronomi och navigation.

I avslutningen av vår resa är det tydligt att sfärisk geometri inte bara är en abstrakt och teoretisk disciplin, utan en levande och tillämpningsbar gren av matematiken. Må vår förståelse för dessa koncept fortsätta att växa och inspirera framtida utforskningar inom detta fascinerande ämnesområde.

### 8.1 Den Individuella Processen

För att skriva denna avhandling använde jag mig inledningsvis av *Textbook on Spherical Astronomy* och ömsom imponerades, ömsom avskräcktes, av såväl språket som svårighetsgraden, men framförallt känslan av att tonvikten låg på ämnet astronomi, inte matematik (även om dessa ämnen stundvis är väldigt sammanflätade). Jag sökte mig därför till annan litteratur och landade bekvämt i famnen på Glen van Brummelen som i sitt verk *Heavenly Mathematics: The Forgotten Art of Spherical Trigonometry* verkligen behandlar sfärisk geometris och trigonometris långa historia och dess applikationer i det moderna livet, kompetent beväpnad med den moderna matematikens symbolism.

En av de mest fascinerande upptäckterna var då jag jämförde bevisen för cosinus- och sinussatserna i de två verken. De är bägge eleganta och någorlunda lika, men framställs på helt olika sätt, någonting jag rekommenderar intresserade läsare att själva söka upp!

Mitt mål var att skriva en avhandling som sammanfogar matematiska uttryck med löpande text, för att göra den begriplig och intressant för läsaren. Sfärisk geometri är fascinerande av många anledningar där den främsta för mig är den initiala känslan av att det bryter många av de konventionella 'skolreglerna' för matematik, som vanligtvis behandlar planär geometri. Förhoppningsvis kan jag med denna betydligt nedkortade och förenklade tolkning av kunskap om ämnet skänka läsaren en stunds njutning och lärande.

### 8.2 Svårigheter

Jag märkte att jag spenderade mycket tid på att försöka förstå, för ämnet, förhållandevis enkla och korta delar. Begränsad av den ringa tiden tvingades jag att välja ett fåtal av många, i litteraturen sammanhängande, delmoment. För att tackla detta producerade jag en central idé, löst baserad på det som initialt väckt mitt intresse, nämligen de sfäriska cosinus- och sinussatserna. Utifrån detta valde jag de delar av litteraturen som på lättast och tydligast sätt skulle leda fram till dessa två bevis. Det var under denna process som jag mer och mer drogs emot van Brummelen då han har utförliga förklaringar kring många av dessa koncept. Däri fann jag det jag behövde för att väva en röd tråd och nå slutmålet med denna avhandling.

## Referenser

[1] Van Brummelen, Glen. (2013). *Heavenly Mathematics: The Forgotten Art of Spherical Trigonometry*. Princeton University Press.

[2] Smart, William. (1977). *Textbook on Spherical Astronomy. 6th ed.* Cambridge University Press.