SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Att lösa rekursiva relationen

av

Ehsan Panahande

2024-L5

Att lösa rekursiva relationen

Ehsan Panahande

Självständigt arbete i matematik 15 för lärare högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Sofia Tirabassi

2024-L5

Sammanfattning

Vi kommer att undersöka rekursiva relationer och lösningstekniker för dem. För detta ändamål kommer vi först att förklara konceptet med rekursiva relationer. Därefter introducerar vi linjära första ordningens rekursiva relationer och behandlar deras lösning genom att presentera några exempel. Vi visar faktiskt hur man kan lösa rekursiva problem med hjälp av icke-rekursiva formler. Därefter fortsätter vi med att lösa andra rekursiva problem, inklusive rekursiva relationer av andra ordningen. För att göra detta delar vi upp de rekursiva relationerna i två kategorier: homogena och icke-homogena och presenterar en lösning för var och en av dem.

Abstract

We will examine recursive relations and their solution techniques. To this end, we will first explain the concept of recursive relations. Then, we will introduce first-order linear recursive relations and provide examples to solve them. In fact, we will demonstrate how to solve recursive problems using non-recursive formulas. After that, we will proceed to solve other recursive problems, including second-order recursive relations. To do this, we categorize the recursive relations into two groups: homogeneous and non-homogeneous, and introduce a solution method for each.

Contents

Förord

Jag vill inleda med att uttrycka min djupa tacksamhet till min handledare, Sofia, för hennes omfattande stöd och inspirerande vägledning under genomförandet av detta arbete. Vidare vill jag rikta min uppskattning till min dotter för hennes kloka studievägledning under dessa år samt till min fru för noggrann korrekturläsning. Utan den ovärderliga supporten från min familj, som har lyssnat tålmodigt på mina tankar och bidragit med värdefull input, skulle denna uppsats inte ha kunnat realiseras. Jag riktar därmed min djupa tacksamhet till er alla.

1 Introduktion

Rekursionsekvationer är ekvationer som används för att beskriva relationen mellan uttryck i en sekvens. Inom matematiken har rekursiva relationer en bred tillämpning, inklusive inom talteori där Fibonacciföljden är ett exempel, kombinatorik där problem som handlar om fördelning av objekt behandlas, samt inom analys där metoder som Eulers metod. Eulers metod används för att approximera lösningar till ordinära differentialekvationer genom att iterativt beräkna värden längs en kurva med hjälp av tangentens lutning vid tidigare punkter.

Syftet med att använda rekursiva relationer är att erbjuda en systematisk strategi för att lösa komplexa problem. Även om det inte alltid är optimalt att härleda och beräkna uttryck genom att använda tidigare termerna i en sekvens, kan detta tillvägagångssätt betraktas som ett effektivt alternativ för att utföra beräkningar.

Ibland kan en rekursiv relation lösas genom att definiera termerna i en sekvens enligt deras index istället för deras tidigare termer. Genom att tillämpa detta tillvägagångssätt kan en sluten form för varje term i sekvensen härledas, vilket eliminerar behovet av att använda upprepande processer. Betrakta följande exempel:

$$5, 15, 45, 135, ...$$

Det är tydligt att varje term i sekvensen är produkten av den föregående termen och 3, vilket kan uttryckas som $a_n = 3 \cdot a_{n-1}$ med initialvärdet $a_0 = 5$. Genom induktion kan vi fastställa att $a_0 = 5$, $a_1 = 15$, $a_2 = 45$, $a_3 = 135$. Genom att observera mönstret att varje term multipliceras med 3, kan det generella mönstret formuleras som $a_n = 5 \cdot 3^n$.

Detta innebär att vi kan beräkna $a_{10} = 295245$ direkt utan att behöva räkna dem första 9 termerna. Kategorier kan identifieras för rekursiva relationer:

1. Homogenitet eller icke-homogenitet: Rekursiva relationer kan karaktäriseras som antingen homogena eller icke-homogena. I homogena relationer beror funktionen enbart på sig själv och eventuellt på andra variabler, medan icke-homogena relationer involverar ytterligare variabler eller funktioner i den rekursiva ekvationen. Till exempel kan en relation vara:

   - Homogen: $a_n = 2a_{n-1}$ (beroende enbart av tidigare värde);

   - Icke-homogen: $a_n = 2a_{n-1} + 3$ (inkluderar en konstant term).

2. Rekursiva relationer kan klassificeras baserat på deras ordning, vilket inkluderar linjära, kvadratiska, kubiska och högre ordningens relationer. Till exempel kan en relation vara:

   - Linjär: $a_n = 5a_{n-1}$;

   - Kvadratisk: $a_n = a_{n-1}^2$;

   - Kubisk: $a_n = a_{n-1}^3$.

3. Antal variabler: Rekursiva relationer kan differentieras baserat på antalet variabler och parametrar som ingår i dem. Detta omfattar relationer med en enda variabel, flervariabla relationer och relationer med olika parametrar.

   - Till exempel kan en relation bero på:

   - En variabel: $a_n = 3a_{n-1}$;

   - Flera variabler: $a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}$.

4. Antal variabler: Rekursiva relationer kan differentieras baserat på antalet variabler och parametrar som ingår i dem. Detta omfattar relationer med en enda variabel, flervariabla relationer och relationer med olika parametrar.

   - Till exempel kan en relation bero på:

   - En variabel: $a_n = 3a_{n-1}$;

   - Flera variabler: $a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1}$.

5. Tidsberoende: Rekursiva relationer kan klassificeras efter deras beroende av tidsvariabler. Här observeras om förändringar i funktionen över tid är tidsberoende eller tidsfristående.

- Till exempel kan koefficienterna till en relation vara:

- Icke-konstant: $a_n = n \cdot a_{n-1}$;

- Konstant: $a_n = 3a_{n-1}$.

2 Formellt definieras en rekursiv relation

En rekursiv relation är en formel som kopplar ett element i en följd, markerad som $a_0, a_1, a_2, \ldots$, till de tidigare elementen i samma följd. Det innebär att det finns en funktion med k variabler, parameteriserad som $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, så att för varje n är den $(n+k)$-te termen i följden uttryckt som:

$$a_{n+k} = F(a_n, a_{n+1}, \ldots, a_{n+k-1}).$$

Där n är ett index eller en position i följden av element och k graden av den rekursiva relationen. Om F är en linjär funktion, betecknas den rekursiva relationen som linjär.

Målet med detta självständiga arbete är att presentera en metod för att härleda en icke-rekursiv formel för en linjär rekursiv relation med konstanta koefficienter (koefficienter som inte beror på n). För att uppnå detta, undersöker vi först förstärkta rekursiva relationer och tillhandahåller några exempel. Sedan behandlar vi i den andra delen lösningen av rekursiva relationer av andra graden.

Förstärkta linjära rekursiva relationer delas in i två huvudkategorier: homogena och icke-homogena. Introduktionen har vi nämnt att den rekursiva relationen $a_n = 3a_{n-1}$ med den initiala betingelsen $a_0 = 5$ kan lösas med den icke-rekursiva formeln $a_n = 5 \cdot 3^n$. Detta kan visas med hjälp av induktion, men vi kommer att presentera en mer generell metod i uppsatsen. För att betona vikten av den initiala betingelsen kommer vi att illustrera detta med ett exempel.

För att härleda det generella uttrycket för den givna följden börjar vi med att betrakta följden:

$$7, 21, 63, 189, \ldots$$

Det är uppenbart att varje term i följden verkar vara produkten av den föregående termen och 3, vilket kan uttryckas som $a_n = 3 \cdot a_{n-1}$ som är samma relation som förre.

Med gränsvillkoret $a_0 = 7$ kan vi tillämpa detta rekursiva mönster för att härleda andra termer i följden.

Den initiala termen av följden är nu lika med 7, inte 5. Därmed är följden olika. I nästa steg kommer vi att undersöka relationen:

$$a_n = 3a_{n-1}$$

med initialvillkoret:

$$a_0 = 7.$$

Denna rekursiva formel löses av:

$$a_n = 7 \cdot 3^n.$$

Således kan vi använda denna formel $a_n = 7 \cdot 3^n$ för att beräkna a_n, där n representerar platsen i följden.

3 Första ordningen linjära relationen

En linjär rekursiv relation av första ordningen beskriver hur varje term i en sekvens beräknas utifrån dess föregående term. I denna typ av relation, representerad av ekvationen $a_n = d \cdot a_{n-1}$, är d en konstant som kallas för den första ordningens koefficient.

Det innebär att varje term i sekvensen a_n är proportionell mot dess föregående term a_{n-1} med en konstant faktor d. Med andra ord multipliceras varje term med samma konstant d för att få nästa term i sekvensen. Denna egenskap gör att relationen är linjär och av första ordningen.

Sats 1 [2,p.343]

Linjära relationer av första ordningen beskriver en sekvens a_n som definieras rekursivt enligt ekvationen $a_n = d \cdot a_{n-1}$, där d tillhör mängden av reella tal och d är en godtycklig konstant. Med den initiala villkoret $a_0 = A$ löses denna rekursiva relation unikt av formeln $a_n = A \cdot d^n$.

Bevis

[2,p.343]

För att bevisa att $a_n = d^n \cdot A$ löser den homogena rekursiva ekvationen $a_{n+1} = d \cdot a_n$ med initialvillkoret $a_0 = A$ och att lösningen är unik, noterar vi först att $a_0 = d^0 \cdot A = A$, vilket uppfyller det givna initialvillkoret.

Vi kan sedan använda induktion för att visa att a_n löser ekvationen för alla n: - Bassteget: För $n = 0$ har vi redan visat att $a_0 = A$, vilket uppfyller ekvationen. - Induktionsantagande: Antag att ekvationen gäller för ett godtyckligt k. - Induktionssteg: Vi visar att ekvationen också gäller för $k + 1$. För $n = k + 1$ får vi $a_{k+1} = d \cdot a_k = d \cdot (d^k \cdot A) = d^{k+1} \cdot A$. Så om ekvationen är sann för k, är den också sann för $k + 1$ enligt induktionsprincipen.

För att visa att lösningen är unik antar vi att det finns två lösningar a_n och b_n. Om $A = 0$ kan vi enkelt visa att $a_n = b_n = 0$ för alla n.

Antag att $A \neq 0$. Därför är $b_n \neq 0$. Annars skulle vi ha $0 = b_n = 2b_{n-1}$, så ska $b_{n-1} = 0$. Genom induktion finner vi att $0 = b_{n-2} = b_{n-3} = \ldots = b_0$. Sådan $b_n \neq 0$ kan vi räkna ut förhållandet a_n/b_n. Med användning av rekursionen har vi

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{3a_{n-1}}{3b_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \ldots = \frac{a_0}{b_0} = 1.$$

Så vi har att $a_n = b_n$.

Därmed har vi bevisat att $a_n = d^n \cdot A$ löser den homogena rekursiva ekvationen med initialvillkoret $a_0 = A$, samt denna lösning är unik.

Exempel 1

[3,p.449]

Beräkna värdena av a_{12} och a_n i den rekursiva sekvensen $a_{2n+1} = 5a_n$ med $a_0 = 2$. Vi kan först beräkna några av de första termerna i sekvensen för att hitta ett mönster och använda ekvationen för att härleda sekvensen. Vi använder satsen med $d = 5$ och $A = 2$. För att beräkna a_{12} ersätter vi helt enkelt n med 12 i formeln $a_n = 2.5^n$, så är $a_{12} = 2.5^{12}$.

4 Linjära homogena rekursiva relationer av andra ordningen med konstanta koefficienter

Linjära homogena rekursiva relationer av andra ordningen med konstanta koefficienter betraktas som följande:

Antag att $C_1, C_2, \ldots, C_k$ där $k \in \mathbb{Z}^+$ är reella tal och koefficienter. Om a_n för $n \geq 0$ en följd, då ges en relation av formen:

$$a_{n+k} + C_1 a_{n+k-1} + C_2 a_{n+k-2} + \ldots + C_n a_n = F(n) \quad \text{för } n \geq k.$$

Ovanstående relation utgör en linjär rekursiv relation av ordning k med konstanta koefficienter. Om vi betraktar denna relation som homogen för $F(n) = 0$ för $n \geq 0$, då är den homogen; annars är den Icke- homogen.

För att lösa en linjär homogen rekursiv relation av ordning k krävs k inledande villkor. I detta avsnitt kommer vi att börja med att betrakta en homogen relation av andra ordningen, vilket innebär:

$$a_{n+2} + C_1 a_{n+1} + C_2 a_n = 0 \quad \text{för } n \geq 0$$

och fokusera på att lösa den.

Sats 2 [1.sats 12.2]

Antag att sekvensen a_n uppfyller en linjär rekursiv relation av andra ordningen, $a_{n+2} + C_1 a_{n+1} + C_2 a_n = 0$, där $n \geq 0$, med de givna gränsvillkoren $a_0 = u_0$ och $a_1 = u_1$. Låt r_1 och r_2 vara rötterna till den karakteristiska ekvationen $r^2 + C_1 r + C_2 = 0$.

Vi har två fall:

a) Om $r_1 \neq r_2$, då finns det konstanta koefficienter A och B så att $a_n = Ar_1^n + Br_2^n$ för $n \geq 0$.

b) Om $r_1 = r_2 = r$, då finns det konstanta C och D så att $a_n = (C + nD)r^n = Cr^n + nDr^n$ för $n \geq 0$.

Koefficienterna A, B eller D, C erhålls genom att använda de givna initialvärdena u_0, u_1.

Bevis [1.sats 12.2]

För att bevisa att den generella formen för sekvensen $a_n = Ar_1^n + Br_2^n$ gäller för alla $n \geq 0$ genom matematisk induktion, går vi igenom följande steg:

1. Bestäm värdena för A och B:

Vi har två ekvationer:

$$A + B = u_0,$$

$$Ar_1 + Br_2 = u_1.$$

Genom att lösa dessa får vi: För att bestämma värdena för A och B med hjälp av de givna formlerna, har vi två ekvationer:

1. $A + B = u_0$ 2. $Ar_1 + Br_2 = u_1$

Genom att lösa dessa ekvationer kan vi uttrycka B som $B = u_0 - A$. Vi substituerar detta i den andra ekvationen och får:

$$Ar_1 + (u_0 - A)r_2 = u_1.$$

Denna är ekvivalent till:

$$A(r_1 - r_2) + u_0 r_2 = u_1, \quad \text{Som vi kan lösa gör A:}$$
$$A = \frac{u_1 - u_0 r_2}{r_1 - r_2}.$$

För att bestämma B substituerar vi tillbaka A i $B = u_0 - A$:

$$\begin{aligned} B &= u_0 - \frac{u_1 - u_0 r_2}{r_1 - r_2} \\ &= \frac{u_0 r_1 - u_1}{r_1 - r_2}. \end{aligned}$$

Sammanfattningsvis är formlerna för att bestämma A och B:

$$A = \frac{u_1 - u_0 r_2}{r_1 - r_2},$$

$$B = \frac{u_0 r_1 - u_1}{r_1 - r_2}.$$

2. Formen för sekvensen a_n:

Den generella formen för sekvensen är:

$$a_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

3. Basfall:

För $n = 0$:

$$a_0 = Ar_1^0 + Br_2^0 = A + B = u_0.$$

För $n = 1$:

$$a_1 = Ar_1^1 + Br_2^1 = Ar_1 + Br_2 = u_1.$$

4. Induktionssteg:

Anta att $a_n = Ar_1^n + Br_2^n$ gäller för alla $0 \leq i \leq n + 1$ där $n \geq 0$. Vi måste visa att detta också gäller för a_{n+2}.

Sekvensen a_n följer en linjär rekursiv relation av andra ordningen:

$$a_{n+2} = -(c_1 a_{n+1} + c_2 a_n).$$

Använd induktionsantagandet:

$$a_{n+1} = Ar_1^{n+1} + Br_2^{n+1},$$

$$a_n = Ar_1^n + Br_2^n.$$

Substituera dessa i ekvationen för a_{n+2}:

$$a_{n+2} = -(c_1(Ar_1^{n+1} + Br_2^{n+1}) + c_2(Ar_1^n + Br_2^n))$$

Förenkla uttrycket med hjälp av den karakteristiska ekvationen $r^2 - c_1 r - c_2 = 0$:

$$r_1^2 = c_1 r_1 + c_2,$$

$$r_2^2 = c_1 r_2 + c_2.$$

Använd detta för att förenkla a_{n+2}:

$$a_{n+2} = Ar_1^{n+2} + Br_2^{n+2}.$$

5. Slutsats:

Vi har visat att om $a_n = Ar_1^n + Br_2^n$ gäller för n, så gäller det också för $n + 2$. Genom matematisk induktion har vi därför visat att formeln:

$$a_n = Ar_1^n + Br_2^n$$

gäller för alla $n \geq 0$.

Genom detta bevis har vi visat att den generella formen för sekvensen $a_n = Ar_1^n + Br_2^n$ gäller för alla $n \geq 0$. För att bevisa att formen för sekvensen $a_n = Cr^n + nDr^n$ gäller när $r_1 = r_2 = r$, kan vi använda matematisk induktion. Vi börjar med att definiera C och D och sedan visar vi att formeln håller för alla $n \geq 0$.

Initiala steg

När $r_1 = r_2 = r$, har vi följande ekvationer:

1. $a_0 = u_0 = C$.

2. $a_1 = u_1 = (C + D)r$.

Från dessa ekvationer kan vi lösa C och D: - $C = u_0$ - $D = \frac{u_1}{r} - u_0$

Basfall:

Vi kontrollerar att formeln gäller för $n = 0$ och $n = 1$:

För $n = 0$:

$$a_0 = Cr^0 + 0 \cdot Dr^0 = C = u_0.$$

För $n = 1$:

$$a_1 = Cr^1 + 1 \cdot Dr^1 = Cr + Dr = (C + D)r = u_1.$$

Induktionsantagande:

Anta att formeln $a_n = Cr^n + nDr^n$ gäller för alla $0 \leq i \leq n + 1$. Vi ska visa att den också gäller för a_{n+2}.

Induktionssteg:

Enligt definitionen av sekvensen a_n har vi:

$$a_{n+2} = -(c_1 a_{n+1} + c_2 a_n).$$

Vi substituerar induktionsantagandet $a_{n+1} = Cr^{n+1} + (n + 1)Dr^{n+1}$ och $a_n = Cr^n + nDr^n$ i ekvationen för a_{n+2}:

$$a_{n+2} = -(c_1(Cr^{n+1} + (n + 1)Dr^{n+1}) + c_2(Cr^n + nDr^n)).$$

Förenkla uttrycket:

$$a_{n+2} = -(c_1 Cr^{n+1} + c_1(n + 1)Dr^{n+1} + c_2 Cr^n + c_2 nDr^n).$$

Använd den karakteristiska ekvationen $r^2 + c_1 r + c_2 = 0$:

$$c_1 r + c_2 = -r^2.$$

Därmed blir:

$$\begin{aligned}
a_{n+2} &= -(c_1 C r^{n+1} + c_1(n+1)Dr^{n+1} + c_2 C r^n + c_2 n D r^n) \\
&= -(Cr^{n+1}(c_1 r) + (n+1)Dr^{n+1}c_1 + Cr^n c_2 + nDr^n c_2) \\
&= -(Cr^{n+1}(-r^2 - c_2) + (n+1)Dr^{n+1}c_1 + Cr^n(-r^2 - c_1 r) + nDr^n c_2) \\
&= Cr^{n+2} + (n+2)Dr^{n+2}.
\end{aligned}$$

Detta visar att om formeln gäller för n, så gäller den också för $n + 2$.

Slutsats

Genom matematisk induktion har vi visat att formeln:

$$a_n = Cr^n + nDr^n$$

gäller för alla $n \geq 0$.

Därmed har vi bevisat att formen $a_n = Cr^n + nDr^n$ är korrekt för sekvensen när $r_1 = r_2 = r$.

Exempel Fibonaccis Sekvens [3, p.457]

Fibonacci-sekvensen är en av de mest välkända numeriska sekvenserna inom matematiken och är namngiven efter den italienske matematikern Leonardo Fibonacci. Sekvensen definieras enligt följande kriterier:

1. Den första och andra elementen i sekvensen är definierade som $F_1 = F_2 = 1, F_0 = 0$.

2. Varje efterföljande element i sekvensen erhålls genom att summera de två föregående elementen: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ för $n \geq 3$.

Därför antar Fibonacci-sekvensen följande form: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

Vi observerar att talföljden definieras av en linjär rekursiv relation, och vi ämnar härleda en rekursiv relation för dess lösning.

För varje $0 \leq n \leq 4$ ges sekvensen a_n enligt:

$$a_0 = 0,\ a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_3 = 2,\ a_4 = 3.$$

För att härleda den icke-rekursiva formen av Fibonacci-följden F_n med initialvillkor $F_0 = 0$ och $F_1 = 1$, använder vi oss av den karakteristiska ekvationen för den rekursiva relationen. Den rekursiva relationen är given som:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Vi beräknar det karakteristiska polynomet till ekvationen $r^2 - r - 1 = 0$. För att lösa denna ekvation använder vi den kvadratiska formeln:

$$r = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Här är $a = 1$, $b = -1$ och $c = -1$. Sätter vi in dessa värden i formeln får vi:

$$r = \frac{1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Så rötterna är:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

$$r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Därmed kan vi skriva den allmänna lösningen för F_n som en linjärkombination av dessa två rötter:

$$F_n = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

För att bestämma konstanterna A och B använder vi initialvillkoren $F_0 = 0$ och $F_1 = 1$.

När $n = 0$:

$$F_0 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 = A + B = 0.$$

När $n = 1$:

$$F_1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 = A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + B\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

Från den första ekvationen får vi $B = -A$. Sätter vi in detta i den andra ekvationen får vi:

$$A\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 1,$$

som är ekvivalent till

$$A\left(\frac{(1+\sqrt{5})-(1-\sqrt{5})}{2}\right) = 1.$$

Detta vi kan förenkla som

$$A\left(\frac{2\sqrt{5}}{2}\right) = 1 \qquad \text{och ser}$$

$$A\sqrt{5} = 1.$$

Därför är

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Eftersom $B = -A$, får vi:

$$B = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Så den slutliga formen av F_n blir:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Detta är den explicita (icke-rekursiva) formen för Fibonacci-talen.

Exempel 3 [1, p.252]

Lös den rekursiva relationen $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$ med initialvillkoren $a_1 = 1$ och $a_0 = 0$ (där $a_n \geq 0$)? Lösning: Den karakteristiska ekvationen för den ovanstående relationen är $r^2 - 5r + 6 = 0$. Den har två distinkta reella rötter $r_1 = 2$ och $r_2 = 3$. Enligt satsen har vi den allmänna lösningen $a_n = A(2)^n + B(3)^n$. Nu, med hänsyn till de initiala villkoren $a_0 = 1$ och $a_1 = 1$, har vi $A + B = 0$ och $2A + 3B = 1$. Genom att lösa ekvationerna ovan har vi $A = -1$ och $B = 1$. Därför är formeln för a_n som följer:

$$a_n = -2^n + 3^n,$$

eller

$$a_n = 3^n - 2^n.$$

Exempel 4 [2,p:361]

Lös den rekursiva relationen $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, med initialvillkoren $a_1 = 3$ och $a_0 = 1$ där $n \geq 0$? För att lösa den rekursiva relationen $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$ med initialvillkoren $a_0 = 1$ och $a_1 = 3$ för $n \geq 0$, börjar vi med att undersöka dess karakteristiska ekvation.

Den karakteristiska ekvationen ges av:

$$r^2 - 4r + 4 = 0.$$

Genom att lösa denna ekvation hittar vi en dubbelrot:

$$r = 2.$$

Enligt en generell metod för att lösa rekursiva relationer med dubbelrötter är den allmänna lösningen:

$$a_n = C \cdot 2^n + D \cdot n \cdot 2^n$$

där C och D är konstanter som bestäms av initialvillkoren. För att bestämma C och D använder vi de givna initialvillkoren $a_0 = 1$ och $a_1 = 3$.

Vi har:

$$a_0 = 1 = C \cdot 2^0 + D \cdot 0 \cdot 2^0 = C,$$

$$a_1 = 3 = C \cdot 2^1 + D \cdot 1 \cdot 2^1 = 2C + 2D.$$

Från den första ekvationen får vi:

$$C = 1.$$

Genom att sätta in detta i den andra ekvationen kan vi lösa för D:

$$3 = 2 \cdot 1 + 2D$$

$$= 2 + 2D. \qquad \text{som är ekvivalent till}$$
$$1 = 2D.$$

Så får vi

$$D = \frac{1}{2}.$$

Därför är den slutliga lösningen på den rekursiva relationen:

$$a_n = 2^n + \frac{1}{2} \cdot n \cdot 2^n,$$

eller

$$a_n = 2^n \left(1 + \frac{n}{2}\right) \quad \text{för } n \geq 0.$$

Complexa rötter och de Moivers formels: Vidare är det viktigt att notera att konstanterna C och D kan vara reella eller komplexa tal beroende på kontexten. När rötterna till den karakteristiska ekvationen är komplexa använder vi De Moivres sats för att uttrycka lösningen på ett hanterbart sätt.

De Moivres sats, som är användbar för att upphöja ett komplext tal till en godtycklig potens, ges av:

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

Om vi antar att $z = a + ib$ är ett komplext tal, kan det uttryckas i polär form som:

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta).$$

där $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Hur beräknar vi θ berör på värden av b: - Om $b = 0$ och $a > 0$, då är $\theta = \frac{\pi}{2}$. - Om $b = 0$ och $a < 0$, då är $\theta = -\frac{\pi}{2}$. - Om $b > 0$, då är $\theta = \arctan\frac{a}{b}$. - Om $b < 0$, då är $\theta = \arctan\frac{a}{b} + \pi$. Låt oss titta på ett detaljerat exempel för att illustrera De Moivres sats och betydelsen av dess olika delar. Vi kommer att använda ett komplext tal $z = 1 + i$ och höja det till tredje potensen.

Steg 1. konvertera till polär form: Först måste vi konvertera det komplexa talet $z = 1 + i$ till polär form.

1. Beräkna absolutbeloppet:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

2. Beräkna argumentet Vi noterar att båda Re(z) och Im(z)är positiva så har vi:

$$\theta = \arg(z) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

Så det komplexa talet z i polär form är:

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Steg 2: Använd De Moivres sats:

Nu vill vi upphöja detta komplexa tal till $n = 3$.

Enligt De Moivres sats:

$$(r(\cos\theta + i\sin\theta))^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

För vårt exempel:

$$\begin{aligned} z^3 &= (\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}))^3 \\ &= (\sqrt{2})^3(\cos(3\cdot\frac{\pi}{4}) + i\sin(3\cdot\frac{\pi}{4})) \\ &= 2\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}). \end{aligned}$$

Steg 3: Beräkna trigonometriska funktioner Beräkna värdena för $\cos\frac{3\pi}{4}$ och $\sin\frac{3\pi}{4}$:

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2};$$
$$\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Så vi får:

$$\begin{aligned} z^3 &= 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2\sqrt{2}\left(i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \end{aligned}$$

$$= 2\,(-1) + 2\,(i)$$
$$= -2 + 2i.$$

Betydelse av de olika delarna: - r är längden (modulus) av det komplexa talet, vilket är $\sqrt{2}$ i detta exempel. - θ är argumentet (vinkeln) för det komplexa talet, vilket är $\frac{\pi}{4}$. - i är den imaginära enheten. - n är exponenten, vilket är 3 i detta exempel. Observera: Vi kan använda arctan för att beräkna argumentet för $1 + i$ i första kvadrant, men vi kan inte använda arctan för att bestämma argumentet $\theta = \arg\left(\frac{-1}{-1}\right)$, eftersom det är fel .

Exempel 5

[3, p.468]

Lös den rekursiva sekvensen a_n definierad som $a_{n+2} + a_n = 0$, där $a_1 = 0$ och $a_0 = 2$.

Lösning:

Den karaktäristiska ekvationen för den givna relationen är i form av $r^2 + 1 = 0$, vilken har komplexa och distinkta rötter $r_1 = i$ och $r_2 = -i$. Därför är den allmänna lösningen av problemet i form av

$$a_n = A(i)^n + B(-i)^n.$$

Genom att tillämpa de initiala villkoren för $a_0 = 2$ och $a_1 = 0$ får vi $A + B = 2$ och $Ai - Bi = 0$, vilket resulterar i att $A = B = 1$. Således,

$$a_n = (i)^n + (-i)^n.$$

Å andra sidan,

$$i = \cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}), \qquad \text{och}$$
$$-i = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i\sin(-\frac{\pi}{2}) = \cos(\frac{\pi}{2}) - i\sin(\frac{\pi}{2}),$$

Så enligt De Moivres sats har vi

$$(i)^n = \cos(n\frac{\pi}{2}) + i\sin(n\frac{\pi}{2}), \qquad \text{och}$$

$$(-i)^n = \cos(n\frac{\pi}{2}) - i\sin(n\frac{\pi}{2}).$$

Så vi har :

$$a_n = 2\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

Exempel 6

[3, p.465]

Lös den rekursiva relationen $a_n = 2(a_{n-1} - a_{n-2})$ med initialvillkoren $a_1 = 2$ och $a_0 = 1$, för $n \geq 1$.

Lösning:

För att lösa den rekursiva relationen, börja med att formulera den karakteristiska ekvationen:

$$r^2 - 2r + 2 = 0.$$

Denna ekvation löses med kvadratiska formeln:

$$r = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i.$$

Rötterna är:

$$r_1 = 1 + i \qquad \text{och}$$
$$r_2 = 1 - i.$$

Den generella lösningen till den rekursiva sekvensen är:

$$a_n = A(1+i)^n + B(1-i)^n.$$

Omformulera $1 + i$ och $1 - i$ med hjälp av Euler-formen:

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Substituera tillbaka:

$$(1+i)^n = (\sqrt{2})^n\left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

$$= (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right).$$

Substituera i den generella lösningen:

$$a_n = A(\sqrt{2})^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right) + B(\sqrt{2})^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right).$$

Använd initialvillkoren $a_0 = 1$ och $a_1 = 2$ för att bestämma A och B.
För $n = 0$:

$$1 = A + B.$$

För $n = 1$:

$$2 = A(1 + i) + B(1 - i).$$

Lös ekvationssystemet:

$$1 = A + B,$$

$$2 = A(1 + i) + B(1 - i).$$

Separera reella och imaginära delar i den andra ekvation.

$$2 = A(1 + i) + B(1 - i) = (A + B) + i(A - B) = 1 + i(A - B)$$

så

$$(A - B)i = 1.$$

Nu kan vi skriva:

$$a_n = (\sqrt{2})^n \left(\Big(A + B\Big)\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \Big(A - B\Big)i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right)$$

$$= (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right).$$

Den slutliga lösningen för den givna rekursiva relationen är:

$$a_n = (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)\right).$$

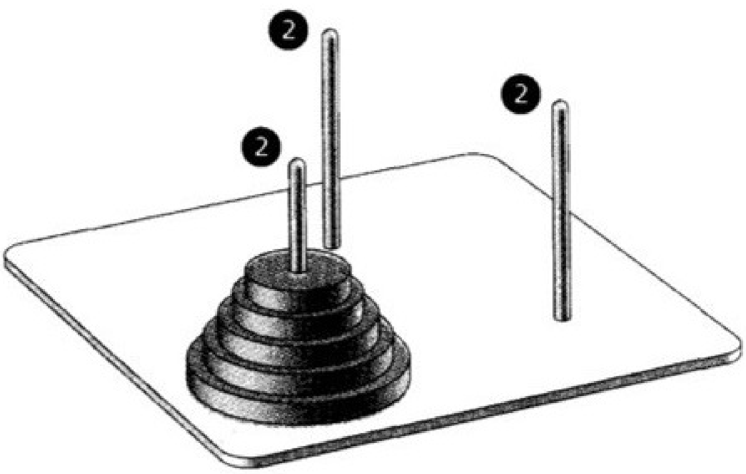
5 Linjär icke-homogena rekursiva relationer

[2, p.345] och [3, p.473]

Tornen i Hanoi, är ett klassiskt matematiskt och logiskt pussel eller problem som ofta används inom datavetenskap och matematikundervisning. Spelet består av tre stift eller torn och en uppsättning skivor med varierande storlekar. I början är alla skivorna staplade på ett torn i ordning med den största skivan längst ner och den minsta skivan högst upp. Målet med spelet är att flytta alla skivor från det första tornet till det tredje tornet med hjälp av det andra tornet som en mellanliggande plats, enligt följande tillåtna regler:

1. Endast en skiva kan flyttas i taget.
2. En skiva kan endast flyttas till ett annat torn om den är den översta skivan på en stapel.
3. En skiva kan placeras på en annan skiva endast om den är mindre än den skiva den placeras på.

Spelet är intressant eftersom det kräver strategiskt tänkande och planering för att flytta skivorna på det mest effektiva sättet. Det mest kända är med tre torn och en uppsättning av skivor. Det är en klassisk illustration av rekursion och algoritm design.



Figur: 1: Tornen Hanoi [3, p.458]

Betrakta n cirkulära skivor (med olika diametrar) med hål i sina centra. Dessa skivor kan staplas på någon av pinnarna som visas i figuren ovan. I figuren är n = 5 och skivorna är staplade på pinne 1 utan att någon skiva vilar på en mindre skiva. Målet är att flytta skivorna en i taget så att vi till slut har den ursprungliga stapeln på pinne 3. Varje av pinorna 1, 2 och 3 kan användas som en tillfällig plats för en eller flera skivor, men vi får aldrig ha en större skiva över en mindre skiva på någon pinne.Vad är det minsta antalet drag som krävs för att utföra detta för n skivor? Det minsta antalet drag som krävs för att flytta n skivor från pinne 1 till pinne 3 enligt reglerna för Tornen i Hanoi-pusslet kan beskrivas rekursivt. Låt oss beteckna detta antal drag med a_n.

För att lösa detta, används följande rekursiva formel:

- Om $n = 0$: Inga drag behövs eftersom det inte finns några skivor att flytta. Så $a_0 = 0$.

- För $n \geq 1$ har vi två fall:

1. Flytta de första $n - 1$ skivorna från pinne 1 till pinne 2.
2. Flytta den n-te (största) skivan från pinne 1 till pinne 3.
3. Flytta sedan de $n - 1$ skivorna från pinne 2 till pinne 3.

Därmed får vi den rekursiva relationen:

$$a_n = 2a_{n-1} + 1$$

Med randvillkoren $a_0 = 0$ och $a_1 = 1$ kan vi beräkna den första termen:

- $a_2 = 2 \cdot a_1 + 1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ - $a_3 = 2 \cdot a_2 + 1 = 2 \cdot 3 + 1 = 7$ - $a_4 = 2 \cdot a_3 + 1 = 2 \cdot 7 + 1 = 15$

Vi ska visa att det minsta antalet drag för att flytta n skivor från pinne 1 till pinne 3 är $a_n = 2^n - 1$. genom att använda induktion.

Basfall (n = 1):

Vi börjar med det enklaste fallet där vi har 1 skiva att flytta från pinne 1 till pinne 3. - En skiva flyttas direkt till pinne 3. - Antal drag: $a_1 = 1$.

Kontrollera basfallet: $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$, vilket stämmer överens med $a_1 = 1$.

Induktionssteg:

Antag att ekvationen gäller för $n = k$, det vill säga $a_k = 2^k - 1$.

Vi ska visa att det även gäller för $n = k + 1$, det vill säga $a_{k+1} = 2^{k+1} - 1$.Enligt reglerna för Tornen i Hanoi: 1. Flytta de första k skivorna från pinne 1 till pinne 2 (använda pinne 3 som mellanstation). 2. Flytta den $k + 1$-te skivan (största skivan) från pinne 1 direkt till pinne 3. 3. Slutligen flytta de k skivorna från pinne 2 till pinne 3 (använda pinne 1 som mellanstation).

Antalet drag för $n = k + 1$:

$$a_{k+1} = 2 \cdot a_k + 1$$

Enligt vår antagande induktionshypotes:

$$a_k = 2^k - 1$$

Sätt in detta i ekvationen:

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= 2 \cdot (2^k - 1) + 1 \\ &= 2^{k+1} - 2 + 1 \\ &= 2^{k+1} - 1. \end{aligned}$$

Det visar att om ekvationen gäller för $n = k$, så gäller den även för $n = k + 1$. Därmed är ekvationen $a_n = 2^n - 1$ bevisad för alla $n \geq 1$ genom induktion.

6 Lösningen av rekursiva relationer med hjälp av upprepade insättningar

Lösningen av rekursiva relationer med hjälp av upprepade insättningar innebär att tidigare beräknade värden används för att härleda nya värden. Detta utförs genom iterativ tillämpning av den rekursiva formeln för att beräkna värdena i en sekvens eller serie.

För att förklara denna process kan vi använda ett exempel med en enkel rekursiv relation: $a_n = a_{n-1} + 2$ med initialvillkoret $a_0 = 1$. Vi strävar efter att härleda a_1, a_2, a_3, och så vidare.

A. Börja med det initiala värdet: Vi börjar med det givna initialvärdet $a_0 = 1$.

B. Använd den rekursiva formeln för att beräkna nästa värde: Genom att tillämpa den rekursiva formeln $a_n = a_{n-1} + 2$ kan vi beräkna det nästa värdet i sekvensen. Eftersom vi vet värdet av a_0 kan vi beräkna a_1:

$$a_1 = a_0 + 2 = 1 + 2 = 3.$$

C. Upprepa processen för att hitta följande värden: Med a_1 tillgängligt kan vi beräkna a_2:

$$a_2 = a_1 + 2 = 3 + 2 = 5$$

Vi kan fortsätta denna process för att härleda a_3, a_4, och så vidare.

Genom att iterativt applicera denna process kan vi steg för steg bestämma värdena för sekvensen eller funktionen enligt den rekursiva relationen. Det är en iterativ metod som drar nytta av tidigare beräknade värden för att härleda nya värden, vilket möjliggör lösning av problem som involverar rekursiva relationer.

Sats 3 [3, p.470]

Betrakta en komplex funktion $F : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Antar den följande icke homogen linjär rekursiva relation,

$$a_n = Ca_{n-1} + F(n)$$

med initialvillkoret

$$a_0 = 1.$$

Den slutliga lösningen av denna rekursionsrelation är given av

$$a_n = C^n a_0 + \sum_{k=1}^{n} C^{n-k} F(k).$$

Bevis [3, p.470]

För att bevisa att lösningen av den rekursiva relationen $a_n = Ca_{n-1} + F(n)$ med initialvillkoret $a_0 = 1$ är

$$a_n = C^n a_0 + \sum_{k=1}^{n} C^{n-k} F(k),$$

använder vi induktionsprincipen. Vi bevisar detta genom att successivt ersätta tidigare värden för a_{n-1} och $F(n)$ i den ursprungliga ekvationen tills basfallet nås.

Basfall

Vi börjar med $n = 1$:

$$a_1 = C \cdot a_0 + F(1).$$

Med initialvillkoret $a_0 = 1$ får vi:

$$a_1 = C \cdot 1 + F(1) = C + F(1).$$

Induktionssteg

Anta att formeln gäller för $n = k$, det vill säga:

$$a_k = C^k a_0 + \sum_{j=1}^{k} C^{k-j} F(j).$$

Vi visar nu att formeln också gäller för $n = k + 1$:

$$a_{k+1} = Ca_k + F(k + 1)$$

Ersätt a_k med dess induktionsantagande:

$$a_{k+1} = C \left(C^k a_0 + \sum_{j=1}^{k} C^{k-j} F(j) \right) + F(k + 1).$$

Distribuera C:

$$a_{k+1} = C^{k+1} a_0 + \sum_{j=1}^{k} C^{k+1-j} F(j) + F(k + 1).$$

Observera att summan kan skrivas om genom att utvidga summan med $F(k+1)$:

$$a_{k+1} = C^{k+1} a_0 + \sum_{j=1}^{k+1} C^{k+1-j} F(j).$$

Slutsats

Genom matematisk induktion har vi visat att för alla n gäller att:

$$a_n = C^n a_0 + \sum_{k=1}^{n} C^{n-k} F(k).$$

Därmed är det bevisat att lösningen av den rekursiva relationen $a_n = Ca_{n-1} + F(n)$ med initialvillkoret $a_0 = 1$ är:

$$a_n = C^n a_0 + \sum_{k=1}^{n} C^{n-k} F(k).$$

Exempel 7

[3, section 10.3]

Vi vill lösa den rekursiva relationen $a_n = a_{n-1} + 2$ med basfallet $a_0 = 1$, och med hänsyn till $F(2) = 2$ och $c = 1$, använder vi det angivna resultatet från sats 3. För att lösa den rekursiva relationen $a_n = a_{n-1} + 2$ med initialvärdet $a_0 = 1$, och med hänsyn till att $F(2) = 2$ och $c = 1$, tillämpar vi det angivna resultatet från sats 3 .

Enligt sats3, med $c = 1$ och $a_0 = 1$, samt med funktionen $F(k) = 2$ för alla k, får vi:

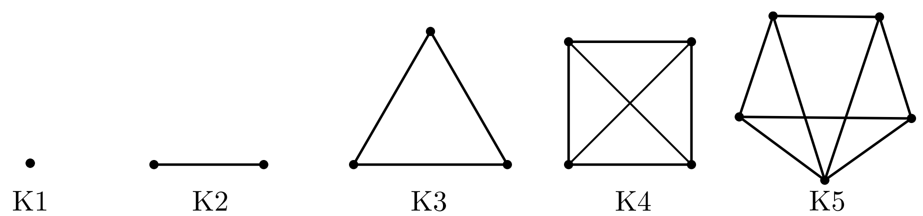
$$\sum_{k=1}^{n} a_n = cn \cdot a_0 + \sum_{k=1}^{n} c^{n-k} \cdot F(k) = 1 + \sum_{k=1}^{n} 2 = 1 + 2n.$$

Exempel 8

[2, p.346]

Antag att k_n är en figur som erhålls från ritningen av en n-sidig polygon med alla dess diagonaler. Antalet kanter i figuren ges av den rekursiva relationen:

$$\begin{cases} a_n = a_{n-1} + (n-1) & \text{för } n \geq 1, \\ a_0 = 0. \end{cases}$$



Figur: 2: kanter

Med hänsyn till $F(n) = n - 1$ och $c = 1$, enligt den tidigare nämnda satsen, kan vi uttrycka summan av antalet kanter som:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} (k-1) = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}.$$

7 Lösning av en icke-homogen linjär rekursiv relation av andra Ordningen [3, section 10.3]

I fortsättningen kommer vi att utforska metoder för att lösa olikformiga linjära rekursiva relationer av andra ordning med konstanta koefficienter. Den generella formen för sådana relationer ges av:

$$a_{n+k} + c_1 a_{n+k-1} + c_2 a_{n+k-2} + \ldots + c_k a_n = F(n).$$

Där $c_1 \in \mathbb{R}$, $n \geq 0$, och $F(n)$ är en icke-noll funktion. Därför antar den allmänna formen för en Icke-homogen linjär rekursiv relation av andra ordning följande form:

$$a_{n+2} + c_1 a_{n+1} + c_2 a_n = F(n).$$

Med kravet att c_1 och c_2 inte är noll. Om c_1 eller c_2 skulle vara noll, skulle det förändra den linjära rekursiva relationens karaktär och potentiellt leda till en trivial eller odefinierad lösning i vissa fall.

Även om det inte finns en universell metod för att lösa alla sådana olikformiga relationer, kan en framgångsrik metod identifieras när $F(n)$ är specificerad på ett väldefinierat sätt. Denna metod är känd som metoden för okända koefficienter och bygger på att behandla den motsvarande homogena relationen, vilken uppstår när $F(n)$ sätts till noll.

Vi antar att det generella lösningen på den homogena relationen är $a_n^{(h)}$, och en specifik lösning $a_n^{(p)}$ till den icke-homogen relationen identifieras. Alltså ges den allmänna lösningen för den givna relationen av:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)}.$$

För att härleda $a_n^{(h)}$ använder vi metoden med karakteristiska ekvationer, medan för att finna $a_n^{(p)}$ använder vi gissningsmetoden med efterföljande ersättning i den ursprungliga relationen för beräkning.

Observation

Generellt sett, för en inhomogen rekursiv sekvens $F(n) = kr^n$, där k är en konstant:

a) Om r^n inte är en lösning till en homogen relation, då är $a_n^{(p)} = Ar^n$ där A är en konstant.

b) Om $a_n^{(h)} = c_1 r^n + c_2 r_1^n$ och $r_1 \neq r$, då är $a_n^{(p)} = B_n r^n$ där B är en konstant.

c) Om $a_n^{(h)} = (c_1 + c_2 n) r^n$ för en konstant c, då är $a_n^{(p)} = c_n^2 r^n$. Det bör noteras att för att lösa oändliga första ordningens rekursiva relationer kan vi även agera enligt följande.

Exempel 9 [3, section 10.3]]

Lös den rekursiva relation $a_n - 3a_{n-1} = 5(7^n)$ där $a_0 = 2$ och $n \geq 1$ För att lösa den rekursiva relationen $a_n - 3a_{n-1} = 5(7^n)$ med $a_0 = 2$ och $n \geq 1$, inleder vi genom att identifiera den homogena relationen $a_n - 3a_{n-1} = 0$, där kvoten specificeras som $r = 3$. Det resulterar i $a_n^{(n)} = c(3^n)$. För den icke-homogena delen $F(n) = 5(7^n)$ söker vi en särskild lösning $a_n^{(p)}$ uttryckt som $A(7^n)$. Eftersom $a_n^{(p)}$ är en lösning för den olikformiga relationen, uppfyller den villkoren i den givna relationen, vilket ger oss $A(7^n) - 3A(7^{n-1}) = 5(7^n)$. Genom att dividera båda sidor av ekvationen med 7^{n-1}, erhåller vi $7A - 3A = 5 \cdot 7$, vilket ger $A = \frac{35}{4}$. Därav får vi $a_n^{(p)} = \frac{35}{4} \cdot 7^n = \left(\frac{5}{4}\right) \cdot 7^{n+1}$ för $n \geq 0$. Den allmänna lösningen till ekvationen blir därmed $a_n = c(3^n) + \frac{5}{4} \cdot 7^{n+1}$. Med hänsyn till det initiala villkoret $a_0 = 2$ bestämmer vi värdet av $c = -\frac{27}{4}$, vilket ger oss:

$$a_n = \frac{5}{4}(7^{n+1}) - \frac{1}{4}(3^{n+3}), \quad n \geq 0.$$

Exempel 10 [3, section 10.3]

Lösa den rekursiva relationen $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 5^n$ Lösning: För att lösa den rekursiva relationen $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 5^n$ följer vi dessa steg:

1- Först löser vi den homogena ekvationen:

$$a_n - 5a_{n-1} + 6a_{n-2} = 0.$$

Det ger rötterna $r_1 = 2$ och $r_2 = 3$, så den homogena lösningen är:

$$a_n^{(h)} = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n.$$

2- För den icke-homogena ekvationen $a_n^{(p)} = 5^n$, gissar vi en lösning av formen

$A \cdot 5^n$. Efter att ha ersatt och löst ekvationen, får vi:

$$A \cdot 5^n = 5^n.$$

Det ger $A = 1$, så den partikulära lösningen är:

$$a_n^{(p)} = 5^n.$$

3- Den allmänna lösningen är summan av den homogena och den partikulära lösningen:

$$a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n + 5^n.$$

Genom att ersätta får vi $A(5^n) = 5A(5^{n-1}) - 6A(5^{n-2}) + 5^n$. Genom att dela med 5^{n-2}, får vi $6A = 25$ och därmed $A = \frac{25}{6}$. Så blir lösningen på problemet på formen $a_n = c_1(2^n) + c_2(3^n) + \frac{25}{6}(5^n)$.

Exempel 11 [3, section 10.3]

Lösa den rekursiva relationen $a_n - 3a_{n-1} = 5(3^n)$ där $a_0 = 2$ och $n \geq 1$. Lösning Som i det tidigare exemplet är den homogena lösningen $a_n^{(h)} = c(3^n)$ och $F_n = 5(3^n)$. Men här är $F(n)$ och $a_n^{(h)}$ inte linjärt oberoende. Därför betraktar vi lösningen $a_n^{(p)} = B(3^n)$. Eftersom $F(n) = 5(3^n)$, får vi genom att ersätta i problemets ekvation $B_n(3^n) - 3B_{(n-1)}(3^{n-1}) = 5(3^n)$, vilket förenklas till $B_n - B_{(n-1)} = 5$ och därmed $B = 5$. Därför är $a_n = a_n^{(h)} + a_n^{(p)} = (c + 5n)3^n$, för $n \geq 0$. Med hänsyn till det initiala villkoret $a_0 = 2$, är den allmänna lösningen $a_n = (2 + 5n)(3^n)$. Observera att om vi, likt det tidigare exemplet, sätter $a_n^{(p)} = B(3^n)$, kommer vi genom att ersätta i ekvationen få $B(3^n) - 3B(3^{n-1}) = 5(3^n)$, vilket innebär att $3^n = 0$, vilket är omöjligt för $n \geq 0$.

Exempel 12 [3, section 10.3]

Lös den givna rekursiva relationen $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = -200$ med initialvillkoren $a_0 = 3000$ och $a_1 = 3300$ för $n \geq 0$. Den homogena ekvationen $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$ har en karaktäristisk ekvation $r^2 - 4r + 3 = 0$. Rötterna till denna ekvation är $r_1 = 1$ och $r_2 = 3$, vilket ger den homogena lösningen $a^{(h)} = C_1 \cdot (3^n) + C_2 \cdot (1^n) = C_1 \cdot (3^n) + C_2$.

Dock är $a^{(h)}$ och $F(n) = -200$ inte linjärt oberoende. Det innebär att med

$C_1 = 0$ och $C_2 = -200$ är $F(n)$ en lösning till den homogena ekvationen.

Därför är den specifika lösningen på problemet $a_n^{(p)} = B \cdot n$. Genom att ersätta detta i ekvationen får vi $B(n+2) - 4B(n+1) + 3Bn = -200$, vilket leder till $-2B = -200$ så $B = 100$. Som ett resultat blir $a_n = C_1 \cdot (3^n) + C_2 + 100n$.

Med hänsyn till de initiala villkoren $a_0 = 3000$ och $a_1 = 3300$ kan vi beräkna värdena för C_1 och C_2, vilket ger oss $a_n = 100 \cdot (3^n) + 2900 + 100n$ för $n \geq 0$.

References

[1] Biggs, N: Discrete Mathematics, Oxford University press, 1993.

[2] Epp, S: Discrete Mathematics with Applications, 5th edition, 2018.

[3] Grimaldi, R: Discrete and Combinatorial Mathematics, An Applied Introduction, 5th edition, Addison Wesky, 1993.