



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Introduktion i kategoriteori

av

Marcus Hultvall Hultin

2025 - No K11

Introduktion i kategoriteori

Marcus Hultvall Hultin

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Sofia Tirabassi

2025

Introduktion i kategoriteori

Marcus Hultvall Hultin

Förord

Jag vill tacka min handledare, professor Sofia Tirabassi, för stöttningen och vägledningen under arbetet med denna uppsats. Jag uppskattar verkligen de lärorika, intressanta och utmanande samtal vi har haft. Även AI-verktyget ChatGPT har varit behjälpligt som ett bollplank under skrivprocessen.

Abstract

In this thesis we introduce the main concepts of category theory. We introduce definitions and study examples of interpretations of algebraic structures in category theory. We begin by introducing the notions of categories, functors and natural transformations. We have a look at equivalence of categories, where we observe that the category of vector spaces over a field $\mathbb{F}$ and linear transformations is equivalent to the category of matrices over the same field. Then we continue by studying more complex examples of categories, including products of categories and functor categories. We conclude by introducing universal arrows, which we connect to the group isomorphism theorems, and proving the Yoneda Lemma.

Sammanfattning

I den här uppsatsen introducerar vi de centrala delarna av kategoriteori. Vi introducerar definitioner och studerar exempel på hur tolkningar av olika algebraiska strukturer i kategoriteori. Vi börjar med att introducera kategorier, funktorer och naturliga transformationer. Sedan undersöker vi ekvivalens mellan kategorier, och observerar till exempel att kategorin av vektorrum över en kropp $\mathbb{F}$ och linjära transformationer och kategorin av matriser över samma kropp är ekvivalenta. Vi fortsätter sedan med att studera mer komplicerade exempel på kategorier, som produkter av kategorier och funktorkategorier. Avslutningsvis introducerar vi universella pilar, och kopplar dessa till isomorfisaterna av grupper, och bevisar sedan Yonedas lemma.

Innehållsförteckning

1	Inledning	9
2	Centrala begrepp inom kategoriteori	9
2.1	Kategorier, funktorer och naturliga transformationer	9
2.2	Ekvivalenta kategorier	16
2.3	Mono- och epimorfier	21
2.4	Produkt av kategorier	23
2.5	Funktorkategorier	25
3	Universella konstruktioner	27
3.1	Universella pilar	27
3.2	Yonedas lemma	31

1 Inledning

Med hjälp av kategoriteori kan vi studera algebraiska objekt och strukturer från en annan synvinkel och se hur olika typer av strukturer eller kollektioner av strukturer ofta kan ses som ett specialfall av just en kategori. Vi kommer att se exempel på hur element kan betraktas som *morfier* mellan objekt, och begreppet universalitet hjälper oss att se sambandet mellan konstruktioner som ofta dyker upp i matematiken, som delar en gemensam *universell* egenskap. Kategoriteori är ett viktigt sätt att generalisera och etablera generella sanningar om många olika typer av matematiska strukturer, vilket sedan kan förenkla bevisandet av mer specifika resultat inom olika matematiska områden.

Begreppen vi ska studera introducerades år 1945 av Eilenberg och Mac Lane för att formalisera påståendet att en isomorfi är *naturlig*. För att göra det behövde de titta på alla algebraiska strukturer av ett visst slag samtidigt, och alla morfier emellan dem. Detta leder till begreppet *kategori*, som består av en uppsättning objekt och en uppsättning morfier mellan objekt. Dessa ses som likvärdiga, vilket skiljer sig från synsättet som tidigare förekommit, där objekten har varit primära och morfierna sekundära.

I den här uppsatsen presenteras grundläggande begrepp och satser inom kategoriteori. Vi behandlar flera exempel på hur algebraiska strukturer som grupper, ringar och vektorrum kan tolkas kategoriteoretiskt och bevisar påståenden om dessa. Vi följer nära upplägget i Mac Lanes *Categories for the Working Mathematician*, och många av exemplen är lösningar på övningar härifrån.

Vi börjar med att presentera de grundläggande definitionerna av kategorier, funktorer och naturliga transformationer, där vi primärt kommer att fokusera på *kovarianta* funktorer. Sedan utvecklar vi teorin genom att undersöka mer komplicerade konstruktioner av kategorier, som funktorkategorier och produkter av kategorier. Vi avslutar med att definiera universalitet samt presenterar och bevisar Yonedas lemma.

2 Centrala begrepp inom kategoriteori

2.1 Kategorier, funktorer och naturliga transformationer

I det här inledande kapitlet introducerar vi de viktigaste definitionerna och exemplifierar dessa med konstruktioner från bland annat abstrakt och linjär algebra. Låt oss först definiera vad en *kategori* är och vad det finns för exempel på sådana.

Definition 1. En kategori $\mathcal{C}$ består av

1. En klass $\text{ob}(\mathcal{C})$ vars element $A, B, C, \dots$ kallas *objekt*.
2. En klass $\text{ar}(\mathcal{C})$ vars element $f, g, h, \dots$ kallas *pilar* eller *morfier*.
3. Två avbildningar dom och kod som för varje pil f i $\text{ar}(\mathcal{C})$ tilldelar ett objekt $\text{dom} f \in \text{ob}(\mathcal{C})$, som kallas

domänen av f , och ett objekt $\text{kod}f \in \text{ob}(\mathcal{C})$, som kallas *kodomänen* av f . Om $A = \text{dom}f$ och $B = \text{kod}f$ skriver vi $f : A \longrightarrow B$ eller $A \xrightarrow{f} B$.

4. En partiell binär operation $\circ$ som för varje par av pilar (f, g) med $\text{kod}g = \text{dom}f$ tilldelar en pil $f \circ g : \text{dom}g \longrightarrow \text{kod}f$. Denna operation, som vi kallar *sammansättning*, är associativ: För pilar $A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{f} D$ gäller att $f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$.

Vidare finns en funktion $\text{id}_{\mathcal{C}} : \text{ob}(\mathcal{C}) \longrightarrow \text{ar}(\mathcal{C})$ som för varje objekt A i $\mathcal{C}$ tilldelar en pil $1_A : A \longrightarrow A$, med egenskapen att för alla pilar $f : A \longrightarrow B$ och $g : C \longrightarrow A$ gäller att $f \circ 1_A = f$ och $1_A \circ g = g$.

För enkelhets skull utelämnar vi ofta symbolen för sammansättning och skriver $f \circ g = fg$. För två objekt A och B i en kategori $\mathcal{C}$, skriver vi $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$ för mängden av pilar $A \longrightarrow B$.

Några enkla exempel på kategorier inkluderar:

- Den tomma kategorin $\mathbf{0}$, som inte innehåller några objekt eller pilar.
- Kategorin med ett objekt $\mathbf{1}$, som har ett element och en identitetspil.
- Kategorin med två objekt $\mathbf{2}$, med objekt A och B , en pil $A \rightarrow B$, samt identitetspilar.

Vi säger att en kategori är *diskret* om alla dess pilar är identitetspilar. En mängd A kan identifieras som en diskret kategori, där både objekten och identitetspilarna är precis elementen i A .

Vi säger att en kategori är en *monoid*, om den endast har ett objekt. En sådan kategori bestäms entydigt av mängden av pilar, identitetspilen och regeln för sammansättning, så det är med andra ord en semigrupp med identitets-element.

En grupp $(G, \cdot)$ kan vi se som en monoidkategori $\mathcal{G}$ med $\text{ob}(\mathcal{G}) = \{*\}$ och $\text{ar}(\mathcal{G}) = G$ med $\cdot$ som sammansättningsfunktion. Vi får en identitetspil 1_* som motsvaras av identitets-elementet i G . För varje pil g i $\mathcal{G}$ finns nu en pil h sådan att $gh = 1_* = hg$, eftersom de är gruppelement. Vi säger att pilarna g och h är *inverterbara*. Generellt säger vi att en pil $f : A \longrightarrow B$ är inverterbar om den har både högerinvers och vänsterinvers, alltså pilar $g, h : B \longrightarrow A$, sådana att $fg = 1_B$ och $hf = 1_A$. En kategori där alla pilar är inverterbara kallas för *gruppid* och i den bestämmer varje objekt en grupp.

En *förordning* är en kategori $\mathcal{P}$, där för varje par av objekt P, Q det som mest finns en pil $P \xrightarrow{\leq} Q$. Vi skriver $P \leq Q$ för existensen av denna pil. Detta motsvaras av en reflexiv och transitiv relation. Mängden av heltal $\mathbb{Z}$ tillsammans med den vanliga ordningsrelationen $\leq$ ger upphov till en förordnad kategori, vars objekt är mängden av heltal, och där för varje par av heltal M, N , det finns en unik pil $M \rightarrow N$ om och endast om $M \leq N$. Givet tre heltal M, N, R och pilar $M \xrightarrow{\leq_1} N$ och $N \xrightarrow{\leq_2} R$ har vi en sammansatt pil $M \xrightarrow{\leq_2 \circ \leq_1} R$, eftersom $\leq$ är transitiv. För varje heltal M har vi en identitetspil $M \xrightarrow{\leq} M$ eftersom relationen är symmetrisk. Alltså är axiomen för en kategori uppfyllda.

Om K är en kommutativ ring, kan vi konstruera kategorin Matr_K med objektmängd alla positiva heltal, och där varje $M \times N$ -matris A med element i K betraktas som en pil $N \xrightarrow{A} M$. För varje heltal N ges identitetspilen 1_N av identitetsmatrisen I_N . Sammansättning ges av den vanliga matrisprodukten.

Snart kommer vi att introducera några exempel på *stora* kategorier. Det är kategorier vars objekt eller pilar är klasser snarare än mängder. För det behöver vi några begrepp. Vi antar först och främst att det finns ett *universum*, vilket är en mängd $\mathbb{U}$ med följande egenskaper:

- (i) $x \in U \in \mathbb{U}$ implicerar $x \in \mathbb{U}$,
- (ii) $U, V \in \mathbb{U}$ implicerar $\{U, V\} \in \mathbb{U}$, $(U, V) \in \mathbb{U}$ och $U \times V \in \mathbb{U}$,
- (iii) $X \in \mathbb{U}$ implicerar $\mathcal{P}(X) \in \mathbb{U}$ och $\cup X \in \mathbb{U}$.
- (iv) Mängden av alla ändliga ordinaltal ω finns i $\mathbb{U}$.
- (v) Om $f : A \rightarrow B$ är en surjektiv funktion med $A \in \mathbb{U}$ och $B \subset \mathbb{U}$, så är $B \in \mathbb{U}$.

Vi säger nu att en mängd A är *liten* om $A \in \mathbb{U}$. En mängd eller *klass* som inte finns i universumet kallas för *stor*. En kategori vars objekt och pilar utgör klasser kallas för en stor kategori. Genom att hålla oss till kategorier vars objekt är små mängder, undviker vi problem som Russells paradox.

Låt nu **Set** vara kategorin vars objekt består av alla små mängder, och pilar alla funktioner mellan dem. Identitetspilar ges av identitetsfunktionerna och sammansättning av pilar är sammansättning av funktioner.

En *rotad* mängd är en mängd A tillsammans med en funktion $\rho_A : \{*\} \rightarrow A$. Vi kan bilda kategorin **Set**_{*} vars objekt består av alla små rotade mängder. Dess pilar är alla rotbevarande funktioner, det vill säga funktioner $f : A \rightarrow B$ med $f \circ \rho_A = \rho_B$.

Vi kan på liknande sätt bilda kategorin **Grp** med objekt alla små grupper och pilar alla grupphomomorfier mellan dem. Kategorin **Ab** har objekt alla små abelska grupper, och pilar alla homomorfier dem emellan. Vi har kategorin **Rng** av alla små ringar och ringhomomorfier, och kategorin **CRng** av alla små kommutativa ringar.

Vi ska nu introducera en slags morfi mellan kategorier:

Definition 2. Låt $\mathcal{C}$ och $\mathcal{D}$ vara två kategorier. En (*kovariant*) *funktor* F från $\mathcal{C}$ till $\mathcal{D}$, skrivet $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$, består av två funktioner:

1. Objektfunktionen $F_{\text{ob}} : \text{ob}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{ob}(\mathcal{D})$, som för varje objekt A i $\mathcal{C}$ tilldelar ett objekt $F_{\text{ob}}(A)$ i $\mathcal{D}$.
2. Pilfunktionen, $F_{\text{ar}} : \text{ar}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{ar}(\mathcal{D})$, som för varje pil $f : A \longrightarrow B$ i $\mathcal{C}$ tilldelar en pil $F_{\text{ar}}(f) : F_{\text{ob}}(A) \longrightarrow F_{\text{ob}}(B)$ i $\mathcal{D}$.

Om $f \circ g$ är definierat i $\mathcal{C}$, så är $F_{\text{ar}}(f \circ g) = F_{\text{ar}}(f) \circ F_{\text{ar}}(g)$. Vidare kommuterar F med identitetspilsfunktionen, alltså ska följande diagram vara kommutativt:

$$\begin{array}{ccc}
\text{ob}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{F_{\text{ob}}} & \text{ob}(\mathcal{D}) \\
\downarrow \text{id}_{\mathcal{C}} & & \downarrow \text{id}_{\mathcal{D}} \\
\text{ar}(\mathcal{C}) & \xrightarrow{F_{\text{ar}}} & \text{ar}(\mathcal{D})
\end{array}$$

För enkelhetens skull skriver vi ofta $F(A)$ eller FA istället för $F_{\text{ob}}(A)$, och $F(f)$ eller Ff istället för $F_{\text{ar}}(f)$. Det sista kravet angående identitetspilarna kan då uttryckas som att $F1_A = 1_{FA}$ för alla objekt A i $\mathcal{C}$.

En *kontravariant* funktor F har istället en pilfunktion F_{ar} som för varje pil $f : A \rightarrow B$ tilldelar en pil $Ff : B \rightarrow A$ i motsatt riktning. För den ska det istället gälla att för pilar $f : B \rightarrow C$ och $g : A \rightarrow B$, så ska $F(f \circ g) = Fg \circ Ff$. I denna text kommer vi dock med *funktor* primärt avse en *kovariant* sådan.

Givet en kategori $\mathcal{C}$ har vi en funktor $1_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ som avbildar varje objekt och pil till sig själv. Vi kallar denna för identitetsfunktorn.

Exempel 2.1. Ett annat exempel är potensmängdfunktorn $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ som för varje mängd A tilldelar potensmängden $\mathcal{P}A = \{M : M \subset A\}$ och för varje funktion $f : A \rightarrow B$ tilldelar funktionen

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}f : \mathcal{P}A &\longrightarrow \mathcal{P}B \\
M &\longmapsto f(M)
\end{aligned}$$

där $f(M)$ är bilden av M under f . För en identitetspil 1_A och en delmängd $M \subset A$ har vi $\mathcal{P}1_A(M) = 1_A(M) = M$, så $\mathcal{P}1_A = 1_{\mathcal{P}A}$. Om vi har två funktioner $g : A \rightarrow B$ och $f : B \rightarrow C$ och $M \subset A$

$$\mathcal{P}(f \circ g)(M) = f \circ g(M) = f(g(M)) = \mathcal{P}f(g(M)) = \mathcal{P}f(\mathcal{P}g(M)) = \mathcal{P}f \circ \mathcal{P}g(M),$$

så $\mathcal{P}$ uppfyller axiomen för en funktor.

Vi säger att en funktor är *glömsk* om den ignorerar strukturen hos ett algebraiskt objekt. Ett exempel är den glömska funktorn $U : \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$, som avbildar varje grupp på sin underliggande mängd, men glömmer bort den multiplikativa strukturen hos gruppen.

Givet två funktorer $S : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ och $T : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ definierar vi den sammansatta funktorn $S \circ T$ genom

$$\begin{aligned}
S \circ T : A &\xrightarrow{S \circ T_{\text{ob}}} S(TA) \\
f &\xrightarrow{S \circ T_{\text{ar}}} S(Tf)
\end{aligned}$$

Exempel 2.2. Om K är en kommutativ ring, betrakta mängden av inverterbara $n \times n$ -matriser med element i K , vilken vi benämner $GL_n(K)$. Denna mängd, tillsammans med matrismultiplikation, utgör en grupp, så vi får en funktor $GL_n : \mathbf{CRng} \rightarrow \mathbf{Grp}$ genom

$$\begin{aligned}
GL_n : K &\xrightarrow{GL_n_{\text{ob}}} GL_n(K) \\
[f : K \rightarrow K'] &\xrightarrow{GL_n_{\text{ar}}} \left[\begin{array}{l} GL_n f : GL_n(K) \longrightarrow GL_n(K') \\ (x_{ij})_{n \times n} \longmapsto (f(x)_{ij})_{n \times n} \end{array} \right].
\end{aligned}$$

Funktionen $\text{GL}_n f$ är en grupphomomorfi tack vare att f är en ringhomomorfi och hur matrismultiplikation är definierad. Vidare kan vi se att identiteter avbildas till identiteter.

Exempel 2.3. (1, kapitel 1.4, övning 1) Låt S vara en fix mängd, och X^S vara mängden av alla funktioner $f : S \rightarrow X$, för en godtycklig mängd X . Definiera

$$X \xrightarrow{\text{F}_{\text{ob}}} X^S$$

$$f : X \rightarrow Y \xrightarrow{\text{F}_{\text{ar}}} \left[\begin{array}{l} \text{F}f : X^S \rightarrow Y^S \\ h \mapsto f \circ h \end{array} \right].$$

Vi kan se att F kommuterar med identitetspilsfunktionen i följande diagram

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\text{F}} & X^S \\ \downarrow \text{id}_{\text{Set}} & & \downarrow \text{id}_{\text{Set}} \\ \left[\begin{array}{l} 1_X : X \rightarrow X \\ x \mapsto x \end{array} \right] & \xrightarrow{\text{F}} & \left[\begin{array}{l} 1_{X^S} : X^S \rightarrow X^S \\ h \mapsto 1_X \circ h = h \end{array} \right] \end{array}$$

Vidare, om $f : Y \rightarrow Z$ och $g : X \rightarrow Y$ är mängdfunktioner, alltså pilar i Set , och $h \in X^S$ så ser vi att

$$\text{F}(f \circ g)(h) = (f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h) = \text{F}f(g \circ h) = \text{F}f(\text{F}g(h)) = \text{F}f \circ \text{F}g(h).$$

Vi har alltså konstruerat en funktor $\text{F} : \text{Set} \rightarrow \text{Set}$.

Vi har nu introducerat funktorer, som är morfier mellan kategorier. Vi kan nu utöka till att prata om morfier mellan funktorer. Vi kallar dessa *naturliga transformationer*:

Definition 3. Låt $\mathcal{C}$ och $\mathcal{D}$ vara kategorier och låt $\text{S}, \text{T} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ vara funktorer. En *naturlig transformation* $\tau : \text{S} \rightarrow \text{T}$ är en funktion

$$\tau : \text{ob}\mathcal{C} \rightarrow \text{ar}\mathcal{D}$$

$$C \mapsto (\tau_C : \text{S}C \rightarrow \text{T}C)$$

där τ_C är en pil i $\mathcal{D}$ sådan att följande diagram är kommutativt för varje pil $f : C \rightarrow C'$ i $\mathcal{C}$:

$$\begin{array}{ccccc} C & & \text{S}C & \xrightarrow{\tau_C} & \text{T}C \\ \downarrow f & & \downarrow \text{S}f & & \downarrow \text{T}f \\ C' & & \text{S}C' & \xrightarrow{\tau_{C'}} & \text{T}C' \end{array}$$

Vi säger att τ_C är *naturlig* i C . Om τ är en naturlig transformation kallar vi pilarna $\tau_A, \tau_B, \tau_C \dots$ i $\mathcal{D}$ för dess *komponenter*. Om alla komponenter är inverterbara säger vi att τ är en *naturlig isomorfi*.

Vi börjar med ett enkelt exempel. Betrakta återigen funktorn $\mathcal{P} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$, och för varje A definiera funktionen

$$\begin{aligned}\tau_A : A &\longrightarrow \mathcal{P}(A) \\ a &\longmapsto \{a\}\end{aligned}.$$

Då är $\tau_B \circ f = \mathcal{P}f \circ \tau_A$ för alla pilar $f : A \longrightarrow B$ i $\mathbf{Set}$, vilket tydliggörs av följande diagram:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{\tau_A} & \{a\} \\ \downarrow f & & \downarrow \mathcal{P}f \\ f(a) & \xrightarrow{\tau_B} & \{f(a)\} \end{array}$$

Funktionen $\tau : A \longmapsto \tau_A$ är alltså en naturlig transformation $\tau : \mathbf{1}_{\mathbf{Set}} \rightrightarrows \mathcal{P}$.

Innan vi går in på nästa exempel, låt oss tydliggöra vad vi menar med att applicera ett par av funktioner på ett par. Om $f : A \rightarrow B$ och $g : C \rightarrow D$ är godtyckliga funktioner, och $(a, b) \in A \times B$ så definierar vi funktionsparet som följer:

$$\begin{aligned}(f, g) : A \times B &\longrightarrow C \times D \\ (a, b) &\longmapsto (f(a), g(b))\end{aligned}$$

Vidare, om vi har funktioner

$$A \times B \xrightarrow{(f_1, g_1)} C \times D \xrightarrow{(f_2, g_2)} E \times D$$

så definierar vi

$$(f_2, g_2) \circ (f_1, g_1) := (f_2 \circ f_1, g_2 \circ g_1).$$

Exempel 2.4. (1, kapitel 1.4, övning 1) Låt X^S och funktorn F vara som i exempel 2.3. Följande avbildningar ger då en funktor $S : \mathbf{Set} \longrightarrow \mathbf{Set}$:

$$\begin{aligned}S : X &\xrightarrow{S_{\text{ob}}} X^S \times S \\ f &\xrightarrow{S_{\text{ar}}} (Ff, 1_S)\end{aligned}$$

Från exempel 2.3 härleder vi att

$$S1_X = (F1_X, 1_S) = (1_{X^S}, 1_S) = 1_{X^S \times S} = 1_{SX}.$$

På samma sätt, om $f \circ g$ är definierat för pilar f och g i $\mathbf{Set}$, så är

$$S(f \circ g) = (F(f \circ g), 1_S) = (Ff \circ Fg, 1_S \circ 1_S) = (Ff, 1_S) \circ (Fg, 1_S) = Sf \circ Sg.$$

Vilket bekräftar att S är en funktor. Definiera nu för varje mängd X funktionen

$$\begin{aligned}\eta_X : X^S \times S &\longrightarrow X \\ (h, s) &\longmapsto h(s)\end{aligned}$$

Om X och Y är två mängder och $f : X \longrightarrow Y$ en funktion så kommuterar följande diagram

$$\begin{array}{ccc}
(h, s) & \xrightarrow{\eta_X} & h(s) \\
\downarrow Sf & & \downarrow f \\
(f \circ h, s) & \xrightarrow{\eta_Y} & f \circ h(s) = f(h(s))
\end{array}$$

Så vi har en naturlig transformation

$$\begin{array}{c}
\eta : S \rightarrow 1_{\text{Set}} \\
X \mapsto \eta_X
\end{array}$$

Vi kan nu observera några olika resultat som följer av definitionerna vi har introducerat.

Exempel 2.5. (1, kapitel 1.4, övning 3) Om $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$ är grupp-kategorier, alltså kategorier med ett enda objekt där alla pilar är inverterbara, och S och T är funktorer (vilket motsvarar grupphomomorfier), så existerar en naturlig transformation $S \rightarrow T$ om och endast om S och T är konjugata, det vill säga, det finns något h i $\mathcal{C}$ sådant att $Tg = h(Sg)h^{-1}$ för alla g i $\mathcal{B}$.

Antag att S och T är konjugata. Då finns ett element h i $\mathcal{C}$ sådant att $Tg = h(Sg)h^{-1}$ för alla g i $\mathcal{B}$. Det motsvaras av följande kommutativa diagram:

$$\begin{array}{ccc}
*_B & & *_C \xrightarrow{h} *_C \\
\downarrow g & & \downarrow Sg \quad \downarrow Tg \\
*_B & & *_C \xrightarrow{h} *_C
\end{array}$$

Här kan vi se att h är komponenten till en naturlig transformation $S \rightarrow T$. Antag nu å andra sidan att det finns en naturlig transformation $\tau : S \rightarrow T$. Då har den en enda komponent τ_* med egenskapen att $\tau_* Sg = Tg \tau_*$ för alla g i $\mathcal{C}$. Eftersom alla element är inverterbara har vi att $Tg = \tau_*(Sg)\tau_*^{-1}$, alltså är S och T konjugata.

Exempel 2.6. (1, kapitel 1.4, övning 4) Låt $\mathcal{C}$ vara en godtycklig kategori och $\mathcal{P}$ en förordning, och låt $S, T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}$ vara funktorer. Då finns en naturlig transformation $S \rightarrow T$ om och endast om $SA \leq TA$ för alla objekt A i $\mathcal{C}$.

Antag att det finns en naturlig transformation $\pi : S \rightarrow T$. Då motsvarar varje komponent π_A relationen $SA \leq TA$. Å andra sidan, antag att $SA \leq TA$ för alla A i $\mathcal{C}$. Eftersom relationen är transitiv, är följande diagram kommutativt för alla A och B i $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{ccc}
A & & SA \xrightarrow{\leq} TA \\
\downarrow \leq & & \downarrow \leq \quad \downarrow \leq \\
B & & SB \xrightarrow{\leq} TB
\end{array}$$

vilket ger en naturlig transformation $S \rightarrow T$.

2.2 Ekvivalenta kategorier

Vi säger att två kategorier $\mathcal{C}$ och $\mathcal{D}$ är *isomorfa* om det finns en funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ som är bijektiv i både objekt och pilar. Detta är en ganska stark egenskap eftersom den i princip säger att två kategorier är identiska i sin struktur. Följande något svagare egenskap visar sig dock vara mycket användbar:

Definition 4. Vi säger att två kategorier $\mathcal{C}$ och $\mathcal{D}$ är *ekvivalenta* om det finns ett funktorer $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ och $T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ tillsammans med två naturliga isomorfier $\tau : 1_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\sim} S \circ T$ och $\sigma : 1_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\sim} T \circ S$. Vi säger då att funktorerna S och T utgör en ekvivalens mellan kategorierna $\mathcal{C}$ och $\mathcal{D}$.

Exempel 2.7. (1, kapitel 1.4, övning 6) För $\mathbb{F}$ en kropp, låt $\mathbf{Vec}_{\mathbb{F}}$ vara kategorin med objekt, alla ändligt-dimensionella vektorrum, och pilar, alla linjära transformationer mellan dem. Vi ska se att denna kategori, givet en kropp $\mathbb{F}$, är ekvivalent med kategorin $\mathbf{Matr}_{\mathbb{F}}$ som vi introducerat tidigare.

Först, för varje vektorrum V i $\mathbf{Vec}_{\mathbb{F}}$, välj en bas β_V . Vi definierar nu följande funktor $S : \mathbf{Vec}_{\mathbb{F}} \longrightarrow \mathbf{Matr}_{\mathbb{F}}$ på följande sätt:

$$V \xrightarrow{S_{\text{ob}}} \dim V$$

$$t : V \rightarrow W \xrightarrow{S_{\text{ar}}} [t] : \dim V \rightarrow \dim W$$

där $[t]$ är matrisrepresentationen av t med avseende på baserna för β_V respektive β_W . Att S uppfyller definitionen av en funktor följer av att matrismultiplikation direkt motsvaras av sammansättning av linjära transformationer, och att identitetstransformationer avbildas till identitetsmatrisen. Vi kan på samma sätt se att följande definition ger en funktor $T : \mathbf{Matr}_{\mathbb{F}} \longrightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{F}}$:

$$N \xrightarrow{T_{\text{ob}}} \mathbb{F}^N$$

$$A : N \rightarrow M \xrightarrow{T_{\text{ar}}} L_A : \mathbb{F}^N \rightarrow \mathbb{F}^M$$

Vi tittar närmare på hur den sammansatta funktorn $S \circ T$ avbildar objekt och pilar:

$$S \circ T : N \xrightarrow{T_{\text{ob}}} \mathbb{F}^N \xrightarrow{S_{\text{ob}}} \dim \mathbb{F}^N = N$$

$$A \xrightarrow{T_{\text{ar}}} L_A \xrightarrow{S_{\text{ar}}} [L_A] = A$$

Vi ser då att $S \circ T = 1_{\mathbf{Matr}_{\mathbb{F}}}$. Därav är det trivialt att hitta en naturlig isomorfi $\tau : S \circ T \xrightarrow{\sim} 1_{\mathbf{Matr}_{\mathbb{F}}}$: Tag $\tau_N = 1_N$ för varje N .

För $T \circ S$ har vi

$$T \circ S : V \xrightarrow{S_{\text{ob}}} \dim V \xrightarrow{T_{\text{ob}}} \mathbb{F}^{\dim V}$$

$$t \xrightarrow{S_{\text{ar}}} [t] \xrightarrow{T_{\text{ar}}} L_{[t]}$$

För varje vektorrum V i $\mathbf{Vec}_{\mathbb{F}}$, låt $\sigma_V : V \rightarrow \mathbb{F}^{\dim V}$ vara koordinatrepresentationen för vektorerna i V med avseende på basen β_V . Detta är en inverterbar linjär transformation, vilken gör följande diagram kommutativt:

$$\begin{array}{ccc}
V & \xrightarrow{\sigma_V} & \mathbb{F}^{\dim V} \\
\downarrow t & & \downarrow L[t] \\
W & \xrightarrow{\sigma_W} & \mathbb{F}^{\dim W}
\end{array}$$

Så vi har hittat en naturlig isomorfi $\sigma : 1_{\mathbf{Vec}_{\mathbb{F}}} \xrightarrow{\sim} T \circ S$. Funktorerna S och T tillsammans med naturliga isomorfierna τ och σ utgör tillsammans en ekvivalens mellan kategorierna $\mathbf{Matr}_{\mathbb{F}}$ och $\mathbf{Vec}_F$.

Exempel 2.8. Betrakta följande morfi på objekt och pilar kategorin $\mathbf{Ab}$:

$$\begin{aligned}
D : \quad G &\xrightarrow{D_{\text{ob}}} DG = \{\varphi : G \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mid \varphi \text{ grupphomomorfi}\} \\
f : G \rightarrow G' &\xrightarrow{D_{\text{ar}}} \left[\begin{array}{l} Df : \quad DG' \longrightarrow DG \\ \varphi : G' \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto \varphi \circ f : G \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Morfin D ovan är ett exempel på en *kontravariant funktor*. Om vi applicerar dessa avbildningar två gånger så får vi en kovariant funktor $D^2 : \mathbf{Ab} \longrightarrow \mathbf{Ab}$ definierad på följande sätt:

$$\begin{aligned}
D^2 : \quad G &\xrightarrow{D^2_{\text{ob}}} D(DG) = \{\varphi : DG \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mid \varphi \text{ grupphomomorfi}\} \\
f : G \rightarrow G' &\xrightarrow{D^2_{\text{ar}}} \left[\begin{array}{l} D^2 f : \quad D^2 G \longrightarrow D^2 G' \\ \varphi : DG \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto \varphi \circ Df : DG' \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \end{array} \right]
\end{aligned}$$

Gruppen $D^2 G$ kallas *dubbla karaktärgruppen* av G . Vi bekräftar att D^2 är en kovariant funktor: För en grupp G har vi

$$\begin{aligned}
D^2 1_G : \quad D^2 G &\longrightarrow D^2 G \\
\varphi : DG &\rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \mapsto \left[\begin{array}{l} \varphi \circ D1_G : \quad DG \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ \psi \mapsto \varphi(\psi \circ 1_G) = \varphi(\psi) \end{array} \right] = \varphi
\end{aligned}$$

så $D^2 1_G = 1_{D^2 G}$. Vidare, låt $f : G' \rightarrow G''$, $g : G \rightarrow G'$, $\varphi : DG \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ och $\psi : G'' \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ vara

gruppomorfier, då är

$$\begin{aligned}
D^2(f \circ g)(\varphi)(\psi) &= \varphi \circ D(f \circ g)(\psi) \\
&= \varphi(D(f \circ g)(\psi)) \\
&= \varphi(\psi \circ (f \circ g)) \\
&= \varphi((\psi \circ f) \circ g) \\
&= \varphi(Df(\psi) \circ g) \\
&= \varphi(Dg(Df(\psi))) \\
&= \varphi \circ Dg(Df(\psi)) \\
&= D^2g(\varphi)(Df(\psi)) \\
&= (D^2g(\varphi) \circ Df)(\psi) \\
&= (D^2f(D^2(\varphi)))(\psi) \\
&= (D^2f \circ D^2g)(\varphi)(\psi)
\end{aligned}$$

så funktorn bevarar sammansättning av homomorfier. Definiera nu

$$\begin{aligned}
\tau : \text{ob}(\mathbf{Ab}) &\longrightarrow \text{ar}(\mathbf{Ab}) \\
G &\longmapsto \left[\begin{array}{l} \tau_G : G \longrightarrow D^2G \\ g \longmapsto \left[\begin{array}{l} \tau_G g : DG \longrightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ \varphi \longmapsto \varphi(g) \end{array} \right] \end{array} \right]
\end{aligned}$$

För två element g och h i en grupp G och en homomorfi $\varphi \in DG$ har vi

$$\tau_G(gh)(\varphi) = \varphi(gh) = \varphi(g) + \varphi(h) = \tau_G g(\varphi) + \tau_G h(\varphi) = (\tau_G g + \tau_G h)(\varphi)$$

vilket bekräftar att τ_G är en gruppomorfism för varje G . Vidare ser vi att följande diagram kommuterar för varje par av grupper G, G' och gruppomorfism $f : G \rightarrow G'$:

$$\begin{array}{ccc}
g & \xrightarrow{\tau_G} & \tau_G g \\
\downarrow f & & \downarrow D^2 f \\
f(g) & \xrightarrow{\tau_{G'}} & \tau_{G'}(f(g)) = \tau_G g \circ Df
\end{array}$$

eftersom för $\varphi \in D^2G'$ är

$$\tau_G g \circ Df(\varphi) = \tau_G g(\varphi \circ f) = \varphi \circ f(g) = \varphi(f(g)) = \tau_{G'}(f(g))(\varphi).$$

Alltså kommuterar följande diagram för alla grupper G, G' och varje gruppomorfism $f : G \rightarrow G'$:

$$\begin{array}{ccc}
G & & 1_{\mathbf{Ab}}G \xrightarrow{\tau_G} D^2G \\
\downarrow f & & \downarrow f \quad \quad \downarrow D^2 f \\
G' & & 1_{\mathbf{Ab}}G' \xrightarrow{\tau_{G'}} D^2G'
\end{array}$$

Så τ är en naturlig transformation $1_{\mathbf{Ab}} \xrightarrow{\cdot} D^2G$.

Betrakta följande definition av egenskaper hos funktorer:

Definition 5. Vi säger att en funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ är *full*, om det för varje par av objekt A, A' i $\mathcal{C}$ och pil $g : FA \rightarrow FA'$ i $\mathcal{D}$ finns en pil $f : A \rightarrow A'$ i $\mathcal{C}$ med $g = Ff$.

Vi säger att en funktor $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ är *trogen*, om för varje par av objekt A, A' i $\mathcal{C}$ och par av parallella pilar $f_1, f_2 : A \rightarrow A'$ i $\mathcal{C}$ gäller att

$$Ff_1 = Ff_2 \quad \text{implicerar} \quad f_1 = f_2.$$

Om $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ är en funktor, för objekt A och B i $\mathcal{C}$, definiera $F_{(A,B)}$ som avbildningen

$$\begin{aligned} F_{(A,B)} : \quad \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(FA, FB) \\ f &\longmapsto Ff \end{aligned}.$$

Det är tydligt att en ekvivalent definition av att en funktor F är full (trogen) är att $F_{(A,B)}$ är surjektiv (injektiv) för varje par av objekt A, B .

Låt $\mathcal{C}$ vara en kategori med en kovariant funktor $E : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$, och låt $\eta : 1_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\cdot} E$ vara en naturlig isomorfi. Då har vi för alla objekt A, B och pil $f : A \rightarrow B$ i $\mathcal{C}$ det kommutativa diagrammet

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\eta_A} & EA \\ \downarrow f & & \downarrow Ef \\ B & \xrightarrow{\eta_B} & EB \end{array}$$

där vi kan utläsa att $Ef = \eta_B f \eta_A^{-1}$, eller ekvivalent $f = \eta_B^{-1} Ef \eta_A$, vilket visar att $E_{(A,B)}$ är inverterbar. Alltså är E både full och trogen.

Följande sats beskriver ett ekvivalent villkor för en funktor S för att den utgör en ekvivalens mellan två kategorier tillsammans med en annan funktor.

Sats 2.1. Låt $\mathcal{C}$ och $\mathcal{D}$ vara kategorier och $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ en kovariant funktor. Då finns en funktor $T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ som tillsammans med S utgör en naturlig ekvivalens mellan $\mathcal{C}$ och $\mathcal{D}$ om och endast om följande kriterier är uppfyllda:

- (1) Funktorn S är trogen och full, och
- (2) För varje objekt B i $\mathcal{D}$ finns ett objekt A i $\mathcal{C}$ sådant att SA och B är isomorfa i $\mathcal{D}$.

Bevis. (Jacobsen) Låt $S : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ och $T : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ vara funktorer som utgör en ekvivalens mellan $\mathcal{C}$ och $\mathcal{D}$ tillsammans med en naturlig isomorfi $\eta : 1_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\cdot} S \circ T$.

Låt A och B vara två objekt i $\mathcal{C}$. Av resonemanget strax ovan har vi att funktorerna $S \circ T$ och $T \circ S$ båda är trogna och fulla. Låt $f_1, f_2 : A \rightarrow B$ vara parallella pilar i $\mathcal{C}$ med $Sf_1 = Sf_2$. Då är $T \circ S(f_1) = T \circ S(f_2)$, och eftersom $T \circ S$ är trogen är $f_1 = f_2$, så S är trogen. Analogt kan vi härleda att även T är trogen.

Låt $g : SA \rightarrow SA'$ för några objekt A och A' i $\mathcal{C}$. Applicerar vi funktorn T på denna får vi en pil $Tg : T \circ S(A) \rightarrow T \circ S(A')$. Eftersom $T \circ S$ är full finns en pil $f : A \rightarrow A'$ med $Tg = T(S(f))$, och då T är trogen är $g = S(f)$. Således är funktorn S full.

För varje objekt B i $\mathcal{D}$ har vi en isomorfi $\eta_B : B \rightarrow S \circ T(B)$. Sätter vi $A = TB$ så har vi en isomorfi mellan B och FA , för ett objekt A i $\mathcal{C}$.

Låt oss nu å andra sidan anta att kriterium (1) och (2) håller för en funktor $S : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$. För varje objekt B i kan vi välja ett objekt A i $\mathcal{C}$ med $B = SA$ och en isomorfi $\varphi : B \rightarrow SA$. Definiera nu objektfunktionen

$$\begin{aligned} T_{\text{ob}} : \text{ob}\mathcal{D} &\rightarrow \text{ob}\mathcal{C} \\ B &\mapsto A \end{aligned},$$

där A är det objekt vi precis har valt för B , och låt $\eta_B = \varphi : B \rightarrow S \circ T(B)$. Låt D vara ett andra objekt i $\mathcal{D}$, och f' en pil $B \rightarrow D$. Eftersom η_B är en isomorfi, finns en unik pil

$$\eta_D f' \eta_B^{-1} : S \circ T(B) \rightarrow S \circ T(D).$$

Eftersom S är full, finns en unik pil $f : TB \rightarrow TD$ i $\mathcal{C}$ med $Sf = \eta_D f' \eta_B^{-1}$. Definiera nu på liknande sätt pilavbildningen

$$\begin{aligned} T_{\text{ob}} : \text{ar}\mathcal{D} &\rightarrow \text{ar}\mathcal{C} \\ f' &\mapsto f \end{aligned}.$$

Då är Tf' den enda pilen sådant att följande diagram kommuterar:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\eta_B} & S \circ T(B) \\ \downarrow f' & & \downarrow S \circ T(f') \\ D & \xrightarrow{\eta_D} & S \circ T(D) \end{array} \quad (1)$$

Betrakta nu ytterligare ett objekt E och pil $g' : D \rightarrow E$ i $\mathcal{C}$. Vi har ett nytt diagram

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\eta_B} & S \circ T(B) \\ \downarrow f' & & \downarrow S \circ T(f') \\ D & \xrightarrow{\eta_D} & S \circ T(D) \\ \downarrow g' & & \downarrow S \circ T(g') \\ E & \xrightarrow{\eta_E} & S \circ T(E) \end{array}$$

som kommuterar eftersom båda rektanglarna gör det. Eftersom S är en funktor, får vi även följande kommutativa diagram:

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\eta_B} & S \circ T(B) \\ \downarrow f' & & \downarrow S(Tg' \circ Tf') \\ E & \xrightarrow{\eta_D} & S \circ T(E) \end{array} \quad \text{och} \quad \begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\eta_B} & S \circ T(B) \\ \downarrow f' & & \downarrow S(T(g' \circ f')) \\ E & \xrightarrow{\eta_D} & S \circ T(E) \end{array}$$

Men eftersom $T(g' \circ f')$ är den enda pil som gör diagrammet unikt så är $T(g' \circ f') = Tg' \circ Tf'$. På liknande sätt kan vi se att $T1_B = 1_{TB}$, så $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ är en kovariant funktor, och diagrammen ovan visar att $\eta : 1_{\mathcal{D}} \rightarrow S \circ T$ är en naturlig isomorfi.

Nu, låt A och C vara två objekt i $\mathcal{C}$ och $f : A \rightarrow C$ en pil sådan att $f' = Sf$ är en isomorfi. Då är även f en isomorfi, då S är trogen och full. Eftersom $\eta_{SA} : SA \rightarrow S(T(SA))$ är en isomorfi, finns en unik isomorfi $\theta_A : A \rightarrow T(SA)$ med $S\theta_A = \eta_{SA}$. Kommutativiteten i diagram (1), med $B = SA$, $D = SC$ och $f' = Sf$, där $f : A \rightarrow C$ i $\mathcal{C}$, ger att diagrammet

$$\begin{array}{ccc} SA & \xrightarrow{S\theta_A} & S(T(SA)) \\ \downarrow Sf & & \downarrow S(T(Sf)) \\ SC & \xrightarrow{S\theta_C} & S(T(SC)) \end{array}$$

kommuterar. Eftersom S är trogen implicerar det att

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\theta_A} & T(SA) \\ \downarrow f & & \downarrow T(Sf) \\ C & \xrightarrow{\theta_C} & T(SC) \end{array}$$

också är ett kommutativt diagram. Alltså ger avbildningen $A \mapsto \theta_A$ en naturlig isomorfi $\theta : 1_{\mathcal{C}} \rightarrow T \circ S$, vilket sammanfattningsvis ger en ekvivalens mellan kategorierna $\mathcal{C}$ och $\mathcal{D}$. $\square$

2.3 Mono- och epimorfier

Vi tittar nu närmare på vilka egenskaper pilarna i en kategori kan ha.

Definition 6. Låt $\mathcal{C}$ vara en kategori, och låt A och B vara två objekt i $\mathcal{C}$. En pil $m : A \rightarrow B$ sägs vara en *monomorfi* om den är vänsterkancellerbar, alltså att det för varje objekt E och par av pilar $f_1, f_2 : E \rightarrow A$ gäller att

$$m \circ f_1 = m \circ f_2 \quad \text{implicerar} \quad f_1 = f_2.$$

En pil $e : A \longrightarrow B$ sägs vara en *epimorfi* om den är högerkancelierbar, alltså att det för varje objekt C och par av pilar $g_1, g_2 : B \longrightarrow C$ gäller att

$$g_1 \circ e = g_2 \circ e \quad \text{implicerar} \quad g_1 = g_2.$$

Exempel 2.9. (1, kapitel 5, övning 2) Vi kan först observera att egenskaperna mono och epi bevaras under sammansättning. Låt $f : B \rightarrow A$ och $g : C \rightarrow B$ vara monomorfier. Antag att

$$(f \circ g) \circ h = (f \circ g) \circ k$$

för pilar $h, k : D \rightarrow C$. Eftersom sammansättning är associativ har vi

$$f \circ (g \circ h) = f \circ (g \circ k).$$

Då f och g är monomorfier kan vi cancellera dessa från vänster och få att $h = k$. Alltså är $f \circ g$ också en monomorfi. Analogt kan vi visa att sammansättningen av två epimorfier är en epimorfi

Exempel 2.10. (1, kapitel 5, övning 3) Antag att en sammansatt pil $g \circ f$ är en monomorfi. Om $f \circ h = f \circ k$ för några lämpliga pilar h och k så gäller även $g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k)$. Eftersom sammansättningen är associativ och $g \circ f$ är en monomorfi får vi att $h = k$. Alltså följer det att f är en monomorfi. Å andra sidan, betrakta följande två pilar i **Set**:

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z} & g : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N} \\ n \longmapsto n & n \longmapsto |n| \end{array}.$$

Notera att vi utgår från definitionen av $\mathbb{N}$ som inkluderar 0. Här har vi att $g \circ f = 1_{\mathbb{N}}$, vilket är en monomorfi. Om

$$\begin{array}{l} j : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \\ n \longmapsto -n \end{array}$$

så är $g \circ 1_{\mathbb{Z}} = g \circ j$ men $1_{\mathbb{Z}} \neq j$. Således är g i detta fall inte en monomorfi.

Exempel 2.11. (1, kapitel 5, övning 4) Ett exempel på en epimorfi är inklusionsmorfismen

$$\begin{array}{l} i : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q} \\ n \longmapsto n \end{array}$$

i kategorin **Rng**. Givet en ring R två ringhomomorfier $f, g : \mathbb{Q} \rightarrow R$ har vi att om $f \circ i = g \circ i$, så är

$$f(n) = f \circ i(n) = g \circ i(n) = g(n)$$

för alla $n \in \mathbb{Z}$. Varje element i $\mathbb{Q}$ kan skrivas på formen mn^{-1} där $m, n \in \mathbb{Z}$ och $n \neq 0$, och för alla sådana element har vi

$$f(mn^{-1}) = f(m)f(n)^{-1} = g(m)g(n)^{-1} = g(mn^{-1}),$$

så i är mycket riktigt en epimorfi.

Vi säger att en pil $f : A \longrightarrow A$ i en kategori är *idempotent* om $f \circ f = f$. Vi säger att en idempotent pil *splittrar* om det finns pilar $g : B \longrightarrow A$ och $h : A \longrightarrow B$ sådana att $f = g \circ h$ och $1_B = h \circ g$ för något objekt B .

Exempel 2.12. (1, kapitel 5, övning 6) Vi kan visa att alla idempotenta pilar i **Set** splittrar. Låt A vara en mängd i **Set** och antag att $f : A \longrightarrow A$ är idempotent. Definiera $X = \{f(a) \mid a \in A\} \subseteq A$. Då gäller att $f(x) = x$ för alla $x \in X$. Betrakta nu avbildningarna

$$\begin{array}{ccc} g : X \longrightarrow A & & h : A \longrightarrow X \\ & \text{och} & \\ x \longmapsto x & & a \longmapsto f(a) \end{array}$$

då är $g \circ h(a) = f(a)$ för alla $a \in A$, så $g \circ h = f$. Samtidigt är $h \circ g(x) = h(x) = f(x) = x$ för alla $x \in X$, så $h \circ g = 1_X$.

Vi ska nu se en koppling mellan trogna funktorer och monomorfier.

Exempel 2.13. (1, kapitel 5, uppgift 9) Vi ska nu visa att om $T : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ är en trogen funktor, och Tf är en monomorfi, så är även f en monomorfi.

Låt $f : A \rightarrow B$ vara en pil i $\mathcal{C}$ sådan att Tf är en monomorfi, och antag att $f \circ g = f \circ h$ för några pilar g och h i $\mathcal{C}$. Applicerar vi T på båda leden har vi att $T(f \circ g) = T(f \circ h)$. Egenskaperna av funktorer ger att

$$Tf \circ Tg = Tf \circ Th.$$

Eftersom Tf är en monomorfi är $Tg = Th$, och då T är trogen har vi att $g = h$. Alltså är f en monomorfi.

2.4 Produkt av kategorier

Precis som i studierna av många andra matematiska strukturer är vi intresserade av att konstruera och studera strukturen hos kategorin av alla par av objekt och pilar från två kategorier:

Definition 7. Givet två kategorier $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$, låt $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ beteckna kategorin vars objekt är alla par (B, C) där $B \in \text{ob}\mathcal{B}$ och $C \in \text{ob}\mathcal{C}$, och vars pilar är alla par av pilar $(f, g) : (B, C) \rightarrow (B', C')$, där $f : B \rightarrow B'$ är en pil i $\mathcal{B}$ och $g : C \rightarrow C'$ är en pil i $\mathcal{C}$.

Givet två pilar $(B, C) \xrightarrow{(f, g)} (B', C') \xrightarrow{(f', g')} (B'', C'')$ ges deras sammansättning av

$$(f', g') \circ (f, g) = (f' \circ f, g' \circ g).$$

Vi kallar kategorin $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ för *produkten* av $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$.

Givet en kategori $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ kan vi tydligt se att för ett objekt (B, C) i $\mathcal{B} \times \mathcal{C}$ är dess identitetspil $1_{(B, C)} = (1_B, 1_C)$.

Vi kan även konstruera följande funktorer, som kallas produktens *projektioner*:

$$\begin{array}{ll} P: & \mathcal{B} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{B} & Q: & \mathcal{B} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C} \\ (B, C) & \xrightarrow{P_{\text{ob}}} B & (B, C) & \xrightarrow{Q_{\text{ob}}} C \\ (f, g) & \xrightarrow{P_{\text{ar}}} f & (f, g) & \xrightarrow{Q_{\text{ar}}} g \end{array}$$

Givet ytterligare en kategori $\mathcal{D}$ och två funktorer $R: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{B}$ och $S: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$, finns då en unik funktor $F: \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{B} \times \mathcal{C}$ som gör att följande diagram kommuterar:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{D} & & \\ & \swarrow R & \downarrow F & \searrow S & \\ \mathcal{B} & \xleftarrow{P} & \mathcal{B} \times \mathcal{C} & \xrightarrow{Q} & \mathcal{C} \end{array}$$

Explicit kräver detta att för varje pil h i $\mathcal{D}$ är $Fh = (Rh, Sh)$.

Givet två funktorer $U: \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{C}$ och $V: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{D}$ kan vi konstruera deras produkt

$$\begin{array}{l} U \times V: \quad \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{D} \\ (A, B) \xrightarrow{U \times V_{\text{ob}}} (UA, VB) \\ (f, g) \xrightarrow{U \times V_{\text{ar}}} (Uf, Vg) \end{array}$$

som är den unika funktorn sådan att följande diagram kommuterar:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{A} & \xleftarrow{P} & \mathcal{A} \times \mathcal{B} & \xrightarrow{Q} & \mathcal{B} \\ \downarrow U & & \downarrow U \times V & & \downarrow V \\ \mathcal{C} & \xleftarrow{P'} & \mathcal{C} \times \mathcal{D} & \xrightarrow{Q'} & \mathcal{D} \end{array}$$

Här är P, Q, P' och Q' projektionerna av produkterna som vi introducerade precis.

Exempel 2.14. (1, kapitel 2.3, övning 1) Låt $\mathcal{A}$ och $\mathcal{B}$ vara diskreta kategorier, vilka vi kan identifiera med vanliga mängder. Då motsvaras produkten $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ precis av den direkta produkten av två mängder.

Låt $\mathcal{G}$ och $\mathcal{H}$ vara två monoider, vars alla pilar är inverterbara, så att de kan identifieras som två grupper G och H . Definitionen av sammansättning i produkten $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ motsvarar precis hur vi definierar multiplikation i en direkt produkt av grupper. Därav har varje pil (g, h) i $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ en naturlig invers (g^{-1}, h^{-1}) , och vi har en identitetspil $(1_{*G}, 1_{*H})$. Alltså motsvaras denna produkt precis av den direkta produkten av två grupper.

Exempel 2.15. (1, kapitel 2.3, övning 2) Antag att kategorierna $\mathcal{P}$ och $\mathcal{Q}$ är förordningar, och betrakta produkten $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$. För ett objekt (P, Q) i $\mathcal{P} \times \mathcal{Q}$ har vi naturligtvis en identitetspil $(P, Q) \rightarrow (P, Q)$. Vidare, givet ett annat objekt (P', Q') har vi som mest en pil $(P, Q) \rightarrow (P', Q')$, vilken existerar om pilarna $P \rightarrow P'$ och $Q \rightarrow Q'$ existerar i $\mathcal{P}$ respektive $\mathcal{Q}$. Till sist, givet hur sammansättning är definierad, är alltid sammansättningen av $(P, Q) \rightarrow (P', Q')$ och $(P', Q') \rightarrow (P'', Q'')$ den unika pilen $(P, Q) \rightarrow (P'', Q'')$, som existerar eftersom $\mathcal{P}$ och $\mathcal{Q}$ är förordningar.

2.5 Funktorkategorier

Givet två kategorier $\mathcal{C}$ och $\mathcal{D}$, och funktorer $R, S, T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$, om vi har två naturliga transformationer $\sigma : R \rightarrow S$ och $\tau : S \rightarrow T$, definierar deras komponenter för varje objekt C i $\mathcal{C}$ en sammansatt pil $(\tau\sigma)_C := \tau_C \circ \sigma_C$ som gör att följande diagram kommuterar:

$$\begin{array}{ccccc}
 C & \xrightarrow{\quad f \quad} & C' \\
 \\
 RC & \xrightarrow{\quad Rf \quad} & RC' \\
 \searrow \sigma_C & & \swarrow \sigma_{C'} \\
 & SC \xrightarrow{\quad Sf \quad} SC' & \\
 \swarrow \tau_C & & \searrow \tau_{C'} \\
 TC & \xrightarrow{\quad Tf \quad} & TC' \\
 \uparrow (\tau\sigma)_C & & \uparrow (\tau\sigma)_{C'}
 \end{array}$$

Alltså är $(\tau\sigma)_C$ en naturlig transformation $\tau\sigma : R \rightarrow T$. Vi kan nu definiera vad vi menar med en *funktorkategori*. Givet två kategorier $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$, låt $\mathcal{B}^{\mathcal{C}}$ beteckna kategorin vars element är alla funktorer $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$, och vars pilar är alla naturliga transformationer mellan sådana funktorer.

Exempel 2.16. Om $\mathcal{B}$ och $\mathcal{C}$ är diskreta kategorier (mängder), så har $\mathcal{B}^{\mathcal{C}}$ objekt motsvarande alla funktioner mellan de underliggande mängderna. Låt $S, T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ vara två funktorer, eftersom alla pilar i $\mathcal{B}$ är identiteter, måste en naturlig transformation $\tau : S \rightarrow T$ ha att $\tau_C = 1_C$ för varje C i $\mathcal{C}$, alltså måste $S = T$ för varje C om det finns en naturlig transformation mellan dem. Vi har alltså att alla pilar i $\mathcal{B}^{\mathcal{C}}$ är identitetstransformationer, vilket gör det till en diskret kategori.

Exempel 2.17. Om $\mathcal{C}$ är en kategori, så har $\mathcal{C}^2$ objekt alla funktorer mellan $\mathbf{2}$ och $\mathcal{C}$, vilket motsvaras precis av mängden av pilar i $\mathcal{C}$. Om vi har två funktorer $S, T : \mathbf{2} \rightarrow \mathcal{C}$, ges en naturlig transformation $\eta : S \rightarrow T$ av två komponenter η_A och η_B , nämligen de som gör följande diagram kommutativt:

$$\begin{array}{ccc}
 A & SA & \xrightarrow{\eta_A} TA \\
 \downarrow f & \downarrow Sf & \downarrow Tf \\
 B & TB & \xrightarrow{\eta_B} TB
 \end{array}$$

Pilarna i $\mathcal{C}^2$ ges alltså av alla sådana par (η_A, η_B) av pilar i $\mathcal{C}$.

Exempel 2.18. (1, kapitel 2.4, övning 2) Låt $\mathcal{X}$ vara en icke-tom diskret kategori med ändligt antal objekt. Givet en kategori $\mathcal{B}$, betrakta funktorkategorin $\mathcal{B}^{\mathcal{X}}$. Vi kan ordna elementen i $\mathcal{X}$ i en följd $X_1, X_2, \dots, X_n$, där n är antalet element i $\mathcal{X}$. Därför kan vi betrakta varje funktor $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$ som en n -tupel $(FX_1, FX_2, \dots, FX_n)$. Objekten i $\mathcal{B}^{\mathcal{X}}$ består således av alla n -tupler av element i $\mathcal{B}$.

Antag att vi har två funktorer $S, T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{B}$, eftersom $\mathcal{X}$ är diskret, behöver en naturlig transformation

$\tau : S \rightarrow T$ endast uppfylla att följande enkla diagram kommuterar för varje objekt X_i :

$$SX_i \xrightarrow{\tau_i} TX_i$$

Varje pil $\tau : S \rightarrow T$ i $\mathcal{B}^{\mathcal{X}}$ kan alltså beskrivas som en tupel av pilar $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$ från $\mathcal{B}$ sådana att $\tau_i : SX_i \rightarrow TX_i$ för varje $i = 1, 2, \dots, n$.

Exempel 2.19. (1, kapitel 2.4, övning 3) Låt $\mathcal{N}$ vara den diskreta kategorin med objektmängd de naturliga talen $\mathbb{N}$. Betrakta kategorin $\mathbf{Ab}^{\mathcal{N}}$. Dess objekt är alla funktorer

$$\begin{aligned} S : \mathcal{N} &\longrightarrow \mathbf{Ab} \\ N &\longmapsto G_N \end{aligned},$$

vilket motsvarar alla följder $\{G_N\}_{N=0}^{\infty}$ av abelska grupper. Man kan se det som att varje funktor är en tilldelning av en *gradering* till varje abelsk grupp. Pilarna i kategorin är alla naturliga transformationer

$$\begin{aligned} \sigma : S &\rightarrow T \\ N &\longmapsto \sigma_N \end{aligned},$$

där $\sigma_N : SN \rightarrow TN$ är en grupphomomorfism mellan två grupper av samma gradering. Pilarna är alltså följder $\{\sigma_N\}_{N=1}^{\infty}$ av gradbevarande grupphomomorfier.

Exempel 2.20. (1, kapitel 2.4, övning 6) Betrakta återigen kategorin $\mathbf{Matr}_{\mathbb{K}}$ med objekt positiva heltal och pilar matriser med element från en kommutativ ring $\mathbb{K}$, samt kategorin $\mathbf{2}$ med två objekt 0, 1 och en icke-identitetspil $0 \rightarrow 1$. Låt oss undersöka isomorfa objekt i funktorkategorin $\mathbf{Matr}_{\mathbb{K}}^{\mathbf{2}}$.

Ett objekt i denna kategori är en funktor $A : \mathbf{2} \rightarrow \mathbf{Matr}_{\mathbb{K}}$, som bestäms entydigt av vilken $M \times N$ -matris som pilen $0 \rightarrow 1$ avbildas till. Objektet 0 och 1 avbildas till heltalen N respektive M och identitetspilarna i $\mathbf{2}$ avbildas naturligtvis till identitetsmatriserna av storlek N respektive M . Vi kan alltså identifiera varje funktor A med denna matris.

En naturlig transformation μ mellan två funktorer $A, B : \mathbf{2} \rightarrow \mathbf{Matr}_{\mathbb{K}}$ (A en $M \times N$ -matris och B en $P \times Q$ -matris) har två komponenter, en $Q \times N$ -matris μ_0 och en $P \times M$ -matris μ_1 , som ska uppfylla att följande diagram kommuterar:

$$\begin{array}{ccccc} 0 & & N & \xrightarrow{\mu_0} & Q \\ \downarrow & & \downarrow A & & \downarrow B \\ 1 & & M & \xrightarrow{\mu_1} & P \end{array}$$

Om μ_0 och μ_1 är inverterbara ser vi att $B = \mu_1 A \mu_0^{-1}$, det vill säga de isomorfa pilarna A och B är *ekvivalenta* matriser i den linjära algebras mening.

Låt $\mathcal{M}$ vara den cykliska monoiden med pilar $1, *, m, m^2, m^3, \dots$ och betrakta funktorkategorin $\mathbf{Matr}_{\mathbb{K}}^{\mathcal{M}}$. Ett objekt i denna kategori är en funktor $S : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{Matr}_{\mathbb{K}}$ som till det enda objektet $*$ i $\mathcal{M}$, tilldelar ett

heltal N , och som för varje pil m^k , för något heltal k , tilldelar en $n \times n$ -matris med element från $\mathbb{K}$. Av funktoraxiomen måste även matriserna i bilden av S vara cykliska. Låt oss därför skriva $I_N, S, S^2, S^3 \dots$ för matriserna i bilden av S .

Pilarna i denna kategori är naturliga transformationer mellan dessa funktorer. Givet två funktorer $S, T : \mathcal{M} \rightarrow \mathbf{Matr}_{\mathbb{K}}$, med $S(*) = N$ och $T(*) = N'$ ska en sådan transformation $\tau : S \rightarrow T$ uppfylla att följande diagram kommuterar:

$$\begin{array}{ccccc} * & & N & \xrightarrow{\tau_*} & N' \\ \downarrow m^k & & \downarrow S^k & & \downarrow T^k \\ * & & N & \xrightarrow{\tau_*} & N' \end{array}$$

Om en sådan τ är en naturlig isomorfi, har vi att $T^k = \tau_* S^k \tau_*^{-1}$, alltså är matriserna S^k och T^k similära för varje k .

Exempel 2.21. (1, kapitel 2.4, övning 5) Låt **Fin** vara kategorin med objekt alla ändliga mängder, och pilar funktioner mellan dem, och låt $\mathcal{G}$ vara en ändlig grupp (en kategori med ett objekt och inverterbara pilar). Funktorkategorin $\mathbf{Fin}^{\mathcal{G}}$ har objekt funktorer på formen

$$\begin{aligned} S : \mathcal{G} &\rightarrow \mathbf{Fin} \\ * &\xrightarrow{S_{\text{ob}}} A \\ g &\xrightarrow{S_{\text{ar}}} \left[\begin{array}{l} Sg : A \rightarrow A \\ a \mapsto ga \end{array} \right] \end{aligned}$$

där A är en ändlig mängd. Varje sådan funktor S är alltså en gruppverkan av $\mathcal{G}$ på en mängd A , vilket inducerar en permutationsrepresentation av gruppen $\mathcal{G}$.

3 Universella konstruktioner

3.1 Universella pilar

Definition 8. Låt $S : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ vara en funktor och C ett objekt i kategorin $\mathcal{C}$. En *universell pil* från C till S är ett par (R, u) av ett objekt R i $\mathcal{D}$ och en pil $u : C \rightarrow SR$ i $\mathcal{C}$, sådan att för varje par (D, f) av ett objekt D i $\mathcal{D}$ och en pil $f : C \rightarrow SD$, så finns en unik pil $f' : R \rightarrow D$ i $\mathcal{D}$ med $Sf' \circ u = f$. Med andra ord, för varje sådan pil f , finns en unik pil f' sådan att följande diagram kommuterar:

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{u} & SR \\ & \searrow f & \downarrow Sf' \\ & & SD \end{array}$$

Exempel 3.1. Låt $\mathbf{Vect}_{\mathbb{F}}$ vara kategorin av alla vektorrum över en kropp $\mathbb{F}$, med pilar alla linjära avbildningar emellan dem, och betrakta den glömska funktorn

$$\begin{aligned} \mathbf{U}: \mathbf{Vect}_{\mathbb{F}} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ V &\xrightarrow{\mathbf{U}_{\text{ob}}} V \\ f &\xrightarrow{\mathbf{U}_{\text{ar}}} f \end{aligned}$$

För varje mängd X , låt V_X vara vektorrummet med X som bas, och element alla formella linjärkombinationer av element i X . Funktionen

$$\begin{aligned} j: X &\longrightarrow \mathbf{U}(V_X) \\ x &\longmapsto x \end{aligned}$$

är en pil i $\mathbf{Set}$, och för varje funktion $f: X \rightarrow \mathbf{U}(W)$, där W är ett vektorrum, kan vi hitta en unik linjär kombination $f': V_X \rightarrow W$ med $\mathbf{U}f' \circ j = f$, eftersom en linjär avbildning bestäms entydigt av hur den avbildar en bas. Detta motsvaras precis av att (j, V_X) är en universell pil från X till $\mathbf{U}$.

Exempel 3.2. (1, kapitel 3.1, övning 1) Låt G vara en grupp och betrakta alla ändliga formella summor $\sum_{g \in G} m_g g$, där $m_g \in \mathbb{Z}$. Definiera addition och multiplikation av dessa formella summor komponentvis och distributivt på följande sätt:

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} m_g g + \sum_{g \in G} n_g g &:= \sum_{g \in G} (m_g + n_g) g \\ \left(\sum_{g \in G} m_g g \right) \cdot \left(\sum_{h \in G} n_h h \right) &:= \sum_{g, h \in G} m_g n_h (gh) \end{aligned}$$

Detta definierar en ring $\mathbb{Z}[G]$ som vi kallar för *integritetsgruppringen* av G . Vi kan nu definiera en integritetsgruppringsfunktör på följande sätt:

$$\begin{aligned} \mathbb{Z}[\cdot]: \mathbf{Grp} &\longrightarrow \mathbf{Ring} \\ G &\xrightarrow{\mathbb{Z}[\cdot]_{\text{ob}}} \mathbb{Z}[G] \\ \varphi: G \rightarrow G' &\xrightarrow{\mathbb{Z}[\cdot]_{\text{ar}}} \left[\begin{array}{l} \mathbb{Z}[\varphi]: \mathbb{Z}[G] \longrightarrow \mathbb{Z}[G'] \\ \sum m_g g \longmapsto \sum m_g \varphi(g) \end{array} \right] \end{aligned}$$

Vidare kan vi även definiera en funktör $(\cdot)^*: \mathbf{Ring} \longrightarrow \mathbf{Grp}$, som avbildar varje ring R till dess multiplikativa grupp R^* , av alla enheter i R , och varje ringhomomorfi f till motsvarande grupphomomorfi f^* . För en grupp G , definiera nu grupphomomorfin

$$\begin{aligned} v: G &\longrightarrow \mathbb{Z}[G]^* \\ g &\longmapsto 1g \end{aligned}$$

Nu finns, för en unitär ring R och en grupphomomorfi $f: G \rightarrow R^*$, en unik ringhomomorfi

$$\begin{aligned} f': \mathbb{Z}[G] &\longrightarrow R \\ \sum m_g g &\longmapsto \sum m_g f(g) \end{aligned},$$

som gör att följande diagram kommuterar:

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{v} & \mathbb{Z}[G]^* \\
& \searrow f & \downarrow f'^* \\
& & R^*
\end{array}$$

Alltså är $(v, \mathbb{Z}[G])$ en universell pil från G till $(\cdot)^*$.

Exempel 3.3. (1, kapitel 3.1, övning 3) Betrakta den glömska funktorn $U : \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp}$. Vi kan från varje grupp G hitta en universell pil till U . Låt $\tilde{G} = G/[G, G]$ där $[G, G]$ är kommutatorgruppen av G , som består av alla element $xyx^{-1}y^{-1}$ med $x, y \in G$. Detta är en abelsk grupp, så ett objekt i kategorin $\mathbf{Ab}$. Definiera grupphomomorfin

$$\begin{aligned}
\pi : G &\longrightarrow U(\tilde{G}) \\
g &\longmapsto g[G, G]
\end{aligned}$$

För varje abelsk grupp H och grupphomomorfi $f : G \rightarrow UH$ har vi nu en unik homomorfi

$$\begin{aligned}
f' : \tilde{G} &\longrightarrow H \\
g[G, G] &\longmapsto f(g)
\end{aligned}$$

som gör att följande diagram kommuterar:

$$\begin{array}{ccc}
G & \xrightarrow{\pi} & U\tilde{G} \\
& \searrow f & \downarrow Uf' \\
& & UH
\end{array}$$

Om $g[G, G] = h[G, G]$, har vi att $gxyx^{-1}y^{-1} = hzwz^{-1}w^{-1}$ för några $x, y, z, w \in G$. Eftersom H är abelsk har vi att

$$f(g) = f(g)f(x)f(x)^{-1}f(y)f(y)^{-1} = f(gxyx^{-1}y^{-1}) = f(hzwz^{-1}w^{-1}) = f(h)f(z)f(z)^{-1}f(w)f(w)^{-1} = f(h),$$

så f' är väldefinierad. Paret $(\pi, \tilde{G})$ är alltså en universell pil från G till U .

Sats 3.1. Om (R, u) och (R', u') är universella pilar från ett objekt C i $\mathcal{C}$ till en funktor $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, så finns en unik isomorfi $a : R \rightarrow R'$ med $u' = Fa \circ u$.

Bevis. Av universaliteten hos u och u' , finns unika pilar $a : R \rightarrow R'$ och $b : R' \rightarrow R$, samt $d : R \rightarrow R$ och $e : R' \rightarrow R'$ sådana att båda följande diagram kommuterar:

$$\begin{array}{ccc}
C & & C \\
\swarrow u & \downarrow u' & \searrow u \\
FR & \xrightarrow{Fa} FR' & \xrightarrow{Fb} FR \\
\swarrow & \searrow & \swarrow \\
& FR & FR'
\end{array}
\quad
\begin{array}{ccc}
C & & C \\
\swarrow u' & \downarrow u & \searrow u' \\
FR' & \xrightarrow{Fb} FR & \xrightarrow{Fa} FR' \\
\swarrow & \searrow & \swarrow \\
& FR' & FR
\end{array}$$

Antag att $d = b \circ a \neq 1_R$. Då finns två olika pilar d och 1_R , sådana att det "yttre" vänstra diagrammet kommuterar, vilket inte kan vara fallet. Således är $b \circ a = 1_R$ och på samma sätt är $a \circ b = 1_{R'}$. Alltså är $a : R \rightarrow R'$ en isomorfi, och från diagrammen observerar vi att $u' = Fa \circ u$. $\square$

Definition 9. Låt X vara en mängd med endast ett element $*$ och låt (R, u) vara en universell pil från X till en funktor $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$. Vi säger att paret (R, u) är ett universellt element till funktorn F .

Ekvivalent kan vi säga ett universellt element till en funktor $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ är ett par (R, e) av ett objekt R i $\mathcal{D}$ och ett element $e \in FR$, sådant att för varje objekt D i $\mathcal{D}$ och element $x \in FD$ finns en unik pil $f : R \rightarrow D$ med $Ff(e) = x$. Observerar vi den bijektiva korrespondensen mellan det universella elementet (R, e) och motsvarande universella pil (R, u) kan vi direkt härleda resultatet ovan även för universella element.

Följsats 3.2. Om (R, e) och (R', e') är universella element till en funktor F , så existerar en unik isomorfi $a : R \rightarrow R'$ med $Fa(e) = e'$.

Låt oss erinra oss om följande sats om grupphomomorfier:

Sats 3.3. Låt N vara en normal delgrupp av en grupp G och låt π vara projektionen $G \rightarrow G/N$ som avbildar varje $g \in G$ till sidoklassen gN . För varje homomorfi $\varphi : G \rightarrow G'$ med $N \subseteq \ker \varphi$ finns då en unik homomorfi $\psi : G/N \rightarrow G'$ med $\varphi = \psi \circ \pi$.

Exempel 3.4. Låt G vara en grupp med en normal delgrupp N . För en grupp G' , låt $\text{Hom}(G, G')_N$ vara mängden av homomorfier $\varphi : G \rightarrow G'$ med $N \subseteq \ker \varphi$, och betrakta funktorn

$$\begin{aligned} (h_G)_N : \quad \mathbf{Grp} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\ G' &\xrightarrow{((h_G)_N)_{\text{ob}}} \text{Hom}(G, G')_N \\ f : G' \rightarrow G'' &\xrightarrow{((h_G)_N)_{\text{ar}}} \left[\begin{array}{l} (h_G)_N f : \text{Hom}(G, G')_N \longrightarrow \text{Hom}(G, G'')_N \\ \varphi : G \rightarrow G' \longmapsto f \circ \varphi \end{array} \right] \end{aligned}$$

Om $\pi : G \rightarrow G/N$ är projektionen $g \mapsto gN$, så är $(G/N, \pi)$ ett universellt element till funktorn $(h_G)_N$. Med andra ord, för varje (G', φ) , med $\varphi \in \text{Hom}(G, G')_N$ finns en unik homomorfi $\psi : G/N \rightarrow G'$ med $(h_G)_N \psi(\pi) = \psi \circ \pi = \varphi$. Detta motsvarar precis påståendet i satsen ovan.

Vi kan använda universaliteten hos kvotgruppen och projektionen för att även bevisa följande resultat:

Exempel 3.5. (1, kapitel 3.1, övning 4) För normala delgrupper M, N av en grupp G , med $M \subset N$, så är $G/N \cong (G/M)/(N/M)$.

Låt π och π' vara projektionerna $G \longrightarrow G/M$ respektive $G/M \longrightarrow (G/M)/(N/M)$. Då är $(G/M, \pi)$ och $((G/M)/(N/M), \pi')$ universella element till funktorerna $(h_G)_M$ respektive $(h_{G/N})_{N/M}$. Antag att vi har en homomorfi $f \in (h_G)_N(H) = \text{Hom}(G, H)_N$ för någon grupp H . Då är även $f \in \text{Hom}(G, H)_M$, eftersom $M \subseteq N$. Universaliteten hos π ger att det finns en unik homomorfi $f' : G/M \rightarrow H$ med $(h_G)_M f(\pi) = f' \circ \pi = f$.

Notera nu att om $gM \in N/M$ eller ekvivalent $g \in N$, så är $f'(gM) = f'(\pi_M(g)) = f(g) = 1$, alltså är $f' \in \text{Hom}(G/M, H)_{N/M}$. Av universaliteten hos π' finns nu en homomorfi $f'' : (G/M)/(N/M) \longrightarrow H$ sådan att följande hela diagram kommuterar:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & G/M & & \\
 & \nearrow \pi & \downarrow f' & \searrow \pi' & \\
 G & & & & (G/M)/(N/M) \\
 & \searrow f & & \nearrow f'' & \\
 & & H & &
 \end{array}$$

Betrakta nu den sammansatta projektionen $\varpi = \pi' \circ \pi : G \longrightarrow (G/M)/(N/M)$. Av tidigare observation kan vi se att ϖ är ett element i $\text{Hom}(G, (G/M)/(N/M))_N$, och vi har härlett att för varje grupp H och $f \in \text{Hom}(G, H)_N$ finns en unik homomorfi $f'' : (G/M)/(N/M) \rightarrow H$ med $(h_G)_N f''(\varpi) = f'' \circ \varpi = f$. Alltså är $((G/M)/(N/M), \varpi)$ ett universellt element till $(h_G)_N$. Påståendet följer nu av följsats 3.2.

3.2 Yonedas lemma

Vi ska se hur universella pilar kan kopplas ihop med hom-mängder. För en kategori $\mathcal{C}$ med små hom-mängder och ett objekt D i $\mathcal{C}$, låt oss först definiera hom-funktorn

$$\begin{aligned}
 h_D : \quad \mathcal{C} &\longrightarrow \mathbf{Set} \\
 C &\xrightarrow{h_{D, \text{ob}}} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, C) \\
 f : C \rightarrow C' &\xrightarrow{h_{D, \text{ar}}} \left[\begin{array}{l} h_D f : \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, C) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(D, C') \\ g : D \rightarrow C \longmapsto f \circ g : D \rightarrow C' \end{array} \right]
 \end{aligned}$$

Proposition 3.4. Låt $\mathcal{C}$ och $\mathcal{D}$ vara kategorier och $S : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ en kovariant funktor. Ett par $(R, u : C \rightarrow SR)$, där C är ett objekt i $\mathcal{C}$ och R ett objekt i $\mathcal{D}$, är en universell pil från C till S om och endast om det existerar en naturlig isomorfi $\theta : h_R \xrightarrow{\sim} h_C \circ S$ med komponenter på formen

$$\begin{aligned}
 \theta_D : \quad \text{Hom}_{\mathcal{D}}(R, D) &\longrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, S(D)) \\
 f' &\longmapsto S f' \circ u
 \end{aligned}$$

Bevis. Antag att (R, u) är en universell pil och låt D vara ett objekt i $\mathcal{D}$. För varje $f : C \rightarrow SD$ finns då ett $f' : R \rightarrow D$ med $\theta_D f' = S f' \circ u = f$, så θ_D är surjektiv, vidare är denna pil f unik, så θ_D är injektiv. Vidare

är θ_D naturlig i D , då följande diagram kommuterar

$$\begin{array}{ccccc} D & & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(R, D) & \xrightarrow{\theta_D} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, S(D)) \\ \downarrow g & & \downarrow h_D g & & \downarrow h_C(Sg) \\ D' & & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(R, D') & \xrightarrow{\theta_{D'}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, S(D')) \end{array} ,$$

eftersom om $g' \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(R, D)$ så är $S(g \circ g') \circ u = (Sg \circ Sg') \circ u = Sg \circ (Sg' \circ u)$. Alltså är θ en naturlig isomorfi.

Antag nu å andra sidan att vi har en naturlig isomorfi $\varphi : h_R \rightarrow h_C \circ S$. Då har vi för varje objekt D i $\mathcal{D}$ en bijektion $\varphi_D : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(R, D) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, S(D))$. Om vi väljer D till att vara objektet R , kan vi notera att följande diagram kommuterar:

$$\begin{array}{ccccc} R & & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(R, R) & \xrightarrow{\varphi_R} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, S(R)) \\ \downarrow f & & \downarrow h_R f & & \downarrow h_C(Sf) \\ D' & & \text{Hom}_{\mathcal{D}}(R, D') & \xrightarrow{\varphi_{D'}} & \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, S(D')) \end{array}$$

Antag att identitetspilen $1_R \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(R, R)$ avbildas till en pil $u : C \rightarrow S(R)$ av φ_R . I diagrammet avbildas då denna pil på följande sätt:

$$\begin{array}{ccc} 1_R & \xrightarrow{\varphi_R} & u \\ \downarrow h_R f & & \downarrow h_C(Sf) \\ f & \xrightarrow{\varphi_{D'}} & \varphi_{D'}(f) = Sf \circ u \end{array}$$

Eftersom $\varphi_{D'}$ är en bijektion, säger detta att varje $f' : C \rightarrow S(D')$ har formen $f' = Sf \circ u$ för en unik pil $f : R \rightarrow D'$. Detta är precis påståendet att (R, u) är en universell pil från C till S . $\square$

Definition 10. Låt kategorin $\mathcal{D}$ ha små hom-mängder. En *representation* av en funktor $K : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ är ett par (R, ψ) där R är ett objekt i $\mathcal{D}$ och $\psi : h_R \rightarrow K$ är en naturlig isomorfi. Om det finns en sådan representation sägs K vara *representerbar* och objektet R kallas för ett *representerande objekt*.

Proposition 3.5. Låt X vara en mängd med endast ett element $*$ och låt $\mathcal{D}$ vara en kategori med små hom-mängder. Om $(R, u : X \rightarrow KR)$ är en universell pil från X till en funktor $K : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ så är R tillsammans avbildningen

$$\psi : \text{ob}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{ar}(\mathbf{Set})$$

$$D \mapsto \left[\begin{array}{l} \psi_D : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(R, D) \rightarrow KD \\ f \mapsto Kf(u*) \end{array} \right]$$

en representation av funktorn K . Varje representation av K fås på detta sätt från exakt en sådan universell pil.

Bevis. Antag att vi har en universell pil $(R, u : X \rightarrow KR)$. Varje avbildning ψ_D är då naturlig i $\mathcal{D}$, vilket vi kan se i följande diagram:

$$\begin{array}{ccc} f & \xrightarrow{\psi_D} & Kf(u*) \\ \downarrow h_R g & & \downarrow Kg \\ g \circ f & \xrightarrow{\psi_{D'}} & K(g \circ f)(u*) = Kg \circ Kf(u*) = Kg(Kf(u*)) \end{array}$$

Vidare, givet ett $k \in K(D)$, välj $f : X \rightarrow K(D)$ med $f(*) = k$. Då finns en unik pil $f' : R \rightarrow D$ med $\psi_D(f') = Kf'(u*) = Kf' \circ u(*) = f(*) = k$, så varje ψ_D är bijektiv. Alltså är $\psi : h_R \rightarrow K$ en naturlig isomorfi och utgör med R en representation av K .

Givet en representation (R, ψ) av K , har vi, likt diagrammet i förra satsen, att för $f : R \rightarrow D$ så är $\psi_D(f) = Kf \circ \psi_R(1_R)$. Eftersom ψ_D är en bijektion kan varje element i $K(D)$ skrivas som $Kf' \circ \psi_R(1_R)$ för något $f' : R \rightarrow D$. Välj $u : X \rightarrow K(R)$ med $u(*) = \psi_R(1_R)$. Då, för varje $f : X \rightarrow K(D)$, så är $f = Kf' \circ u$ för något $f' : R \rightarrow D$. Således är (R, u) en universell pil. $\square$

I de senaste två propositionerna har vi sett hur en naturlig transformation $\varphi : h_R \rightarrow K$ bestäms entydigt av hur identitetspilen 1_R avbildas av φ_R . Detta är essensen av följande sats.

Lemma 3.6 (Yoneda). Låt $\mathcal{D}$ vara en kategori med små hom-mängder. Givet en funktor $K : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ och ett objekt R i $\mathcal{D}$, så finns det en bijektion

$$\begin{aligned} y : \quad \text{Nat}(h_R, K) &\longrightarrow KR \\ [\alpha : h_R \rightarrow K] &\longmapsto \alpha_R(1_R) \end{aligned} \quad (1)$$

Bevis. Betrakta följande kommutativa diagram:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathcal{D}}(R, R) & \xrightarrow{\alpha_R} & KR \\ \downarrow h_R f & & \downarrow Kf \\ \text{Hom}_{\mathcal{D}}(R, D) & \xrightarrow{\alpha_D} & KD \end{array}$$

Som i tidigare propositioner har vi att varje komponent av α bestäms entydigt genom att

$$\alpha_D(f) = Kf \circ \alpha_R(1_R),$$

för varje $f : R \rightarrow D$. Således är varje sådan naturlig transformation α i bijektiv korrespondens med $\alpha_R(1_R)$. $\square$

Följdsats 3.7. Låt R och S vara objekt i en kategori $\mathcal{D}$. Varje naturlig transformation $\eta : \mathbf{h}_R \rightarrow \mathbf{h}_S$ kan skrivas som en funktion

$$h_t : \text{ob}(\mathcal{D}) \rightarrow \text{ar}(\mathbf{Set})$$

$$D \mapsto \left[\begin{array}{l} h_{t,D} : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(R, D) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(S, D) \\ \varphi \mapsto \varphi \circ t \end{array} \right]$$

för någon unik pil $t : S \rightarrow R$.

Bevis. Tag $t = \eta_R(1_R)$. För en pil $g : R \rightarrow D$ har vi då

$$\eta_D(g) = \mathbf{h}_S g \circ \eta_R(1_R) = g \circ t.$$

Således är $\eta_D = \text{Hom}(t, D)$. □

Exempel 3.6. (1, kapitel 3.2, övning 1) Låt funktorerna $\mathbf{K}, \mathbf{K}' : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$ ha representationer (R, ψ) respektive (R', ψ') . För varje naturlig transformation $\tau : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}'$ finns då en unik pil $j : R' \rightarrow R$ med

$$\tau \circ \psi = \psi' \circ h_j : \mathbf{h}_R \rightarrow \mathbf{K}'.$$

Eftersom ψ' är en isomorfi kan vi betrakta den naturliga transformationen

$$(\psi')^{-1} \circ \tau \circ \psi : \mathbf{h}_R \rightarrow \mathbf{h}_{R'}.$$

Av följsatsen har vi att det finns en unik pil $j : R' \rightarrow R$ med $h_j = (\psi')^{-1} \circ \tau \circ \psi$.

Vi ska snart se att avbildningen y i lemma 3.6 är naturlig i $\mathbf{K}$ och R . Först behöver vi behandla $\mathbf{K}$ som ett objekt i kategorin $\mathbf{Set}^{\mathcal{D}}$ och betrakta följande funktorer från $\mathbf{Set}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{Set}$:

$$\mathbf{E} : (\mathbf{K}, R) \xrightarrow{\mathbf{E}_{\text{ob}}} \mathbf{K}R$$

$$\left(\begin{array}{l} \sigma : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}' \\ f : R \rightarrow R' \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{E}_{\text{ar}}} \mathbf{K}'f \circ \sigma_R : \mathbf{K}R \rightarrow \mathbf{K}'R'$$

och

$$\mathbf{N} : (\mathbf{K}, R) \xrightarrow{\mathbf{N}_{\text{ob}}} \text{Nat}(\mathbf{h}_R, \mathbf{K})$$

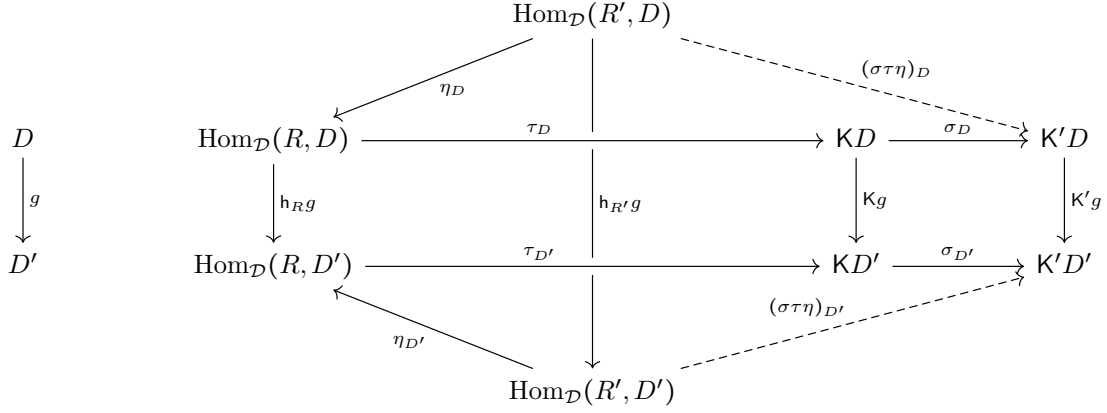
$$\left(\begin{array}{l} \sigma : \mathbf{K} \rightarrow \mathbf{K}' \\ f : R \rightarrow R' \end{array} \right) \xrightarrow{\mathbf{N}_{\text{ar}}} \left[\begin{array}{l} \mathbf{N}(\sigma, f) : \text{Nat}(\mathbf{h}_R, \mathbf{K}) \rightarrow \text{Nat}(\mathbf{h}_{R'}, \mathbf{K}') \\ \tau : \mathbf{h}_R \rightarrow \mathbf{K} \mapsto \sigma \tau \eta : \mathbf{h}_{R'} \rightarrow \mathbf{K}' \end{array} \right],$$

där $\eta : \mathbf{h}_{R'} \rightarrow \mathbf{h}_R$ är en naturlig transformation med komponenter på följande form:

$$\eta_D : \text{Hom}_{\mathcal{D}}(R', D) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{D}}(R, D)$$

$$k \mapsto k \circ f$$

Det följer direkt från associativiteten hos sammansättning att η_D är naturlig i D . Det följer att följande diagram kommuterar för varje pil $g : D \rightarrow D'$:



Detta bekräftar att $\sigma\tau\eta$ är en naturlig transformation.

Lemma 3.8. För varje par (K, R) i $\mathbf{Set}^{\mathcal{D}} \times \mathcal{D}$, låt $y_{(K, R)}$ vara definierad som bijektionen (1) i lemma 3.6. Då utgör funktionerna $y_{(K, R)}$ komponenterna till en naturlig isomorfi $y : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{E}$.

Bevis. Av Yonedas lemma har vi att varje komponent $y_{(K, R)}$ är bijektiv. Således återstår att visa att följande diagram kommuterar:

$$\begin{array}{ccc}
 (K, R) & \text{Nat}(h_R, K) & \xrightarrow{y_{(K, R)}} KR \\
 \downarrow (\sigma, f) & \downarrow \mathbf{N}(\sigma, f) & \downarrow K'f \circ \sigma_R \\
 (K', R') & \text{Nat}(h_{R'}, K') & \xrightarrow{y_{(K', R')}} K'R'
 \end{array}$$

För en naturlig transformation $\mu : h_R \rightarrow K$ gäller att

$$\begin{aligned}
 y_{(K', R')} \circ \mathbf{N}(\sigma, f)(\mu) &= y_{(K', R')}(\sigma\mu\eta) \\
 &= (\sigma\mu\eta)_{R'}(1_{R'}) \\
 &= (\sigma\mu)_{R'}(f).
 \end{aligned} \tag{2}$$

Från tidigare proposition har vi nu

$$\begin{aligned}
 (2) &= K'f \circ (\sigma\mu)_R(1_R) \\
 &= K'f \circ \sigma_R(\mu_R 1_R) \\
 &= (K'f \circ \sigma_R) \circ y_{(K, R)}(\mu),
 \end{aligned}$$

vilket visar att diagrammet kommuterar och därmed är y en naturlig isomorfi. $\square$

Referenser

- [1] Lane, S.M. (2010) *Categories for the Working Mathematician* (2nd ed.). Springer.
- [2] Jacobson, N. (2009). *Basic Algebra II* (2nd ed.). Dover Publications.