

SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Primtals satsen genom Newmans Tauberiska sats för Laplace
transformationen och Riemanns zetafunktion

av

Sindre Becker

2025 - No K22

Primtals satsen genom Newmans Tauberiska sats för Laplace transformationen och Riemanns zetafunktion

Sindre Becker

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Jakob Reiffenstein, Annemarie Luger

2025

Sammanfattning

Detta arbete kommer bevisa Primtalssatsen med Newmans bevis för den. Arbetet kommer börja med Riemanns zetafunktion och hur den beter sig i det komplexa halva talplanet med positiv reell del, för att sedan byta spår till Laplace transformationen och Newmans Tauberiska sats för transformationen. Sedan kommer dessa delar att kombineras till ett bevis för Primtalssatsen.

Abstract

This work will prove the prime number theorem with Newmans version of the proof. The work will start with Riemanns zetafunction and how it behaves in the complex halfplane with positive real part, to then start with the Laplace transform and Newmans Tauberian theorem about the transform. Lastly this will be combined into proving the prime number theorem.

Innehåll

1	Introduktion	7
2	Definitioner och satser	8
2.1	Riemann-Stieltjes integralen	8
2.2	Riemanns zetafunktion	9
2.3	Laplace transformationen	14
2.4	Primalssatsens omformulering med hjälp av θ -funktionen	14
2.5	Tauberiska satser	17
2.6	Förberedelser inför Primalssatsens bevis	21
2.7	Primalssatsen	21
	Referenser	25

1 Introduktion

Primtalssatsen är en sats om hur antalet primtal växer. Låt $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$, Primtalssatsen säger då att $\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}$. Primtalssatsen bevisades för första gången 1896 oberoende av Jacques Hadamard och Charles Jean de La Vallée Poussin som både blev inspirerade av Riemanns zetafunktion. Detta arbete kommer istället baseras Donald Joseph (D. J.) Newmans Tauberiska sats om Laplace transformationen. Satsen implicerar konvergens av en specifik generaliserad integral som kommer visa sig vara ekvivalent med Primtalssatsen. Arbetet kommer ta den komplexa vägen fram till Primtalssatsen, så som Jacques Hadamard sa ”The shortest path between two truths in the real domain passes through the complex domain”.

2 Definitioner och satser

Innan Newmans tauberiska sats finns en del saker som behövs bevisas först. Det som behövs är att visa att Riemanns zetafunktion är nollskild på komplexa planet $\operatorname{Re}(z) > 1$, och till det behövs Eulers formel för zetafunktionen. Sedan behöver zetafunktionen fortsättas till halvplanet $\operatorname{Re}(z) > 0$ så det kan visas att funktionen är nollskild på linjen $\operatorname{Re}(z) = 1$. Mera kommer behövas än det, men det presenteras vid varje avsnitt istället. Bevisen för satserna samt strategin för att bevisa Primtalssatsen, om inget annat anges kommer ifrån [Sha] samt [Zag97].

2.1 Riemann-Stieltjes integralen

För att underlätta en del beräkningar kommer Riemann-Stieltjes integral introduceras. Riemann-Stieltjes integralen är en generalisering av Riemann integralen. Den stora fördelen med denna integral är att det underlättar att relatera en summa till en Riemann-Stieltjes integral, och med rätt villkor, skriva om Riemann-Stieltjes integralen till en Riemann integral. Då detta avsnitt är mer för att underlätta beräkningar och inte är fokuset av arbetet kommer det inte ge några vidare bevis för satserna utan de kommer hänvisas till boken "Principles of Mathematical Analysis", tredje upplagan av Walter Rudin, [Rud76].

Definition 2.1. Riemann-Stieltjes integralen definieras som följande.

Låt $\alpha(x)$ och $f(x)$ vara reella funktioner av definierade för $a \leq x \leq b$. Låt P vara en partition av intervallet (a, b) med punkterna $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n$ där

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Låt $\Delta\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1})$ och

$$M_k = \sup f(x), \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k$$

$$m_k = \inf f(x), \quad x_{k-1} \leq x \leq x_k.$$

Definiera summorna $U(P, f, \alpha)$ och $L(P, f, \alpha)$ som

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta\alpha_k$$

$$L(P, f, \alpha) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta \alpha_k.$$

Om $\mathbb{P}$ är mängden av alla partitioner av $[a, b]$ och om

$$\inf_{P \in \mathbb{P}} U(P, f, \alpha) = \sup_{P \in \mathbb{P}} L(P, f, \alpha)$$

definieras Riemann-Stieltjes integralen

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) := \inf_{P \in \mathbb{P}} U(P, f, \alpha)$$

Bevisen för följande två satser kan finnas i [Rud76] i bevisen för sats 6.17 och 6.22, där lemma 2.3 är en direkt konsekvens av båda satser.

Lemma 2.2. *En Riemann-Stieltjes integral kan skrivas om som en Riemann integral om f är kontinuerlig på $[a, b]$ och α' är kontinuerlig på $[a, b]$. Under dessa förutsättningar gäller*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = \int_a^b f(x) \alpha'(x) dx.$$

Lemma 2.3. *Riemann-Stieltjes integralen kan partiellt integreras*

$$\int_a^b f(x) d\alpha(x) = f(b)\alpha(b) - f(a)\alpha(a) - \int_a^b \alpha(x) df(x)$$

där existensen av en av integralen implicerar existensen av den andra.

2.2 Riemanns zetafunktion

Just som Jacques Hadamard och Charles Jean de La Vallée Poussin blev inspirerade av Riemanns zetafunktion för att bevisa Primtalssatsen kommer även detta arbete inkludera denna funktion. Den viktigaste egenskapen av Riemanns zetafunktion i detta arbete är just att den kan analytiskt fortsättas till en omgivning av halvplanet $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \geq 1, z \neq 1\}$ där den är nollskild längs med linjen $\operatorname{Re}(z) = 1$.

Definition 2.4. Riemanns zetafunktion är definierad som följande

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \operatorname{Re} s > 1. \quad (1)$$

Sats 2.5. Funktionsserien definierad i (1) konvergerar absolut och lokalt likformigt i halvplanet $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > 1\}$, därmed är ζ en analytisk funktion i halvplanet $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} s > 1\}$

Bevis. Låt $s \in \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 1 + \epsilon\}$, då är $|n^{-s}| \leq n^{-(1+\epsilon)}$ och då enligt Weierstrass majorantsats, sats 7.10 i [Rud76], konvergerar serien absolut och lokalt likformigt för $\operatorname{Re}(s) > 1$.

□

Sats 2.6 (Eulers produktformel). För alla s med $\operatorname{Re} s > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p (1 - p^{-s})^{-1}$$

Bevis. För $\operatorname{Re} s > 1$ så gäller

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Multiplikeras båda leden med $\frac{1}{2^s}$ ges

$$\frac{1}{2^s} \zeta(s) = \frac{1}{2^s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s}.$$

Därav

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2^s}\right) \zeta(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^s} = \left(1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \dots\right) - \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{8^s} + \dots\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} + \dots\right) \end{aligned}$$

I andra ord, att multiplicera zetafunktionen med $\left(1 - \frac{1}{2^s}\right)$ tog bort alla termer som har en jämn nämnare. Närmare sagt, att multiplicera zetafunktionen med $1 - \frac{1}{p^s}$ tar bort alla termer vars nämnare är delbara på p . Det har visats för $p = 2$, antag nu att det fungerar för det $k - 1$:te primtalet.

$$\prod_{n=1}^{k-1} \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right) \zeta(s) = \sum_{p_1, p_2, \dots, p_{k-1} \nmid n} \frac{1}{n^s}.$$

Om både vänster och högerledet multipliceras med $\left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right)$ fås

$$\prod_{n=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right) \zeta(s) = \left(1 - \frac{1}{p_k^s}\right) \left(\sum_{p_1, p_2, \dots, p_{k-1} \nmid n}^{\infty} \frac{1}{n^s} \right).$$

Låt $\sum_{p_1, p_2, \dots, p_{k-1} \nmid n}^{\infty} \frac{1}{n^s} = S_{k-1}$. Högerledet kan då skrivas om till

$$S_{k-1} - \frac{1}{p_k^s} S_{k-1}$$

vilket är summan S_{k-1} fast med alla termer vars index är delbart med p_k borttagna, det vill säga

$$\prod_{n=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right) \zeta(s) = \sum_{p_1, p_2, \dots, p_k \nmid n}^{\infty} \frac{1}{n^s}. \quad (2)$$

Därmed enligt induktionsantagandet samt induktionsprincipen gäller formeln ekv. (2) för alla $k \in \mathbb{N}$. Låt produkten i (2) vara P_k , (2) kan då skrivas om till

$$0 < |P_k \zeta(s) - 1| = |S_k - 1| < \sum_{n=p_{k+1}}^{\infty} \frac{1}{|n^s|}.$$

Gränsvärdet när $k \rightarrow \infty$ för serien till höger är 0. Därav konvergerar $P_k \zeta(s) - 1$ mot 0 när $k \rightarrow \infty$ vilket innebär att $\zeta(s) \neq 0$ och P_k konvergerar mot $\frac{1}{\zeta(s)}$ när $k \rightarrow \infty$. $\square$

Sats 2.7. Funktionen $\zeta(s)$ kan analytiskt fortsättas till $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > 0, s \neq 1\}$, där $s = 1$ är en enkel pol.

Bevis. Låt $[x]$ vara heltals delen av x och låt $\{x\}$ vara decimaldelen av x . Eftersom heltalsdelen ökar monotont kan den delen användas som integranden i en Riemann-Stieltjes integral representation av en summa och använder partiell integration

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \int_{1/2}^{\infty} \frac{1}{x^s} d[x] = [x^{-s}[x]]_{1/2}^{\infty} - \int_{1/2}^{\infty} [x] dx^{-s} = s \int_1^{\infty} (x - \{x\}) x^{-s-1} dx.$$

Första termen i sista likheten är noll då $\left[\frac{1}{2}\right] = 0$ och $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-s} = 0$. Försättningsvis

$$s \int_1^{\infty} (x - \{x\}) x^{-s-1} dx = s \int_1^{\infty} x^{-s} dx - s \int_1^{\infty} \{x\} x^{-s-1} dx.$$

Första termen kan skrivas om till

$$\frac{s}{s-1} = \frac{1}{s-1} + 1$$

och detta innebär att

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + 1 - s \int_1^\infty \{x\} x^{-s-1} dx.$$

Låt $H(s) := 1 - s \int_1^\infty \{x\} x^{-s-1}$, $H(s)$ är då en analytisk funktion för $\operatorname{Re}(s) > 0$. Högerledet är då en analytisk fortsättning av $\zeta(s)$ i $\operatorname{Re}(s) > 0, s \neq 1$, då, det finns en enkel pol. $\square$

Sats 2.8. Om $\operatorname{Re} s = 1$ är $\zeta(s) \neq 0$.

Bevis. På grund av sats 2.6, låt $s = \sigma + i\tau$ med $\sigma > 1$, är

$$\begin{aligned} \ln |\zeta(s)| &= \sum_p \ln \left| 1 - \frac{1}{p^s} \right|^{-1} = \sum_p \operatorname{Re} \left(\ln \left((1 - p^{-s})^{-1} \right) \right) \\ &= \sum_p \operatorname{Re} \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{p^{-ns}}{n} \right) = \sum_p \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(n\tau \ln(p))}{np^{n\sigma}}. \end{aligned}$$

Substituera in $\theta = \tau \ln p$

$$\sum_p \sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(n\theta)}{np^{n\sigma}}.$$

Observera att

$$3 + 4 \cos(\theta) + \cos(2\theta) = 2 + 4 \cos(\theta) + 2 \cos^2(\theta) = 2(1 + \cos(\theta))^2 \geq 0.$$

Med detta och formeln för $\ln |\zeta(s)|$ samt att zetafunktionen konvergerar absolut är

$$\begin{aligned} \ln |\zeta^3(\sigma) \zeta^4(\sigma + i\tau) \zeta(\sigma + 2i\tau)| &= \sum_p \sum \frac{3 + 4 \cos(n\theta) + \cos(2n\theta)}{np^{n\sigma}} \\ &= \sum_p \sum \frac{2(1 + \cos(n\theta))^2}{np^{n\sigma}}. \end{aligned}$$

Eftersom varje term i sista summan är positiv, är logaritmen också det, vilket innebär att

$$|\zeta^3(\sigma) \zeta^4(\sigma + i\tau) \zeta(\sigma + 2i\tau)| \geq 1$$

när $s = \sigma + i\tau$, $\sigma > 1$ och på grund av kontinuitet gäller detta även för $\sigma = 1$. Anta nu att $\zeta(\sigma + i\tau_0) = 0$ för något reellt τ_0 . Då är $\tau_0 \neq 0$ eftersom den fortsatta zetafunktionen har en enkel pol vid $s = 1$. Låt

$$f(\sigma) := \zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma + i\tau_0)\zeta(\sigma + 2i\tau_0)$$

Nu till gränsvärdet när $\sigma \rightarrow 1^+$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} f(\sigma) = \lim_{\sigma \rightarrow 1^+} \zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma + i\tau_0)\zeta(\sigma + 2i\tau_0).$$

Från sats 2.7 är $s = 1$ en pol av ordning tre, och från antagandet är $\zeta(1 + i\tau_0)^4$ en nollpunkt av åtminstone ordning 4. Alltså är gränsvärdet av produkten av dessa två 0 när $\sigma \rightarrow 1^+$. Då ζ fortsätts analytiskt till $\operatorname{Re}(s) > 0$, $s \neq 1$ har den ingen pol vid $s = 1 + 2\tau_0$, och $\lim_{\sigma \rightarrow 1^+} f(\sigma) = 0$, vilket säger emot att

$$|\zeta^3(\sigma)\zeta^4(\sigma + i\tau)\zeta(\sigma + 2i\tau)| \geq 1, \quad (\sigma > 1).$$

Därför är zetafunktionen aldrig noll på linjen $\operatorname{Re}(s) = 1$. □

$\zeta(s)$ är analytisk och nollskild tack vare Eulers formel i $\operatorname{Re}(z) > 1$, så är $\log(\zeta(s))$ också analytisk för $s > 1$, och dess derivata är $\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)}$. Med lite beräkningar ges det att

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \frac{d}{ds} \ln(\zeta(s)) = \sum_p \left(\frac{d}{ds} \log \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right) \right) = - \sum_p \frac{p^{-s} \ln(p)}{1 - p^{-s}} = - \sum_p \frac{\ln p}{p^s - 1}.$$

Med detta definieras nu en ny funktion.

Definition 2.9. Definiera $Z(s)$ som

$$Z(s) := -\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \frac{\ln p}{p^s - 1} \quad (\operatorname{Re} s > 1).$$

$Z(s)$ är analytisk på planet $\operatorname{Re}(z) > 1$ eftersom $\zeta(s)$ är nollskild och analytisk där. Vi kan fortsätta $\zeta(s)$ till $\operatorname{Re}(s) > 0$ fast med en enkel pol vid $s = 1$, då kommer $Z(s)$ vara analytisk i samma plan fast med enkla poler där $\zeta(s)$ har simpla poler och nollställena. Funktionen kan skrivas om till

$$\sum_p \frac{\ln p}{p^s - 1} = \sum_p \frac{\ln p}{p^s} + \sum_p \frac{\ln p}{p^s(p^s - 1)} \quad (\operatorname{Re}(s) > 1). \quad (3)$$

2.3 Laplace transformationen

Detta avsnitt kommer vara en kort del om Laplace transformationen, bevisen är tagna ur boken [Chu44].

Definition 2.10. Om en funktion $f(t)$ är definierad för alla $t \geq 0$, då definieras Laplace transformationen som

$$L\{f\}(s) := \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt.$$

Laplace transformationen kommer noteras $L\{f(t)\}(s)$, $L\{f(t)\}$ eller $F(s)$.

Lemma 2.11. Laplace transformationen är linjär, det vill säga, låt $a, b \in \mathbb{R}$ och låt f, h vara funktioner sådant att de har en Laplace transformation, så gäller

$$L\{af(t) + bh(t)\} = aL\{f(t)\} + bL\{h(t)\}.$$

Lemma 2.12. Om $f \in O(e^{\alpha x})$ och är integrerbar i alla ändliga intervall för $x \geq 0$, så existerar $L\{f\}(s)$ för alla s med $\operatorname{Re} s > \alpha$.

Bevis. Beviset kommer trivialt ifrån att under dessa villkor är $f(x)$ lokalt integrerbar och konvergens för integralen kommer ifrån ett direkt test med funktionen $e^{-\beta x}$ där $\beta \in \mathbb{R}, \beta > \alpha$. $\square$

2.4 Primalssatsens omformulering med hjälp av θ -funktionen

Denna del av arbetet handlar främst om hur olika saker är ekvivalenta med Primalssatsen eller implicerar den. Detta innebär en rad av satser som visar till sist att Primalssatsen är implicerad av existensen av en generaliserad integral. Denna generaliserade integrals existens kan visas med hjälp av Newmans tauberiska sats.

Definition 2.13. Tjebysjovs θ -funktion är definierad som

$$\theta(x) := \sum_{p \leq x} \log p,$$

där summan tas över alla primtal p mindre än x .

Lemma 2.14. $\theta(x)$ är begränsad av $4 \log(2)x$.

Bevis. För $n \in \mathbb{N}, n > 0$, gäller binomial satsen

$$2^{2n} = (1 + 1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \geq \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}.$$

Uttrycket i högerledet är då delbart av alla primtal mellan $n + 1$ och $2n$. Alltså är

$$\prod_{n < p < 2n} p < 2^{2n}.$$

Tas logaritmen på båda leden fås

$$\sum_{n < p < 2n} \log p < 2n \log 2.$$

Summan i vänsterledet kan skrivas som $\theta(2n) - \theta(n)$, då följer det att

$$\theta(2^n) - \theta(2^{n-1}) < 2^n \log 2.$$

Summeras båda leden med avseende på n från $n = 1$ till k ges det

$$\theta(2^k) < 2^{k+1} \log 2.$$

Välj x sådant att $2^{k-1} < x \leq 2^k$, då

$$\theta(x) \leq \theta(2^k) < 2^{k+1} \log 2 < 4x \log 2.$$

□

Sats 2.15. Låt $Li(x) := \int_2^x \frac{1}{\log t} dt$, då är följande två påståendena ekvivalenta

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x},$$

$$\pi(x) \sim Li(x).$$

Bevis. Med användning av L'Hôpitals regel ges

$$\int_2^x \frac{1}{\log t} dt \sim \frac{x}{\log x}.$$

Så om $\pi(x)$ är asymptotiskt lika $Li(x)$ eller $\frac{x}{\log x}$ implicerar det att $\pi(x)$ är asymptotiskt lik $\frac{x}{\log x}$ respektive $Li(x)$, och därmed är ekvivalensen bevisad. □

Sats 2.16. *Primtals satsen är sann om och endast om $\theta(x) \sim x$, det vill säga*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1$$

Bevis. Skriv $\pi(x)$ som en Riemann-Stieltjes integral med avseende på $\theta(x)$ och integrera partiellt samt skriv om till en Riemann integral

$$\pi(x) = \int_{3/2}^x \frac{d(\theta(t))}{\log t} = \frac{\theta(x)}{\log x} + \int_{3/2}^x \frac{\theta(t)}{\log^2 t} \frac{dt}{t}$$

därav

$$\left| \pi(x) - \frac{\theta(x)}{\log x} \right| \leq \int_{3/2}^x \frac{\theta(t)}{\log^2 t} \frac{dt}{t} \leq (4 \log 2) \int_{3/2}^x \frac{dt}{\log^2 t}.$$

I sista steget användes lemma 2.14. För att visa att $\int_{3/2}^x \frac{dt}{\log^2 t} \in O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right)$ är sant, används L'Hôpitals regel

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\int_{3/2}^x \frac{dt}{\log^2 t}}{\frac{x}{\log^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\log^2 x}}{\frac{\log x - 2}{\log^3 x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^3 x}{\log^3 x - 2 \log^2 x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{2}{\log x}} = 1.$$

Detta leder till att

$$\left| \pi(x) - \frac{\theta(x)}{\log x} \right| \in O\left(\frac{x}{\log^2 x}\right).$$

Multiplikation av $\frac{\log x}{x}$ på bägge led ger

$$\left| \pi(x) \frac{\log x}{x} - \frac{\theta(x)}{x} \right| \in O\left(\frac{1}{\log x}\right).$$

I synnerhet

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \pi(x) \frac{\log x}{x} = 1 \iff \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\theta(x)}{x} = 1.$$

□

Sats 2.17. *Om den generaliserade integralen*

$$\int_1^\infty \left(\frac{\theta(t)}{t} - 1 \right) \frac{dt}{t}$$

existerar, då är $\theta(x) \sim x$.

Bevis. Anta att för något $\lambda > 1$ att det för arbiträrt stora x gäller $\theta(x) \geq \lambda x$. Då

$\theta(x)$ är icke minskande, gäller för sådana x att

$$\int_x^{\lambda x} \frac{\theta(t) - t}{t^2} dt \geq \int_x^{\lambda x} \frac{\lambda x - t}{t^2} dt = \int_1^\lambda \frac{\lambda - u}{u^2} du > 0.$$

Detta ger då att den generaliserade integralen inte kan konvergera, vilket säger emot antagandet för satsen, vilket innebär att $\theta(x) \geq \lambda x$ inte kan gälla. Antag nu för något $\lambda < 1$ att $\theta(x) \leq \lambda x$, som med förra antagandet ger detta

$$\int_{\lambda x}^x \frac{\theta(t) - t}{t^2} dt \leq \int_{\lambda x}^x \frac{\lambda x - t}{t^2} dt = \int_\lambda^1 \frac{\lambda - u}{u^2} du < 0.$$

Detta ger samma konsekvens som i första fallet, och antagandet att $\theta(x) \leq \lambda x$ för arbiträrt stora x måste då vara falskt. Då är enda fallet som är möjligt är att $\theta(x) \sim x$ givet att integralen existerar. $\square$

Detta avsnitt har visat att Primalssatsen är ekvivalent med att $\theta(x) \sim x$, vilket i sin tur är implicerad av existensen av integralen definierad i sats 2.17. Det som är kvar då för att visa att Primalssatsen är sann är att visa att integralen existerar, vilket kommer ske med hjälp av Newmans Tauberiska sats om Laplace transformationen.

2.5 Tauberiska satser

För att beskriva vad en Tauberisk sats är börjar vi med vad en Abelsk sats är. Abelska satser är en grupp av satser som är generaliseringar av ett resultat av Niels Abel, hämtat från [Wid46], sida 180, som lyder som följande,

Sats 2.18. *Om $f(x)$ är definierad av $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $|x| < 1$, där funktionen konvergerar för värden på x mindre än ett, då är*

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

när serien till höger konvergerar.

I fallet av detta arbete skulle en Abelsk sats om Laplace transformationen ge information om den transformerade funktionens beteende vid någon specifik punkt utifrån hur funktionen beter sig. Tauberiska satser är motsatsen, en Tauberisk sats om Laplace transformationen ger information om funktionens beteende utifrån hur den transformerade funktionen beter sig. I Newmans Tauberiska sats nedan, finns det

först krav på funktionen, för att sedan säga om den transformerade funktionen kan fortsättas analytisk till ett visst område, existerar en specifik generaliserad integral av funktionen och dess värde är ett specifikt värde av den transformerade funktionen.

Ett annat exempel på en Tauberisk sats om Laplace transformationen kommer ifrån [Wid46], s.187, sats b som lyder

Sats 2.19. *Låt*

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-st} d(\alpha(t))$$

konvergera för $s > 0$, och låt

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} f(s) = A$$

då är

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = A$$

om och endast om

$$\beta(t) = \int_0^t u d(\alpha(u)) \in o(t), (t \rightarrow \infty).$$

Likheterna mellan denna sats och sats 2.20 är många, den huvudsakliga skillnaden på dem är för sats 2.20 antas det att transformationen kan fortsättas, medan i fallet av sats 2.19 antas det att integranden har någon egenskap, som är ekvivalent med den andra. I Widders bok finns det hur man kan bevisa Primitalsatsen med hjälp av sats 2.19, men metoden går ut på att man använder funktionen $\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \sum_{p^k \leq x} \log p$, som är relaterad till $\theta(x)$. Som med $\theta(x)$ visas det att $\psi(x) \sim x$ och Primitalsatsen är ekvivalenta. Eftersom $\int_0^x d\alpha(t) = \alpha(x) - \alpha(0)$, innebär sats 2.19, under det extra antagandet att $\alpha(0) = 0$, att den generaliserade integralen över $d\alpha(t)$ existerar då $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = A$.

sats 2.19 var endast ett exempel på en Tauberisk sats som kan användas för att bevisa Primitalsatsen, nu till den huvudsakliga Tauberiska satsen för arbetet, Newmans Tauberiska sats.

Sats 2.20 (Newmans Tauberiska sats). *Anta att $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ är bunden och lokalt integrerbar. Om funktionens Laplace transformationen kan analytiskt fortsättas till en omgivning av det slutna komplexa halvplanet $\operatorname{Re}(s) \geq 0$, då existerar den generaliserade integralen $\int_0^\infty f(t)dt$ och den är lika med $L\{f\}(0)$.*

Bevis. För $\operatorname{Re}(z) > 1$ definiera

$$F(z) = L(f)\{z\}$$

så F är analytisk i en öppen mängd V som innehåller det slutna högra halvplanet. För $T > 0$, låt

$$F_T(z) = L(f\chi[0, T])(z) = \int_0^T f(t)e^{-zt} dt$$

så att $F_T(z)$ är en hel funktion. Sedan ska det visas att $\lim_{T \rightarrow \infty} F_T(0) = F(0)$. För varje $R > 0$ existerar det $\delta = \delta_R > 0$ sådant att den slutna mängden $\Omega_R := \{|z| < R\} \cap \{\operatorname{Re}(z) \geq -\delta\}$ ligger i V . Låt C_R vara randen av Ω_R och låt $W_{T,R}(z) := e^{zT} \left(1 + \frac{z^2}{R^2}\right)$. $W_{T,R}(z)$ är då en hel funktion och $W_{T,R}(0) = 1$. Med Cauchys integralsats är

$$F(0) - F_T(0) = W_{T,R}(0)(F(0) - F_T(0)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} (F(z) - F_T(z))W_{T,R}(z) \frac{dz}{z}. \quad (4)$$

Uppskatta integralen över kurvan $C_R^+ = C_R \cap \{\operatorname{Re} z > 0\}$, för $z = x + iy \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} |F(z) - F_T(z)| &= \left| \int_T^\infty f(t)e^{-zt} dt \right| \leq \|f\|_\infty \int_T^\infty |e^{-zt}| dt \\ &= \|f\|_\infty \int_T^\infty e^{-xt} dt = \|f\|_\infty \frac{e^{-Tx}}{x}. \end{aligned}$$

Nu för något komplext tal z , $\operatorname{Re} z > 0$ med $|z| = R$ fås

$$\left| 1 + \frac{z^2}{R^2} \right| = \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{R}.$$

Detta med uppskattning av integralen resulterar i att, för $z = x + iy \in C_R^+$, absolutbeloppet av integranden i (4)

$$|F(z) - F_T(z)| \frac{|W_{T,R}(z)|}{|z|} \leq \|f\|_\infty \frac{e^{-Tx}}{x} e^{Tx} \frac{2x}{R} \frac{1}{R} = \frac{2\|f\|_\infty}{R^2}.$$

Med uppskattning på $C_R^+ = \{|z| = R\} \cap \{\operatorname{Re} z > 0\}$ och att längden av C_R^+ är πR konkluderas att

$$\left| \int_{C_R^+} (F(z) - F_T(z))W_{T,R}(z) \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{2\pi\|f\|_\infty}{R}$$

och denna uppskattning är oberoende av T . Sedan, integralen över kurvan $L_R = C_R \cap \{\operatorname{Re} z < 0\}$. Uppskattningen kommer ske i två olika steg, en för $F_T(z)$ och en för $F(z)$.

Om $\operatorname{Re} z < 0$ kan funktionen $g_T(z) := F(z)W_{T,R}(z)/z$ uppskattas med den

integrerbara funktionen

$$|F(z)| \left| 1 + \frac{z^2}{R^2} \right| \frac{1}{|z|},$$

oberoende av T . Dessutom konvergerar $g_T(z)$ punktvis mot 0 när $T \rightarrow \infty$. Till följd av dominerade konvergenssatsen fås

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \left| \int_{L_R} F(z) W_{T,R}(z) \frac{dz}{z} \right| = 0. \quad (5)$$

Sist är integralen med F_T över L_R , eftersom F_T är en hel funktion är den oberoende av vägen enligt Cauchys integralsats därav kan L_R bytas ut till $\gamma_R := \{|z| = R\} \cap \{\operatorname{Re}(z) \leq 0\}$: Sedan repeteras samma uppskattningssteg som tidigare. För $z = x + iy \in \gamma_R$,

$$|F_T(z)| \leq \int_0^T |f(t)| |e^{-zt}| dt \leq \|f\|_\infty \int_0^T |e^{-zt}| dt = \|f\|_\infty \int_0^T e^{-xt} dt < \|f\|_\infty \frac{e^{-xT}}{|x|}.$$

Det följer att

$$\left| \int_{L_R} F_T(z) W_{T,R}(z) \frac{dz}{z} \right| \leq \frac{2\pi \|f\|_\infty}{R}$$

Låt $\epsilon > 0$ vara givet. Välj R sådant att $\frac{4\pi \|f\|_\infty}{R} < \frac{\epsilon}{2}$ och T_0 sådant att absolutbeloppet i ekv. (5) är mindre än $\frac{\epsilon}{2}$ för alla $T \geq T_0$. Då gäller för alla $T > T_0$

$$|F(0) - F_T(0)| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

och därav

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F_T(0) = F(0).$$

□

Ett exempel på en funktion som inte uppfyller detta, är $f(t) = \cos t$ med dess Laplace transformation $F(s) = \frac{s}{s^2+1}$. Den uppfyller att den är bunden på $[0, \infty)$ och lokalt integrerbar, men dess Laplace transformation kan ej analytiskt fortsättas till en omgivning av det komplexa halvplanet då $F(s)$ har poler vid $s = \pm i$. Vidare på exemplet, $\int_0^\infty \cos(t) dt$ existerar ej, medan $L\{\cos t\}(0) = 0$, vilket tydligt visar att kravet att funktionen ska kunna analytiskt fortsättas är viktigt.

2.6 Förberedelser inför Primaltalssatsens bevis

Först en påminnelse om ekvation (3):

$$\sum_p \frac{\ln p}{p^s - 1} = \sum_p \frac{\ln p}{p^s} + \sum_p \frac{\ln p}{p^s(p^s - 1)} \quad (\operatorname{Re}(s) > 1).$$

I denna formel, påminner serien till vänster i högerledet om $\theta(x)$. Låt $\Phi(s)$ vara serien till vänster och låt $H(s)$ vara serien till höger i högerledet. Då $\theta(x)$ ökar monoton kan den användas som integrator i en Riemann-Stieltjes integral, och kan då definiera om $\Phi(s)$ till

$$\Phi(s) := \int_1^\infty x^{-s} d\theta(x).$$

Med partiell integration, lemma 2.3, och omskrivning till en Riemann integral, lemma 2.2 resulterar integralen i

$$\int_1^\infty x^{-s} d\theta(x) = [\theta(x)x^{-s}]_1^\infty + s \int_1^\infty x^{-(s+1)}\theta(x) dx.$$

Då $\theta(1) = 0$ samt att $\theta(x) \in O(x)$ enligt lemma 2.14, är första termen i högerledet 0. Vilket nu leder till att $\Phi(s)$ kan skrivas som

$$\Phi(s) = s \int_1^\infty x^{-(s+1)}\theta(x) dx. \quad (6)$$

2.7 Primaltalssatsen

Nu är det dags att börja bevisa Primaltalssatsen med Newmans tauberiska sats. Från sats 2.16 samt sats 2.17 räcker det med att bevisa att den generaliserade integralen existerar för att visa att Primaltalssatsen är sann. För att nå detta mål, skriv (6) i termer av $\frac{\theta(x)}{x} - 1$

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= s \int_1^\infty x^{-(s+1)}(\theta(x) - x + x)dx = s \int_1^\infty x^{-s} \left(\frac{\theta(x)}{x} - 1 \right) dx + s \int_1^\infty x^{-s} dx \\ &= s \int_1^\infty x^{-s} \left(\frac{\theta(x)}{x} - 1 \right) dx + \frac{s}{s-1}. \end{aligned}$$

Funktionen $Z(s)$ definierad i definition 2.9 kan då skrivas om till

$$Z(s) = \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_p \frac{\ln p}{p^s} + \sum_p \frac{\ln p}{p^s(p^s - 1)} = s \int_1^\infty x^{-s} \left(\frac{\theta(x)}{x} - 1 \right) dx + \frac{s}{s-1} + H(s). \quad (7)$$

Där $H(s)$ är analytisk i $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$. Definiera $F(s)$ som

$$F(s) = \int_1^\infty \left(\frac{\theta(x)}{x} - 1 \right) x^{-s} dx.$$

Från (7) kan $F(s)$ skrivas som

$$F(s) = \frac{1}{s} \left(Z(s) - \frac{s}{s-1} - H(s) \right).$$

I och med att $H(s)$ är analytisk för $\{\operatorname{Re} s > 1/2\}$ och $Z(s)$ är analytisk för $\{\operatorname{Re} s \geq 0\}$ med enkla poler där $\zeta(s)$ har nollställen och poler. Eftersom $s = 1$ är en enkel pol av ζ är det en enkel pol av $Z(s)$ med residy lika med 1. Därför har $Z(s) - \frac{s}{s-1}$ ingen pol vid $s = 1$, därför kan den funktionen analytiskt fortsättas till en öppen omgivning av det slutna halvplanet $\{\operatorname{Re} s \geq 1\}$. Därmed kan även F fortsättas till den öppna omgivningen av $\operatorname{Re} \geq 1$.

Vi ska visa att

$$\int_1^\infty \left(\frac{\theta(x)}{x} - 1 \right) \frac{dx}{x}$$

existerar.

$F(s)$ kan även skrivas om till

$$F(s) = \int_1^\infty \left(\frac{\theta(x)}{x} - 1 \right) x^{1-s} \frac{dx}{x}.$$

Definiera $g(t) = \frac{\theta(e^t)}{e^t} - 1$, med variabel bytet $x = e^t$ skrivs $F(s)$ som

$$\int_0^\infty g(t) e^{-t(s-1)} dt.$$

Vilket är Laplace transformationen, $L\{g\}(s-1)$, av g . I och med att $F(s) = L\{g\}(s-1)$ är analytisk i en öppen mängd som innehåller $\{\operatorname{Re} s \geq 1\}$ är $L\{g\}(s)$ analytisk i en öppen mängd som innehåller $\{\operatorname{Re} s \geq 0\}$, samt att $g(t)$ är lokalt integrerbar,

uppfyller antagandena i sats 2.20, alltså är

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} L\{g\}(s) = \int_0^\infty g(t) \, dt = \int_1^\infty \left(\frac{\theta(x)}{x} - 1 \right) \frac{dx}{x}$$

Det har nu visats att den generaliserade integralen i sats 2.17 existerar vilket i sin tur leder till att sats 2.16 visar Primtalssatsen.

Referenser

- [Chu44] Ruel V. Churchill. *Modern Operational Mathematics in Engineering*. The Maple Press Company, 1944.
- [Rud76] Walter Rudin. *Principles of mathematical Analysis*. McGraw-Hill Education, third edition edition, 1976.
- [Sha] Joel Shapiro. The prime-number theorem. Föreläsningsskript, 2021. Hämtat 2025/07/28 från https://joelshapiro.org/Pubvit/Downloads/joel_PNT.pdf.
- [Wid46] David Vernon Widder. *The Laplace Transform*. Princeton University Press, 1946.
- [Zag97] Don Zagier. Newman's short proof of the prime number theorem. *The American mathematical monthly*, 1997.