



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Bevis av Lindström-Gessel-Viennots lemma samt några
tillämpningar.

av

Titti Westlin

2025 - No K34

Bevis av Lindström-Gessel-Viennots lemma samt några tillämpningar.

Titti Westlin

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Per Alexandersson

2025

Sammanfattning

Vi bevisar Lindström-Gessel-Viennots lemma. Detta lemma ger en metod för att beräkna antal icke-korsande tupler av stigar i en graf via en determinant. Detta resultat har många tillämpningar, inte minst inom kombinatorik för Youngtablåer.

Abstract

We prove Lindström-Gessel-Viennot's lemma. This lemma provides a method to count numbers of non-intersecting n -tuples of paths in a graph via a determinant. The result has many practical applications, particularly in combinatorics regarding Young tableaux.

Innehåll

1 Inledning	2
1.1 Bakgrund	2
1.2 Grafer	2
2 Teoretisk bakgrund	3
2.1 Lindström-Gessel-Viennots lemma	3
2.2 Identitetspermutationen	5
3 Speciella grafer	7
3.1 Latticestigar	7
4 Tillämpningar	8
4.1 Symmetriska polynom	9
4.2 Semi-standard Young-tablåer	9
4.3 Bijektioner till icke-korsande n -stigar	10
4.3.1 Radbijektioner	10
4.3.2 Kolumnbijektioner	11
4.4 Schurpolynom	13
4.4.1 Jacobi-Trudi-identiteter	14
4.5 Bevisa Cauchy–Binets sats med hjälp av lemmat	15
5 Referenser	17

1 Inledning

1.1 Bakgrund

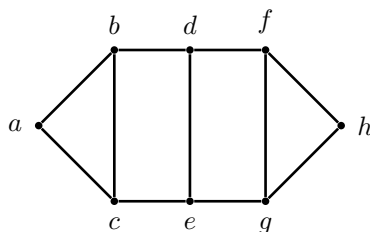
Lindström-Gessel-Viennots lemma är ett intressant resultat med flera kombinatoriska och algebraiska tillämpningar. Grundidén är att man kan beräkna antalet uppsättningar icke-korsande stigar i en riktad graf.

Lemmat formulerades med hjälp av en determinant först 1973 av Bernt Lindström, en svensk matematiker, i en avhandling om matroider. Först 1985 när Ira Gessel och Gérard Viennot skrev sin avhandling "Binomial Determinants, Paths, and Hook Length Formulae" exponerades dess fulla potential. I den texten kommer lemmat endast avhandlas lemmat endast kortfattat. Lindström-Gessel-Viennots lemma har viktiga tillämpningar inom Schur-polynom och Jacobi-Trudi-determinanter. I den här uppsatsen kommer vi att undersöka ett kombinatoriskt bevis för Cauchy–Binets sats med hjälp av lemmat, samt studera semi-standard-Youngtablåer.

1.2 Grafer

Grafer är matematiska objekt med viss egen terminologi, så för att undvika missförstånd lånas här definitioner från Eriksson, Gavel [EG13] om olika förflyttningar i en graf:

Definition 1.1. En graf $G = (V, E)$ består av ett par av mängder: mängden hörn V (eng. vertices) och mängden kanter E (eng. edges) som är ordnade (riktad graf eller digraf) eller oordnade (oriktad graf) par av element ur V .



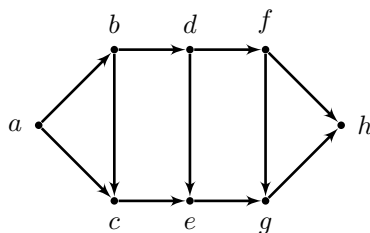
Figur 1: En graf med hörnen $V = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ och kanterna E ges av $\{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, g\}, \{f, g\}, \{f, h\}, \{g, h\}\}$.

Definition 1.2. En *stig* (eng. path) är en förflyttning längs kanter i en graf som inte använder samma kant eller passerar samma hörn flera gånger. En stig i [Figur 1](#) kan vara till exempel $P = a - b - c - e - g - h$.

Definition 1.3. En *cykel* i en graf är en stig som börjar och slutar vid samma hörn. I [Figur 1](#) finns många cykler, vi kan exempelvis välja $P = a - b - c - a$.

Definition 1.4. En *riktad graf* (från eng. directed graph) är en graf där varje kant $(v_i, v_j) \neq (v_j, v_i) \in E$ endast kan passeras i riktningen v_i till v_{i+1} och inga cykler uppstår under de stigar som definieras i G .

Definition 1.5. En *riktad, acyklisk graf* (eng. directed, acyclic graph) är en riktad graf utan cykler. [Figur 2](#)



Figur 2: En acyklisk, riktad graf med samma hörn som i [Figur 1](#) och de ordnade kanterna $E = \{(a, b), (a, c), (b, c), (b, d), (c, e), (d, e), (d, f), (e, g), (f, g), (f, h), (g, h)\}$.

Definition 1.6. En kantvikt är ett värde som tillskrivs en kant e i G och skrivs här som $w(e)$. En graf där samtliga kanter har vikter är en *viktad graf*.

Definition 1.7. Två stigar är *korsande* om de delar minst ett hörn, och *icke-korsande* om de är hörndisjunkta.

2 Teoretisk bakgrund

Låt G vara en acyklisk, riktad graf, med kantvikter. Låt $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ och $B = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ vara mängder av hörn i G . Vi kallar A för *starthörn* och B för *sluthörn*, och skapar stigar mellan varje par av a_i och b_j enligt någon permutation σ i den symmetriska gruppen S_n , så att varje permutation σ ger en uppsättning stigar mellan a_i och $b_{\sigma(i)}$ för $i = 1, 2, \dots, n$. För varje permutation σ definierar vi en uppsättning n -stigar $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ som en n -tupel av stigar, så att P_i är en stig som börjar i a_i och slutar i $b_{\sigma(i)}$. Låt $\mathcal{T}$ vara mängden av sådana n -stigar. Det gäller att $\mathbf{P}$ är *icke-korsande* om varje par av stigar P_i och P_j i $\mathbf{P}$ inte har något gemensamt hörn om $i \neq j$.

Låt vikten av en stig P_i vara produkten av vikterna av kanterna som ingår i stigen, så att:

$$w(P_i) = \prod_{e \in P_i} w(e).$$

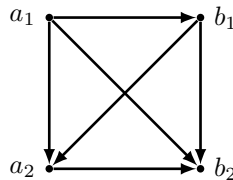
Vikten av en n -stig $\mathbf{P}$ definieras som produkten av de ingående stigarna:

$$w(\mathbf{P}) = \prod_{i=1}^n w(P_i).$$

Med ovan definitioner säger Lindström-Gessel-Viennots lemma att man kan beräkna antalet icke-korsande n -stigar genom att konstruera $n \times n$ -matrisen $M = (m_{ij})_{i,j=1}^n$, där m_{ij} är summan av stigvikter för varje par (a_i, b_j) , och beräkna dess determinant:

$$m_{ij} = \sum_{P_i: a_i \rightarrow b_j} w(P_i).$$

Exempel 2.1. Låt oss för enkelhetens skull anta att $w(e) = 1$ för alla kanter e , det innebär att summan för vikten för stigarna blir exakt antalet stigar från varje hörn. Varje element i 2×2 -matrisen M ska då representera antalet vägar från varje starthörn till varje sluthörn enligt [Figur 3](#):



Figur 3: En graf G med *starthörnen* a_1 och a_2 och *sluthörnen* b_1 och b_2 .

För att konstruera matrisen M måste alltså antalet vägar mellan starthörn och sluthörn beräknas, m_{11} motsvaras av stigarna mellan a_1 och b_1 , och det finns bara precis den kanten. Mellan a_1 och b_2 finns fyra stigar: $a_1 b_2$, $a_1 a_2 b_2$, $a_1 b_1 b_2$ och $a_1 b_1 a_2 b_2$, och $m_{12} = 4$. Det finns inga stigar $a_2 \rightarrow b_1$, så $m_{21} = 0$, och slutligen blir $m_{22} = 1$, då det endast finns en stig $a_2 \rightarrow b_2$ (precis kanten där emellan). Det betyder att matrisen och dess determinant blir som följer:

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det M = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Enligt lemmat ska det då finnas precis en icke-korsande n -stig, eftersom determinanten är 1. Det är lätt att verifiera ur grafen att det stämmer överens med tupeln $(a_1 \rightarrow b_1, a_2 \rightarrow b_2)$, från A till B .

2.1 Lindström-Gessel-Viennots lemma

Sats 2.1 (Lindström-Gessel-Viennots lemma). Låt $\text{sgn}(\mathbf{P}) = \text{sgn}(\sigma(\mathbf{P}))$ vara pariteten hos den permutation σ som bestämmer hur stigarna i $\mathbf{P}$ kopplar ihop start- och sluthörn. Vi antar att

endast identitetspermutationen $\sigma = \text{id}$ ger upphov till icke-korsande $\mathbf{P}$, och att $w(e) = 1$ för alla kanter. Då gäller att determinanten av $n \times n$ -matrisen M är precis antalet icke-korsande $\mathbf{P} \in \mathcal{T}$:

$$\det M = \sum_{\text{icke-korsande } \mathbf{P}} \prod_{i=1}^n w(P_i). \quad (1)$$

Bevis. Genom att använda Leibniz determinantformel [wikib](#) har vi att

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n m_{i,\sigma(i)} = \sum_{\mathbf{P} \in \mathcal{T}} \text{sgn}(\mathbf{P}) \prod_{i=1}^n w(P_i), \quad (2)$$

där den andra likheten fås genom att välja n stycken stigar för att bilda en n -stig. Alltså behöver vi endast visa att korsande n -stigar kan förenklas bort.

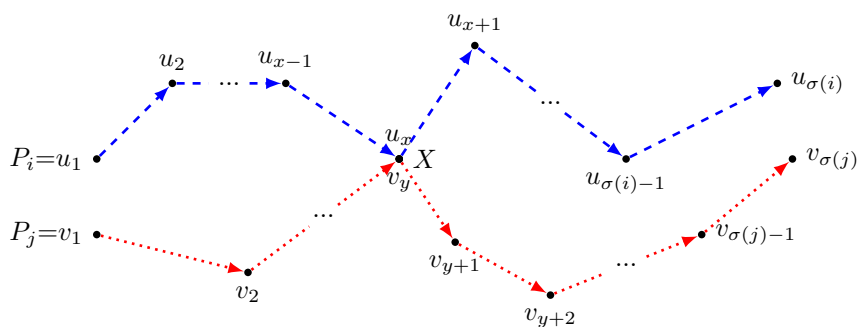
Alla n -stigar kommer att vara antingen korsande eller icke-korsande, alltså kan vi dela upp determinanten enligt följande:

$$\det M = \sum_{\text{icke-korsande } \mathbf{P}} \text{sgn}(\mathbf{P}) \prod_{i=1}^n m_{i,\sigma(i)} + \underbrace{\sum_{\text{korsande } \mathbf{P}} \text{sgn}(\mathbf{P}) \prod_{i=1}^n m_{i,\sigma(i)}}_{(*)}. \quad (3)$$

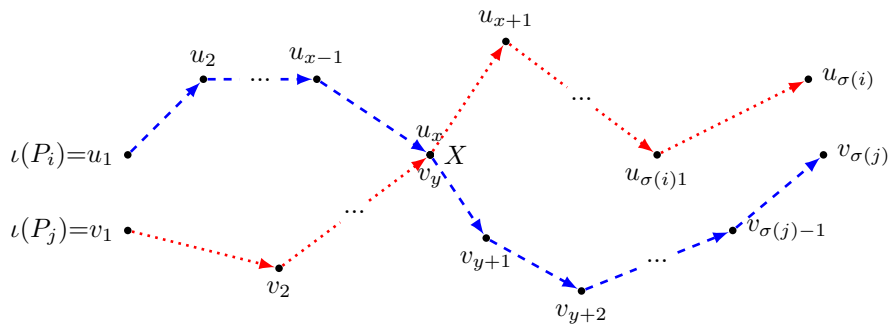
Det som återstår då är att visa att $(*) = 0$. Det räcker att visa att det för varje n -stig som korsar finns en annan n -stig med samma vikt men motsatt tecken. Vi vill alltså ha en funktion som bevarar vikten men byter tecken. Funktioner som är sin egen invers kallas *involutions* och betecknas företrädesvis med ι . Vi vill därmed att funktionen ska vara så att $\iota(\iota(\mathbf{P})) = \mathbf{P}$, att $w(\mathbf{P}) = w(\iota(\mathbf{P}))$ samt att $\text{sgn}(\mathbf{P}) = -\text{sgn}(\iota(\mathbf{P}))$.

Vi konstruerar involutionen $\iota(\mathbf{P})$ enligt följande: låt $\mathbf{P} = (P_1, P_2, \dots, P_n)$ vara en n -stig med två korsande stigar. Låt $P_i := \{a_i = u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_r = b_{\sigma(i)}\}$ och $P_j := \{a_j = v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \dots \rightarrow v_s = b_{\sigma(j)}\}$ vara två stigar som delar minst ett hörn.

Vi kallar det första gemensamma hörnet i P_i och P_j för $X = u_x = v_y$ för respektive stig, och definierar involutionen $\iota(\mathbf{P})$ som den funktion som vid hörnet X byter resterande hörn i P_i till motsvarande i P_j , kalla dessa stigar P'_i respektive P'_j . Det innebär att om P_i tar a_i till $b_{\sigma(i)}$ kommer vi efter involutionen istället ha a_i till $b_{\sigma(j)}$. Det är tydligt att $\iota(\mathbf{P})$ också är en korsande n -stig, och $\iota(\iota(\mathbf{P})) = \mathbf{P}$. [Figur 4](#) visar då hur stigarna ser ut i $\mathbf{P}$ medan [Figur 5](#) visar hur "svansarna" i stigarna byts ut under involutionen.



Figur 4: P_i och P_j .



Figur 5: P'_i och P'_j .

Vi behöver verifiera att involutionen ger $\text{sgn}(P) = -\text{sgn}(\iota(P))$ för varje korsande n -stig. Antag att P_i och P_j är korsande stigar i $\mathbf{P}$ och att $\sigma(\mathbf{P}) = \text{id}$, då är $\text{sgn}(\mathbf{P}) = 1$ och vi behöver visa att $\text{sgn}(\iota(\mathbf{P})) = -1$. Eftersom $\iota(\mathbf{P})$ är identisk med $\mathbf{P}$ förutom att $a_i \rightarrow b_j$ och $a_j \rightarrow b_i$ blir $\sigma(\iota(P)) = (ij)$, vilket är en udda permutation, och de får motsatt paritet och vikterna kommer att ta ut varandra när de summeras.

Det behöver också verifieras att $w(\mathbf{P}) = w(\iota(\mathbf{P}))$. Vi börjar därför med vikten för n -stigen $\mathbf{P}$, n -stigen i [Figur 4](#).

$$w(\mathbf{P}) = \prod_{i=1}^n w(P_i) = w(P_1) \cdots w(P_i) \cdots w(P_j) \cdots w(P_n). \quad (4)$$

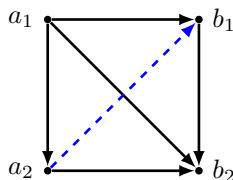
Eftersom vikten för n -stigen $\mathbf{P}$ är en produkt kan vi välja ut endast P_i och P_j , om $w(P_i) \cdot w(P_j) = w(P'_i) \cdot w(P'_j)$ kommer det även vara sant att $w(\mathbf{P}) = w(\iota(\mathbf{P}))$. Om $w(e) = 1$ för alla kanter e är vikten för varje n -stig också 1. Det innebär att varje m_{ij} motsvarar antalet stigar mellan a_i och b_j för alla $\mathbf{P} \in \mathcal{T}$.

□

2.2 Identitetspermutationen

Vi har konstaterat att Lindström-Gessel-Viennots lemma kräver att bara identitetspermutationen kan ge icke-korsande n -stigar, och vi ska nu titta närmare på varför det är nödvändigt.

Vi tittade tidigare på ett exempel med en riktad komplett graf med fyra hörn ([Figur 3](#)). I den grafen finns inga stigar $a_2 \rightarrow b_1$, så att det enda $\mathbf{P}$ som bidrar till determinanten är $\sigma(\mathbf{P}) = \text{id}$, och det är lätt att se att determinanten för matrisen är 1. Om vi däremot byter riktning på kanten $a_2 \rightarrow b_1$ (streckad kant i [Figur 6](#) nedan) uppstår, utöver $\sigma(\mathbf{P}) = \text{id}$, möjligheten för permutationen $\sigma(\mathbf{P}) = (12)$, utan att P_1 och P_2 korsar.



Figur 6: Två permutationer (id och (12)) ger upphov till icke-korsande stigar.

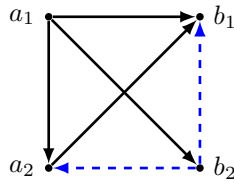
Sätter vi upp matrisen på samma sätt som tidigare ser vi att determinanten för [Figur 6](#) blir:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot 2 - 4 \cdot 1 = 0.$$

Detta trots att det går att skapa icke-korsande n -stigar som inte delar något hörn med varandra. Situationen uppstår eftersom identitetspermutationen är jämn ($\text{sgn}(\mathbf{P}) = 1$), medan permutationen $\sigma(\mathbf{P}) = (12)$ är udda och dess vikt blir således ($\text{sgn}(\mathbf{P}) = -1$). Eftersom det i [Figur 6](#) finns precis lika många sätt att skapa icke-korsande stigar i de båda permutationerna, blir determinanten 0. I

det här fallet är det lätt att se att det inte stämmer, men för större grafer utan viss struktur kan det vara otydligt, då determinanten ändå kan bli ett positivt heltal.

Genom att vända på (a_2, b_2) och (b_2, b_1) (streckade linjer i [Figur 7](#)) erhåller vi en graf där den enda möjliga permutationen är $\sigma(\mathbf{P}) = (12)$:



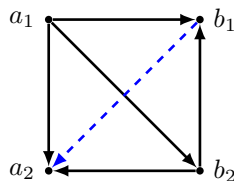
Figur 7: Om identitetspermutationen inte är möjlig, men en annan permutation är det.

Här finns det nu inte längre några stigar a_2b_2 , och determinanten till grafen ovan blir då:

$$\det \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 3 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1.$$

Anledningen till att determinanten blir negativ är att den n -stig som bidrar till den är en udda permutation. Följaktligen kommer determinanten inte att visa antalet icke-korsande n -stigar om det finns fler permutationer än id som ger icke-korsande tupler. Det finns sätt att beräkna antalet icke-korsande stigar av samtliga permutationer, men det är mycket mer omfattande och inget vi kommer att fördjupa oss i här.

Slutligen kan vi titta på exemplet om ett av starthörnen inte kan permuteras till något av sluthörnen:

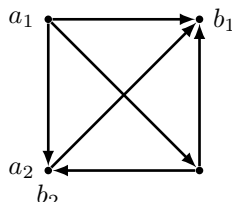


Figur 8: Det finns inga kanter från a_2 .

Detta leder förstås till en 0-rad i matrisen och följaktligen blir determinanten blir 0.

Lindström-Gessel-Viennots lemma gäller följaktligen enbart för de fall då identitetspermutationen är den enda permutationen som ger upphov till icke-korsande stigar, och de andra fallen kommer vi inte att behandla.

Ett ytterligare exempel som är en utvidgning av LGV-lemmat är om hörn i A och hörn i B sammanfaller. Låt därför $a_i = b_j$. Mängden icke-korsande n -stigar är naturligtvis tom om $i \neq j$, men om däremot $i = j$ så blir de icke-korsande n -stigarna precis de som undviker det hörnet [\[Kim23\]](#), i [Figur 9](#) nedan kommer det att finnas 2 sådana n -stigar, nämligen de som tar a_1 till b_1 utan att passera genom a_2 :

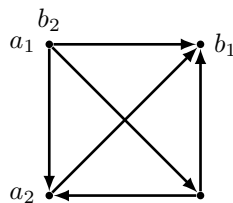


Figur 9: Hörn som sammanfaller så att $a_i = b_i$.

Här ser vi att det finns 4 vägar $a_1 \rightarrow b_1$, varav 2 av dem inte passerar genom a_2 , och determinanten blir följaktligen 2:

$$\det \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2.$$

I Figur 10



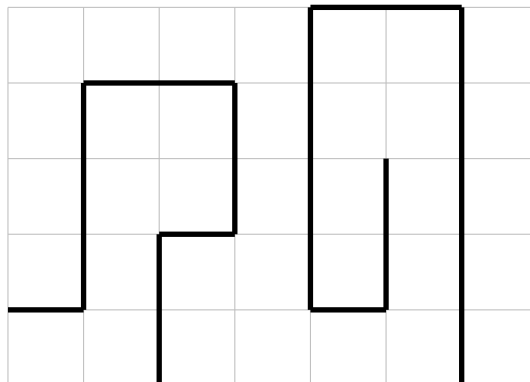
Figur 10: Om $a_i = b_j$ och $i \neq j$

3 Speciella grafer

nedan definition från [Wal16](#)

Definition 3.1. Ett lattice $\Lambda = (V, E)$ är en matematisk modell över en diskret punktmängd i $\mathbb{R}^n$, där $V \subset \mathbb{R}^n$ är punkterna och $E \subset \{(v_i, v_{i+1}) : v_i, v_{i+1} \in V\}$ är kanterna.

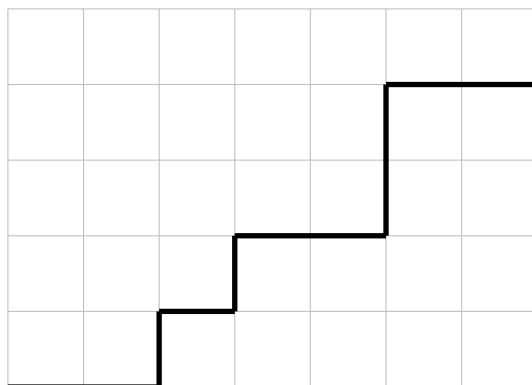
Med den här definitionen av ett lattice har grafer och lattice precis samma struktur och det är lätt att översätta mellan dem. I resterande del av uppsatsen kommer vi endast att betrakta grafer vars hörn ligger i ett kvadratisk $\mathbb{Z}^2$ -lattice.



Figur 11: Kvadratisk lattice i $\mathbb{Z}^2$ med eksempel på latticestig.

3.1 Latticestigar

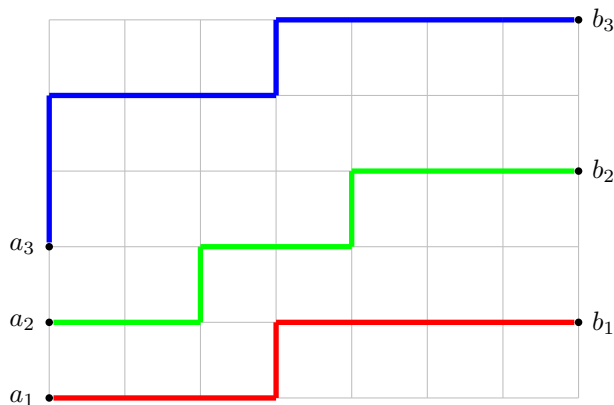
Stigar genom ett lattice kallas *latticestigar*. Även i ett kvadratisk lattice finns det många sätt att konstruera stigar (av olika sträckor och/eller lutning). För att förtydliga vilka steg som medges anger man en stegmängd, S . Här kommer vi endast att betrakta NE-latticestigar, där $S = \{(0, 1), (1, 0)\}$. De har fått sitt namn efter väderstrecken, där $(0, 1)$ -stegen är nordliga (N) och $(1, 0)$ -dito östliga (E). Det innebär att från varje hörn i grafen kan stigen fortsätta åt höger eller uppåt. Det gör att vi får ett permutations-”ord”, k , ett koncist sätt att illustrera en stig. Vidare gäller att $|k|$ är längden av stigen och genom att räkna antalet N respektive E vet du även var stigen slutar.



Figur 12: NE-latticestigen EENENEENNEEN.

Med dessa nord-östliga latticestigar finns det nu bara två riktningar från varje hörn, uppåt eller åt höger. Det innebär att vi för att beräkna antalet stigar mellan två hörn kan beräkna antalet steg vi behöver ta och sedan välja hur många av dem som går uppåt, alltså en enkel binomialkoefficient.

På detta sätt får vi att varje m_{ij} i matrisen M för grafen G blir binomialkoefficienten $\binom{|L|}{|N|}$ där $|L|$ är stiglängden mellan a_i och b_j och $|N|$ är antalet steg som går uppåt.



Figur 13: Icke-korsande stigar i latticestruktur.

Här kan vi alltså konstruera matrisen genom att sätta in binomialkoefficienter:

$$M = \begin{pmatrix} \binom{8}{1} & \binom{10}{3} & \binom{12}{5} \\ 1 & \binom{9}{2} & \binom{11}{4} \\ 0 & \binom{8}{1} & \binom{10}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 120 & 792 \\ 1 & 36 & 330 \\ 0 & 8 & 120 \end{pmatrix}.$$

För den här uppsättningen blir determinanten $\det M = 5376$. Det är tydligt att det inte är meningsfullt att för hand konstruera alla icke-korsande n -stigar, redan för små grafer.

4 Tillämpningar

Lemmat har många tillämpningar inom olika delar av matematiken, från representationsteori till linjär algebra. I detta kapitel undersöker vi dels hur lemmat kan användas för att ge ett geometriskt bevis av Cauchy–Binets sats, dels hur det kopplar samman grafer med Youngtablåer och Schurpolynom. För att ge en överskådlig förståelse av Schurpolynomen inleder vi med en genomgång av symmetriska polynom.

4.1 Symmetriska polynom

Symmetriska polynom är polynom för vilka gäller att $f(x_1, x_2, \dots, x_k) = f(x_{\tau(1)}, x_{\tau(2)}, \dots, x_{\tau(k)})$ för något $\tau \in S_n$. Man talar särskilt om elementära symmetriska polynom, e_k , och kompletta symmetriska polynom, h_k .

Definition 4.1. Kompletta homogena symmetriska polynom är summan av alla variabelkombinationer av grad k , inklusive de som innehåller potenser av varje variabel [\[wika\]](#).

$$h_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = \sum_{\substack{\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n = k \\ \ell_i \geq 0}} x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \dots x_n^{\ell_n}.$$

Definition 4.2. Elementära symmetriska polynom liknar de kompletta symmetriska polynomen utom att de inte innehåller några potenser, skillnaden utgörs av att det är strikt ökande indexering i summan:

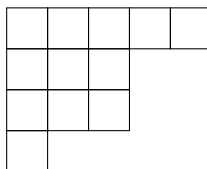
$$e_k(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k} = \sum_{\substack{\ell_1 + \ell_2 + \dots + \ell_n = k \\ 0 \leq \ell_i \leq 1}} x_1^{\ell_1} x_2^{\ell_2} \dots x_n^{\ell_n}.$$

Exempel 4.1. Det betyder att det elementära och det kompletta homogena symmetriska polynomet för grad två i tre variabler blir:

$$\begin{aligned} e_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 \\ h_2(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2^2 + x_2 x_3 + x_3^2. \end{aligned}$$

4.2 Semi-standard Young-tablåer

Youngdiagram är grafiska representationer av partitioner av heltalet n så att $\lambda = (\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_l)$, där $n = \sum_{i=1}^l \lambda_i$, och skrivs $\lambda \vdash n$. Youngdiagrammet är konstruerat så att varje λ_i motsvarar i :te raden, som innehåller λ_i stycken "boxar". Det vanligaste sättet att arrangera boxarna är s.k. *engelsk notation*, som innebär att boxarna har matrisnotation och påbörjas uppför till vänster [\[mca\]](#).



Figur 14: En partition av $n = 12$, $\lambda = (5, 3, 3, 1)$.

Om man transponerar diagrammet, speglar det i huvuddiagonalen, får man en annan partition av λ , vi kallar den λ' och skriver $\lambda' = (4, 3, 3, 1, 1)$.

När man associerar värden till boxarna i ett Youngdiagram övergår det till att bli en så kallad *Youngtablå* (eng. *Young tableaux*). Värden i en Youngtablå kan översättas till indexerade variabler, så att värdet i i tablå motsvarar variabeln x_i . Därmed motsvarar värdet 9 i första boxen i tablå längst till vänster i [Figur 15](#) nedan variabeln x_9 .

9	4	6	4	7
5	7	8		
11	6	13		
2				

1	3	4	6	7
2	8	10		
5	9	12		
11				

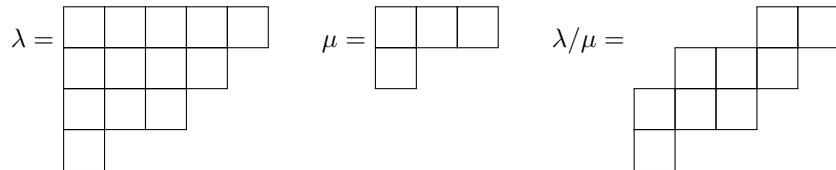
1	1	3	4	5
2	3	5		
4	5	6		
6				

Figur 15: En Youngtablå, en standard-Youngtablå (*SYT*) och en semi-standard Youngtablå (*SSYT*).

Vikten av tablå $w(T)$ definieras $w(T) = x_1^{m_1} \cdot x_2^{m_2} \cdot \dots \cdot x_k^{m_k}$, där m_i är antalet i som förekommer i tablå. Från vänster till höger i [Figur 15](#) motsvarar tablåerna monomen $w(T) = x_2 \cdot x_4^2 \cdot x_5 \cdot x_6^2 \cdot x_7^2 \cdot x_8 \cdot x_9 \cdot x_{11} \cdot x_{13}$, $w(SYT) = \prod_{i=1}^{12} x_i$ och $w(SSYT) = x_1^2 \cdot x_2 \cdot x_3^2 \cdot x_4^2 \cdot x_5^3 \cdot x_6^2$.

Utan några som helst regler för Youngtablåer kan tal godtyckligt placeras ut i boxarna (till vänster i [Figur 15](#)), vilket leder till en oändlig mängd olika tablåer för samma λ , och de används sällan [Ven18](#). Betydligt mer använt är då *standard Youngtablåer*, *SYT* (i mitten i [Figur 15](#)). I en SYT ökar värdena strikt för såväl rader som kolumner. Dessa boxar fylls med exakt en uppräknings av antalet boxar, och varje värde förekommer en gång. Slutligen kommer vi till den för oss mest intressanta undergruppen av Youngtablåer: *semi-standard Youngtablåer*, *SSYT* (till höger i [Figur 15](#) [wikc](#)). Där har man minskat kravet för rader till att svagt ökande (större än eller lika med). Det innebär att samma tal kan förekomma flera gånger, och denna grupp har även två bijektioner till icke-korsande lattice-stigar, en som avbildar raderna som stigar och en som avbildar kolumnerna som stigar.

En vanlig generalisering är *skevade tablåer* (eng. *skew tableaux*). För dessa tablåer gäller att $\lambda_i \geq \mu_i$ för alla i , och de bildas genom att man utgår från λ och från den tar bort μ , det kan jämföras med subtraktion av mängder, fast mängderna i det här fallet är boxar i en tablå:



Figur 16: En skevad Youngtablå är en tablå med form λ där man tagit bort boxar i form μ .

Definition 4.3. Låt $\text{SSYT}_m(\lambda/\mu)$ vara de SSYT för vilka gäller att $\text{SSYT}(x_1, \dots, x_m)$ i partitionen λ/μ . Det innebär att boxarna i tablåen har värden i mängden $\{1, 2, \dots, m\}$. Av dessa finns en ändlig mängd.

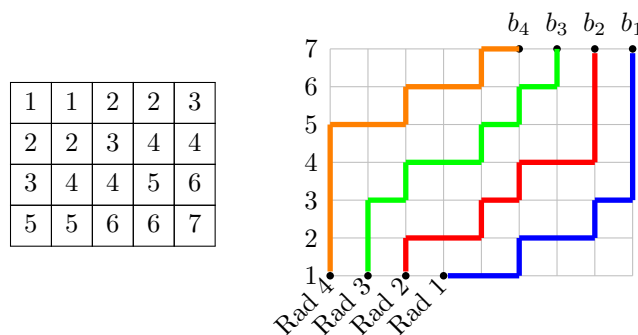
4.3 Bijektioner till icke-korsande n -stigar

Det konstaterades ovan att man kan skapa bijektioner mellan en SSYT och icke-korsande stigar. Dessa stigar kan konstrueras så att varje rad eller varje kolumn motsvarar en stig. Under förutsättning att starthörnen för stigarna placeras på ett bestämt sätt (som beskrivs för de båda fallen nedan) kommer samtliga fyllningar av en $\text{SSYT}_m(\lambda/\mu)$ att rendera icke-korsande n -stigar, och således kommer antalet icke-korsande n -stigar att motsvara samtliga sätt att fylla ett visst Youngdiagram som en SSYT.

4.3.1 Radbijektioner

Vi börjar med att titta på hur bijektionen mellan rader i $\text{SSYT}_m(\lambda/\mu)$ kan avbildas som stigar i en graf.

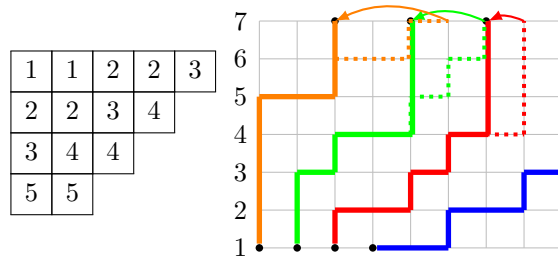
Bijektionen till rader konstrueras genom att låta varje rad i i T avbildas på en latticestig P_i . Stigen P_i startar i hörnet $(-i, 1)$ och slutar i $(-i + \lambda_i, m)$ där m är det högsta indexet i T . Den översta stigen kommer alltså att avbildas längst till höger i latticet och därefter fylls det på från vänster. Stegmängden är precis som tidigare nämnda NE-latticestigar, de horisontella stegen för varje y -koordinat j motsvarar antalet förekomster av j i raden och de vertikala förbinder de horisontella. Längden av stigen är $(\lambda_i + m - 1)$. För att illustrera principen ([Figur 17](#)) börjar vi med att konstruera en bijektion för en rektangulär SSYT, där $m = 7$ och $\lambda = (5, 5, 5, 5)$.



Figur 17: En SSYT och bijektioner till icke-korsande stigar längs rader.

På samma sätt som tidigare kan man sätta upp en matris för grafen i [Figur 17](#). Det lämnas till läsaren att konstatera att determinanten för sagda matris blir 116424.

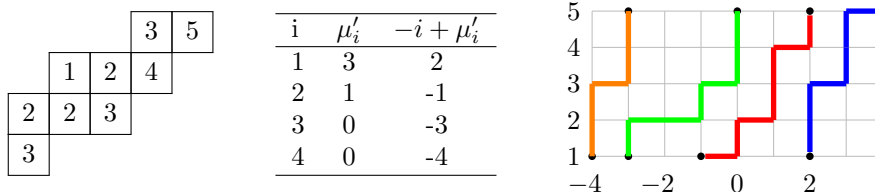
Vi kan utvidga radbijektionerna till att gälla även för generella partitioner. Om vi utgår ifrån [figur 17](#) ovan, kan man minska ner genom att ta bort några boxar i slutet av några rader. Bijektionen blir även här icke-korsande, men eftersom stigen har ett horisontellt steg för varje box i λ_i kommer sluthörnen att flyttas ett steg till vänster för varje box som raden kortas av med. I [figur 18](#) innehåller boxarna samma värden som [figur 17](#) ovan, och sluthörnens förflyttning är markerad med en pil för de avkortade raderna.



Figur 18: Om vi har ett generellt λ .

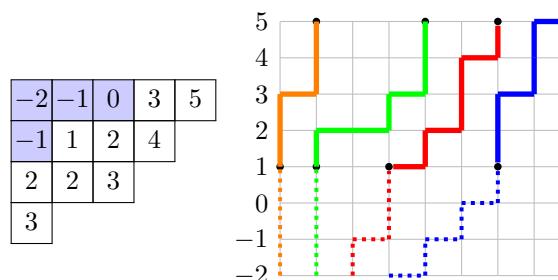
Sluthörnen i bijektionen flyttas alltså ett steg åt vänster för varje box som tas bort, vilket stämmer överens med att stigen går ett steg åt höger för varje box i raden. Om raden förkortas blir det färre högersteg.

För skevade tablåer ([Figur 19](#)) undviks korsande n -stigar genom att μ förskjuter starthörnen till $(-i + \mu_i, 1)$, i övrigt är bijektionen precis som innan. Sluthörnen förskjuts lika mycket som starthörnen och hamnar i $(-i + \lambda_i, m)$.



Figur 19: Skevad SSYT_5 med $\lambda = (5, 4, 3, 1)$ och $\mu = (3, 1)$, och beräknade startpunkter för grafen.

Ett mer intuitivt sätt att konstruera bijektionen är att fylla T_μ , med tal så att både rader och kolumner blir strikt ökande upp till 0, så att de inte sammanfaller med andra värden i tablåen.



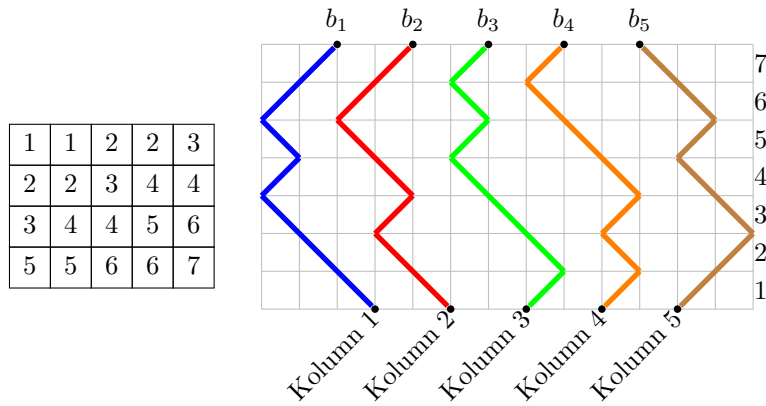
Figur 20: Utökade värden i T_μ .

[Figur 20](#) visar hur stigarna då börjar i $(-i, -\max(\mu_1, \mu'_1))$, illustrerat med streckade linjer för den delen som inte hör till grafen.

4.3.2 Kolumnbijektioner

Bijektionerna kan även göras längs kolumnerna i en SSYT . Precis på samma sätt som i radbijektionerna avbildas varje kolumn i i T på en stig P'_i . Här är stegmängden i stället $\{(-1, 1), (1, 1)\}$, där det j :te steget i P'_i är $(-1, 1)$ om j finns i kolumn i , i annat fall $(1, 1)$. För att skapa icke-korsande n -stigar placeras starthörnet för P'_i i $(2i - 2\mu'_i, 0)$ och sluthörnet $(2i - 2\lambda'_i + m, m)$. Varje stig har

längd m . Figurerna [21](#), [22](#), [23](#) och [24](#) visar kolumnbijektionerna för de SSYT som ovan visades i radbijektioner.



Figur 21: Kolumnbijektion motsvarande [Figur 17](#).

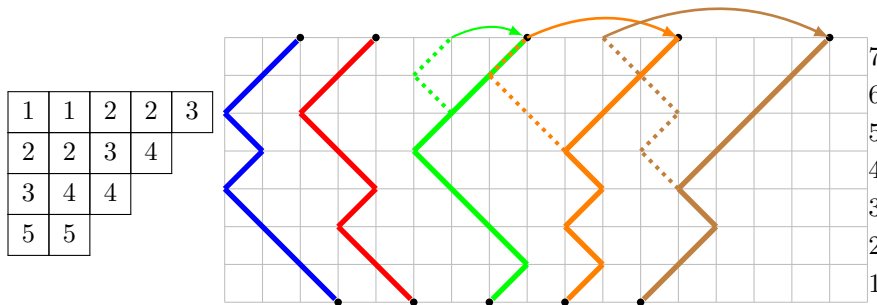
På detta sätt blir även här antalet icke-korsande n -stigar exakt determinanten för den matris som konstrueras för de möjliga stigarna genom grafen. Det betyder att determinanten för $\lambda'_1 \times \lambda'_1$ -matrisen som radbijektioner ger upphov till är exakt determinanten för $\lambda_1 \times \lambda_1$ -matrisen som kolumnmatrisen genererar.

Även i kolumnbijektionerna beräknas antalet stigar med en binomialkoefficient. Utgå från stiglängden och välj antalet vänstersteg. För grafen i [Figur 21](#) blir matrisen:

$$\begin{pmatrix} \binom{7}{4} & \binom{7}{3} & \binom{7}{2} & \binom{7}{1} & \binom{7}{0} \\ \binom{7}{5} & \binom{7}{4} & \binom{7}{3} & \binom{7}{2} & \binom{7}{1} \\ \binom{7}{6} & \binom{7}{5} & \binom{7}{4} & \binom{7}{3} & \binom{7}{2} \\ \binom{7}{7} & \binom{7}{6} & \binom{7}{5} & \binom{7}{4} & \binom{7}{3} \\ 0 & \binom{7}{7} & \binom{7}{6} & \binom{7}{5} & \binom{7}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 35 & 21 & 7 & 1 \\ 21 & 35 & 35 & 21 & 7 \\ 7 & 21 & 35 & 35 & 21 \\ 1 & 7 & 21 & 35 & 35 \\ 0 & 1 & 7 & 21 & 35 \end{pmatrix},$$

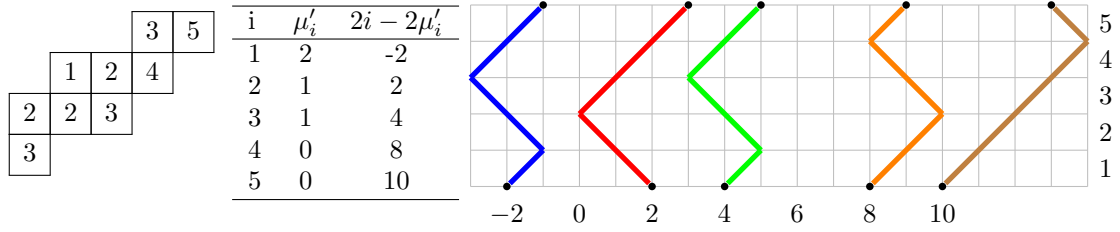
vars determinant, förstås, blir precis 116424.

För en godtycklig partition λ finns bara så många vänstersteg i varje stig som det finns värden i kolumnen, det betyder att för varje avkortning av kolumnen med en box kommer startpunkten att "förskjutas" två steg åt höger, illustrerat i [Figur 22](#) med pilar från de tidigare sluthörnen.



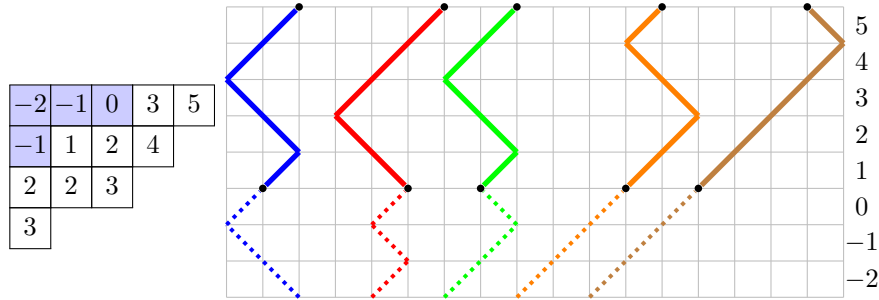
Figur 22: Kolumnbijektion motsvarande [Figur 18](#).

Precis som för radbijektionerna förskjuts startpunkterna i skevade tablåer, dessa startpunkter är viktiga att ta hänsyn till för att determinanten ska stämma överens med radbijektionens.



Figur 23: Kolumnbijektionen som motsvarar [Figur 19](#)

Precis som i radbijektionen kan man börja grafen med värden som inte är med i tabellen, och då börjar stigarna på 2 steps avstånd från varandra, som synes i [Figur 24](#).



Figur 24: Kolumnbijektionen motsvarande [Figur 20](#)

4.4 Schurpolynom

Utan att på djupet gå in i Schurpolynom kan vi konstatera att de är en typ av symmetriska polynom i n variabler, indexerade av partitioner. De erhålls som en kvot av alternerande polynom (polynom som byter tecken för en transposition av två variabler, så att $f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n)$), men kan också beskrivas som en kvot av determinanter, i vad som kallas Weyl's formel:

$$s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)^{-1} \begin{vmatrix} x_1^{\lambda_1+n-1} & x_2^{\lambda_1+n-1} & \dots & x_n^{\lambda_1+n-1} \\ x_1^{\lambda_2+n-2} & x_2^{\lambda_2+n-2} & \dots & x_n^{\lambda_2+n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{\lambda_n} & x_2^{\lambda_n} & \dots & x_n^{\lambda_n} \end{vmatrix}.$$

Att Schurpolynomen avhandlas här är på grund av deras kombinatoriska betydelse i och med att det finns en koppling mellan dem och de semistandard-Youngtablåer som vi tidigare avhandlat. Schurpolynomen, visar det sig nämligen, kan även skrivas som en summa över vikterna för samtliga $\text{SSYT}_m(\lambda)$:

$$s_\lambda(x_1, x_2, \dots, x_m) = \sum_{T \in \text{SSYT}_m(\lambda)} w(T).$$

Att detta stämmer kommer vi inte att visa, utan vi kommer att utgå från den kombinatoriska formeln med Youngtablåer.

Exempel 4.2. Ett överskådligt exempel är att fylla en tablå T är av formen $\lambda = (2, 1)$ med siffrorna 1, 2, 3, då erhåller vi då följande tablåer:

1	1	1	1	1	2	1	2
2		3		2		3	

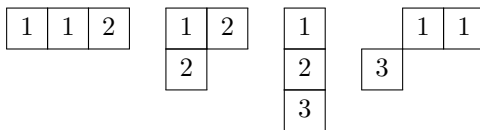
1	3	1	3	2	2	2	3
2		3		3		3	

Figur 25: Samtliga $\text{SSYT}_3(2, 1)$.

Det innebär att $\text{SSYT}_3(2,1)$ kan sammanfattas i polynomet $s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3)$:

$$s_{(2,1)}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + 2x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2.$$

Det ska noteras att här gör formen av en tablå skillnad för Schurpolynom. [Figur 26](#) nedan innehåller alla tre boxar, men ger upphov till olika Schurpolynom.



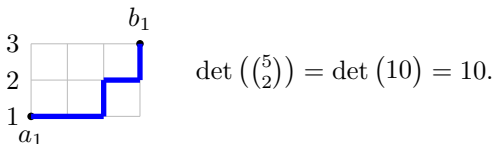
Figur 26: SSYT i tre variabler med formerna $\text{SSYT}_3(3)$, $\text{SSYT}_3(2,1)$, $\text{SSYT}_3(1,1,1)$ respektive $\text{SSYT}_3((3,1)/1)$.

Det lämnas till läsaren att räkna ut att det kommer att finnas 10, 8, 1 respektive 18 icke-korsande n -stigar, och följaktligen också termer i Schurpolynomen. Nedan en sammanställning av Schurpolynom i tre variabler för formerna av SSYT ovan ger upphov till:

$$\begin{aligned} s_{(2,1)} &= x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + 2x_1 x_2 x_3 + x_1 x_3^2 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 \\ s_3 &= x_1^3 + x_1^2 x_2 + x_1^2 x_3 + x_1 x_2^2 + x_1 x_3^2 + x_1 x_2 x_3 + x_2^3 + x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2 + x_3^3 \\ s_{(1,1,1)} &= x_1 x_2 x_3 \\ s_{(3,1)/1} &= x_1^3 + 2x_1^2 x_2 + 2x_1^2 x_3 + 2x_1 x_2^2 + 2x_1 x_3^2 + 3x_1 x_2 x_3 + x_2^3 + 2x_2^2 x_3 + 2x_2 x_3^2 + x_3^3. \end{aligned}$$

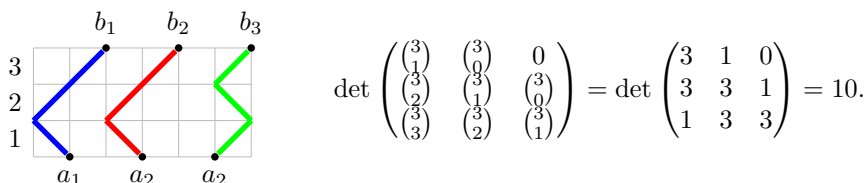
Märk särskilt att $s_{(1,1,1)} = e_3(x_1, x_2, x_3)$ och att $s_3 = h_3(x_1, x_2, x_3)$.

Exempel 4.3. Om vi betraktar radbijektionen för tablå längst till vänster i [figur 26](#) kan vi konstatera att den bara kommer att ge upphov till en enda stig, och den stigen kommer att ha två horisontella steg, ett vertikalt och därefter ett till horisontellt. Starthörnet blir således $(-1, 1)$ och sluthörnet $(1, 3)$ och stiglängden 5.



Figur 27: Radbijektion av $\text{SSYT}_3(3)$ från [figur 26](#) och determinanten den ger upphov till.

Kolumnbijektionen å andra sidan kommer att generera tre stigar, var och en med ett vänstersteg:



Figur 28: Kolumnbijektionen genererar samma determinant.

Dessa två olika bijektioner kan nu användas för att visa Jacobi-Trudi-identiteterna, som vi ska titta närmare på i nästa avsnitt.

4.4.1 Jacobi-Trudi-identiteter

Om vi tillskriver de horisontella kanterna i bijektionen vikten x_i för varje i i boxarna och de vertikala vikten 1, kommer vikten för en specifik tablå att vara samma monom som vikten för en n -stig. Det innebär att det viktade antalet icke-korsande n -stigar är precis determinanten av den matris som grafens start- och sluthörn ger upphov till [\[Ale25\]](#).

Vi konstaterar att på sättet vi fyller en SSYT kan vi ha flera av samma värde längs raderna, medan värdet är strikt ökande i kolumnerna. Vi kan dela upp varje SSYT på två olika sätt,

antingen längs rader eller kolumner. Detta motsvarar kompletta homogena symmetriska polynom för radbijektionen och elementära symmetriska polynom för kolumnbijektionen. Dessa kommer att höra ihop på samma sätt som att determinanten för de två bijektionerna blir exakt samma, även om de består av helt olika matriser, som syntes i exempel 4.3.

Den första Jacobi-Trudi-identiteten är den som associeras med radbijektioner, alltså kompletta symmetriska polynom. Den säger att Schurpolynomet för en viss partition kan skrivas som determinanten av vissa kompletta homogena symmetriska polynom.

Sats 4.1 (Första Jacobi-Trudi-identiteten). För $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_\ell)$ har vi att:

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i+j-i})_{i,j=1}^\ell = \det \begin{bmatrix} h_{\lambda_1} & h_{\lambda_1+1} & \dots & h_{\lambda_1+\ell-1} \\ h_{\lambda_2-1} & h_{\lambda_2} & \dots & h_{\lambda_2+\ell-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{\lambda_\ell-\ell+1} & h_{\lambda_\ell-\ell+2} & \dots & h_{\lambda_\ell} \end{bmatrix}.$$

Bevis. Detta följer från diskussionen tidigare om radbijektionen till latticestigar och den viktade varianten av Lindström-Gessel-Viennot-lemmat. $\square$

Det innebär, som vi tidigare konstaterat, att för en SSYT som är precis en rad ges Schurpolynomet för den SSYT:n av det kompletta symmetriska polynomet för λ_1 :

$$s_3 = \det(h_3) = h_3 = x_1^3 + x_1^2x_2 + x_1^2x_3 + x_1x_2^2 + x_1x_3^2 + x_1x_2x_3 + x_2^3 + x_2^2x_3 + x_2x_3^2 + x_3^3.$$

För kolumnbijektioner gäller att varje i i en kolumn ges stegvikten x_i . Dessa är alltså vänsterstegen, och högerstegen tillskrivs vikten 1. Då får vi med samma argument som ovan den andra Jacobi-Trudi-identiteten.

Sats 4.2 (Andra Jacobi-Trudi-identiteten). För $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_\ell)$ har vi att:

$$s_{\lambda'} = \det(e_{\lambda'_i+j-i})_{i,j=1}^\ell = \det \begin{bmatrix} e_{\lambda'_1} & e_{\lambda'_1+1} & \dots & e_{\lambda'_1+\ell-1} \\ e_{\lambda'_2-1} & e_{\lambda'_2} & \dots & e_{\lambda'_2+\ell-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{\lambda'_\ell-\ell+1} & e_{\lambda'_\ell-\ell+2} & \dots & e_{\lambda'_\ell} \end{bmatrix}.$$

4.5 Bevisa Cauchy–Binets sats med hjälp av lemmat

Vi ska nu titta på ytterligare en tillämpning av LGV-lemmat.

Cauchy–Binets sats visar hur man kan räkna ut determinanten av en produktmatris AB utan att först behöva multiplicera matriserna. I stället gör man det genom att summera över determinanter av delmatriser.

Sats 4.3 (Cauchy–Binets sats). Låt A vara en $m \times n$ -matris och B en $n \times m$ -matris. Låt $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, och $\binom{[n]}{m}$ mängden av m -kombinationer av $[n]$. Skapa $m \times m$ -matrisen $A_{[m],S}$ genom att välja alla rader i A och precis kolonnerna från $S \in \binom{[n]}{m}$, och på motsvarande sätt med $B_{S,[m]}$. Då är produkten AB en $m \times m$ -matris vars determinant ges av:

$$\det(AB) = \sum_{S \in \binom{[n]}{m}} \det(A_{[m],S}) \cdot \det(B_{S,[m]}).$$

Bevis. Antag att $m \times n$ -matrisen A och $n \times m$ -matrisen B ser ut enligt 5 nedan, då blir produkten av dessa precis AB som illustreras i 6. Vi ser tydligt att varje m_{ij} i matrisen AB representerar summan av $a_{i,\sigma(i)}b_{i,\sigma(i)}$ för samtliga $\sigma \in S_m$. Alltså är m_{11} i AB precis alla stigar från starthörn 1 i A till sluthörn 1 i B .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & a_{11}b_{12} + \cdots + a_{1n}b_{n2} & \cdots & a_{11}b_{1m} + \cdots + a_{1n}b_{nm} \\ a_{21}b_{11} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & a_{21}b_{12} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \cdots & a_{21}b_{1m} + \cdots + a_{2n}b_{nm} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & a_{m1}b_{12} + \cdots + a_{mn}b_{n2} & \cdots & a_{m1}b_{1m} + \cdots + a_{mn}b_{nm} \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Kan vi då visa att determinanten för summan av delmatriserna är precis densamma så har vi bevisat satsen.

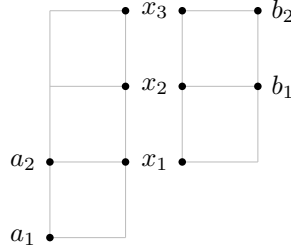
Antag att vi skapar delmatriserna $A_{[m],S}$ och $B_{S,[m]}$, genom att välja de m kolonner (A) respektive rader (B) som är indexerade i $S = \{i_1, \dots, i_m\}$. Varje $A_{[m],S}$ och $B_{S,[m]}$ kommer då se ut enligt Ekvation 7:

$$A_{[m],S} = \begin{pmatrix} a_{1x_1} & \cdots & a_{1i_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{mi_1} & \cdots & a_{mi_m} \end{pmatrix}, \quad B_{S,[m]} = \begin{pmatrix} b_{i_11} & \cdots & b_{i_1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i_m1} & \cdots & b_{i_mm} \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Determinanten av $A_{[m],S}$ kommer då att motsvara antalet icke-korsande n -stigar från starthörnen a_i till sluthörnen x_j där $j \in S$. För $B_{S,[m]}$ gäller precis samma sak, utom att x_j är starthörn, och sluthörnen är b_i . Följaktligen kommer produkten av de två determinanterna att utgöra antalet n -stigar som inte korsar i vare sig A eller B . $\square$

Exempel 4.4. Som ett exempel på hur vi kan använda Cauchy–Binets sats kan vi låta A vara en 2×3 -matris och B blir följaktligen 2×3 .

Om vi sätter upp en väldigt liten graf för att illustrera exemplet och sedan tecknar matriserna har vi:



Figur 29: Graferna för A (till vänster) och B (till höger).

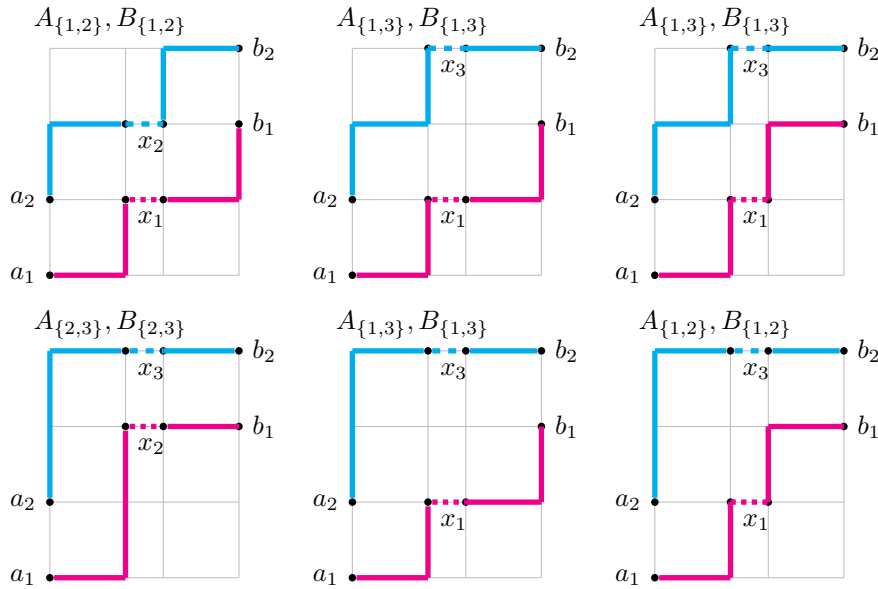
Matrisen konstrueras återigen genom att låta varje matriselement representera antalet stigar från ett starthörn med radnummer i till ett sluthörn med kolonnummer j , och de båda matriserna blir då enligt följande:

$$A = \begin{pmatrix} \binom{2}{1} & \binom{3}{2} & \binom{4}{3} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} & \binom{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \binom{2}{1} & \binom{3}{2} \\ \binom{1}{0} & \binom{2}{1} \\ 0 & \binom{1}{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Av dessa matriser ska vi nu skapa kvadratiska delmatriser genom att konstruera alla mängder S med 2 index. I det här fallet $S = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. För att göra det tydligt tittar vi både på de matriser (och determinanter) som skapas och de icke-korsande n -stigar de ger upphov till.

$$\det A_{\{1,2\}} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \det A_{\{1,3\}} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2, \quad \det A_{\{2,3\}} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$\det B_{\{1,2\}} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, \quad \det B_{\{1,3\}} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \det B_{\{2,3\}} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

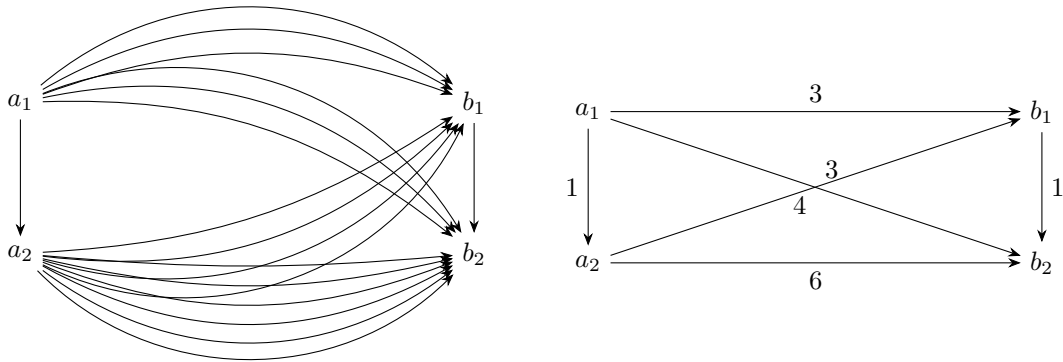


Figur 30: De icke-korsande sätten att permutera hörnen i A respektive B under uteslutande ett hörn - alltså motsvarande de kvadratiske delmatriserna.

Det betyder att matrisen AB blir:

$$AB = \begin{pmatrix} 4 + 3 + 0 & 6 + 6 + 4 \\ 2 + 2 + 0 & 3 + 4 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 16 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

med determinanten 6. Den här matrisen består ju inte av binomialkoefficienter (men väl en summa av dem), så det är inte möjligt att göra en representation av matrisen som en lattice-graf, dock är det möjligt att skapa en grafisk representation för alla matriser, för matrisen AB kan vi till exempel konstruera följande graf:



Figur 31: Exempel på hur AB kan se ut som graf.

5 Referenser

Referenser

- [Ale25] Per Alexandersson, *Partitions, permutations and tableaux — symmetricfunctions.com*, <https://symmetricfunctions.com/preliminaries.htm#prelimTableauxAsLattice>, 2025, [Accessed 31-07-2025].
- [EG13] Kimmo Eriksson and Hillevi Gavel, *Diskret matematik och diskreta modeller*, Studentlitteratur, 2013.
- [Kim23] Jang Soo Kim, *Ops lec16 lindstrom-gessel-viennot lemma*, <https://www.youtube.com/watch?v=z15HT-3AUXI&t=608s>, 2023, [Accessed 24-07-2025].

- [nca] *Young diagram in nLab* — *ncatlab.org*, <https://ncatlab.org/nlab/show/Young+diagram>, [Accessed 13-07-2025].
- [Ven18] Arjun Venkatraman, *AVyoung tableaux*, <http://simonrs.com/eulercircle/combinatorics/arjun-youngtableaux.pdf>, 2018, [Accessed 14-07-2025].
- [Wal16] Michael Wallner, *Combinatorics of lattice paths and tree-like structures*, <https://dmg.tuwien.ac.at/bgitten/Theses/wallner.pdf>, 2016, [Accessed 13-07-2025].
- [wika] *Complete homogeneous symmetric polynomial* - *Wikipedia* — *en.wikipedia.org*, https://en.wikipedia.org/wiki/Complete_homogeneous_symmetric_polynomial, [Accessed 02-08-2025].
- [wikb] *Leibniz formula for determinants* - *Wikipedia* — *en.wikipedia.org*, https://en.wikipedia.org/wiki/Leibniz_formula_for_determinants, [Accessed 13-07-2025].
- [wikc] *Young tableau* - *Wikipedia* — *en.wikipedia.org*, https://en.wikipedia.org/wiki/Young_tableau, [Accessed 14-07-2025].