



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Militär tillämpning av matematisk spelteori

av

Albin Elmfeldt

2025 - No K5

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Militär tillämpning av matematisk spelteori

Albin Elmfeldt

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Kristofer Lindensjö

2025

Abstract

This paper presents and formulates key concepts and theorems in game theory. Thereafter, these concepts and theorems are applied to three different strategic games with military themes, this is to show how strategic games can help us understand military conflicts at a strategic level.

The focus of the paper is mainly on utility functions, strategic games, and Nash equilibrium. The paper examines both pure and mixed strategies and the differences between these. Within the framework, the Nash Theorem is formulated and proven, the theorem declares under what conditions it is possible to find a Nash equilibrium. A Nash equilibrium is a situation in a strategic game where a player has nothing to win by changing his strategy in case no other player changes their strategy.

In the paper, two strategic games are formulated to exemplify the game theoretic concepts. These games are *Prisoners Dilemma* and *Matching Pennies*.

The military application is made with three games: *The Arms Race*, *The War of Attrition*, and a version of *Contribution to a public good*. Nash equilibria are investigated in these games. One conclusion is that game theory can help us illustrate military dilemmas. However, military situations are often complex and therefore, it is difficult to embrace all different preferences and quantify different results to a utility function that should represent different results in a military conflict. Instead, the games presented are overly simplified and do not provide much assistance in military decision-making.

Sammanfattning

Detta arbete presenterar och formulerar grundläggande spelteoretiska begrepp och satser. Dessa begrepp och satser appliceras sedan på tre olika strategiska spel med militär tillämpning, detta för att påvisa hur strategiska spel kan hjälpa oss att förstå militära konflikter på en militärstrategisk nivå.

Fokuset ligger framförallt på payoff-funktioner, strategiska spel och Nash-jämvikter. Både rena och blandade strategier presenteras och skillnaderna mellan dessa. Inom ramen för arbetet formuleras och bevisas även Nashs sats som utvisar under vilka förutsättningar det går att finna en Nash-jämvikt i ett strategiskt spel. En Nash-jämvikt är en situation i ett strategiskt spel där ingen spelare har någonting att vinna på att ensamt förändra sin strategi eller handling.

I texten nyttjas och formuleras spelen *Fångarnas dilemma* och *Krona eller klave* för att exemplifiera de spelteoretiska begreppen.

Den militära tillämpningen görs med hjälp av spelen *The Arms Race*, *The War of Attrition* och en variant på spelet *Contribution to a public good*. Formulering och undersökning av Nash-jämvikter i dessa spel görs. Slutsatserna är att spelteori kan hjälpa oss att belysa militära dilemman, men militära situationer på strategisk nivå är oftast väldigt komplexa och därför är det svårt att i ett spel beakta alla olika preferenser och kvantifiera olika utfall till en payoff (ett värde) som ska representera olika utfall i spelet och i en väpnad konflikt. Spelen som presenteras blir istället förenklade och därmed är det svårt för dessa spel att bidra till beslutsfattande på militärstrategisk nivå.

Innehåll

1	Introduktion	1
1.1	Bakgrund	1
1.2	Arbetets struktur	1
2	Matematisk spelteori	3
2.1	Grundläggande begrepp	3
2.1.1	Preferensrelationer	4
2.1.2	Payoff-funktioner	4
2.1.3	Strategiskt spel	5
2.2	Motiverande exempel på strategiska spel	7
2.2.1	Fångarnas dilemma	7
2.2.2	Krona eller klave	9
2.3	Bästa respons-funktioner	10
2.3.1	Bästa respons-funktioner i Fångarnas dilemma	11
2.4	Nash-jämvikt	12
2.4.1	Finna Nash-jämvikter med hjälp av bästa respons-funktioner	13
2.4.2	Nash-jämvikt i Fångarnas dilemma	14
2.4.3	Nash-jämvikt i Krona eller klave	14
2.5	Blandade strategier	15
2.5.1	Grundläggande sannolikhetsteori	15
2.5.2	Blandade strategier	17
2.5.3	Förväntad payoff	17
2.5.4	Nash-jämvikt vid blandade strategier	21
2.5.5	Nash-jämvikt i spelet Krona eller klave	22
2.6	Existensen av Nash-jämvikter och fixpunktssatser	25
2.6.1	Bevis av Nashs Sats	28
2.6.2	Brouwers fixpunktssats	32
2.6.3	Existensen av Nash-jämvikt vid blandade strategier	34
3	Militära tillämpningar	35
3.1	The Arms Race	35
3.1.1	Presentation av spelet	35
3.1.2	Nash-jämvikter i spelet	37
3.1.3	Hur graden av underrättelse påverkar ländernas agerande	38

3.1.4	Diskussion	39
3.2	The War of Attrition	40
3.2.1	Presentation av spelet	40
3.2.2	Nash-jämvikter i spelet	41
3.2.3	Diskussion	42
3.3	Contribution to a public good	43
3.3.1	Presentation av spelet	43
3.3.2	Nash-jämvikter i spelet	45
3.3.3	Diskussion	45
3.4	Slutsatser kopplat till militära spel	46

1 Introduktion

1.1 Bakgrund

I alla tider har vi människor sysslat med olika former av spel och lekar där olika personers viljor och preferenser varit i konflikt med varandra. Men även storpolitik, ekonomi och sociala fenomen kan betraktas som spel där olika beslutsfattares viljor kan beskrivas som preferenser och olika utfall ger olika stor utbetalning eller payoff. Spelteori är enkelt förklarat teorin om hur vi kan formulera spel där alla spelare vill optimera sina resultat, skillnaden gentemot "vanlig" optimering är således att det finns minst en tänkande motspelare som också vill få så bra payoff som möjligt.

Spelteori kan tillämpas på en mängd olika områden. Krig är ett område där olika länder eller intressegrupper har olika preferenser och således kan militära konflikter betraktas som strategiska spel. Olika politiska aktörer i krig har olika preferenser och mål, samtidigt krävs många olika beslut vilka förhoppningsvis leder fram till att beslutsfattaren får det utfall som önskas och därigenom maximal utbetalning. I detta arbete tillämpas spelteori på militärstrategiska problem, där grundläggande spelteori försöker förklara och undersöka tre militärstrategiska problem. Syftet är att visa på hur strategiska spel kan hjälpa oss att förstå militära konflikter på strategisk krigföringsnivå.

1.2 Arbetets struktur

Arbetet är strukturerat på följande sätt.

Inledningsvis presenteras ett antal grundläggande begrepp kopplat till spelteori och två motiverande exempel på spelteori presenteras: *Fångarnas dilemma* och *Krona eller klave*. Dessa spel återkommer under arbetets gång för att exemplifiera det som beskrivs.

Därefter formuleras bästa respons-funktioner och med hjälp av dessa formuleras Nash-jämvikter. En Nash-jämvikt är en situation i ett strategiskt spel där ingen spelare har någonting att vinna på ett ensamt byta strategi. Här konstateras även att det i vissa spel inte går att finna några Nash-jämvikter om inte blandade strategier tillåts.

Därnäst presenteras blandade strategier, där spelarna väljer en sannolikhetsfunktion istället för en fastställd handling. Efter presentationen av blandade strategier formuleras och bevisas Nashs sats med hjälp av Kakutanis fixpunktssats. Om villko-

ren för Nashs sats är uppfyllda i ett strategiskt spel går att finna en Nash-jämvikt i spelet. I denna del av arbetet formuleras och illustreras även Brouwers fixpunktssats.

Slutligen appliceras spelteorin på tre militärstrategiska spel där vi försöker förstå dessa och finna Nash-jämvikter. I detta kapitel diskuteras även hur väl dessa spel representerar verkligheten.

2 Matematisk spelteori

2.1 Grundläggande begrepp

I grund och botten består spelteori av olika modeller vilka med olika grad av komplexitet försöker beskriva hur personer fattar beslut i givna så kallade spel. Till skillnad från att endast optimera och finna den bästa lösningen utifrån givna ingångsvärden behöver man ta hänsyn till fler aspekter när spel betraktas (Varian 1992, s.259). Alla spelare i spelet vill utifrån sina val få så gynnsamma utfall som möjligt, utifrån deras preferenser. De olika spelarna kallas ofta beslutsfattare och med hjälp av spelteori kan ekonomiska, politiska och sociala fenomen belysas och förstås (Osborne 2009, s.1-2).

I detta arbetet koncentrerar vi oss på *strategiska spel*. Ett strategiskt spel består av ett antal beslutsfattare (*spelare*), som alla har ett antal olika handlingsalternativ och preferenser över vilka handlingsprofiler som föredras över varandra. Handlingsprofilerna är samtliga kombinationer av handlingar vilka kan inträffa då spelarna väljer sina respektive handlingar. (Osborne 2009, s.13). Strategiska spel kommer att undersökas och definieras senare i detta kapitel.

Innan vi kan gå in på några enkla exempel på strategiska spel behöver tre viktiga begrepp introduceras: *preferensrelationer*, *payoff-funktioner*, och *strategiska spel*.

Preferensrelationer beskriver vilka utfall av olika handlingar vi föredrar framför andra utfall och payoff-funktioner representerar dessa preferenser med värden. Att vi definierar vad vi menar med ett strategiskt spel är en förutsättning för att vi ska kunna formulera olika spel. Men först behöver vi införa notationen handlingsmängd.

Notation 2.1. För att kunna undersöka preferenser och vad som föredras behöver vi en mängd av objekt som vi kan värdera. I detta arbete kallar vi denna mängd för **handlingsmängd** och vi betecknar den med A . De tillgängliga alternativen kallar vi för **handlingsalternativ**. En handlingsmängd är mängden av de tillgängliga handlingarna en spelare eller person kan nyttja i ett spel eller en situation. Handlingsmängden kan vara i princip vad som helst som någon beslutsfattare kan välja mellan, exempelvis tre olika efterrätter eller böcker i en bokhylla. Men handlingsmängden kan även vara de reella talen, exempelvis $A = \mathbb{R}$ eller $A = \mathbb{R}^n$.

Ett exempel på en handlingsmängd är $A = \{a, b, c\}$, där a, b, c är de olika handlingsalternativ som någon beslutsfattare kan välja mellan.

Med A_1 menas mängden av handlingsalternativ som den första personen i ett spel eller en situation kan välja mellan.

Med A_i menas någon person, i :s, tillgängliga handlingsalternativ i en situation eller ett spel. Vi kallar A_i för **spelare i :s handlingsmängd**.

2.1.1 Preferensrelationer

Definition 2.1. (Varian 1992, s.94-95). En **Preferensrelation** $\succeq$, på en handlingsmängd A , är en relation som är:

Fullständig: För alla $a, b \in A$ är $a \succeq b$ eller $b \succeq a$ eller båda.

Reflexiv: För alla $a \in A$ så gäller att $a \succeq a$.

Transitiv: För alla $a, b, c \in A$. Om $a \succeq b$ och $b \succeq c$, så kommer $a \succeq c$.

När vi skriver $a \succeq b$ menar vi att handlingsalternativ a anses vara är minst lika bra som handlingsalternativ b .

Om $a \succeq b$ och $b \succeq a$ kallar vi handlingsalternativ a och b för ekvivalenta och skriver $a \sim b$.

Om $a \succeq b$ och inte $a \sim b$ säger vi att ” a strikt föredras före b ” och skriver $a \succ b$.

Om vi skriver att $\succ_i, \sim_i$ eller $\succeq_i$ beskriver vi spelare i eller den i :te personens preferenser.

Exempel: För att exemplifiera preferensrelationer och handlingsmängder tittar vi på en persons val av efterrätt, vi kallar personen för person i . Om person i ska välja vilken efterrätt hen ska äta ikväll och kan välja mellan *Crème brûlée*, *Kladdkaka* och *Vattenmelon* kan detta ställas upp som en preferensrelation. Vi säger att $A_i = \{\text{Crème brûlée}, \text{Kladdkaka}, \text{Vattenmelon}\}$. A_i är alltså mängden av tillgängliga efterrättsval för person i . Person i föredrar *Crème brûlée* eller *Kladdkaka* före *Vattenmelon*. Preferensmässigt anser person i att *Crème brûlée* och *Kladdkaka* är likvärdiga. Detta kan beskrivas med hjälp av en preferensrelation och vi kan skriva $\text{Crème brûlée} \sim_i \text{Kladdkaka} \succ_i \text{Vattenmelon}$.

2.1.2 Payoff-funktioner

Nära sammankopplat med preferensrelationer är *payoff-funktioner*. En *payoff-funktion* beskriver vilken payoff, det vill säga konsekvens eller utbetalning, som respektive handlingsalternativ ger. Exemplet med efterrätterna ovan kan beskrivas som en

payoff-funktion där värdet eller utbetalningen som personen får är högre för *Crème brûlée* och *Kladdkaka* än för *Vattenmelon*.

Definition 2.2. (Varian 1992, s.95). En **Payoff-funktion** $u : A \rightarrow \mathbb{R}$ är en funktion sådan att:

$$u(a) > u(b) \text{ om och endast om } a \succ b, \text{ för alla } a, b \in A.$$

Med andra ord representerar en payoff-funktion en beslutsfattares preferenser för handlingar i handlingsmängden A , detta med hjälp av ett reellt tal. En handling som payoff-mässigt representeras av ett högre värde innebär att handlingen föredras jämfört med en handling som representeras av ett lägre värde. Ju högre payoff desto mer fördelaktigt är handlingsalternativet.

Om vi vill undersöka olika personers payoff-funktioner nyttjas notationen $u_i(a_i)$ som då är payoffen som person i erhåller när handlingsalternativ $a_i \in A_i$ väljs. Alltså, $u_i(a_i) > u_i(b_i)$ om och endast om beslutsfattare i anser att $a_i \succ_i b_i$, alltså föredrar handling a_i före handling b_i . Där $a_i, b_i \in A_i$.

Exempel: Exemplet är inspirerat av Osborne (2009, s.5). Vi sätter värden för de olika efterrättsalternativen från exemplet med preferensrelationer. Vi sätter $u_i(\text{Crème Brûlée}) = 5$, $u_i(\text{Kladdkaka}) = 5$ och $u_i(\text{Vattenmelon}) = 3$. Således kommer $u_i(\text{Crème Brûlée}) = u_i(\text{Kladdkaka}) > u_i(\text{Vattenmelon})$ vilket då representerar preferensrelationen $\text{Crème brûlée} \sim_i \text{Kladdkaka} \succ_i \text{Vattenmelon}$. Vi har då beskrivit preferensrelationen för efterrättsvalet för person i med hjälp av en payoff-funktion.

2.1.3 Strategiskt spel

Ett strategiskt spel består av ett antal spelare, för varje spelare ett antal möjliga handlingar och för varje spelare preferenser för vilka utfall eller handlingskombinationer som föredras i spelet. Men för att kunna definiera strategiska spel behöver vi först definiera produktmängd och handlingsprofil:

Definition 2.3. (Lindahl 2017, s.1) Givet n mängder $A_1, A_2, \dots, A_n$ är **produktmängden**: $A_\times = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ mängden av alla ordnade n -tupler $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ som kan bildas genom att välja $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$.

Produktmängden av två eller flera mängder är alltså mängden av alla ordnade tipler som kan bildas när elementen från respektive mängd kombineras. **Produktmängden** betecknar vi med $A_{\times}$.

Exempel: Vi har mängderna $A_1 = \{a_1, b_1\}$ och $A_2 = \{a_2, b_2\}$. Produktmängden är då: $A_{\times} = A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2), (a_1, b_2), (b_1, a_2), (b_1, b_2)\}$.

Om vi nu tänker oss att respektive mängd $A_1, A_2 \dots A_n$ är olika personers handlingsmängder kommer produktmängden $A_{\times}$ att vara mängden av samtliga utfall vi kan få när alla dessa personer, eller spelare som vi kallar dem för vad gäller strategiska spel, väljer sin handling. Endast en tipel $a \in A_{\times}$, det vill säga en möjlig kombination av handlingar, kallar vi för en handlingsprofil.

Notation 2.2. Vi kallar en tipel a i produktmängden, det vill säga $a \in A_{\times}$, för en **handlingsprofil** eller **strategiprofil**. En handlingsprofil alltså ett möjligt utfall som kan uppträda när samtliga personer väljer ett val ur sin handlingsmängd. Vilken strategi en spelare väljer likställer vi med vilken typ av handling spelaren väljer. Vi kommer framöver i arbetet ibland tala om att spelarna väljer handlingar och ibland att de väljer strategier i strategiska spel.

Exempel: Om vi tittar på exemplet ovan för produktmängder är alltså $A_1 = \{a_1, b_1\}$ respektive $A_2 = \{a_2, b_2\}$ första respektive andra beslutsfattarens handlingsmängder. Produktmängden $A_{\times} = A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2), (a_1, b_2), (b_1, a_2), (b_1, b_2)\}$ är mängden av de utfall vi kan få då båda beslutsfattarna väljer något alternativ ur sin handlingsmängd. En handlingsprofil är då något utfall, exempelvis (a_1, b_2) .

Nu när vi vet vad produktmängder och handlingsprofiler är kan vi definiera strategiska spel.

Definition 2.4. (Lindahl 2017, s.27). Ett **strategiskt spel** består av:

- en ändlig mängd N av spelare, som förutsätts vara minst två och vi kommer numrera dem $1, 2, 3 \dots n$ vilket innebär att vi kommer identifiera N med mängden $1, 2, 3 \dots n$.
- för varje spelare $i \in N$ en mängd av möjliga handlingsalternativ A_i .
- en preferensrelation $\succeq_i$ på produktmängden $A_{\times} = A_1 \times A_2 \times A_3 \dots \times A_n$ för varje spelare i . Det vill säga en preferensrelation för respektive handlingsprofil för respektive spelare i spelet.

Om $A_\times$ är en ändlig mängd, det vill säga alla A_i är ändliga, kallar vi spelet för ett **ändligt strategiskt spel**.

Preferensrelationen $\succeq_i$ definieras ofta av payoffen som spelare i erhåller för respektive handlingsprofil. Produktmängden $A_\times = A_1 \times A_2 \times A_3 \dots \times A_n$ består av alla olika handlingsprofiler som kan uppträda i spelet. Nedan är en payoff-tabell för ett strategiskt spel med två spelare, en payoff-tabell kan vi nyttja för att få överblick över handlingsprofilerna och payoffen i ett strategiskt spel. I payoff-tabellen är spelare 1 den spelare som har handlingsmängden $A_1 = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ och spelare 2 har handlingsmängden $A_2 = (k_1, k_2, \dots, k_n)$. Produktmängden är mängden av alla olika handlingsprofiler i spelet och varje handlingsprofil, eller möjligt utfall, representeras av en ruta i payoff-tabellen. Det vill säga $\alpha_{ij} = u_1(r_i, k_j)$ och är då första spelarens payoff ifall spelare 1 spelar sitt handlingsalternativ r_i och spelare 2 väljer k_j . (Lindahl 2017, s.28).

Ett exempel på en handlingsprofil i payoff-tabellen nedan är (r_1, k_1) som ger payoffen: $(\alpha_{11}, \beta_{11})$. Alltså får spelare 1 payoffen α_{11} och spelare 2 får payoffen β_{11} när handlingarna r_1 och k_1 väljs.

Tabell 1: Payoff-tabell

	k_1	k_2		k_n
r_1	$(\alpha_{11}, \beta_{11})$	$(\alpha_{12}, \beta_{12})$		$(\alpha_{1n}, \beta_{1n})$
r_2	$(\alpha_{21}, \beta_{21})$	$(\alpha_{22}, \beta_{22})$		$(\alpha_{2n}, \beta_{2n})$
....				
r_m	$(\alpha_{m1}, \beta_{m1})$	$(\alpha_{m2}, \beta_{m2})$		$(\alpha_{mn}, \beta_{mn})$

2.2 Motiverande exempel på strategiska spel

2.2.1 Fångarnas dilemma

Ett av de mest välkända exemplen på ett strategiskt spel är spelet *Fångarnas dilemma*. Spelets beskrivning och uppbyggnad är från Osborne (2009, s.14-15).

Spelet utgår ifrån två kriminella som tillsammans begått flera brott men nu blivit intagna av polisen, de ska bli förhörda och hålls separerade ifrån varandra i varsin cell. Det finns tillräcklig bevisning för att döma båda två till ett fåtal år i fängelse men inte tillräcklig bevisning för att döma någon av dem för de värsta brotten som

de begått och därmed för fler år i fängelse. Spelarna i detta spel är således de två fångarna som båda har två olika handlingsalternativ. Respektive fånge kan välja mellan att antingen hålla tyst och inte berätta någonting i förhören eller så kan de vittna för brotten och därigenom sätta dit sin kriminella kollega. Om ingen vittnar får båda två ett års fängelse var. Om den ena fången vittnar och den andra håller tyst frigges den som vittnar medans den som håller tyst får fyra års fängelse. Om båda vittnar på varandra får de tre års fängelse var. Vi sätter upp spelet på följande vis:

- **Spelare:** Två fångar.
- **Handlingsalternativ:** Respektive fånge kan välja mellan att vara *tyst* eller att *vittna*. Så $A_1 = \{tyst, vittna\}$ och $A_2 = \{tyst, vittna\}$. Där A_1 är första fångens handlingsmängd och A_2 är andra fångens handlingsmängd. Produktmängden, det vill säga alla möjliga handlingsprofiler eller möjliga utfall i spelet blir således: $A_{\times} = A_1 \times A_2 = \{(tyst, tyst), (tyst, vittna), (vittna, tyst), (vittna, vittna)\}$.
- **Preferensrelationer utifrån första fångens perspektiv** (där första spelaren har första positionen i respektive handlingsprofil och andra spelaren har andra positionen):

$$(vittna, tyst) \succ_1 (tyst, tyst) \succ_1 (vittna, vittna) \succ_1 (tyst, vittna).$$

Preferensrelationer utifrån andra fångens perspektiv (där första spelaren har första positionen i respektive handlingsprofil och andra spelaren har andra positionen):

$$(tyst, vittna) \succ_2 (tyst, tyst) \succ_2 (vittna, vittna) \succ_2 (vittna, tyst).$$

Det som gör situationen till ett strategiskt spel är att respektive fånge inte vet vad motspelaren, det vill säga den andra fången fattar för beslut. Som vi kan notera är det bästa för respektive fånge att själv vittna medans den andra fången är tyst och det sämsta är att själv vara tyst medans den andra fången vittnar.

Nu ska vi titta på payoffen för respektive fånge för de olika handlingsprofilerna i spelet. En enkel specifikation till payoff-funktioner vi kan sätta upp av preferensrelationerna i spelet är att en fånge får payoffen 3 om fången är ensam om att vittna och payoffen 0 om den andra fången vittnar men man själv är tyst.

Om båda är tysta erhåller båda payoffen 2 och om båda väljer att vittna erhåller båda fångarna payoffen 1. Vi får alltså: $u_1(vittna, tyst) = 3$, $u_1(tyst, tyst) = 2$, $u_1(vittna, vittna) = 1$ och $u_1(tyst, vittna) = 0$. För fånge 2 väljer vi liknande funktioner och får: $u_2(tyst, vittna) = 3$, $u_2(tyst, tyst) = 2$, $u_2(vittna, vittna) = 1$ och $u_2(vittna, tyst) = 0$. Med hjälp av dessa representationer av respektive handlingsprofil kan vi ställa upp en payoff-tabell för spelet, se tabellen nedan. Precis som tidigare formulerat, representerar den lodräta kolumnen första fångens handlingsalternativ och den vågräta den andra fångens handlingsalternativ. För respektive utfall är värdena i tabellen payoffen för respektive fånge. Exempelvis är första rutans värden: $(u_1(tyst, tyst), u_2(tyst, tyst)) = (2, 2)$.

Tabell 2: Payoff-tabell *Fångarnas Dilemma*

	<i>Tyst</i>	<i>Vittna</i>
<i>Tyst</i>	(2, 2)	(0, 3)
<i>Vittna</i>	(3, 0)	(1, 1)

Detta exempel kommer återkomma senare i texten men det vi med enkelhet kan konstatera är att om fångarna endast tittar på sina egna val får respektive fånge alltid högre payoff av att vittna än att vara tyst. Samtidigt kan vi konstatera att deras sammanlagda payoff blir högst ifall de båda är tysta, 4, och lägst ifall de båda vittnar, 2.

2.2.2 Krona eller klave

Ett annat exempel på ett strategiskt spel är spelet *Krona eller klave*. Spelets uppbyggnad och beskrivning är från Osborne (2009, s.19-20). Detta spel går ut på att två spelare samtidigt ska visa krona eller klave på ett mynt. Om båda visar samma sida betalar spelare 2 1 dollar till spelare 1. Om spelarna visar olika sidor ska spelare 1 betala 1 dollar till spelare 2. Respektive spelare bryr sig endast om mängden pengar hen tillskansar sig. Vi ställer upp spelet på följande sätt:

- **Spelare:** Två spelare.
- **Handlingsalternativ:** Respektive spelare kan välja mellan att visa *krona* eller *klave*. Så $A_1 = \{krona, klave\}$ och $A_2 = \{krona, klave\}$. Där A_1 är första spe-

larens handlingsmängd och A_2 är andra spelarens handlingsmängd. Produktmängden, det vill säga alla möjliga handlingsprofiler eller möjliga utfall i spelet blir således: $A_\times = A_1 \times A_2 = \{(krona, krona), (krona, klave), (klave, krona), (klave, klave)\}$.

- **Preferenser:** Spelare 1 vill att de ska visa samma sida av myntet och spelare 2 vill att de ska visa olika sidor av myntet. Preferensrelationerna utifrån första spelarens perspektiv blir således:

$$(krona, krona) \sim_1 (klave, klave) \succ_1 (krona, klave) \sim_1 (klave, krona)$$

Spelare 2 vill att de ska visa olika sidor av myntet. Preferensrelationerna utifrån andra spelarens perspektiv blir således:

$$(krona, klave) \sim_2 (klave, krona) \succ_2 (krona, krona) \sim_2 (klave, klave)$$

Nu ska vi ta fram payoff-funktioner som representerar preferenserna. Vi låter payoff-funktionerna representeras av att spelaren som vinner får payoffen 1 och den spelare som förlorar får payoffen -1 . Alltså blir payoff-funktionerna för spelare 1: $u_1(krona, krona) = u_1(klave, klave) = 1$ och $u_1(krona, klave) = u_1(klave, krona) = -1$. Payoffen för spelare 2 blir: $u_2(krona, krona) = u_2(klave, klave) = -1$ och $u_2(krona, klave) = u_2(klave, krona) = 1$. Se nedan där vi ställt upp en payoff-tabell för spelet.

Tabell 3: Payoff-tabell *Krona eller klave*

	<i>Krona</i>	<i>Klave</i>
<i>Krona</i>	(1, -1)	(-1, 1)
<i>Klave</i>	(-1, 1)	(1, -1)

2.3 Bästa respons-funktioner

I ett strategiskt spel är det av intresse att undersöka vilka handlingar som payoffmässigt är bättre eller lika bra, givet att man vet vad motspelarna gör för handlingar. Med hjälp av den vetenskapen går det nämligen att ta fram Nash-jämvikter till spelet, Nash-jämvikter kommer vi att titta på i nästa delkapitel. De handlingar som payoffmässigt är de bästa handlingarna tillhör bästa respons-funktionen för en spelare i

ett strategiska spel. Bästa respons-funktioner ska vi nu definiera, men först behöver vi införa en notation.

Notation 2.3. När vi vet resterande spelares handlingar nyttjar vi notationen a_{-i} , där a_{-i} representerar alla andra spelare, förutom spelare i :s, handling i ett strategiskt spel (Osborne 2009, s.35-36). Detta är standardnotationen för att representera detta.

Exempelvis, om a är en handlingsprofil i ett strategiskt spel med tre spelare, alltså $a = (a_1, a_2, a_3)$ där $a \in A_\times$ och $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, $a_3 \in A_3$. Då kommer $a_{-1} = (a_2, a_3)$. Det vill säga spelare 2 och spelare 3s handlingar är fixerade men den första spelaren har inte gjort sitt val av handling.

Definition 2.5. (Osborne 2009, s.35-36). Vi kallar $B_i(a_{-i})$ för spelare i :s **Bästa respons-funktion** i ett strategiskt spel.

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i : u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a'_i, a_{-i}) \text{ för alla } a'_i \in A_i\}.$$

Notera att $u_i(a_i, a_{-i})$ är payoffen för spelare i , där de andra spelarnas handlingar är givna som a_{-i} . A_i är som vanligt spelare i s handlingsmängd. Vi säger att en handling som tillhör bästa respons-funktionen är en **bästa respons**.

Bästa respons-funktionen bygger alltså på att vi vet de andra spelarnas handlingar och varje handling i $B_i(a_{-i})$ är alltså minst lika bra och ger minst lika god payoff som vilket annat tillgängligt handlingsalternativ. Så när vi känner till de andra spelarnas handling består bästa respons-funktionen av alla de handlingar som ger bäst payoff.

2.3.1 Bästa respons-funktioner i Fångarnas dilemma

I *Fångarnas dilemma* går det att ta fram bästa respons-funktionen för respektive fånge. Detta görs enklast genom att undersöka payoff-tabellen för spelet, se nedan. Det vi gör är att vi finner den bästa responsen för fånge 1 för varje handling fånge 2 kan göra.

Om fånge 2 är *tyst* så kan fånge 1 få payoffen 2 (om fånge 1 är *tyst*) eller 3 (om fånge 1 väljer att *vittna*), där fånge 1 vill ha så hög payoff som möjligt (eftersom det enligt tidigare innebär kortare straff). Då väljer fånge 1 att *vittna* då det ger payoffen 3. Bästa responsen för fånge 1 om fånge 2 är *tyst* är således att *vittna*. Vi kan skriva $B_1(tyst) = vittna$.

Om fånge 2 väljer att *vittna* så kan fånge 1 få payoffen 0 (om fånge 1 är *tyst*) eller 1 (om fånge 1 väljer att *vittna*), där fånge 1 vill ha så hög payoff som möjligt. Då väljer fånge 1 att *vittna* då det ger payoffen 1. Bästa responsen för fånge 1 om fånge 2 väljer att *vittna* är således *vittna*. Vi kan skriva $B_1(vittna) = vittna$.

Med exakt samma resonemang kan vi ta fram bästa respons-funktionen för spelare 2. Vi får: $B_2(tyst) = vittna$ och $B_2(vittna) = vittna$.

Tabell 4: Payoff-tabell *Fångarnas Dilemma*

	<i>Tyst</i>	<i>Vittna</i>
<i>Tyst</i>	(2, 2)	(0, 3)
<i>Vittna</i>	(3, 0)	(1, 1)

2.4 Nash-jämvikt

Det finns olika metoder för att undersöka vilka val eller strategier en spelare gör eller bör göra i ett strategiskt spel. Att ta fram och undersöka spelets Nash-jämvikter är en vanlig metod. En Nash-jämvikt är enkelt förklarat en situation där ingen spelare har någonting att vinna på att byta handling om ingen annan spelare också förändrar sin strategi. Vi börjar med att definiera en Nash-jämvikt.

Definition 2.6. (Osborne 2009, s.22-23). En **Nash-jämvikt** i ett strategiskt spel är en handlingsprofil $a^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$ med egenskapen att, för varje spelare i och för varje handling $a_i' \in A_i$ för spelare i , är $a^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$ minst lika bra, enligt spelare i s preferenser, som handlingsprofilen (a_i', a_{-i}^*) . Där de andra spelarnas handlingar är givna som a_{-i}^* och a_i' representerar vilken handling som helst från spelare i s handlingsmängd. Ekvivalent med detta är:

$$u_i(a^*) \geq u_i(a_i', a_{-i}^*) \text{ för varje handling } a_i' \text{ för varje spelare } i.$$

Där handlingsprofilen $a^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$ är en **Nash-jämvikt** och u_i är payoffen som representerar spelare i 's preferenser.

Det finns flera olika sätt att motivera och finna Nash-jämvikter. Ett sätt är med hjälp av bästa respons-funktioner. En Nash-jämvikt är en situation i ett strategiskt

spel där varje spelares handling är en bästa respons av de andra spelarnas handlingar. Det innebär att så länge ingen annan byter handling har ingen spelare någonting att vinna på att själv byta handling i spelet. Vi ställer upp detta som en sats.

Sats 2.1. (Lindahl 2017, s.35).

Handlingsprofilen a^ är en Nash-jämvikt i ett strategiskt spel om och endast om:*

$$a_i^* \in B_i(a_{-i}^*) \text{ för varje spelare } i.$$

Med andra ord, om vi har en handlingsprofil där varje spelare i s handling är en bästa respons, utifrån de andra spelarnas handlingar, är handlingsprofilen en Nash-jämvikt.

Bevis: (Lindahl 2017, s.35). En Nash-jämvikt $a^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$ karakteriseras av att för varje spelare i är dennes handling a_i^* den bästa möjliga tillgängliga responsen givet att de andra spelarnas handlingar är a_{-i}^* . Därmed tillhör en Nash-jämvikt $a^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$ bästa respons-funktionen för varje spelare. Om varje spelares handling är en bästa respons givet övriga spelares handlingar, innebär det att för varje spelare är handlingen minst lika bra som de andra tillgängliga handlingsalternativen, och då är det en Nash-jämvikt enligt definitionen för vad en Nash-jämvikt är. Beviset är klart.

2.4.1 Finna Nash-jämvikter med hjälp av bästa respons-funktioner

En metod för att finna Nash-jämvikter beskrivs av Osborne (2009, s.37) och det är med hjälp av bästa respons-funktioner. Metoden beskrivs enklast i två steg:

- finn bästa responser för varje spelare. Det vill säga undersök vilka som är de bästa handlingsalternativen för varje spelare, givet varje enskilt a_{-i} . Dessa responser tillskrivs en $*$.
- De handlingsprofiler där varje spelares handling tillhör bästa respons-funktionen är en Nash-jämvikt enligt Sats 2.1. Med andra ord där samtliga spelares handlingar i en handlingsprofil har tillskrivits med en $*$.

Enligt Sats 2.1. kommer de handlingsprofiler vi identifierar med denna metod att vara Nash-jämvikter eftersom varje spelares handling tillhör bästa respons-funktionen givet övriga spelares handlingar. Nedan förtydligas metoden genom att vi undersöker förekomsten av Nash-jämvikt i spelet *Fångarnas dilemma*.

2.4.2 Nash-jämvikt i Fångarnas dilemma

Nu ska vi ta fram Nash-jämvikter i *Fångarnas dilemma*. Detta görs med hjälp av metoden för att finna Nash-jämvikter som omskrevs ovan. I delkapitel 2.3.1 fann vi bästa respons-funktionen för den ena fången vid de olika handlingsalternativen som den andre fången kunde göra. Vi fann att bästa responsen för fånge 1 och för fånge 2 var att *vittna* oavsett vad motspelaren väljer för handling.

I tabellen nedan har de handlingsalternativ som representerar bästa respons-funktioner för respektive fånge fått en *. Enligt *Sats 2.1* är handlingsprofilen en Nash-jämvikt då samtliga spelares handling är en bästa respons av de andra spelarnas handlingar. Således har vi en Nash-jämvikt där samtliga spelares handlingsalternativ i tabellen nedan tillskrivits med en *. Med * nedan blir det tydligt att en Nash-jämvikt går att finna i spelet då båda fångarna väljer att *vittna*, så länge den ena fången inte ändrar sin strategi, och alltså fortsatt väljer att vittna, kan inte den andra fången vinna någonting på att själv förändra sin strategi i spelet.

Tabell 5: Nash-jämvikt i *Fångarnas Dilemma*

	<i>Tyst</i>	<i>Vittna</i>
<i>Tyst</i>	(2, 2)	(0, 3*)
<i>Vittna</i>	(3*, 0)	(1*, 1*)

2.4.3 Nash-jämvikt i Krona eller klave

Sats 2.2. (*Osborne 2009*, s.29). *Det finns ingen Nash-jämvikt i spelet Krona eller klave om inte blandade strategier tillåts.*

Bevis: Vi undersöker alla fyra möjliga handlingsprofiler i spelet. Vid handlingsprofilerna (*Krona, Krona*) och (*Klave, Klave*) vinner spelare 2 på att byta sida på myntet. På samma sätt, vid handlingsprofilerna (*Krona, Klave*) och (*Klave, Krona*) vinner spelare 1 på att byta handling. Således finns det alltid någon spelare som vinner på att byta vilken sida som visas, alltså förändra sin strategi, och därmed kan det inte existera någon Nash-jämvikt i spelet, så som vi hittills har definierat Nash-jämvikter. För att ta fram Nash-jämvikter i detta spel krävs att vi tillåter blandade strategier. Beviset är klart.

I nästa delkapitel introducerar vi blandade strategier och Nash-jämvikter för blandade strategier.

2.5 Blandade strategier

Som vi konstaterade i slutet av förra delkapitlet går det inte, så som vi hittills har definierat Nash-jämvikter, att finna någon Nash-jämvikt i spelet *Krona eller klave*. Vi ska nu introducera blandade strategier. Blandade strategier gör det exempelvis möjligt att finna en Nash-jämvikt i spelet *Krona eller klave*. Vid blandade strategier låter vi spelarna välja en sannolikhetsfunktion istället för en enda fastställd handling. Vi tillåter att handlingarna väljs slumpmässigt utifrån en given sannolikhetsfunktion, vilket i praktiken innebär att respektive spelare väljer i hur stor utsträckning alternativen i handlingsmängden slumpmässigt ska väljas. Men för att vi ska kunna förstå blandade strategier behöver vi inleda med lite grundläggande sannolikheteori.

2.5.1 Grundläggande sannolikheteori

När blandade strategier nyttjas väljs handlingen slumpmässigt från spelarens tillgängliga handlingsalternativ. Spelarens handlingsalternativ är utfallsrummet som vi slumpar ifrån. Vi börjar med att definiera utfall, utfallsrum, händelser och slumpförsök.

Definition 2.7. (Alm och Britton 2008, s.5-6). När någonting väljs slumpmässigt kallar vi resultat för ett **utfall**. **Utfallsrummet** är mängden av de möjliga utfall som kan ske, vi betecknar normalt utfallsrummet med Ω . En **händelse** är en specificerad mängd utfall. Därmed kan såväl enskilda utfall som hela utfallsrummet betraktas som händelser. Ett utfallsrum med ändligt eller uppräkneligt oändligt många utfall kallar vi för **diskreta utfallsrum** medans vi kallar övriga för **kontinuerliga utfallsrum**.

Enskilda utfall betecknar vi med $u_1, u_2, \dots$ och händelser betecknar vi med versaler $A, B, \dots$

Definition 2.8. (Alm och Britton 2008, s.10). Ett **slumpförsök** är ett försök som resulterar i ett av utfallen i ett utfallsrum, där man på förhand inte vet exakt vilket utfall som kommer att inträffa.

Exempel: Vi genomför ett slumpförsök genom att dra ett slumpmässigt kort ifrån en vanlig 52-korts kortlek. Utfallsrummet är då samtliga 52 kort som kan dras. Ett utfall är något av korten, exempelvis "Klöver 7". Ett exempel på en händelse är $A = \{\text{"Klöver Ess"}, \text{"Klöver 2"}, \text{"Klöver 3"}, \dots, \text{"Klöver dam"}, \text{"Klöver Kung"}\}$, det vill säga den specificerade mängden kort som är klöver-kort.

Eftersom vi inte på förhand vet vilket utfall i utfallsrummet som kommer att ske beskrivs ett slumpförsök med hjälp av sannolikheterna för varje händelse i utfallsrummet. Det vill säga hur sannolikt är det att en viss händelse sker. Sannolikheten beskriver vi med hjälp av en sannolikhetsfunktion.

Definition 2.9. (Alm och Britton 2008, s.10). En reell funktion, P , är en **sannolikhetsfunktion** i ett utfallsrum Ω om:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$ för alla händelser $A \subset \Omega$.
2. $P(\Omega) = 1$, det vill säga om exempelvis $\Omega = \{u_1, u_2, u_3\}$ så kommer $P(u_1) + P(u_2) + P(u_3) = 1$.
3. Om $A \cap B = \emptyset$ så ska $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ för alla $A, B \subset \Omega$.

Om utfallsrummet är oändligt ersätts tredje villkoret med:

3'. Om $A_1, A_2, \dots$ är en oändlig följd där $A_i \cap A_j = \emptyset$ för alla $i \neq j$ så gäller

$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$. Det vill säga sannolikheten att minst en av händelserna inträffar är lika med summan av sannolikheterna för varje enskild händelse.

En sannolikhetsfunktion är alltså en funktion som beskriver hur ofta en viss händelse i utfallsrummet kommer att inträffa. Den vanligaste tolkningen av sannolikhet är att, om exempelvis $P(B) = 0,4$, så innebär det att om slumpförsöket upprepas många gånger kommer den relativa frekvensen för händelse B , det vill säga andelen försök där B inträffar, att ligga nära 0,4. (Alm och Britton 2008, s.11).

Exempel: Vi återgår till exemplet med att slumpmässigt dra ett kort från en 52-korts kortlek. Sannolikheten för att ett särskilt kort dras är $\frac{1}{52}$. Så exempelvis $P(\text{"Klöver 5"}) = \frac{1}{52}$. Vi definierar händelserna $A = \{\text{"Klöver Ess"}, \text{"Klöver 2"}, \text{"Klöver 3"}, \dots, \text{"Klöver dam"}, \text{"Klöver Kung"}\}$ och $B = \{\text{"Hjärter Ess"}, \text{"Hjärter 2"}, \text{"Hjärter 3"}, \dots, \text{"Hjärter dam"}, \text{"Hjärter Kung"}\}$. Det vill säga händelse A är att ett "Klöver-kort" dras och händelse B är att ett "Hjärter kort" dras. Räknar vi samman antalet enskilda utfall inom respektive händelse kan vi enkelt komma fram till att $P(A) = P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$. Att dra ett klöver-kort och ett hjärter-kort samtidigt när vi endast drar ett kort, är två oförenliga händelser, det vill säga $A \cap B = \emptyset$, därför kommer $P(A \cup B)$, det vill säga sannolikheten att vi drar ett hjärter-kort eller ett klöver-kort att vara $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

2.5.2 Blandade strategier

Efter lite grundläggande sannolikhetssteori kan vi nu definiera vad en blandad strategi i ett strategiskt spel är. När en blandad strategi nyttjas väljer respektive spelare en sannolikhetsfunktion på respektive utfallsrum. Spelares utfallsrum är spelarens handlingsmängd. Spelarens handling väljs sedan genom ett slumpförsök.

Definition 2.10. (Osborne 2009, s.107). En **Blandad strategi** för en spelare i ett strategiskt spel är en sannolikhetsfunktion över spelarens handlingsmängd.

Vi nyttjar notationen α för en blandad strategi. $\alpha_i(a_i)$ är då sannolikheten att spelare i väljer handlingsalternativet a_i , enligt dennes blandade strategi α_i . Detta exemplifieras nedan på spelet *Krona eller klave*.

Notation 2.4. En **blandad strategiprofil**, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ är en profil där samtliga spelare har valt sin strategi, det vill säga fastställt en sannolikhetsfunktion över sin handlingsmängd.

Vi jämför en blandad strategi med en "ren strategi" (från engelskans *pure strategy*), vilket är det som presenterats tidigare i arbetet. Då väljs istället ett handlingsalternativ från handlingsmängden och sannolikheten att den handlingen kommer att ske sätts till 1. Vi definierar en ren strategi.

Definition 2.11. (Osborne 2009, s.108). När en **ren strategi** nyttjas i ett strategiskt spel sätter spelare i sannolikheten att en viss handling, a_i , ska väljas till 1. Detta är ekvivalent med att spelare i s strategi är att välja handlingen a_i .

Exempel på en blandad strategi: Vi återgår vi till spelet *Krona eller klave*. Vi ska välja en blandad strategi, det vill säga en sannolikhetsfunktion över handlingsalternativen. Ett exempel på en blandad strategi för spelare 1 i *Krona eller klave* är strategin (eller sannolikhetsfunktionen), som vi kallar α_1 , som säger att $\alpha_1(Krona) = \frac{1}{3}$ och $\alpha_1(Klave) = \frac{2}{3}$. Strategin α_1 säger alltså att spelare 1 ska välja en sannolikhetsfunktion där sannolikheten att krona väljs sätts till $\frac{1}{3}$ och sannolikheten att klave väljs sätts till $\frac{2}{3}$, men valet för respektive spel sker med hjälp av ett slumpförsök. Vi kan även ansätta en blandad strategi för spelare 2, vi sätter $\alpha_2(Krona) = \frac{3}{4}$ och $\alpha_2(Klave) = \frac{1}{4}$.

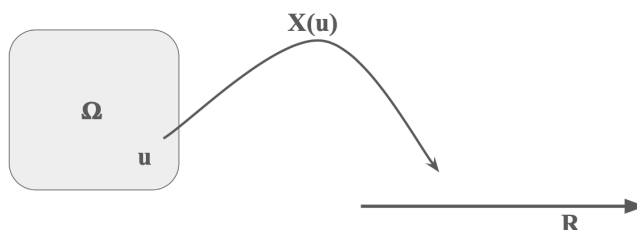
2.5.3 Förväntad payoff

När vi tillåter blandade strategier vet vi inte på förhand exakt vilken handling som respektive spelare kommer att välja, utan valet slumpas fram. Det innebär att det

inte riktigt går att tala om payoff eftersom payoffen baseras på vilket utfall som sker. Därför nyttjar vi begreppet *förväntad payoff* för att påvisa att det är den payoffen som vi kan förvänta oss att få i spelet, baserat på de olika utfallen som slumpas fram. Men för att förstå förväntad payoff behöver vi först definiera vad vi menar med en slumpvariabel och därefter vad en sannolikhetsfunktion för en diskret slumpvariabel är.

Definition 2.12. (Alm och Britton 2008, s.42). En **slumpvariabel**, $X(u)$, är en reellvärd funktion som är definierad på ett utfallsrum Ω . Det vill säga $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Efter att slumpförsöket genomförts säger vi att funktionens värde för utfallet är en observation av slumpvariabeln.

Figur 1 nedan illustrerar en slumpvariabel X och dess tillhörande utfallsrum.



Figur 1:
Illustration av en slumpvariabel på ett utfallsrum Ω .
(Alm och Britton 2008, s.42).

Slumpvariabler betecknar vi med stora bokstäver och motsvarande observationer betecknar vi med små bokstäver. Med hjälp av en slumpvariabel får vi alltså ett värde för utfallet som har skett. $u \in \Omega$ representerar något utfall i utfallsrummet som sedan med hjälp av slumpvariabeln tillskrivs ett reellt värde.

Definition 2.13. (Alm och Britton 2008, s.44). En **diskret slumpvariabel** är en slumpvariabel som endast kan anta ändligt eller uppräkneligt oändligt antal värden $x_1, x_2 \dots x_n$.

Definition 2.14. (Alm och Britton 2008, s.44). En **sannolikhetsfunktion för en diskret slumpvariabel**, p_X definieras av:

$$p_X(x) := P(X = x) = P(X \text{ antar värdet } x)$$

$$\text{för } x = x_1, x_2 \dots x_n.$$

Exempel tärningskast: Ett tärningskast är ett exempel på en diskret slumpvariabel. Vi låter X beteckna antalet ögon på tärningen. Då gäller att X har sannolikhetsfunktionen $p_X(k) = \frac{1}{6}$ för $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ och $p_X(k) = 0$ för alla andra k . (Alm och Britton 2008, s.45).

Exempel godispåse: Ett annat exempel vi kan titta på är ett företag som tillverkar godis, i varje godispåse ska det vara 80 stycken godisbitar. Dock innehåller inte varje enskild påse exakt 80 bitar utan påsarnas storlek kommer variera mellan 77 och 83 bitar. Antalet godisbitar Z i en slumpvis vald påse kan beskrivas med en diskret slumpvariabel med sannolikhetsfunktionen: $p_Z(77) = 0,02, p_Z(78) = 0,08, p_Z(79) = 0,20, p_Z(80) = 0,40, p_Z(81) = 0,20, p_Z(82) = 0,08, p_Z(83) = 0,02$.

Nu kan vi gå in på väntevärde. Ett väntevärde är enkelt förklarat en storlek på en slumpvariabel. Vid framtagandet av väntevärdet vägs sannolikheten och storleken på utfallet in. Vi definierar väntevärde för en diskret slumpvariabel.

Definition 2.15. (Alm och Britton 2008, s.57). Väntevärdet för en diskret slumpvariabel X betecknar vi med $E(X)$ och definieras som:

$$E(X) = \sum_k k \cdot p_X(k).$$

Där k representerar värdet för de utfallen som kan ske och $p_X(k)$ är sannolikheten att utfall k sker.

Exempel tärningskast: Vi beräknar väntevärdet vid ett tärningskast med en sexsidig tärning. Den diskreta slumpvariabeln X är enligt tidigare antalet ögon på tärningen. Sannolikheten för respektive utfall är $p_X(k) = \frac{1}{6}$ för $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. Väntevärdet blir:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_k k \cdot p_X(k) = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + \\ &+ 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5. \end{aligned}$$

Notera i exemplet att väntevärdet inte måste vara en del av mängden möjliga utfall, som i detta fall där det är omöjligt att slå 3,5 på en tärning, trots att det är väntevärdet vid ett tärningskast.

Exempel godispåse: Vi kan även beräkna väntevärdet för godispåsen från exemplet på en diskret slumpvariabel. Vi låter Z vara antalet godisbitar i påsen och $p_Z(k)$ är sannolikheten för att en viss påse innehåller k stycken godisbitar. Vi beräknar väntevärdet:

$$\begin{aligned} E(Z) &= \sum_k k \cdot p_Z(k) = 77 \cdot 0,02 + 78 \cdot 0,08 + 79 \cdot 0,20 + \\ &\quad + 80 \cdot 0,4 + 81 \cdot 0,20 + 82 \cdot 0,08 + 83 \cdot 0,02 = 80. \end{aligned}$$

Väntevärdet, det vill säga det vi kan förvänta oss få i en godispåse, blir inte särskilt överraskande det antal godisbitar som företaget eftersträvar att det ska vara i varje påse, det vill säga 80 stycken bitar.

Nu kan vi definiera vad vi menar med förväntad payoff.

Definition 2.16. En **förväntad payoff** är väntevärdet för payoffen som en spelare kan förvänta sig att få givet en profil med blandade strategier. Vi betecknar den förväntade payoffen för spelare i med $u_i^?$. Väntevärdet, det vill säga den förväntade payoffen, för spelare i blir således (Lindahl 2017, s.76):

$$u_i^?(\alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_n) = \sum_{a_1 \in A_1} \sum_{a_2 \in A_2} \cdots \sum_{a_n \in A_n} u_i(a_1, a_2 \dots a_n) \alpha_1(a_1) \alpha_2(a_2) \dots \alpha_n(a_n)$$

där α_i representerar spelare i s blandade strategi och A_i är spelare i s handlingsmängd.

Med andra ord är den förväntade payoffen för spelare i payoffen för respektive handlingsprofil som kan uppstå multiplicerat med sannolikheten att handlingsprofilen faktiskt sker. För att beräkna sannolikheten att en viss handlingsprofil sker behöver vi multiplicera sannolikheterna för de olika handlingarna, från respektive spelares strategi, med varandra.

Exempel: Vi utgår ifrån spelet *Krona eller klave* och våra exempel på blandade strategier. Vi ansatte strategierna $\alpha_1(krona) = \frac{1}{3}$ och $\alpha_1(klave) = \frac{2}{3}$ samt $\alpha_2(krona) = \frac{3}{4}$ och $\alpha_2(klave) = \frac{1}{4}$. Nu kan vi beräkna den förväntade payoffen för spelare 1. Payoffen är enligt tidigare i arbetet: $u_1(krona, krona) = u_1(klave, klave) = 1$ och $u_1(krona, klave) = u_1(klave, krona) = -1$ för spelare 1 och $u_2(krona, krona) =$

$u_2(klave, klave) = -1$ och $u_2(krona, klave) = u_2(klave, krona) = 1$ för spelare 2. Den förväntade payoffen för spelare 1 med exemplet ovan blir:

$$\begin{aligned} u_1^?(\alpha_1, \alpha_2) &= u_1(krona, krona) \cdot \alpha_1(krona) \cdot \alpha_2(krona) + \\ &\quad + u_1(klave, klave) \cdot \alpha_1(klave) \cdot \alpha_2(klave) + \\ &\quad + u_1(krona, klave) \cdot \alpha_1(krona) \cdot \alpha_2(klave) + \\ &\quad + u_1(klave, krona) \cdot \alpha_1(klave) \cdot \alpha_2(krona) = \\ &= 1 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + (-1) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \\ &= \frac{3}{12} + \frac{2}{12} - \frac{1}{12} - \frac{6}{12} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Alltså, med de givna strategierna ovan för respektive spelare, skulle den förväntade payoffen för spelare 1 vara $-\frac{1}{6}$.

2.5.4 Nash-jämvikt vid blandade strategier

Idén bakom Nash-jämvikter vid blandade strategier är den samma som för Nash-jämvikter vid rena strategier fast istället för att fastställa ett handlingsalternativ, fastställs en blandad strategi för varje spelare. I denna blandade strategi-profil vinner inte någon spelare någonting på att förändra sin strategi, givet att inte någon annan spelare också gör det. Nu inför vi en ny notation och därefter definierar vi bästa respons-funktion och Nash-jämvikt för blandade strategier.

Notation 2.5. För rena strategier nyttjar vi enligt tidigare notationen a_{-i} för att representera alla spelare, förutom den i :e spelarens handling. På samma vis nyttjar vi notationen α_{-i} för att representera alla spelares, förutom den i :e spelarens, blandade strategi. Detta nyttjas för att kunna undersöka bästa responser när blandade strategier tillåts.

Definition 2.17. (Osborne 2009, s.108-109). Vi kallar $B_i(\alpha_{-i})$ för spelare i :s **Bästa respons-funktion för blandade strategier**. $B_i(\alpha_{-i})$ är mängden av den i :e spelares blandade strategier som ger högst förväntad payoff, givet att de andra spelarnas strategier är fastställda och representeras av α_{-i} . Vi säger att en strategi som tillhör bästa respons-funktionen är en **bästa respons**.

Definition 2.18. (Osborne 2009, s.108). Den blandade strategi-profilen $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*)$ är en **Nash-jämvikt för blandade strategier** om det för varje spelare i gäller att:

$u_i^*(\alpha^*) \geq u_i^*(\alpha_i, \alpha_{-i}^*)$ för varje blandad strategi α_i och de andra spelarnas strategier, det vill säga sannolikhetsfunktioner på deras handlingsmängd, är givet som α_{-i}^* .

Det vill säga för varje spelare i så är spelarens förväntade payoff vid $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*)$ minst lika bra som spelarens förväntade payoff för någon annan strategi givet de andra spelarnas valda strategier.

Sats 2.3. (Osborne 2009, s.109). Den blandade strategiprofilen $\alpha^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*, \dots, \alpha_n^*)$ är en blandad strategi Nash-jämvikt om och endast om $\alpha_i^* \in B_i(\alpha_{-i}^*)$, det vill säga är en bästa respons för spelare i , givet de andra spelarnas valda strategier.

Bevisskiss: Eftersom Sats 2.1. säger att en handlingsprofil är en Nash-jämvikt om och endast om varje spelareas handling är en bästa respons av de andra spelarnas handling följer att så även är fallet vid blandade strategier. Men nu är det istället varje enskild spelares sannolikhetsfunktion som tillhör bästa respons-funktionen av de andra spelarnas sannolikhetsfunktioner. Eftersom varje spelares strategi är en bästa respons utifrån övriga spelares strategier vinner inte någon spelare någonting på att förändra sin strategi ifall ingen annan spelare också ändrar sin.

2.5.5 Nash-jämvikt i spelet Krona eller klave

För att förstå definitionen av Nash-jämvikt vid blandade strategier krävs ett tydliggörande exempel. Vi håller oss till spelet som vi tidigare tittat på och undersöker nu förekomsten av Nash-jämvikt i spelet *Krona eller klave*, om blandade strategier tillåts.

Det finns flera metoder för att ta fram Nash-jämvikter vid blandad strategier men en metod är den som vi nyttjar i detta exempel. Metoden och exemplet är hämtat ifrån Osborne (2009, s. 111–112). Vi utgår ifrån samma spel och utbetalningstabell som tidigare, se nedan.

Tabell 6: Payoff-tabell *Krona eller klave*

	<i>Krona</i>	<i>Klave</i>
<i>Krona</i>	(1, −1)	(−1, 1)
<i>Klave</i>	(−1, 1)	(1, −1)

Vi kallar spelare 1s blandade strategi för α_1 och spelare 2s blandade strategi för α_2 . Vi sätter p till spelare 1s sannolikhet att välja krona enligt spelare 1s strategi. Vi sätter q till spelare 2s sannolikhet att välja krona enligt spelare 2s strategi. Alltså $\alpha_1(Krona) = p$ och $\alpha_2(Krona) = q$. Och således kommer $\alpha_1(Klave) = 1 - p$ och $\alpha_2(Klave) = 1 - q$. Låt oss nu finna bästa responser för respektive spelare för att därigenom finna en Nash-jämvikt.

Spelare 1s förväntade payoff, om spelare 1 väljer Krona kommer att vara (eftersom vi betraktar en förväntad payoff skriver vi $u^?$):

$$u_1^?(krona) = \alpha_2(Krona) \cdot u_1(Krona, Krona) + \alpha_2(Klave) \cdot u_1(Krona, Klave) = q \cdot 1 + (1 - q) \cdot (-1) = 2q - 1.$$

och spelare 1s förväntade payoff om denne väljer Klave blir:

$$u_1^?(klave) = \alpha_2(Krona) \cdot u_1(Klave, Krona) + \alpha_2(Klave) \cdot u_1(Klave, Klave) = q \cdot (-1) + (1 - q) \cdot 1 = 1 - 2q.$$

Vad får vi då för förväntad payoff och vilket strategi bör spelare 1 välja? Jo det beror ju på $\alpha_2(krona) = q$, alltså i vilken utsträckning spelare 2 väljer krona och i förlängningen klave, det vill säga spelare 2s strategi.

Ovan betyder alltså att om $q < \frac{1}{2}$ så kommer spelare 1s förväntade payoffen för att välja klave vara större än den förväntade payoffen för att välja krona. Genom att välja klave har spelare 1 då bäst möjlighet att vinna spelet.

På samma sätt, om $q > \frac{1}{2}$ kommer den förväntade payoffen vara större om krona väljs. Då behöver spelare 1s bästa strategi vara att välja krona.

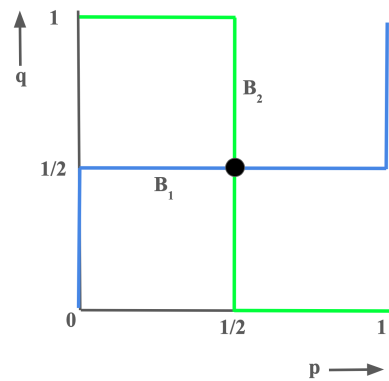
Om $q = \frac{1}{2}$ ges samma förväntade payoff, det vill säga 0. Både att välja krona eller att välja klave är en bästa respons för spelare 1. Alla tillgängliga strategier är alltså en bästa respons ifall $q = \frac{1}{2}$. Vi kan nu dra slutsatsen att spelare 1s bästa respons-funktion emot spelare 2 är:

$$\begin{aligned} B_1(q < \tfrac{1}{2}) &\text{ är } p = 0 \\ B_1(q = \tfrac{1}{2}) &\text{ är } 0 \leq p \leq 1 \\ B_1(q > \tfrac{1}{2}) &\text{ är } p = 1 \end{aligned}$$

Samma sak, fast tvärtom, gäller för spelare två. Om $p < \frac{1}{2}$ (det vill säga spelare 1 väljer krona i lägre utsträckning än klave) ska spelare 2 välja krona för att vinna. Om $p > \frac{1}{2}$ (det vill säga spelare 1 väljer krona i högre utsträckning än klave) ska spelare 2 välja klave för att vinna. Om $p = \frac{1}{2}$ tillhör alla tillgängliga val bästa respons-funktionen för spelare 2. Spelare 2s bästa respons till spelare 1 blir alltså:

$$\begin{aligned}
B_2(p < \tfrac{1}{2}) &\text{ är } q = 1 \\
B_2(p = \tfrac{1}{2}) &\text{ är } 0 \leq q \leq 1 \\
B_2(p > \tfrac{1}{2}) &\text{ är } q = 0
\end{aligned}$$

Titta nu på figur: 2. Denna figur visar grafiskt bästa responsen för respektive spelare i spelet. Spelare 1 representeras av en blå graf och spelare 2 av en grön graf. Nu kan vi med enkelhet notera det finns en punkt som är bästa respons för båda spelarna och detta är då $p = q = \frac{1}{2}$.



Figur 2: Bästa responsen i *Krona eller klave*. Spelare 1s bästa respons representeras av en blå graf och spelare 2s av en grön graf. (Osborne 2009, s.112).

Enligt *sats 2.3*. är en blandad strategiprofil en Nash-jämvikt om och endast om samtliga spelares strategier är en bästa respons av de andra spelarnas strategier, eller sannolikhetsfunktioner. Om båda spelarnas strategi är att slumpmässigt välja krona respektive klave med en fördelning på $\frac{1}{2}$ har ingen spelare någonting att vinna på ensamt byta strategi. Således är $\alpha_1(krona) = \alpha_1(klave) = \alpha_2(krona) = \alpha_2(klave) = \frac{1}{2}$ en Nash-jämvikt i spelet.

Vi har nu visat att $\alpha_1(krona) = \alpha_1(klave) = \frac{1}{2}$ och $\alpha_2(krona) = \alpha_2(klave) = \frac{1}{2}$ är en Nash-jämvikt i spelet *Krona eller klave*. Detta är ett exempel på hur Nash-jämvikter för blandade strategier kan tas fram. Syftet med detta var endast att exemplifiera vad en Nash-jämvikt för blandade strategier är och hur en sådan kan tas fram.

2.6 Existensen av Nash-jämvikter och fixpunktssatser

Vi har tidigare konstaterat att det inte alltid går att finna en Nash-jämvikt när inte blandade strategier tillåts. Men när går det egentligen att finna en Nash-jämvikt? Svaret på denna fråga sammanfattas i "Nash Sats" som vi nu kommer att formulera och bevisa. Men för att formulera "Nash Sats" behöver vi introducera några nya definitioner och satser.

För att kunna formulera Nash sats behöver vi betrakta handlingsmängden som vektorer. I detta delkapitel kommer vi därför anta att handlingsmängden är en delmängd av något $\mathbb{R}^{n_i}$, det vill säga $A_i \in \mathbb{R}^{n_i}$. Att handlingsmängden är en delmängd av något $\mathbb{R}^{n_i}$ innebär att varje spelare i s handlingsalternativ kan representeras som en vektor i ett n_i – dimensionellt rum. Nu introducerar vi ett antal nya begrepp.

Definition 2.19. (Lindahl 2017, s.10). Vi säger att en delmängd X av $\mathbb{R}^n$ är **kompakt** om X är sluten och begränsad.

Definition 2.20. (Lindahl 2017, s.38). En delmängd X av $\mathbb{R}^n$ är **konvex** om följande implikation gäller:

$$x, y \in X, 0 < \alpha < 1 \implies \alpha x + (1 - \alpha)y \in X$$

.

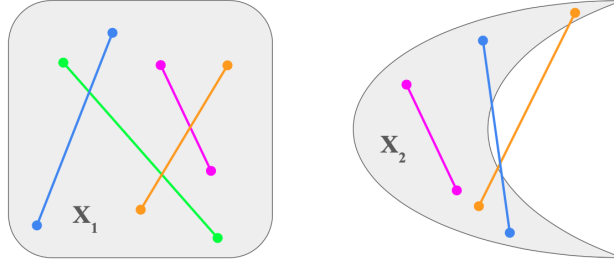
Med andra ord, att en mängd är konvex innebär att för varje par av punkter i mängden ska även sträckan mellan punkterna ligga inom mängden.

Vad som menas med en konvex mängd illustreras i figur 3 nedan. Där finns en konvex och en icke-konvex mängd i $\mathbb{R}^2$ illustrerad. Det går att utläsa att i den vänstra mängden, X_1 , är sträckan mellan samtliga punkter en del av mängden och således är den mängden konvex. Medan vad gäller den högra mängden, X_2 , är sträckan mellan vissa punkter inte en del av mängden och således är mängden icke-konvex.

Sats 2.4. *Produktmängden av en kompakt och konvex mängd är en kompakt och konvex mängd.*

Bevis: Låt X och Y vara kompakta och konvexa mängder i $\mathbb{R}^n$. Vi ska visa att $X \times Y$ är en kompakt, det vill säga sluten och begränsad, och konvex mängd.

Eftersom X och Y kompakta är de slutna och begränsade. $X \times Y$ kommer också att vara sluten eftersom mängderna X och Y innehåller sina gränsvärden (eftersom



Figur 3: Illustration av vad som menas med att en mängd är konvex. X_1 är en konvex mängd och X_2 är en icke-konvex mängd.

X och Y är slutna). Så om vi har en följd $\{x_n, y_n\}$ i $X \times Y$ som konvergerar till en punkt (x, y) så kommer $x_n \rightarrow x$ och $y_n \rightarrow y$ och eftersom X och Y är slutna, och alltså innehåller sina gränsvärden, kommer $x \in X$ och $y \in Y$ och således $(x, y) \in X \times Y$ och därmed är $X \times Y$ sluten.

Eftersom mängderna X och Y är begränsade, sträcker sig varken X eller Y oändligt långt ut i rummet och då finns det ett högsta värde i respektive mängd vilket innebär att produkten omöjligt kan vara större än produkten av de högsta värdena och därmed måste $X \times Y$ också vara begränsad.

Vi ska nu visa att om X och Y är konvexa mängder är $X \times Y$ en konvex mängd. Vi utgår ifrån definitionen av att en mängd är konvex. Låt $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in A \times B$, detta innebär att $x_1, x_2 \in X$ och $y_1, y_2 \in Y$. Vi bildar nu den konvexa kombinationen av dessa punkter, det vill säga vi bildar en ny punkt genom att kombinera dessa.

Eftersom X är konvex, så gäller att om $x_1, x_2 \in A$ så ska $\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in X$.

Eftersom Y är konvex, så gäller att om $y_1, y_2 \in Y$ så ska $\alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2 \in Y$.

För $0 < \alpha < 1$.

Därmed kommer $(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2, \alpha y_1 + (1 - \alpha)y_2) \in X \times Y$. Eftersom varje konvex kombination av punkterna ligger i $X \times Y$ följer att $X \times Y$ är en konvex mängd.

Vi har nu visat att mängden $X \times Y$ är sluten och begränsad om mängderna X och Y är slutna och begränsade och således är $X \times Y$ kompakt. Vi har även visat att om X och Y är konvexa mängder är $X \times Y$ en konvex mängd. Beviset är klart.

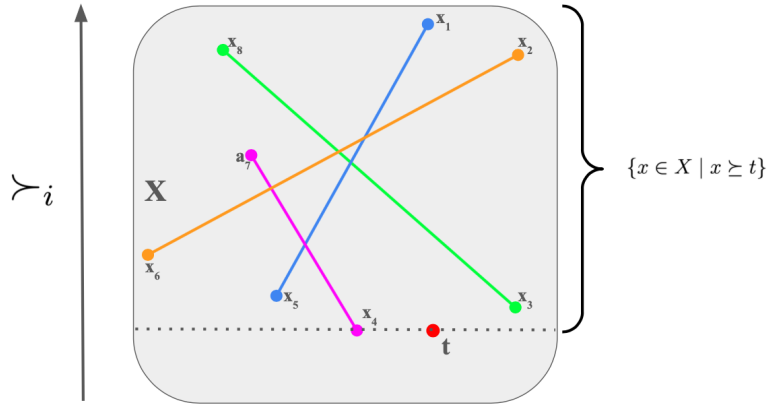
Definition 2.21. (Lindahl 2017, s.38-39). Låt X vara en konvex delmängd av $\mathbb{R}^n$. Vi säger att en preferensrelation $\succeq$ på X är **Kvasikonkav** om mängden:

$$\{x \in X \mid x \succeq t\}$$

är konvex för alla $t \in X$.

Med andra ord, om vi har en kvasikonkav preferensrelation och två handlingsalternativ som båda preferensrelationsmässigt föredras före t så måste alla kombinationer av dessa två handlingsalternativ också föredras före t . Se figur 4, där illustreras vad som menas med en kvasikonkav preferensrelation.

I figur 4, ju högre upp i mängden X som punkterna hamnar desto mer prefereras punkten, enligt någon person i s preferenser. Som går att utläsa i figuren så gäller att för alla x som preferensmässigt föredras före t så gäller att sträckan mellan punkterna också föredras före t , alltså är mängden av alternativ som föredras före t konvex.



Figur 4: Illustration av en kvasikonkav preferensrelation.

Definition 2.22. (Lindahl 2017, s.9). Vi säger att en preferensrelation $\succeq$ på en delmängd X av $\mathbb{R}^n$ är **kontinuerlig** om följande gäller:

För alla konvergenta följder $(x_k)_{k=1}^\infty \in X$ och $(y_k)_{k=1}^\infty \in X$ med egenskapen att $x_k \succeq y_k$ för alla k och där gränsvärdena, $x = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k$ och $y = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k$, ligger i X . Då gäller att $x \succeq y$.

Vi har nu tillräckligt med nyintroducerade definitioner för att kunna formulera "Nashs Sats".

Sats 2.5. (Nashs Sats) (Lindahl 2017, s.39-40). Vi har ett strategiskt spel med ett ändligt antal spelare och respektive spelares handlingsmängd är A_i . Om följande villkor är uppfyllda i spelet:

- Varje spelares handlingsmängd, A_i , är en konvex, kompakt delmängd av något $\mathbb{R}^{n_i}$.
- Preferensrelationerna $\succeq_i$ i spelet är kontinuerliga.
- För varje spelare i och för varje utfall i i spelet ska preferensrelationen $\succeq_i$ vara kvasikonkav i mängden $\{a_{-i}\} \times A_i$. Detta innebär att när alla andra spelare valt sina strategier (det vill säga a_{-i} är fixerat), ska spelare i s preferenser över sina egna val $a \in A_i$ vara kvasikonkava.

Då har spelet en Nash-jämvikt.

Denna sats bevisas i nästa delkapitel. Satsen hjälper oss inte att finna Nash-jämvikter. Däremot är det viktigt att förstå under vilka förutsättningar det går att finna Nash-jämvikter.

Anmärkning: När villkoren i Nash-sats är uppfyllda går det med säkerhet att finna en Nash-jämvikt i spelet. Dock finns det spel som inte uppfyller alla villkor men ändå har Nash-jämvikter. Ett exempel är spelet *Fångarnas dilemma*. Där är inte handlingsmängden en delmängd av något $\mathbb{R}^{n_i}$. Inte heller är preferensrelationerna i spelet kontinuerliga, fångarna har endast två olika handlingsalternativ (vara tyst eller vittna) och det sker diskreta hopp mellan preferenserna beroende på vilket val de olika fångarna väljer i spelet. Trots detta går det att finna en Nash-jämvikt i *Fångarnas dilemma* vilket vi gjorde i delkapitel 2.4.2.

2.6.1 Bevis av Nashs Sats

Det finns olika sätt att såväl formulera som bevisa Nashs Sats. I detta arbete bevisas Nash Sats med hjälp av *Kakutanis fixpunktssats*. Kakutanis fixpunktssats säger att om vi har en mängdvärd avbildning som uppfyller ett antal egenskaper, då har funktionen en fixpunkt, det vill säga en punkt i mängden som tillhör avbildningen. Men innan själva beviset av Nash-sats behöver vi definiera en mängdvärd avbildning, vad en graf för en avbildning är samt vad det innebär att grafen är sluten. Därefter kan vi formulera Kakutanis fixpunktssats som sedan möjliggör ett bevis för Nash-sats.

Definition 2.23. (Aliprantis och Border 2006, s.556). En **mängdvärd avbildning** $\phi : X \rightarrow Y$ är en avbildning som associerar varje element $x \in X$ till en delmängd

$\phi(x) \subset Y$. Skillnaden gentemot en ”vanlig” avbildning är att en mängdvärd avbildning kan associera varje element till en mängd snarare än ett enskilt element.

Exempel: En kvasikonkav preferensrelation är ett exempel på en mängdvärd avbildning. Där associeras varje $t \in X$ till en delmängd med element som preferensmässigt föredras före t .

Definition 2.24. . (Lindahl 2017, s.40). **Grafen** för en avbildning är mängden av alla par där första elementet tillhör första mängden och andra elementet tillhör mängden dit avbildningen tar det första elementet.

Exempel: $\phi : X \rightarrow Y$. Grafen för avbildningen är mängden av alla par (x, y) där x tillhör första mängden och y tillhör mängden dit avbildningen tar x . Vi betecknar grafen med G , alltså:

$$G = \{(x, y) \mid x \in X \text{ och } y \in \phi(x)\}.$$

Definition 2.25. (Lindahl 2017, s.40). Vi säger att en **graf är sluten** om för varje följd av punkter som konvergerar inom respektive mängd, så ska även de konvergerande värdena vara en del av mängden. Med andra ord, om vi antar att $(x^k, y^k)_1^\infty$ är en konvergent punktföljd i grafen G med gränsvärde (x, y) betyder det att $x^k \in X$ och $y^k \in \phi(x^k)$ för alla k och att $x^k \rightarrow x$ och $y^k \rightarrow y$ när $k \rightarrow \infty$.

Sats 2.6. (Kakutanis fixpunktssats)(Lindahl 2017, s.40-41). Anta att ϕ är en mängdvärd avbildning. Om avbildningen ϕ är definierad på en icke-tom delmängd $X \subseteq \mathbb{R}^n$ och följande villkor är uppfyllda:

- X är en kompakt, konvex mängd.
- Avbildningen $\phi(x)$ är en konvex icke-tom delmängd av X , för alla $x \in X$.
- Avbildningen har en graf som är sluten.

Då har ϕ en fixpunkt, det vill säga ett $x^* \in X$ sådant att $x^* \in \phi(x^*)$. Det finns med andra ord något element x^* som även tillhör $\phi(x^*)$.

Kakutanis fixpunktssats bevisas inte inom ramen för detta arbete. Däremot tittar vi närmare på fixpunkter och fixpunktssatser i 2.6.2.

Bevis av Nashs Sats:

Beviset bygger på Kakutanis fixpunktssats och är från Lindahl (2017, s.40-41).

Vi har ett ändligt strategiskt spel där $A_i \in \mathbb{R}^{n_i}$. Vi låter spelet uppfylla de tre villkoren i Nash-sats. Vi ska visa att spelet har en Nash-jämvikt, gör vi det har vi bevisat Nash-sats. Vi börjar med att definiera en mängdvärd avbildning $\phi : A_\times \rightarrow P(A_\times)$. Där $A_\times = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ är mängden av alla spelares möjliga handlingar i spelet och $P(A_\times)$ är mängden av alla delmängder av $A_\times$. $a \in A_\times$ är då en handlingsprofil, ett möjligt utfall i spelet. Vi använder en mängdvärd avbildning för att beskriva bästa responsen i spelet, $\phi(a)$ definierar vi på följande sätt:

$$\phi(a) = B_1(a_{-1}) \times B_2(a_{-2}) \times \dots \times B_n(a_{-n})$$

där $B_i(a_{-i})$ är mängden av bästa responser för spelare i givet de andra spelarnas strategier a_{-i} . Alltså definieras $\phi(a)$ av att en handlingsprofil a genererar någon bästa respons för varje spelare, givet de andra spelarnas val.

Om vi visar att $\phi(a)$ har en fixpunkt så har vi visat att spelet har en Nash-jämvikt. Detta eftersom, om handlingsprofilen $a^* = (a_1^*, a_2^*, \dots, a_n^*)$ (en viss kombination av alla spelares handlingsalternativ) avbildas på ϕ och alltså $a^* \in \phi(a^*)$, så är a^* en Nash-jämvikt eftersom samtliga spelare då har en bästa respons till resterande spelares strategier, ingen spelare vinner någonting på att förändra sin strategi givet att ingen annan spelare också gör det. Då är alltså a^* enligt definitionen en Nash-jämvikt. Vi ska alltså visa att om spelet vi definierat uppfyller villkoren för Nash sats och vi definierar ϕ enligt ovan så uppfyller ϕ villkoren för Kakutanis Fixpunktssats. Då har ϕ en fixpunkt som är en Nash-jämvikt.

Vi går nu igenom villkoren för Kakutanis fixpunktssats. För varje villkor i Kakutanis fixpunktssats visar vi att avbildningen, $\phi : A_\times \rightarrow P(A_\times)$, som beskrivits ovan uppfyller villkoret givet att spelet som avbildningen bygger på uppfyller villkoren för Nash sats. Om vi gör det har vi bevisat Nash-sats med hjälp av Kakutanis fixpunktssats.

Villkor 1: X är en kompakt, konvex mängd.

Mängden som ϕ är definierad på ska alltså vara kompakt och konvex. För vår avbildning är det mängden $A_\times$ som vi ska visa är en kompakt och konvex mängd. Eftersom varje spelares handlingsmängd A_i enligt Nash sats, är en konvex, kompakt delmängd av något $\mathbb{R}^{n_i}$ så kommer $A_\times = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$, det vill säga produktmängden av samtliga utfall i spelet, att vara konvex och kompakt. Detta eftersom, enligt *sats 2.4*, produkten av konvexa mängder är en konvex mängd och produkten

av kompakta mängder är en kompakt mängd.

Villkor 2: Avbildningen $\phi(x)$ är en konvex icke-tom delmängd av X för alla $x \in X$.

Nu ska vi alltså visa att $\phi(a)$ i vår avbildning till vårt spel är en konvex icke-tom delmängd av $A_\times$ för alla $a \in A_\times$. Vi har definierat $\phi(a)$ som mängden av bästa responsen för alla spelare i spelet. $B_i(a_{-i})$ är icke-tom eftersom det måste finnas någon bästa respons för varje spelare givet de andra spelarnas handlingar, någon eller flera handlingar är en bästa respons när övriga spelares strategier är fastställda. Eftersom $B_i(a_{-i})$ för varje spelare är icke-tom är också $\phi(a) = B_1(a_{-1}) \times B_2(a_{-2}) \times \dots \times B_n(a_{-n})$ icke-tom.

Att $\phi(a)$ är en konvex delmängd följer av det tredje villkoret i Nash-sats. Tredje villkoret i Nash-sats säger att varje spelare i s preferensrelation $\succeq_i$ ska vara kvasikonkav i mängden $\{a_{-i}\} \times A_i$. Det innebär att när övriga spelare valt sina strategier, a_{-i} , ska mängden av spelare i s strategier som preferensmässigt är minst lika bra vara en konvex mängd. Således kommer $B_i(a_{-i})$ att vara konvex för varje spelare i , detta eftersom a_{-i} innebär att övriga valt sina strategier. Eftersom $\phi(a) = B_1(a_{-1}) \times B_2(a_{-2}) \times \dots \times B_n(a_{-n})$ är en produktmängd av bästa responser kommer även $\phi(a)$ vara konvex enligt *sats 2.4.*, som säger att produkten av konvexa mängder är konvexa.

Villkor 3: Avbildningen har en graf som är sluten.

Att avbildningen har en sluten graf innebär att mängden:

$$G = \{(a, b) \mid a \in A_\times \text{ och } b \in \phi(a)\}$$

är sluten.

Där G är grafen för avbildningen. En mängd är sluten om och endast om gränsvärdet till varje konvergent följd av punkter i mängden också ligger i mängden. Vi antar att $((a^k, b^k))_1^\infty$ är en konvergent punktföljd i grafen G med gränsvärde a, b . Det innebär att $a^k \in A_\times$ och $b^k \in \phi(a^k)$ för alla k och att $a^k \rightarrow a$, $b^k \rightarrow b$ när $k \rightarrow \infty$. Gränsvärdet a ligger i $A_\times$ eftersom mängden $A_\times$ är sluten (eftersom den är kompakt). För varje spelare i tillhör b_i^k spelare i s mängd av bästa responser $B_i(a_{-i}^k)$. Detta innebär att:

$$(a_{-i}^k, b_i^k) \succeq_i (a_{-i}^k, y_i)$$

för alla $y_i \in A_i$. Låter vi $k \rightarrow \infty$ i relationen ovan får vi:

$$(a_{-i}, b_i) \succeq_i (a_{-i}, y_i)$$

för alla $y_i \in A_i$. Detta visar att $b_i \in B_i(a_{-i})$ och följaktligen att $b \in \phi(a)$. Alltså ligger gränspunkten (a, b) i G och vi har visat att avbildningen har en sluten graf.

Eftersom vi nu har visat att avbildningen $\phi(a)$ uppfyller alla villkor för Kakutanis fixpunktssats har $\phi(a)$ en fixpunkt. Denna fixpunkt måste vara en Nash-jämvikt eftersom varje spelare då har en bästa respons givet de andra spelarnas strategier. Därmed har vi visat att Nash sats gäller och beviset är klart.

2.6.2 Brouwers fixpunktssats

Det finns en mängd olika fixpunktssatser formulerade av diverse matematiker och ekonomer. Kakutanis fixpunktssats nyttjas som bekant för beviset av Nash-sats. Dock är Kakutanis fixpunktssats en relativt komplicerad fixpunktssats och är generellare än andra fixpunktssatser. En annan välkänd fixpunktssats är *Brouwers fixpunktssats*. Brouwers fixpunktssats är mer intuitiv och fokuserar på funktioner snarare än avbildningar. Nu formulerar vi Brouwers fixpunktssats.

Sats 2.7. (*Brouwers fixpunktssats*) (Lindahl 2017, s.231). *Varje kontinuerlig funktion $f : X \rightarrow X$, där X är en kompakt, konvex delmängd av $\mathbb{R}^n$, har en fixpunkt. Det vill säga det finns en punkt $x^* \in X$ sådan att $f(x^*) = x^*$.*

Det går att härleda Kakutanis fixpunktssats från Brouwers fixpunktssats. Detta görs inte inom ramen för detta arbete, men en härledning går att finna i Lindahls kompendium (Lindahl 2017, s. 231–234).

Vi fokuserar inte heller på att bevisa Brouwers fixpunktssats utan istället försöker vi förstå den och argumentera för att den gäller i de enklaste fallen.

Illustration av Brouwers fixpunktssats

Nu illustrerar vi Brouwers fixpunktssats i det allra enklaste fallet. Vi har en konti-

nuerlig funktion $f : X_1 \rightarrow X_1$. Vi definierar X_1 som det slutna intervallet $[0, 1]$. X_1 är då en delmängd av $\mathbb{R}^1$, den är kompakt eftersom den är sluten och begränsad och den är konvex eftersom sträckan mellan varje par av punkter inom mängden också ligger i mängden.

Enligt Brouwers fixpunktssats ska det existera ett $x^* \in X_1$ sådant att $f(x^*) = x^*$, x^* är således en fixpunkt. Vi ska nu visa att detta gäller för X_1 . Argumentationen är hämtad från Mukherjea och Pothoven (1978, s.43).

Vi kan börja med konstatera att om $f(0) = 0$ eller $f(1) = 1$ har vi direkt funnit vår fixpunkt eftersom $f(x^*) = x^*$ för dessa två punkter.

Om varken $f(0) = 0$ eller $f(1) = 1$ så kommer $f(0) > 0$ och $f(1) < 1$ eftersom X_1 är det slutna intervallet $[0, 1]$. Nu skapar vi en hjälpfunktion $g(x)$ som vi definierar som $g(x) = x - f(x)$, eftersom x och $f(x)$ är kontinuerliga kommer $g(x)$ vara en kontinuerlig funktion. Nu kan vi konstatera att:

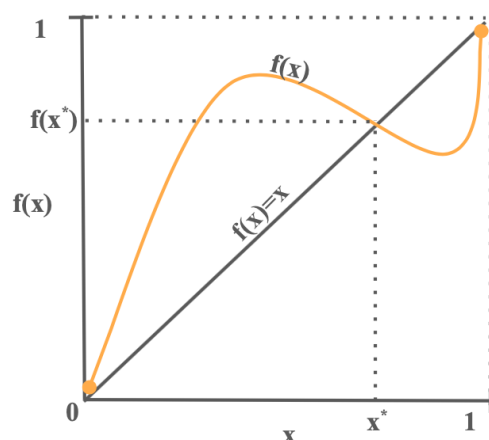
$$g(0) = 0 - f(0) = -f(0) \leq 0$$

och

$$g(1) = 1 - f(1) \geq 1 - 1 = 0$$

så därför kommer $g(0) \leq 0 \leq g(1)$. Eftersom $g(x)$ är kontinuerlig måste det finnas något $x^* \in [0, 1]$ sådant att $g(x^*) = 0$, detta enligt *Satsen om mellanliggande värden* som vi inte fördjupar i inom ramen för detta arbete. Nu återgår vi till hur vi definierade $g(x)$ och kan därför skriva $0 = g(x^*) = x^* - f(x^*)$ vilket ger att $x^* - f(x^*) = 0 \implies f(x^*) = x^*$ och därmed har vi visat att Brouwers sats gäller på mängden $X_1 = [0, 1]$.

Detta illustreras även i figur 5 där det blir tydligt att den kontinuerliga funktionen f antingen måste korsa funktionen $f(x) = x$ då $x = 0$ eller $x = 1$ eller, som det syns på bilden, någon annanstans på intervallet. Där $f(x)$ skär kurvan $f(x) = x$ har vi en fixpunkt.



Figur 5: Illustration av Brouwers fixpunktssats på mängden $X_1 = [0, 1]$.

2.6.3 Existensen av Nash-jämvikt vid blandade strategier

”Nash-sats” som formulerades och bevisades under föregående delkapitel gäller existensen av Nash-jämvikter i strategiska spel. Vi har tidigare konstaterat att om blandade strategier tillåts växer mängden av strategiska spel som vi kan finna Nash-jämvikter för, exempelvis kan vi i spelet *Krona eller klave* finna en Nash-jämvikt endast om blandade strategier tillåts. Faktum är att ifall blandade strategier tillåts går det alltid, förutsatt att det är ett ändligt spel, att finna en Nash-jämvikt. Vi sammanfattar detta i en sats:

Sats 2.8. (Lindahl 2017, s.78). *I varje ändligt strategiskt spel går det att finna minst en Nash-jämvikt för blandade strategier.*

För att bevisa denna sats undersöks villkoren för ”Nash-sats” och då går det att konstatera att om blandade strategier tillåts, det vill säga varje spelare väljer en sannolikhetsfunktion över sin handlingsmängd, uppfylls de tre villkoren för Nash sats och därmed finns minst en Nash-jämvikt i spelet. Ett mer komplett bevis går att finna i Lindahls kompendium (Lindahl 2017, s.78).

3 Militära tillämpningar

Många olika militära dilemman kan appliceras på strategiska spel. I detta arbete presenteras, undersöks och diskuteras tre enkla spel med militär tillämpning: *The Arms Race*, *The War of attrition* och en version på *Contribution to a public good*. Vad gäller dessa spel är det möjligt att utveckla dem med exempelvis fler antal spelare och fler aspekter att ta hänsyn till. Men inom ramen för detta arbete hålls spelen relativt enkla och lättöverskådliga.

I dessa spel ligger fokuset på den strategiska nivån av krigföring. Den strategiska nivån är mellanhanden mellan militären och politiken, militärstrategi är enkelt förklarat användande av strider och krig för att nå politiska mål (Ångström och Widén 2013, s.34). Med andra ord fokuserar inte arbetet på enskilda strider eller slag utan på hur krigföring blir en förlängning av politiken. Militärstrategi är svårt och komplext eftersom det är många aspekter som beslutsfattare på strategisk nivå behöver ta hänsyn till. Geografi, historias erfarenheter, ideologi, ekonomi och politiskt system är bara några exempel (Ångström och Widén 2013, s.36).

3.1 The Arms Race

The Arms Race är snarlikt Fångarnas dilemma fast med en militär tillämpning och något annorlunda preferenser för spelarna. Spelarna i spelet är två olika länder med handlingsalternativen att antingen rusta upp sin militära förmåga eller att inte göra så. Beskrivningen av spelet är inspirerad av Osborne (2009, s.17) men omformulerat och justerat. Så som Osborne beskriver spelet handlar det endast om att bygga upp en kärnvapenarsenal men spelet som beskrivs i detta arbete handlar mer om upprustning i allmänhet. Så som spelet beskrivs här har även de olika länderna lite olika preferenser och viljor, jämfört med originalet där båda länderna har samma preferenser.

3.1.1 Presentation av spelet

- **Spelare:** Två olika länder.
- **Handlingsalternativ:** Genomföra militär upprustning eller inte genomföra militär upprustning. Alltså: $A_1 = \{Upprustning, Ingen\ Upprustning\}$ och $A_2 = \{Upprustning, Ingen\ Upprustning\}$.

- **Preferensrelationer utifrån första landets perspektiv:**

$$(Ingen\ upprustning, Ingen\ upprustning) \succ_1 (Upprustning, Ingen\ upprustning) \succ_1 \\ \succ_1 (Upprustning, Upprustning) \succ_1 (Ingen\ upprustning, Upprustning).$$

- **Preferensrelationer utifrån andra landets perspektiv:**

$$(Ingen\ upprustning, Upprustning) \sim_2 (Ingen\ upprustning, Ingen\ upprustning) \succ_2 \\ \succ_2 (Upprustning, Upprustning) \succ_2 (Upprustning, Ingen\ upprustning).$$

Notera att skillnaden mellan första och andra landet är att det första landet föredrar att inget av länderna genomför någon upprustning före att själv rusta upp om motståndaren inte rustar upp. Detta kan exempelvis motiveras genom att det är billigare och minskar risken för konflikt och mänskligt lidande. Det andra landets preferenser däremot är att det är lika bra att själv rusta upp som att ingen rustar upp. Man kan tänka sig att detta motiveras genom att det andra landet vill utöka sitt territorium, få tillgång till naturresurser eller att landet med militärt våld vill tvinga det första landet till någonting.

Nu beskriver vi preferensrelationen med hjälp av payoff-funktioner. Utifrån ländernas perspektiv hade det varit förödande om det andra landet genomförde militär upprustning och inte det egna landet, eftersom detta skulle kunna påverka landets frihet och självbestämmande. Samtidigt kostar det mycket pengar och resurser att genomföra militär upprustning vilket undviks om så möjligt. Vi låter $\sigma > 0$ vara ett godtyckligt reellt tal i payoff-representationerna nedan. Vi antar att det är dubbelt så bra, enligt land 1, att undvika upprustning helt som att själv upprusta när andra landet inte upprustar. Att båda upprustar antas vara 0 och att land 2 upprustar men inte land 1 antas vara väldigt negativt och därför representeras den payoffen med ett stort negativt värde, vi sätter det till -10 .

Vi sätter följande payoff-funktioner för det första landet:

$$\begin{aligned} u_1(Ingen\ upprustning, Ingen\ upprustning) &= 2\sigma \\ u_1(Upprustning, Ingen\ upprustning) &= \sigma \\ u_1(Upprustning, Upprustning) &= 0 \\ u_1(Ingen\ upprustning, Upprustning) &= -10\sigma. \end{aligned}$$

Med liknande resonemang, men med slutsatsen att ingen upprustning alls och

endast egen upprustning är lika bra, väljer vi följande payoff-funktioner för det andra landet:

$$\begin{aligned}u_2(\textit{Ingen upprustning}, \textit{Upprustning}) &= 2\sigma \\u_2(\textit{Ingen upprustning}, \textit{Ingen upprustning}) &= 2\sigma \\u_2(\textit{Upprustning}, \textit{Upprustning}) &= \sigma \\u_2(\textit{Upprustning}, \textit{Ingen upprustning}) &= -10\sigma.\end{aligned}$$

Naturligtvis går det att välja andra representationer för respektive land och noggrannare analyser kopplat till exempelvis säkerhetsläget kan generera helt andra korrelationer mellan de olika handlingsprofilerna. Men för att fortsätta det matematiska resonemanget läggs ingen större vikt på detta.

Med hjälp av dessa representationer av respektive handlingsutfall kan vi ställa upp nedanstående payoff-tabell för spelet.

Tabell 7: Payoff-tabell *The Arms Race*

	<i>Ingen upprustning:</i>	<i>Upprustning:</i>
<i>Ingen upprustning:</i>	$(2\sigma, 2\sigma)$	$(-10\sigma, 2\sigma)$
<i>Upprustning:</i>	$(\sigma, -10\sigma)$	$(0, \sigma)$

3.1.2 Nash-jämvikter i spelet

Med samma metod som beskrivs i 2.4.1 och som sedan tillämpas i 2.4.2 kan vi ta fram Nash-jämvikter för spelet. Vi tittar på vilken som är bästa responsen för respektive land för respektive handling som motståndarlandet gör. Vi sätter en * på den bästa responsen och får tabellen nedan.

Tabell 8: Nash-jämvikt i *The Arms Race*

	<i>Ingen upprustning:</i>	<i>Upprustning:</i>
<i>Ingen upprustning:</i>	$(2\sigma^*, 2\sigma^*)$	$(-10\sigma, 2\sigma^*)$
<i>Upprustning:</i>	$(\sigma, -10\sigma)$	$(0^*, \sigma^*)$

Vi kan nu konstatera att det finns två Nash-jämvikter. När båda länder väljer upprusta sin militära förmåga och när inget land väljer att rusta upp sin militära förmåga. Detta eftersom det är en bästa respons för båda spelarna och således, enligt sats 2.1, är det Nash-jämvikter i spelet. Dock är andra landets preferenser att själv rusta upp och att ingen rustar upp samma och således kan vi inte säkert veta hur landet kommer att agera, detta ska vi nu undersöka med hjälp av förväntad payoff.

3.1.3 Hur graden av underrättelse påverkar ländernas agerande

Så som spelet beskrivits tidigare är det förödande om det andra landet rustar upp och det egna landet inte gör så. Detta representeras även i payoff-funktionerna med ett stort negativt värde, -10σ . Nu tittar vi främst på land 1 som föredrar ingen upprustning alls, exempelvis eftersom det kostar mycket pengar och resurser att genomföra en upprustning.

Huruvida land 1 ska upprusta eller inte beror på ifall land 2 väljer att upprusta eller inte. Vi ska nu undersöka hur säker land 1 behöver vara på att en upprustning sker hos land 2 för att det, rent teoretiskt, ska vara värt för land 1 att också genomföra upprustning. Detta görs med hjälp av förväntad payoff. Vi sätter sannolikheten att land 2 upprustar till p , således blir sannolikheten att de inte genomför någon upprustning $1 - p$. Den förväntade payoffen för land 1, för respektive handling land 1 kan välja, blir då:

$$\begin{aligned} u_1^?(Upprustning) &= u_1(Upprustning, Upprustning) \cdot p + \\ &u_1(Upprustning, Ingen upprustning) \cdot (1 - p) = 0 \cdot p + \sigma(1 - p) = \sigma - \sigma p \\ u_1^?(Ingen upprustning) &= u_1(Ingen upprustning, Upprustning) \cdot p + \\ &u_1(Ingen upprustning, Ingen upprustning) \cdot (1 - p) = -10\sigma \cdot p + 2\sigma(1 - p) = \\ &-10\sigma \cdot p + 2\sigma - 2\sigma \cdot p = -12\sigma p + 2\sigma. \end{aligned}$$

Om vi nu tänker oss att det är fred mellan dessa länder men att land 1 har underrättelse om det andra landets eventuella upprustning. I hur stor utsträckning behöver land 1 vara säkra på att indikationerna på att det faktiskt sker en upprustning hos land 2 stämmer. Vi kan titta på vilken sannolikhet det behöver vara för att upprustning sker i land 2 för att upprustningen ska vara värt det, utifrån de payoff-funktioner vi ansatt för land 1. Detta undersöks genom att jämföra den förväntade payoffen för land 1 att upprusta respektive att inte upprusta. Den förväntade payoffen att upprusta är högre än att inte upprusta om:

$$\begin{aligned}
u_1^?(Upprustning) &> u_1^?(Ingen upprustning) \\
&\implies \\
\sigma - \sigma p &> -12\sigma p + 2\sigma \\
&\implies \\
\sigma(1 - p) &> 2\sigma(1 - 6p) \\
&\implies \\
1 - p &> 2 - 12p \\
&\implies \\
11p &> 1 \\
&\implies \\
p &> \frac{1}{11} \approx 0,09.
\end{aligned}$$

Alltså, om land 1 med hjälp av underrättelse gör analysen att det är större sannolikhet än 0,09, eller 9%, att land 2 genomför upprustning ska land 1 också, utifrån payoffen i detta hypotetiska fall, genomföra upprustning.

3.1.4 Diskussion

Dessa slutsatser och resonemang blir i praktiken intetsägande. Det är många antaganden på vägen och hypotetiska scenarion med underrättelse. Men metoden kan användas för att undersöka ifall det, rent payoffmässigt, är värt att riskera pengar och resurser för upprustning. Vidare beror alla slutsatser på vilka representationer som valts för de olika utfallen i payoff-funktionerna. Tar man hänsyn till fler aspekter kan spelet göras oerhört komplex men samtidigt är det väldigt svårt att kvantifiera olika utfall i ett krig eftersom olika värden: exempelvis demokrati, ekonomi och mänskligt lidande, behöver ställa emot varandra.

Dock ska sägas att i praktiken skulle troligtvis land 1 vid minsta indikation på att land 2 upprustar också upprusta, detta eftersom en potentiell förlust på slagfältet kan vara ödesdiger, och leda till att land 1s självständighet och existens som land försvinner. Vidare behöver länder inte i verkligheten endast ha alternativen att upprusta eller inte upprusta, det finns ju någon form av mellanväg med delvis upprustning eller viss ökning av försvarsanslagen.

Om vi vill koppla detta emot verkligheten kan vi titta på Sverige och stora delar av Europa som idag väljer att rusta upp sin militära förmåga för att inte riskera att bli anfallna av Ryssland som nu bedriver invasionskrig i Ukraina. Sverige skulle helst inte vilja rusta upp eftersom det kostar enorma pengar och resurser men man vågar verkligen inte riskera, eftersom utfallet blir såpass negativt, att inte upprusta medans Ryssland upprustar. Man vill alltså inte hamna i $u_{1=Sverige}(\text{Ingen upprustning}, \text{Upprustning})$. Detta utfall bedöms då ge väldigt negativ payoff och därför rustar Sverige upp sin militära förmåga. Detta resonemang är tämligen självförklarande men ändå värt att lyfta kopplat till det spel som har presenterats. Dock är verkligheten som sagt mycket mer komplex än hur detta dilemma presenteras i detta arbete.

3.2 The War of Attrition

The War of Attrition är ett exempel på ett "timingspel", det vill säga ett spel som går ut på att välja när spelaren gör sin handling snarare än vilken handling som faktiskt görs. Spelet utgick från början ifrån djur som slogs men kan tillämpas på historisk eller aktuell utnötningskrigföring.

3.2.1 Presentation av spelet

Spelet definieras på olika sätt men beskrivningen nedan är en generell beskrivning av spelet, och sedan definieras spelet med en militär inriktning. Spelets uppbyggnad är hämtad från Bulow och Klemperer (1997, s.6) och Osborne (2009, s.77), men något justerat.

Vi har $N + K$ antal spelare vilka tävlar mot varandra men endast K pris som kan erhållas när N spelare har gett upp. Alltså finns det fler spelare än pris som kan erhållas. Tiden, representeras med t , börjar på 0 och löper kontinuerligt. Spelare i erhåller priset $v_i > 0$ när N stycken spelare gett upp. För varje tidsenhet som spelare i är kvar i spelet kostar det spelaren δ_i , därav kommer spelarens eventuella payoff (om priset erhålls) att vara $v_i - \delta_i \cdot t_i$. Men om spelare i ger upp tidigare och inte erhåller priset blir payoffen istället $-\delta_i \cdot t_i$. Nu sätter vi upp spelet med endast två spelare och med en militär inriktning. När vi endast har två spelare är $N = 1$ och $K = 1$, det vill säga endast en spelare kan erhålla priset.

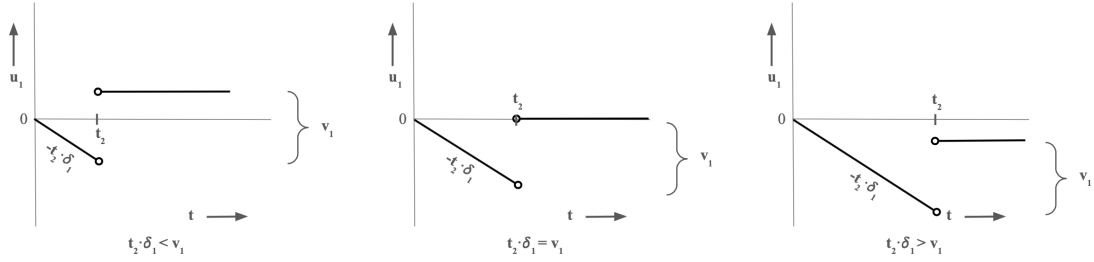
- **Spelare:** Två olika länder.

- **Spelets uppbyggnad:** Länderna ingår i ett utnötningskrig, fler soldater och mer materiel tillförs från att kriget börjar, då tiden är 0. t_1 är antalet dagar som land 1 låter kriget fortlöpa och δ_1 är kostnaden för varje dag som land 1 låter kriget fortlöpa. Land 1 får $v_1 > 0$ om land 1 vinner kriget och land 2 ger upp. Om båda länder ger upp samtidigt erhåller land 1 $\frac{v_1}{2}$. På samma sätt är t_2 antal dagar som land 2 låter kriget fortlöpa och δ_2 kostnaden för varje dag. Land 2 erhåller $v_2 > 0$ om land 1 ger upp först och om båda länderna ger upp samtidigt erhåller land 2 $\frac{v_2}{2}$.
- **Handlingsalternativ:** Respektive land väljer ett visst antal dagar, t_1 respektive t_2 , som landet tänker låta kriget fortlöpa. Alltså: $A_1 = [0, \infty)$ och $A_2 = [0, \infty)$.
- **Preferenser:** Land 1s preferenser representeras nedan av payoff-funktionen där t_1 och t_2 är tiden som land 1 respektive land 2 låter kriget fortlöpa. Payoffen för land 2 är exakt samma fast omvänt.

$$\begin{aligned} u_1(t_1, t_2) &= -t_1\delta_1 && \text{om } t_1 < t_2 \\ u_1(t_1, t_2) &= \frac{v_1}{2} - t_1\delta_1 && \text{om } t_1 = t_2 \\ u_1(t_1, t_2) &= v_1 - t_2\delta_1 && \text{om } t_1 > t_2. \end{aligned}$$

3.2.2 Nash-jämvikter i spelet

För att undersöka Nash-jämvikter i detta spel börjar vi med att undersöka bästa respons-funktionerna för respektive land. Intuitionen säger att om motståndarlandet planerar att hålla ut länge gäller det att snabbt ge upp och ifall motståndarlandet relativt snabbt tänker ge upp gäller det att hålla ut längre och vinna priset. Men i hur stor utsträckning länderna bör låta utnötningen fortlöpa beror även på digniteten av priset som erfordras vid en eventuell vinst. I hur stor utsträckning är det värt att fortsätta kriget för att till slut erhålla priset? Se figur 6 nedan. I figuren ser vi tre diagram som illustrerar payoffen för land 1, där land 1 alltid håller ut längst och vinner. Här blir det tydligt att ifall det av land 1 krävs att landet håller ut längre än vinsten är värd är det bättre payoff-mässigt att ge upp direkt.



Figur 6: Payoff för land 1. Diagrammet längst till vänster: om $t_2 \cdot \delta_1 < v_1$. Diagrammet i mitten: om $t_2 \cdot \delta_1 = v_1$. Diagrammet till höger: om $t_2 \cdot \delta_1 > v_1$ (Osborne 2009, s.78).

Nu tar vi fram bästa responsen utifrån land 1s perspektiv. Vi betraktar t_1 och t_2 som fastställda, i förväg bestämda tider som respektive land tänker kvarstanna i kriget. Det första landets bästa respons-funktion blir då:

$$\begin{aligned} B_1(t_2) &= (t_1 : t_1 > t_2) \quad \text{om } t_2 \cdot \delta_1 < v_1 \\ B_1(t_2) &= (t_1 : t_1 = 0 \text{ eller } t_1 > t_2) \quad \text{om } t_2 \cdot \delta_1 = v_1 \\ B_1(t_2) &= (t_1 : t_1 = 0) \quad \text{om } t_2 \cdot \delta_1 > v_1 \end{aligned}$$

Det andra landets bästa respons blir den samma fast omvänd. Intuitionen säger som sagt att det är en bästa respons att ge upp tidigt om motspelaren planerar att ge upp sent, och hur sent beror på ifall vinsten överstiger kostnaden att kvarstanna i kriget längre än motståndarlandet. Om varje lands handling är en bästa respons utifrån det andra landets handling är det en Nash-jämvikt enligt sats 2.1. Således har vi en Nash-jämvikter för spelet då:

$$\begin{aligned} t_1 &= 0 \text{ och } t_2 \geq \frac{v_1}{\delta_1} \\ \text{eller} \\ t_2 &= 0 \text{ och } t_1 \geq \frac{v_2}{\delta_2}. \end{aligned}$$

3.2.3 Diskussion

För att låta detta spel representera verkligheten kan vi tänka oss att kostnaden δ_i är kostnaden för landet att försörja krigsförbanden med soldater och materiel i kriget samt kostnaden för förstörelsen som kriget medför. Kopplar vi detta till ett empiriskt fall kan vi titta på Rysslands invasionskrig i Ukraina. Där är priset som Ukraina erhåller vid vinst i kriget att upprätthålla landets suveränitet och Rysslands vinst är exempelvis att få tillgång till Ukrainas naturresurser.

Precis som i *The Arms Race* finns det ett antal luckor i spelet som gör att spelet inte blir en fullvärdig representation av verkligheten. Först och främst finns det naturligtvis ingen ”fastställd tid” som motspelaren kommer kvarstanna i kriget, detta avgörs istället troligtvis på hur det går på slagfältet och vilka vinster eller förluster landet kan tänka sig att ta. Vidare är det inte säkert att det är smartast att ge upp direkt bara för att man bedömer att motståndaren tänker hålla ut länge, exempelvis kommer kanske motståndaren hålla ut betydligt kortare än planerat om de initiala slagen medför stora förluster. En annan svårighet är hur upprätthållande av suveränitet och demokrati ska kvantifieras till en payoff. För Ukraina kan demokratin och självbestämmandet vara så pass överlägset preferensmässigt att det får ”kosta vad det kosta vill” i kriget. En annan aspekt som spelet inte tar hänsyn till är huruvida landet faktiskt har råd att bedriva krigföringen. Detta är en aspekt kopplat till komplexiteten på den strategiska krigföringsnivån. Politiken, landets ekonomi och tillgången till råmaterial och möjligheter att producera krigsmateriel har stor inverkan på strategiska beslut inom krigföring (Ångström och Widén 2013, s.39).

En annan svårighet är att slagen också behöver utkämpas. I spelet som presenteras, på strategisk nivå, utgår vi ifrån att båda länderna är lika starka och har samma möjligheter till seger i kriget, bara att det kostar och tar tid att vinna. Men i verkligheten påverkas den strategiska krigföringsnivån av slag på den taktiska nivån (Jordan m. fl. 2016, s.45-47) och beroende på hur väl beslutsfattare på lägre nivå och enskilda soldater levererar kommer kostnaden men även stridsviljan och folkets stöd att påverkas.

3.3 Contribution to a public good

Contribution to a public good är ett spel med n antal spelare som var och en får välja om de vill bidra med ett fastställt belopp till det allmänna eller inte. Om tillräckligt många väljer att betala beloppet så kommer alla, oavsett om man bidragit eller inte, att få någon form av positiv vinst. Men om för få väljer att betala, så kommer de som valt att bidra inte få tillbaka sin insättning.

3.3.1 Presentation av spelet

Spelet beskrivs och ställs upp som en övningsuppgift med tillhörande facit av Osborne (Osborne 2009, s.33) (Osborne 2023, s.7). I detta arbete lägger vi på en militär inriktning på spelet och kopplar spelet till försvarsalliansen NATO och alliansen mål

att samtliga länder ska bidra och lägga 2-procent av BNP på försvarsutgifter, vilket många länder inte alltid når upp till (Haglund 2024). Om tillräckligt många länder bidrar med 2 procent blir "vinsten" att NATOs avskräckning fungerar och inget NATO-land riskerar att bli angripet. I spelet antar vi att varje land helst vill "slippa" bidra med 2 procent eftersom det kostar mycket pengar.

- **Spelare:** De 32 länder som är medlemmar i NATO.
- **Handlingsalternativ:** Respektive land kan välja att bidra, genom att lägga 2 procent av BNP på försvarsutgifter, eller att inte gör det. Alltså: $A_i = \{Bidra, Bidra\ inte\}$.
- **Spelets uppbyggnad:** Om k eller fler antal länder bidrar med 2 procent av BNP erhåller samtliga länder vinsten v som innebär att NATOs avskräckning mot eventuella angripare fungerar. Där $2 \leq k \leq 32$. Att bidra med 2 procent kostar landet p , där $p < v$. Om fler än k länder bidrar erhålls fortfarande endast vinsten v och om färre bidrar erhåller respektive land 0, vilket innebär att någon NATO medlem kan riskera att bli angripet eftersom avskräckningen inte fungerar.
- **Preferenser och payoff:** Om vinsten v erhålls, det vill säga k eller fler länder bidrar till avskräckningen, bli payoffen för de länder som bidragit: $v - p$. Payoffen för de länder som inte bidragit blir då: v .

Om vinsten v inte erhålls blir payoffen för de länder som bidragit $-p$ och de som inte bidragit 0.

Payoffen för land i kommer alltså att vara:

- $u_i(\text{land } i \text{ bidrar inte men minst } k \text{ andra länder bidrar}) = v$
- $u_i(\text{land } i \text{ bidrar och totalt bidrar minst } k \text{ länder}) = v - p$
- $u_i(\text{land } i \text{ bidrar inte och totalt bidrar inte } k \text{ länder}) = 0$
- $u_i(\text{land } i \text{ bidrar men totalt sätt bidrar inte } k \text{ länder}) = -p$.

Land i s preferenser blir således:

$$(\text{land } i \text{ bidrar inte men minst } k \text{ andra länder bidrar}) \succ_i (\text{land } i \text{ bidrar och totalt bidrar minst } k \text{ länder}) \succ_i (\text{land } i \text{ bidrar inte och totalt bidrar inte } k \text{ länder}) \succ_i (\text{land } i \text{ bidrar men totalt sätt bidrar inte } k \text{ länder}).$$

3.3.2 Nash-jämvikter i spelet

Att undersöka Nash-jämvikterna i detta spel är relativt enkelt. Det kräver inga avancerande beräkningar utan vi kan konstatera att vi har två olika Nash-jämvikter (Osborne 2023, s.7).

1. En handlingsprofil där precis k länder bidrar är en Nash-jämvikt. Detta eftersom om något av de bidragande länderna ändrar handling och inte bidrar så kommer avskräckningen inte att fungera och landets payoff att gå ned från $v - p$ till $-p$. Om någon av de länderna som inte bidrar bestämmer sig för att bidra kommer deras payoff att gå ned från v till $v - p$. Således, eftersom inget land payoffmässigt vinner någonting på att byta handling givet att inget annat land byter handling är denna handlingsprofil en Nash-jämvikt.
2. En handlingsprofil där inget land väljer att bidra med 2 procent av BNP är också en Nash-jämvikt i spelet. Detta eftersom om ett land ensamt byter handling och väljer att bidra kommer vinsten v ändå inte att erhållas och landets payoff att gå ned från 0 till $-p$. Därmed vinner ingen land någonting på att ensamt byta handling och handlingsprofilen är en Nash-jämvikt.

Vi kan även konstatera att de handlingsprofiler där fler än k länder bidrar inte är någon Nash-jämvikt eftersom något av de länderna som bidrar då kan välja att inte bidra och därmed förbättra sin payoff från $v - p$ till v .

De handlingsprofiler där färre än k länder, men minst 1 land, bidrar är inte heller någon Nash-jämvikt eftersom i de fallen kan de länder som bidrar välja att inte bidra och därigenom förbättra sin payoff från $-p$ till 0.

3.3.3 Diskussion

Även detta spel är en förenkling av verkligheten. Grundpremissen att minst k länder ska bidra med 2 procent för att avskräckningen ska fungera är exempelvis inte särskilt realistiskt. Dels blir avskräckningen större ifall fler länder genomför stora försvarsinvesteringar. Dessutom går det inte att i verkligheten tala om något k -värdet. k -värdet borde inte endast bero på antalet bidragande länder utan även på vilka länder som lägger tillräckliga resurser på försvaret, om exempelvis endast mindre länder når upp till 2 procents målet blir det kollektiva försvaret ändå inte tillräckligt stark och således åstadkoms ingen avskräckning.

En annan aspekt som gör spelet väldigt teoretiskt är att det finns i ländernas egenintresse att ha ett starkt försvar och därmed investera i det egna försvaret. Vidare finns det en strategisk vinning i att vara med och bidra, dels för att öka andra länders vilja men även för att skapa bättre relationer inom alliansen och därmed öka det egna landets möjlighet att faktiskt få militärt understöd vid ett eventuellt angrepp.

3.4 Slutsatser kopplat till militära spel

Efter att dessa tre spel formulerats, Nash-jämvikter undersökts och diskussioner kopplat till spelen förts kan vi konstatera att det absolut går att dra paralleller till dessa spel och verkligheten. Vi kan belysa militärstrategiska dilemman med hjälp av spelteori.

Viss relevans får spelen exempelvis kopplat till dagens upprustning, kriget i Ukraina och NATO. Dock krävs många antaganden och förenklingar i spelen vilket påverkar spelens tillämpningsgrad gentemot verkligheten.

Precis som omnämns i början av detta kapitel är militärstrategi svårt och komplext. Beslutsfattarna behöver fatta svåra beslut där mängder av aspekter behöver vägas in. Slutsatsen är att det går att belysa militärstrategiska dilemman med hjälp av spelteori, men för att spelteorin verkligen ska gå kunna bidra till vettiga slutsatser behöver många aspekter vägas och rangordnas. Därmed är det väldigt svårt att med hjälp av dessa enkla militära spel bidra till något form av beslutsfattande på militärstrategisk nivå.

Referenser

- [1] Charalambos D. Aliprantis och Kim C. Border. *Infinite dimensional analysis : a hitchhiker's guide*. 3. ed. Berlin: Springer, 2006. ISBN: 9783540326960.
- [2] Sven Erick Alm och Tom Britton. *Stokastik : sannolikhetsteori och statistikteori med tillämpningar*. 1. uppl. Stockholm: Liber, 2008. ISBN: 9789147053513.
- [3] Jeremy Bulow och Paul Klemperer. *The Generalized War of Attrition*. Nov. 1997.
- [4] F Haglund. *Tydlig ökning av försvarsutgifter i Nato*. 2024. URL: <https://www.europaportalen.se/2024/06/tydlig-okning-av-forsvarsutgifter-i-nato>.
- [5] David Jordan m.fl. *Understanding modern warfare*. Second revised edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2016. ISBN: 9781107134195.
- [6] Lars-Åke Lindahl. *Spelteori*. Uppsala, 2017.
- [7] A. Mukherjea och K. Pothoven. *Real and functional analysis*. New York: Plenum, 1978. ISBN: 0306310155.
- [8] Martin J. Osborne. *An introduction to game theory*. 1st international ed. New York: Oxford University Press, 2009. ISBN: 9780195322484.
- [9] Martin J. Osborne. *Solution manual for AN INTRODUCTION TO GAME THEORY*. 12st ed. University of Toronto, 2023.
- [10] Hal R. Varian. *Microeconomic analysis*. 3. ed. New York: Norton, 1992. ISBN: 0393957357.
- [11] Jan Ångström och Jerker Widén. *Contemporary military theory [Elektronisk resurs] the dynamics of war*. Milton Park, Abingdon, Oxon: Routledge, 2013. ISBN: 0203080726.