



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Kvaternioner

av

Johanna Kindblom

2025 - No L10

Kvaternioner

Johanna Kindblom

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Dan Petersen

2025

Sammanfattning

Kvaternioner upptäcktes av den irländske matematikern Sir William Rowan Hamilton under 1800-talet och kan ses som en utvidgning av de komplexa talen till fyra dimensioner. Här ges en överblick över räkneregler, hur kvaternionerna kan användas för rotationer samt några olika framställningar av dem. Det ges även ett bevis för Frobenius sats för divisionsalgebror.

Abstract

Quaternions were discovered by the Irish mathematician Sir William Rowan Hamilton during the 19th century. They can be seen as an extension of the complex numbers in four dimensions and this paper provides an overview over the basic rules for quaternions, how they can be used for rotations and a couple of representations of them. Also given is a proof of Frobenius Theorem of real division algebras.

Innehåll

1	Introduktion	9
2	Hamilton och hans kvaternioner	9
2.1	Sir William Rowan Hamilton	9
2.2	Hamiltons matematik	10
3	Kvaternioner	11
3.1	Komplexa tal	11
3.2	Hamiltons problem	12
3.3	Definition och räkneregler	13
3.4	Konjugat, norm och invers	14
3.5	Skalärdel och vektordel	16
3.6	Enhetskvaternioner	18
3.7	Andra framställningar av kvaternioner	19
4	Kvaternionerna som ring	20
4.1	Defintion av grupp och ring	20
4.2	Kvaternionring	21
5	Rotationer	21
5.1	Vanliga representationer	21
5.2	Rotationer genom kvaternioner	22
5.3	Tillämpningar	23
6	Frobenius sats	24
	Referenser	28

1 Introduktion

Matematik med tal i två dimensioner i form av komplexa tal känner alla som arbetat med matematik i någon högre grad till. Utvidgningen till fyra dimensioner, som kvaternionerna motsvarar, är däremot mindre allmänt känd. Här ges en överblick från de grundläggande reglerna för kvaternioner till Frobenius sats för reella divisionsalgebror, som säger att sådana bara finns i dimensionerna ett, två och fyra. Kvaternionerna upptäcktes av Sir William Rowan Hamilton i mitten av 1800-talet och blev hans livsprojekt. Under den tiden var de komplexa talen ett faktum, men linjär algebra som matematiker ser den idag utvecklades inte mer eller mindre fullt förrän i början på 1900-talet. Kvaternionerna användes under en period delvis inom fysiken, men slogs ut av vektorer redan på sent 1800-tal. Under en ganska lång period var kvaternionerna mer eller mindre irrelevanta utanför matematikundervisning, men har under de senaste 20-30 åren fått ny kraft inom programmering. Detta uppsving kommer från att kvaternionerna har ett tydligt användningsområde när det gäller att rotationer, där de delvis är relativt små och delvis undviker en del problem som andra framställningar riskerar. Det gör att de kan användas inom allt från datorspel till kvantmekanik.

2 Hamilton och hans kvaternioner

2.1 Sir William Rowan Hamilton

Sir William Rowan Hamilton föddes midnatt natten mellan 3 och 4 augusti 1805 i Dublin, som den fjärde av nio syskon. Innan tre års ålder blev han skickad att bli uppfostrad av sin farbror, James Hamilton, som var utbildad vid Trinity College i Dublin och stod för mycket av Hamiltons tidiga utbildning. Redan vid ung ålder var det tydligt att han hade ett starkt intellekt med intresse både för språk och matematik. 1823 startade han sina egna studier vid Trinity College, där kärnan av de matematiska texterna var Sir Isaac Newtons *Principia mathematica*. Läroplansreformer hade dock tagit in nyare framsteg i undervisningen, bland annat av Pierre Simon Laplace och Joseph Louis Lagrange, något som Hamilton tjänade på i sin egen utbildning. [Lew04]

1827 blev Hamilton utsedd till den tredje Andrews Professor of Astronomy vid Dunkirk Observatory, vilket också gav honom titeln Royal Astronomer of Ireland. Det var ett något kontroversiellt beslut, delvis på grund av Hamiltons unga ålder men

också på grund av hans bristande intresse för att göra astronomiska observationer. Hamilton flyttade in sina fyra systrar vid obeservatoriet, där de skötte både hans hushåll men också var inblandade i att göra de astronomiska observationer som rollen innebar. För Hamilton var det en framgångsfaktor som gav honom tid att lägga på sina egna studier. Trots positionen förknippas han inte med astronomi i någon större grad, utan med matematiska teorier och fysik. Redan vid arton års ålder publicerade han sitt första verk om ljusstrålar, där han matematiskt förutspådde det fysiska fenomenet konisk refraktion. Senare experimentella bevis för detsamma gav honom 1835 en Royal Medal från Royal Society of London och ett riddarskap från Irlands lordlöjtnant. I Trinity Colleges fysikdepartements profil om Hamilton beskriver de hur det här var den första gången ett fysiskt fenomen förutspåddes matematiskt och sedan bevisats. [Dub24]

Hamilton stannade kvar vid Dunkirk Observatory till sin död 1865. Under sitt liv hade han gift sig och fått tre barn. Han visade intresse inte bara inom matematik, men även poesi och irländsk politik. [Lew04]

2.2 Hamiltons matematik

Hamiltons namn dyker upp på flera ställen inom fysik och matematik. I fysiken hittas till exempel *Hamiltonisk mekanik*, vilket var ett nytt sätt att arbeta med ekvationer för rörelse. Teknikerna som Hamilton utvecklade har visat sig vara en viktig del i flera delar av fysiken, som elektromagnetism eller kvantmekanik.

1843 kom Hamilton fram till sina *kvaternioner*, som sedan kvarstod som ett arbetsområde för honom under resten av hans liv. Upptäckten kom ifrån att Hamilton under en period grubblat över att utvidga de komplexa talen, som ju befinner sig i ett tvådimensionellt plan, till en liknande matematik för det tredimensionella rummet. Det var känt att en punkt kan uttryckas som koordinater och hur de adderas med varandra. Hamilton kämpade istället med att definiera multiplikation i tre dimensioner.

I ett brev till hans son Archibald Hamilton senare i livet beskriver han dels hur hans söner frågade honom varje morgon om han kunde multiplicera vad han i brevet kallar *triplets*, men senare också hur han kom på kvaternionerna. Han beskriver hur han den 16 oktober 1843 gick med sin fru längs Royal Canal och fick ett plötsligt infall och såg lösningen framför sig. Han beskriver också hur han ristade sin lösning i Brougham Bridge: $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. [GDM82] Brons egentliga namn är *Broome Bridge*, där det numera sitter en minnestavla till Hamiltons snilleblxt som

lyder

Here as he walked by
on the 16th of October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication
 $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$
& cut it on a stone of this bridge.

Sedan 1990 har matematiker gått i Hamiltons fotspår då matematikern Tony O’Farrell vid Maynooth College instiftade *Hamilton Walk*, som avgår vid Duns Kirk Observatory och avslutar vid Broome Bridge. I ett pressmeddelande inför promenaden 2018 beskrivs kvaternioner som något för tiden helt nytt inom matematiken och en viktig grund för vetenskapliga genombrott. Där ges exempel som Maxwells ekvationer och vektoranalys. Hamilton ansvarar också för att introducera termen *tensor*, om än i ett helt annat sammanhang än matematiker idag använder. [Rel18]

3 Kvaternioner

3.1 Komplexa tal

De komplexa talen har en matematiskt relativt lång historia och första instansen av dem dyker upp i *Ars Magna* av Cardano redan år 1545. Problemet som de löser är ju vad som händer om man försöker att ta kvadratroten ur ett negativt tal. Numera är det imaginära talet i som löser $i = (-1)^2$ välkänt som ett svar på problemet som skulle lösas och det är även välkänt att ett komplext tal med både en reell del och en imaginär del kan uttryckas som $a + bi$, där både a och b är reella. [PC19]

Ett sätt att se på de komplexa talen $\mathbb{C}$ är att de utvidgar den reella tallinjen till ett komplext plan. De följer alla räkneregler för en kropp, inklusive att de är både associativa och kommutativa och vi kan uttrycka att de reella talen bildar en delmängd i $\mathbb{C}$. Det är också välkänt att de komplexa talen kan uttryckas trigonometriskt, som $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ med r som avstånd från origo, samt att förändringar av vinkeln θ innebär en rotation motsols runt origo. Ett ytterligare sätt att framställa ett komplext tal är via matriser, där det komplexa talet $a + bi$ kan

uttryckas som

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

3.2 Hamiltons problem

Under Hamiltons tid var de komplexa talen vedertagna, men linjär algebra som vi ser den idag ännu inte utvecklad. Hamilton hade arbetat fram ett sätt att se på komplexa tal i något som han kallade för *couples*, vilket innebar att han såg på dem som ordnade par av reella tal. Med andra ord kan det komplexa talet $a+bi$ uttryckas i form (a, b) . Han skrev tydliga räkneregler för addition och multiplikation i denna form. För två komplexa tal (a, b) och (c, d) är addition, som förväntat, $(a+c, b+d)$. Multiplikationen får regeln $(ac - bd, ad + bc)$, som naturligt faller ut som de reella och imaginära resultaten av $(a+bi)(c+di)$. Idag är det här inget överraskande eller banbrytande, men för Hamilton var det här ett nytt sätt att tänka på de komplexa talen. [Pro23]

Komplexa tal kan användas för att studera ett tvådimensionellt plan och Hamiltons *couples* var ett steg i att nå fram till den logiken. Det var ett sätt att ta det komplexa talplanet och omformulera det i reella koordinater. Det Hamilton nu sökte var ett sätt att beskriva vad han kallade *triplets*, för att beskriva det tredimensionella rummet i liknande koordinater, tillsammans med tydliga algebraiska räkneregler för sådana. Additionen var för honom trivial, där de adderas precis som de komplexa talen. Där Hamilton fick problem var när han skulle definiera den multiplikativa regeln för *triplets*. Han var ute efter en regel likt den för de komplexa talen, som gör att så många räkneregler som möjligt gäller även för hans *triplets*. Problemet Hamilton hade i det här var hur han skulle definiera produkter mellan olika termer. Exempelvis, om han försökte att uttrycka sin *triplet* som $a+bi+cj$ så dyker frågan upp: hur ska blandade termer definieras? En multiplikation som lyder den distributiva lagen ger resultat i bland annat ij , ji och jj , som inte automatiskt hade en tydlig regel. Det finns förstås flera andra sätt han skulle kunnat definiera sin *triplet*, men oavsett så fick han problem. [Pro23]

Lösningen blev till slut *kvaternionerna*. Hamilton insåg att om han utökade till fyra dimensioner så fanns det ett tydligt sätt att definiera multiplikation. För sina kvaternioner kunde Hamilton sedan införa mycket av det han redan kunde för komplexa tal. Till exempel har kvaternionerna en norm, som Hamilton kallade för *tensor* (även om innebörden skilde sig från den moderna).

3.3 Definition och räkneregler

Kvaternioner är en utökning av de komplexa talen och bildar ett 4-dimensionellt rum. Mängden av kvaternioner kallas $\mathbb{H}$, uppkallat efter Hamilton.

Definition 3.1. En kvaternion q definieras som $q = a + bi + cj + dk$ där a, b, c och d hör till de reella talen och i, j och k är standardbasen för kvaternioner. De följer regeln som Hamilton ska ha ristat in på Brougham Bridge i Dublin:

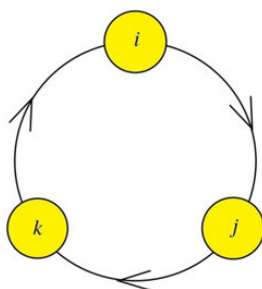
$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

Från detta samband kan räknereglerna för kvaternioner härledas. Genom att använda den sista likheten, $ijk = -1$ och multiplikation från vänster eller höger. Som ett exempel, om likheten multipliceras från höger med k så fås $ijk^2 = -k$. Eftersom $k^2 = -1$ kommer det första sambandet $ij = k$ ut.

Genom att kvadrera uttrycket fås $ijij = k^2 = -1$. Multiplikation från vänster med i och från höger med j ger $i(ijij)j = -ij$, vilket förenklas till $i^2jij^2 = -ij$. Eftersom $ij = k$, så fås sammantaget $ji = -k$. Med liknande operationer så härleds räknereglerna för kvaternioner:

$$\begin{aligned} ij &= k & ji &= -k \\ ki &= j & ik &= -j \\ jk &= i & kj &= -i \end{aligned}$$

Ett sätt att se på räknereglerna är som en cykel. Två termer bildar den tredje och om bilden nedan följs så blir det svaret positivt om man går medsols, medan motsols ger ett negativt svar. [Gre18]



Figur 1: Kvaternionmultiplikation visualiserat som en ring [Gre18]

I detta är det tydligt att kvaternioner är *icke-kommutativa*, alltså att sambandet $xy = yx$ inte stämmer för alla x och y . I övrigt följer kvaternionerna de vanliga

räknereglerna för alla a, b och c i $\mathbb{H}$,

$$(a + b) + c = a + (b + c) \quad a + 0 = 0 + a \quad a + b = b + a$$

samt att det för alla kvaternioner q finns $-q$ så att $q + (-q) = 0$.

Vad gäller multiplikation är den både associativ och distributiv från vänster och höger.

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Kvaternionerna är kommutativa med reella tal. Om x är ett reellt tal och q en kvaternion gäller alltså $xq = qx$.

För att multiplicera kvaternioner i formen $q = a + bi + cj + dk$ används den distributiva lagen. Eftersom de är icke-kommutativa så måste särskild hänsyn tas till vilken ordning termerna som multipliceras har. För att räkna ut produkten av två kvaternioner, $q = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ och $p = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ multipliceras de term för term. Det kommer att leda till en ny kvaternion, eftersom multiplikation av i, j eller k alltid ger en av dem tillbaka. Exempelvis kommer termer som c_1b_2ji och $d_1d_2k^2$, vilka respektive ger termerna $-c_1b_2k$ och $-d_1d_2$. Sammantaget blir resultatet

$$\begin{aligned} qp &= (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) \\ qp &= a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ &\quad + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k \end{aligned}$$

Resultatet kan alltså förenklas till en ny kvaternion. Det innebär att multiplikationen är sluten, eftersom man alltid får ett resultat i samma form som faktorerna.

3.4 Konjugat, norm och invers

För alla kvaternioner kan även dess konjugat definieras, som är i linje med konjugat för de komplexa talen.

Definition 3.2. Konjugatet för en kvaternion q är $\bar{q} = a - bi - cj - dk$

Genom att multiplicera kvaternionen med sitt konjugat kommer det alltid att bli ett reellt tal. Genomförs multiplikationen nedan enligt distributiva lagen så kommer

i slutändan alla icke-reella element ta ut varandra.

$$q\bar{q} = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Den här multiplikationen är, i skillnad mot det normala för kvaternionerna, kommutativ. Det gäller att $q\bar{q} = \bar{q}q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

Definition 3.3. En kvaternions längd (norm) är $|q| = \sqrt{q \cdot \bar{q}} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

Denna definition, sammantaget med multiplikationen av kvaternionen med sitt konjugat, ger sambandet

$$q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2$$

Utifrån konjugatet fås även den multiplikativa inversen, för alla kvaternioner utom $q = 0$,

Proposition 3.4. En kvaternion q har en multiplikativ invers q^{-1} , det vill säga ett element så att $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$. En formel för q^{-1} är $\frac{1}{|q|^2} \cdot \bar{q}$

Bevis. För att bevisa att $q^{-1} = \frac{1}{|q|^2} \cdot \bar{q}$ är kvaternionens multiplikativa invers behöver man undersöka om sambandet $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$ stämmer. För formeln ovan är det ett enkelt bevis, eftersom $|q|^2$ är ett reellt tal och kvaternioner är kommutativa med reella tal.

$$qq^{-1} = q \cdot \frac{1}{|q|^2} \cdot \bar{q} = \frac{1}{|q|^2} \cdot q\bar{q} = \frac{1}{|q|^2} \cdot |q|^2 = 1$$

För $q^{-1}q = 1$ är beviset precis detsamma. □

Kvaternionerna är, som tidigare nämnt, generellt icke-kommutativa. Hittills har två speciella fall nämnts där de är kommutativa ($q\bar{q} = \bar{q}q$ och $qq^{-1} = q^{-1}q$). Det finns ytterligare ett specifikt fall som alltid stämmer, som säger att konjugatet av en produkt av kvaternioner är detsamma som produkten av de individuella konjugaten i omvänd ordning. Alltså,

Proposition 3.5. $\overline{qp} = \bar{p}\bar{q}$ stämmer för alla kvaternioner q och p .

Bevis. Ett bevis för det grundar sig i att kvaternioner, per definition, är en summa av en reell term, en i-term, en j-term och en k-term. Om det går att bevisa att sambandet ovan gäller separat för par av kvaternioner som bara innehåller en term så räcker det sedan att bevisa att det också gäller för en summa av sådana par. Eftersom en kvaternion består av fyra termer finns det 16 totala kombinationer av

desså. Det är uppenbart att det gäller för alla fall där den ena faktorn är reell. Det blir till exempel $\overline{k \cdot 1} = -k$ och $\overline{1 \cdot k} = -k$. De andra kombinationerna går att testa var för en, men två exempel

$$(1) \quad \overline{kj} = \overline{-i} = i \quad (\bar{j})(\bar{k}) = (-j)(-k) = jk = i$$

$$(2) \quad \overline{ij} = \bar{k} = -k \quad (\bar{j})(\bar{i}) = (-j)(-i) = ji = -k$$

I detta gäller förstås också att $\overline{xy} = \overline{yx}$, om x och y är reella tal. Det går alltså att bevisa att sambandet stämmer för alla möjliga kombinationer av $1, i, j$ och k . Därmed är det kvar att bevisa att sambandet gäller för en summa av kvaternioner. Om $q = q_1 + q_2$ och det gäller att $\overline{q_1 p} = (\bar{p})(\overline{q_1})$ och $\overline{q_2 p} = (\bar{p})(\overline{q_2})$ så följer med hjälp av distributiva lagen,

$$\overline{(q_1 + q_2)p} = \overline{q_1 p} + \overline{q_2 p} = (\bar{p})(\overline{q_1}) + (\bar{p})(\overline{q_2}) = (\bar{p})(\overline{q_1 + q_2})$$

Att sambandet fungerar för summan av kvaternioner samt att det fungerar för varje individuellt par av termer tillsammans ger att det alltså alltid gäller att $\overline{qp} = \bar{p}\bar{q}$. Det här beviset faller i linje med ett från matematikern Rich Schwartz. [Sch14]

□

Det här sambandet, i kombination med den tidigare regeln $|q|^2 = q\bar{q}$, leder fram till att för kvaternionerna gäller alltid att $|qp| = |q||p|$. Det följer från att multiplikationen är associativ, samt att normen är ett reellt tal,

$$|qp|^2 = (qp)\overline{(qp)} = qp\bar{p}\bar{q} = q \cdot |p|^2 \bar{q} = |p|^2 q\bar{q} = |p|^2 |q|^2 = |q|^2 |p|^2$$

$$|qp| = |q||p|$$

3.5 Skälärdel och vektordel

De komplexa talen kan uttryckas på flera sätt och alla sätt har sina för- och nackdelar. Ett komplext tal $z = a + bi$ kan också uttryckas $z = \text{Re}(z) + i\text{Im}(z)$ eller som ett par koordinater, (a, b) . Denna logik följer för kvaternionerna. Ett kvaternion $q = a + bi + cj + dk$ kan uttryckas i formen

$$q = \text{Re}(q) + \text{Ve}(q)$$

där $Re(q) = a$ och $Ve(q) = bi + cj + dk$. $Re(q)$ är skalärdelen av kvaternionen och alltid ett reellt tal. $Ve(q)$ är vektordelen, som även kallas en *ren kvaternion*. Kvaternionerna som helhet gör upp det fyrdimensionella rummet $\mathbb{H}$ och de rena kvaternionerna identifieras med $\mathbb{R}^3$. Flera av definitionerna i föregående delar kan uttryckas kortfattat på det här sättet. Till exempel så är $\bar{q} = Re(q) - Ve(q)$.

Multiplikation av två kvaternioner har en definition genom att skriva dem i skalärdel och ren kvaternion. Från tidigare, om $q = a_1 + b_1i + c_1j + d_1k$ och $p = a_2 + b_2i + c_2j + d_2k$ multipliceras så blir resultatet

$$\begin{aligned} qp &= (a_1 + b_1i + c_1j + d_1k)(a_2 + b_2i + c_2j + d_2k) \\ qp &= a_1a_2 - b_1b_2 - c_1c_2 - d_1d_2 + (a_1b_2 + b_1a_2 + c_1d_2 - d_1c_2)i \\ &\quad + (a_1c_2 - b_1d_2 + c_1a_2 + d_1b_2)j + (a_1d_2 + b_1c_2 - c_1b_2 + d_1a_2)k \end{aligned}$$

Viss omstrukturering ger

$$\begin{aligned} qp &= a_1a_2 - (b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) \\ &\quad + (a_1b_2 + b_1a_2)i + (a_1c_2 + c_1a_2)j + (a_1d_2 + d_1a_2)k \\ &\quad + (c_1d_2 - d_1c_2)i + (d_1b_2 - b_1d_2)j + (b_1c_2 - c_1b_2)k \end{aligned}$$

Genom att använda definitionerna för skalärprodukt och vektorprodukt kan detta omformuleras till

$$qp = Re(q)Re(p) - Ve(q) \cdot Ve(p) + Re(p)Ve(q) + Re(q)Ve(p) + Ve(q) \times Ve(p)$$

I den här formen är det inte fullt lika uppenbart att multiplikationen ger en ny kvaternion, men eftersom vektorprodukten för en vektor i $\mathbb{R}^3$ alltid ger tillbaka en ny vektor i $\mathbb{R}^3$ så går det att utläsa även här.

Genom att uttrycka kvaternionerna på det här sättet går det också att bevisa $\overline{qp} = \bar{p}\bar{q}$, som i förra beviset krävde flera steg.

$$\begin{aligned} \overline{qp} &= Re(q)Re(p) - Ve(q) \cdot Ve(p) - Re(p)Ve(q) - Re(q)Ve(p) - Ve(q) \times Ve(p) \\ &= Re(p)Re(q) - (-Ve(p)) \cdot (-Ve(q)) + Re(p)(-Ve(q)) \\ &\quad + Re(q)(-Ve(p)) + (-Ve(p)) \times (-Ve(q)) = \bar{p}\bar{q} \end{aligned}$$

I det här beviset används att skalärprodukten är kommutativ, samt att vektorprodukten är anti-kommutativ.

Två rena kvaternioner q och p har ingen skalärdel. Därför stämmer det att $Ve(q) = q$ och $Ve(p) = p$. Om dessa multipliceras enligt formeln ovan kommer först och främst alla delar som innehåller en skalärdel försvinna. För *rena kvaternioner* stämmer alltså att

$$qp = -q \cdot p + q \times p$$

3.6 Enhetskvaternioner

I linjär algebra används enhetsvektorer som en term för en vektor med längd 1. Motsvarande så är en enhetskvaternion en kvaternion med längd 1. Hamilton gav en sådan enhetskvaternion namnet *versor*.

Definition 3.6. En enhetskvaternion q är en kvaternion med längd 1, $|q| = 1$

Enligt definitionen av längd 1 innebär att för enhetskvaternioner så är $|q|^2 = |q| = 1$ och därmed också $q\bar{q} = \bar{q}q = 1$. Om det är en ren kvaternion blir det en enhetsvektor i $\mathbb{R}^3$.

Sats 3.7. Kvadraten av en sådan enhetsvektor u kommer alltid att vara $u^2 = -1$.

Bevis. En ren kvaternion kan skrivas $u = bi + cj + dk$ och eftersom $|u|^2 = b^2 + c^2 + d^2 = 1$ följer

$$\begin{aligned} u^2 &= (bi + cj + dk)(bi + cj + dk) \\ &= b^2i^2 + bcij + bdik + bcji + c^2j^2 + cdjk + bdkj + cdkj + d^2k^2 \\ &= -b^2 - c^2 - d^2 \\ &= -(b^2 + c^2 + d^2) \\ &= -1 \end{aligned}$$

□

Mängden av enhetskvaternioner är sluten under multiplikation. Det följer från sambandet $|qp| = |q||p|$, så normen av produkten blir också 1. I och med att normen är 1 för en enhetskvaternion sammanfaller också konjugatet med inversen.

Om två enhetskvaternioner är vinkelräta gäller att de är anti-kommutativa. Utgångspunkten är att produkten av rena kvaternioner kan uttryckas som en summa av skalärprodukt och vektorprodukt, $qp = -q \cdot p + q \times p$. Två enhetsvektorer, u och

v , är vinkelräta. Eftersom skalärprodukten är noll blir

$$uv = u \times v$$

Eftersom vektorprodukten är anti-kommutativ gäller då också att

$$uv = u \times v = -v \times u = -vu$$

3.7 Andra framställningar av kvaternioner

Precis som att de komplexa talen kan uttryckas som en matris kan även kvaternionerna göra detsamma. Med målet att matrisaddition och matrismultiplikation ska motsvara addition och multiplikation för kvaternioner så finns två sätt att uttrycka dem som matriser. Den ena formen bildar en 2x2 komplex matris, medan den andra bildar en 4x4 reell matris. [\[Wik25\]](#)

Matrisen i formen 2x2 blir

$$\begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}$$

I den här formen kan en representation av de komplexa talen komma fram om man begränsar b , c och d till noll parvis. Om $c = d = 0$ fås en diagonal komplex matris som representerar komplexa tal, medan om $b = d = 0$ fås den reella matrisrepresentationen av komplexa tal. Utöver det blir normen för en kvaternion kvadratroten av determinanten för matrisen.

Vad gäller matriser i 4x4 är de inte unika, utan det finns 48 olika varianter. Ett exempel är

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

Förutom att kvaternionerna kan representeras som matriser kan de även skrivas som,

$$q = |q|(\cos(\theta) + u\sin(\theta))$$

där u är en enhetsvektor.

4 Kvaternionerna som ring

4.1 Defintion av grupp och ring

En grupp definieras som en mängd med en binär operator, som i början skrivs $*$, för att senare definieras specifikt för olika grupper. Grupper lyder ett antal axiom, [Big02]

1. Mängden är sluten under $*$. Det innebär att för två element x och y i gruppen så är också $x * y$ i gruppen.
2. Den binära operatören lyder den associativa lagen. Alltså är, för x , y och z i gruppen, $(x * y) * z = x * (y * z)$.
3. Det finns ett enhetselement e så att $x * e = e * x = x$ för alla x i gruppen.
4. Det finns en invers x^{-1} , så att $x * x^{-1} = x^{-1} * x = 1$ för alla x i gruppen.

Att notera är att det inte finns några krav för att operatören behöver vara kommutativ. En grupp som utöver dessa axiom är kommutativ kallas en *kommutativ grupp* eller en *abelsk grupp*, uppkallat efter den norske matematikern Niels Henrik Abel. Axiomen för en grupp ger upphov till flera olika typer av grupper. Till exempel kan symmetrier, som rotationen av en liksidig triangel, eller heltalen $\mathbb{Z}$ med avseende på addition beskrivas som en grupp.

För vissa grupper kan det finnas två olika binära operatorer. Heltalen $\mathbb{Z}$ bildar en grupp med operatören $+$, men bildar också en grupp med operatören $\times$. Mängder med två binära operatorer på det sättet kallas för en ring.

Definitionen av en ring är en mängd med två binära operatorer $+$ och $\times$, som följer följande regler, [Big02]

1. Ringen är en abelsk grupp för addition, så att alla axiom ovan samt kommutativitet gäller.
2. Multiplikation är sluten, associativ och distributiv över addition, samt har ett enhetselement.

Igen, att notera, så är kommutativ multiplikation inte ett krav för en ring. Om den är kommutativ kallas den för en *kommutativ ring*.

4.2 Kvaternionring

För att se hur kvaternionerna faller inom definitionen för en ring kan de checkas av mot kriterierna. Kvaternionerna bildar en abelsk grupp under addition,

1. Addition av två kvaternioner ger alltid en ny kvaternion som resultat.
2. Addition av två kvaternioner är associativ.
3. 0 är en kvaternion, som ger $x + 0 = 0 + x = x$ om x är en kvaternion.
4. Additiva inversen av kvaternionen x är $-x$.
5. Addition av kvaternioner är kommutativ.

Multiplikationen är sluten, som visats tidigare. Den är även associativ och distributiv över addition, så därmed bildar kvaternionerna en ring. För en ring kallas alla element som lyder $xq = qx$ för dess centrum. I det här fallet är det alla kvaternioner där vektordelen är noll.

5 Rotationer

5.1 Vanliga representationer

Rotationer representeras ofta genom *rotationsmatriser*. Exempelvis motsvarar matrisen

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

en rotation av en punkt i det tvådimensionella planet med en vinkel θ motsols runt origo.

För att utvidga det till tre dimensioner kan man se det som rotationer någon av x -, y - eller z -axeln.

$$R_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$R_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$R_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Genom att använda dessa matriser kan man rotera en punkt i tre dimensioner till alla riktningar.

Ett annat sätt att representera rotationer är genom *Eulervinklar*. Genom tre rotationer (förändringar i vinklar) kan alla riktningar nås.

5.2 Rotationer genom kvaternioner

Kvaternioner är fyrdimensionella och finns i $\mathbb{R}^4$. En ren kvaternion, å andra sidan, motsvarar en vektor som är en del av $\mathbb{R}^3$. Genom att använda kvaternioner kan man beskriva rotationer i $\mathbb{R}^3$ med hjälp av en enkel funktion.

Sats 5.1. *Identifiera $\mathbb{R}^3$ med mängden rena kvaternioner. Funktionen $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,*

$$p \mapsto xp\bar{x}$$

är en rotation kring vektorn u med vinkel 2θ , där $x = \cos(\theta) + u \sin(\theta)$ är en kvaternion med längd 1.

Bevis. För att visa det här är en start i att vektorn p kan delas upp i två delar, $p = p_u + p_v$, där p_u är parallell mot u och p_v är vinkelrät mot u .

Om man kallar funktionen $T(p) = xp\bar{x}$ kan den skrivas som

$$T(p) = x(p_u + p_v)(\cos(\theta) - u\sin(\theta))$$

Eftersom det är kvaternioner så är de distributiva,

$$T(p) = x(p_u \cos(\theta) - p_u u \sin(\theta) + p_v \cos(\theta) - p_v u \sin(\theta))$$

Om två rena kvaternioner multipliceras gäller sambandet från tidigare,

$$ab = -a \cdot b + a \times b$$

I och med skalärproduktens och vektorproduktens egenskaper gäller att om a är

parallell eller vinkelrät med b ,

$$a \parallel b : ab = -a \cdot b + a \times b = -a \cdot b + 0 = -b \cdot a + b \times a = ba$$

$$a \perp b : ab = -a \cdot b + a \times b = 0 - b \times a = b \cdot a - b \times a = -ba$$

Med andra ord är multiplikationen kommutativ om kvaternionerna är parallella och anti-kommutativ om de är vinkelräta. Genom att använda det och definitionerna av p_u och p_v så kan funktionen skrivas om enligt

$$\begin{aligned} T(p) &= x(p_u \cos(\theta) - p_u \sin(\theta) + p_v \cos(\theta) - p_v \sin(\theta)) \\ &= x(p_u \cos(\theta) - u p_u \sin(\theta) + p_v \cos(\theta) + u p_v \sin(\theta)) \\ &= x((\cos(\theta) - u \sin(\theta))p_u + (\cos(\theta) + u \sin(\theta))p_v) \\ &= x(\bar{x}p_u + x^2 p_v) \\ &= x\bar{x}p_u + x^2 p_v \end{aligned}$$

Eftersom x är en enhetskvaternion gäller att $x\bar{x} = |x|^2 = 1$, så då blir

$$\begin{aligned} T(p) &= |x|^2 p_u + x^2 p_v \\ &= p_u + (\cos(\theta) + u \sin(\theta))(\cos(\theta) + u \sin(\theta))p_v \\ &= p_u + (\cos^2(\theta) + 2\cos(\theta)\sin(\theta)u + \sin^2(\theta)u^2)p_v \end{aligned}$$

I sats 3.7 om enhetskvaternioner visades att kvadraten av en enhetsvektor u alltid är $u^2 = -1$.

$$\begin{aligned} T(p) &= p_u + (\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) + 2\cos(\theta)\sin(\theta)u)p_v \\ &= p_u + \cos(2\theta)p_v + \sin(2\theta)up_v \\ &= p_u + \cos(2\theta)p_v + \sin(2\theta)u \times p_v \end{aligned}$$

Där den sista likheten kommer från att u och p_v är vinkelräta. Elementet som är parallellt med u avbildas alltså på sig själv. p_v , vinkelrät med u samt $u \times p_v$, per vektorproduktens definition, vinkelrät mot både u och p_v , roteras med vinkeln 2θ , vilket var det som skulle bevisas. $\square$

5.3 Tillämpningar

I och med datorer och att det numera räknas på rotationer i mängder av system har kvaternionerna fått ett nytt uppsving. De har användning i många olika applikatio-

ner, till exempel datorgrafik, molekylodynamik och navigation. En stor fördel med kvaternioner jämfört rotationsmatriser är att de är mindre och bara behöver fyra siffror jämfört matrisens nio. Det är även enklare att göra vissa saker i kvaternioner jämfört rotationsmatriser eller Eulervinklar. Givet en axel och en vinkel kan man konstruera en kvaternion och motsatsen gäller också, att från en given kvaternion kan man få ut en axel och vinkel. Ett annat problem som kvaternionerna inte har är att de inte är i riskzonen för avrundningsfel på samma sätt som andra metoder. [SZ25]

Ett stort användningsområde för kvaternioner är inom datorspelsvärlden, där de kan användas för att göra jämna rotationer. Det innebär, till exempel, att kameran ska kunna jämnt glida från en punkt till en annan utan att verka hackig.

Kvaternioner har inte heller problem med *gimbal lock*, vilket innebär att två av axlarna i en rotation "låses" i varandra och rotationen snarare blir möjlig bara i två dimensioner. [WG21]

6 Frobenius sats

En reell divisionsalgebra definieras som ett reellt vektorrum V med en vektor $1 \in V$ med en multiplikation $V \times V \rightarrow V$ sådan att, [Pet23]

1. $(ax + by)z = a(xz) + b(yz)$ och $x(ay + bz) = a(xy) + b(xz) \quad \forall a, b \in \mathbb{R},$
 $\forall x, y, z \in V$
2. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \quad \forall x, y, z \in V$
3. $1 \cdot x = x \cdot 1 = x \quad \forall x \in V$
4. För alla $x \in V \setminus \{0\}$ finns $x^{-1} \in V$ så att $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$

Den tyske matematikern Ferdinand Georg Frobenius bevisade 1877 Frobenius sats om reella divisionsalgebror.

Sats 6.1. *Frobenius sats: Om ett vektorrum V är en ändligt-dimensionell divisionsalgebra så kommer dess dimension att vara ett, två eller fyra. I så fall motsvarar de $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ respektive $\mathbb{H}$*

Ett bevis för Frobenius sats för reella divisionalgebror har utgångspunkt i att anta att dimensionen för vektorrummet är minst två. Om dimensionen är ett så är det enkelt att se att det motsvarar de reella talen eftersom 1 är en bas.

Om dimensionen för vektorrummet V är strikt större än 1 och det finns en vektor x i $V \setminus \text{Span}\{1\}$, så finns även ett minsta tal d , så att vektorerna $1, x, x^2, \dots, x^d$ är linjärt beroende. Detta eftersom vektorrummet är ändligt-dimensionellt. Det går därför att säga att

$$a_d x^d + a_{d-1} x^{d-1} + \dots + a_0 1 = 0$$

där a_i hör till de reella talen och $a_d \neq 0$. Om

$$p(t) = a_d t^d + \dots + a_0$$

motsvarar det att $p(x) = 0$. Här används att för alla $x \in V$ så finns $\mathbb{R}[t] \rightarrow V$ så att polynomet p kan evalueras på x . Ett polynom kan alltid skrivas som en produkt av linjära faktorer och andragsgradsfaktorer med två komplexkonjugerade rötter. Därför borde det för $\deg(p) > 2$ finnas faktorer så att $p(x) = p_1(x)p_2(x) = 0$, där graden av p_1 och p_2 är mindre än graden för p . Om den ekvationen ska stämma så måste antingen $p_1(x) = 0$ eller $p_2(x) = 0$ vara sant, eftersom multiplikation av två nollskilda faktorer inte kan ge ett svar som är 0. Det här leder till en motsägelse. Graden för p_1 är e , som är mindre än graden för p , som ju per definition har graden d . Eftersom d är det minsta talet då vektorerna är linjärt beroende leder det till att vektorerna $1, x^2, \dots, x^e$ är linjärt oberoende och därmed finns ingen lösning för $p_1(x) = 0$, förutom att alla dess koefficienter är noll. Exakt samma gäller om man tittar på p_2 . Därmed kan inte polynomet faktoriseras med polynom i lägre grad. Slutsatsen kan då dras att polynomet $p(t)$ antingen har graden 1 eller 2.

Om graden för $p(t)$ är 1 fås polynomet $a_1 x + a_0 1 = 0$. Det medför att x är reellt, vilket motsäger definitionen av den vektorn.

Om graden för $p(t)$ istället är 2 fås $a_2 x^2 + a_1 x + a_0 1 = 0$, som kommer att ha komplexa rötter. Om det antas att $a_2 = 1$ kan det kvadratkompletteras till

$$\left(x + \frac{a_1}{2} 1\right)^2 - \left(\frac{a_1^2}{4} - a_0\right) 1 = 0$$

Vilket då motsvarar

$$\left(x + \frac{a_1}{2} 1\right)^2 = \left(\frac{a_1^2}{4} - a_0\right) 1$$

Eftersom polynomet måste ha komplexa rötter så kommer högerledet vara negativt.

Därför kan man kalla den för $-\alpha^2$,

$$-\alpha^2 = \left(\frac{a_1^2}{4} - a_0 \right)$$

Definiera i som

$$i := \frac{x}{\alpha} + \frac{a_1}{2\alpha} \mathbb{1}$$

Då blir

$$i^2 = \left(\frac{x}{\alpha} + \frac{a_1}{2\alpha} \mathbb{1} \right)^2 = \frac{1}{\alpha^2} \left(x + \frac{a_1}{2} \mathbb{1} \right) = \frac{1}{\alpha^2} \cdot (-\alpha^2) \mathbb{1} = -1$$

Därmed gäller att om dimensionen för V är 2, så motsvarar det de komplexa talen.

Om dimensionen för V är strikt större än 2 så definieras först $W = \text{Span}\{\mathbb{1}, x\}$ där $x \in V \setminus \text{Span}\{\mathbb{1}\}$ så att $W \cong \mathbb{C}$ och $i \in W$, som konstruerades i föregående del.

Lemma 6.2. *Inget element i $V \setminus W$ kommuterar med i .*

Bevis. Om man antar att det finns ett y i $V \setminus W$ som uppfyller $iy = yi$ gäller då också att $iy^q = y^q i$ för alla q . I samma anda som det tidigare beviset kan man konstruera ett polynom utifrån det. Om man tar ett minsta d så att

$$\mathbb{1}, i, y, iy, y^2, iy^2, \dots, y^d, iy^d$$

är linjärt beroende så gäller att, för reella a_i och b_i ,

$$a_d y^d + b_d i y^d + \dots + a_0 \mathbb{1} + b_0 i = 0$$

Om man låter

$$p(t) = (a_d + ib_d)t^d + \dots + (a_0 + ib_0)$$

så är det ett polynom med komplexa koefficienter. Om polynomet p ska vara väldefinierat så finns en ring-homomorfism, $\mathbb{C}[t] \rightarrow V$, så att $p(t)$ kan evalueras på alla $y \in V$ och därmed krävs att y kommuterar med i . Följer man samma argument som tidigare kan $p(t)$ inte skrivas som en produkt av polynom i lägre grad. Det leder till en motsägelse. Ett polynom med komplexa koefficienter kan alltid skrivas i linjära faktorer, vilket då innebär att $p(t)$ maximalt kan ha graden ett. Det ger

$$a_1 y + b_1 i y + a_0 \mathbb{1} + b_0 i = 0$$

Löser man ut det för y så fås att y kan uttryckas i termer av i och 1 , vilket säger emot definitionen av y . Alltså är det inte möjligt att uttrycka detta polynom utanför W och visar att y inte kommuterar med i . $\square$

Med utgångspunkt i det blir $W = \{x \in V \mid xi = ix\}$ och D definieras som $D = \{x \in V \mid xi = -ix\}$. Att notera är att det inte finns något element gemensamt mellan W och D .

Lemma 6.3. *Varje $x \in V$ har en unik summa av en vektor i W och en vektor i D .*

Bevis. Om man låter

$$x = \frac{1}{2}(x - xxi) + \frac{1}{2}(x + xxi)$$

där $(x - xxi)$ finns i W och $(x + xxi)$ finns i D så ser man att varje vektor kan skrivas som en summa. För att se att $(x + xxi)$ finns i D kan en enkel beräkning göras. Om $z = x + xxi$,

$$iz = ix + i^2xi = ix - xi$$

$$zi = xi + xxi^2 = xi - ix$$

Därmed är $iz = -zi$ och ligger därför i D . Motsvarande kan göras för W .

För att bevisa att den är unik antas motsatsen, att det finns två summor $x = w + d = w' + d'$, där $w, w' \in W$ och $d, d' \in D$. Det ger att $w - w' = d' - d$. Eftersom W och D inte har några element gemensamt leder det till att $w = w'$ och $d = d'$. $\square$

Om två element i W och D multipliceras med varandra gäller följande räkneregler,

$$(1) \quad x \in W, y \in D \Rightarrow xy \in D$$

$$(2) \quad x \in D, y \in D \Rightarrow xy \in W$$

Sats 6.4. *Om $y \in D \setminus \{0\}$ är $\{y, iy\}$ en bas för D .*

Bevis. För att visa det behöver y och iy vara linjärt oberoende samt spänna upp D . Vi börjar med att visa att de är linjärt oberoende. Om $ay + biy = 0$, där a och b är reella tal, multipliceras med y^{-1} fås $a\mathbb{1} + bi = 0$, så $a = b = 0$ och y och iy är linjärt oberoende.

I beviset för att y och iy spänner upp D behövs att y^{-1} också finns i D . Eftersom $i^{-1} = -i$,

$$iy^{-1} = -i^{-1}y^{-1} = -(iy)^{-1} = -(-yi)^{-1} = -y^{-1}(-i)^{-1} = -y^{-1}i$$

Eftersom i D gäller $xi = -ix$, så är därmed $y^{-1} \in D$.

För en godtycklig vektor $u \in D$. I och med räkneregeln (2) ovan, så gäller därmed att $uy^{-1} \in W$. Det innebär att $uy^{-1} = a1 + bi$ för några $a, b \in \mathbb{R}$. Multiplikation i båda leden med y ger $u = ay + biy$. Därmed kan en vektor i D uttryckas i termer av y och iy och de spänner alltså upp D . Därmed har vektorrummet D två dimensioner. $\square$

Eftersom varje vektor i V , från Lemma 6.3, kan uttryckas som en summa av en vektor i W och en vektor i D följer att

$$\dim(V) = \dim(W) + \dim(D) = 2 + 2 = 4$$

Kvar är då att visa att $V \cong \mathbb{H}$ i fyra dimensioner. På precis samma sätt som när i konstruerades tidigare går det att konstruera ett $j \in D$ så att $j^2 = -1$. Eftersom D kan spännas upp av j och ij från föregående resonemang så blir $1, i, j, ij$ en bas för V . Om man kallar $k = ij$, så blir också $k^2 = ijij = -i^2j^2 = -1$, eftersom $k \in D$ gäller att $ij = -ji$, som också ger $ijk = k^2 = -1$. Sammantaget ger det att $V \cong \mathbb{H}$.

Det här beviset för Frobenius sats följer föreläsningssanteckningar från Dan Petersen. [Pet23]

Referenser

- [Big02] Norman Biggs. *Discrete mathematics*. Oxford Univ. Press, Oxford, 2. ed. edition, 2002.
- [Dub24] Trinity College Dublin. Sir william rowan hamilton (1805 – 1865). <https://www.tcd.ie/physics/300/history/exhibition-gallery/sir-william-rowan-hamilton/>, 2024. Accessed: April 9, 2025.
- [GDM82] Robert Perceval Graves and Augustus De Morgan. *Life of Sir William Rowan Hamilton including selections from his poems, correspondence, and miscellaneous writings*, volume 2. Hodges, Figgis: Longmans, Green, 1882.
- [Gre18] Niels Gresnigt. Braids, normed division algebras, and standard model symmetries. *Physics Letters B*, 783, 03 2018. doi:10.1016/j.physletb.2018.06.057.
- [Lew04] Albert C. Lewis. *Hamilton, Sir William Rowan (1805–1865), mathematician*. Oxford University Press, 09 2004. URL: <https://www.oxfordjournals.org/abstract/doi/10.1093/acprof:oso/9780195178938.001.0001>.

- <https://www.oxforddnb.com/view/10.1093/ref:odnb/9780198614128.001.0001/odnb-9780198614128-e-12148>, doi:10.1093/ref:odnb/12148.
- [PC19] Juan Ponce Campuzano. Complex analysis a visual and interactive introduction. https://complex-analysis.com/content/brief_history.html, 02 2019.
- [Pet23] Dan Petersen. Lecture notes från kursen fördjupning till matematik 1, 2023.
- [Pro23] James Propp. Hamilton’s quaternions, or, the trouble with triples. <https://mathenchant.wordpress.com/2023/05/17/hamiltons-quaternions-or-the-trouble-with-triples/>, Dec 2023.
- [Rel18] Maynooth University Press Release. Hamilton walk 2018. <https://archive.maths.nuim.ie/hamiltonwalk/HamiltonWalk18.pdf>, 2018. URL: <https://archive.maths.nuim.ie/hamiltonwalk/HamiltonWalk18.pdf>.
- [Sch14] Rich Schwartz. Quaternions and groups, Oct 2014. URL: <https://www.math.brown.edu/reschwar/INF/handout7.pdf>.
- [SZ25] Rune Suhr and Gustav Zickert. Vad är ett tal? https://www.math-stockholm.se/polopoly_fs/1.669722.1550155096!/kompendium.pdf, May 2025.
- [WG21] Justin Wyss-Gallifent. Math431: Gimbal lock, Nov 2021. URL: https://math.umd.edu/~immortal/MATH431/book/ch_gimballock.pdf.
- [Wik25] Wikipedia contributors. Quaternion — Wikipedia, the free encyclopedia. <https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Quaternion&oldid=1289880454>, 2025. [Online; accessed 19-May-2025].