



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Möbiustransformationer

av

Marcus Strandman

2024 - No L1

Möbiustransformationer

Marcus Strandman

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Alan Sola

2024

Sammanfattning

I detta arbete undersöks Möbiustransformationer, vilka är en sorts konform avbildning inom komplex analys. Genom att introducera grundläggande begrepp som komplexa tal, analytiska funktioner och matrisrepresentationer presenteras Möbiustransformationernas teori och tillämpningar.

Inledningsvis definieras viktiga teoretiska begrepp som Riemannsfären och hur den kopplas till Möbiustransformationer. Sedan utforskas Möbiustransformationernas definition och egenskaper, som inverser, sammansättning och dess geometriska tolkning.

Fixpunkterna hos Möbiustransformationer och deras klassificering diskuteras.

Diskriminanten $D = \text{tr}(M)^2 - 4 \det(M)$ till en andragsgradsfunktion beskriven med hjälp av operationer från linjär algebra och vår definition av funktionen $\tau(M)$ visar sig vara viktiga verktyg i klassificeringsprocessen.

Transformationerna kan delas in i fyra kategorier: paraboliska, elliptiska, loxodromiska och hyperboliska.

Avslutningsvis introduceras Riemanns avbildningssats och Möbiustransformationernas samband med satsen diskuteras kort. Exempel på tillämpningar inom matematik, fysik, datorgrafik och kartografi tack vare transformationernas förmåga att lokalt bevara vinklar ges. Den förmågan gör transformationerna till ett kraftfullt verktyg för att lösa komplexa geometriska problem.

Genom en kombination av rigorös teori och konkreta exempel ämnar detta arbete att ge en förståelse för Möbiustransformationernas matematiska struktur och hur de kan användas.

Abstract

This paper studies Möbius transformations, which are a type of conformal mapping within the field of complex analysis. Elementary concepts such as complex numbers, analytic functions, and matrix representations are introduced to present the theory and applications of Möbius transformations.

First, important theoretical concepts, such as the Riemann sphere, are introduced, along with their connection to the theory of Möbius transformations. Next, the definition and properties of Möbius transformations are explored, including the inverse, composition, and geometrical interpretation.

The fixed points of Möbius transformations, and their classification, are discussed. The discriminant $D = \text{tr}(M)^2 - 4 \det(M)$ of a quadratic equation described in terms of elementary operations from linear algebra and our definition of the function $\tau(M)$ proves to be important tools in the process of classification.

The transformations can be divided into four categories: parabolic, elliptic, loxodromic, and hyperbolic.

Finally, the Riemann mapping theorem is introduced, and the connection between Möbius transformations and the Riemann mapping theorem is briefly discussed. Examples of applications in mathematics, physics, computer science, and cartography are provided, highlighting the transformation's ability to locally preserve angles. This property proves to be a powerful tool for solving complex geometrical problems.

By combining rigorous theory with concrete examples, this paper aims to provide an understanding of Möbius transformations' mathematical structure and how they are used.

Förord

Jag vill rikta ett stort tack till min handledare Alan Sola för våra trevliga möten och diskussioner, samt för hans konstruktiva kritik, vägledning och uppmuntran genom hela processen.

Tack till min fästmö Melissa för ditt tålamod och stöd under min studietid. Du har fått höra mer om matematik än du någonsin önskat, men har ändå stöttat mig hela vägen.

Innehåll

1	Introduktion	9
2	Grundläggande teori	10
2.1	Komplexa tal	10
2.2	Analytiska funktioner	12
2.3	Matrisen för en linjär avbildning	14
2.4	Riemannsfären	15
3	Konforma avbildningar	18
3.1	Konformalitet	18
4	Möbiustransformationer	21
4.1	Definition och grundläggande egenskaper	21
4.2	Sammanättning och invers	24
4.3	Geometrisk tolkning	26
5	Klassificering av Möbiustransformationer	28
5.1	Fixpunkter	28
5.2	Paraboliska transformationer	30
5.3	Elliptiska transformationer	31
5.4	Loxodromiska transformationer	33
5.5	Hyperboliska transformationer	35
6	Möbius och Riemann	37
6.1	Riemanns avbildningssats	37
6.2	Möbius och Riemanns avbildningssats	39
6.3	Något om tillämpningar	39
7	Referenser	40

1 Introduktion

Avbildningar är ett grundläggande koncept inom matematik och beskriver relationen mellan två mängder. Begreppen “avbildning” och “transformation” kommer att användas synonymt i detta arbete. En särskild typ av avbildning är en funktion, vilken kan definieras som en regel som tilldelar varje element i en mängd X , kallad definitions-
mängden, ett unikt element i en annan mängd Y , kallad värdemängden.

En funktion $f : X \rightarrow Y$ avbildar alltså varje element $x \in X$ till ett specifikt värde $f(x) \in Y$.

Funktioner är centrala inom matematik och används för att modellera och beskriva relationer mellan olika storheter.

Inom reell och komplex analys spelar funktioner en viktig roll och vi kan förstå dem genom att studera deras egenskaper, såsom kontinuitet och derivator. Detta gör det möjligt att exempelvis förstå hur en storhet ändras.

Inom algebra studeras funktioner i form av homomorfier, vilka beskriver strukturbevarande avbildningar mellan algebraiska system.

Slutligen används funktioner inom geometri för att beskriva transformationer och avbildningar av rum, där de hjälper till att förstå egenskaper som likformighet och bevarande av vinklar.

En konform avbildning är en speciell typ av funktion inom komplex analys som lokalt bevarar vinklar mellan kurvor. Detta innebär att en konform avbildning bevarar den geometriska strukturen lokalt, vilket gör den till ett kraftfullt verktyg inom matematik och tillämpade vetenskaper. Vi återkommer till att definiera dessa avbildningar mer exakt i senare kapitel, men redan här noterar vi deras grundläggande egenskaper och stora betydelse.

Konforma avbildningar spelar en central roll inom fysik, där de används för att lösa problem inom bland annat strömningsmekanik och elektrostatik, genom att förvandla svårhanterade områden till enklare områden med hjälp av att en konform avbildning bevarar viktiga egenskaper.

Inom kartografi har konforma avbildningar länge använts för att skapa vinkelbevarande projektioner – den kanske mest kända är Mercators projektion, introducerad på 1500-talet av Gerardus Mercator. Problemet med den projektionen är att den förvränger storlekar till fördel för bevarandet av vinklar, vilket får Grönland att se lika stort ut som Afrika.

Inom datorgrafik och animering är det viktigt att objekten som transformeras behåller sin struktur och sina geometriska egenskaper vid rörelse för att undvika förvrängning.

Sammanfattningsvis utgör konforma avbildningar en viktig länk mellan teori och praktik. De används för att förstå geometriska och analytiska strukturer och tillämpas inom många olika områden, från fysikens och kartografins modeller till datorgrafikens visualiseringar.

2 Grundläggande teori

2.1 Komplexa tal

Definition 2.1.1. Ett komplext tal z definieras som

$$z = x + iy$$

där $x, y \in \mathbb{R}$ och i är imaginärenheten med den speciella egenskapen att $i = \sqrt{-1}$.

Låt $z = x + iy$ och låt $\Re(z) = x$ samt $\Im(z) = y$. Ett komplext tal $z = x + iy$ representeras i det komplexa talplanet \mathbb{C} som byggs upp av realaxeln med realkomponent x och imaginäraxeln med imaginärkomponent y .

Räkneregler för komplexa tal

Addition

Addition av två komplexa tal $z_1 = a + bi$ och $z_2 = c + di$ definieras som

$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + i(b + d)$$

och uppfyller följande räkneregler:

Kommutativitet: $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$

Associativitet: $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

Identitet: Det existerar ett element 0 sådant att $z + 0 = z$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

Invers: Det existerar ett element $-z$ sådant att $z + (-z) = 0$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

Subtraktion

Subtraktion av två komplexa tal $z_1 = a + bi$ och $z_2 = c + di$ definieras som

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + i(b - d)$$

och uppfyller följande räkneregler:

Identitet: Det existerar ett element 0 sådant att $z - 0 = z$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

Invers: Det existerar ett element z sådant att $z - z = 0$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

Multiplikation

Multiplikation av två komplexa tal $z_1 = a + bi$ och $z_2 = c + di$ definieras som

$$z_1 \cdot z_2 = (a + bi)(c + di) = ac - bd + i(ad + bc)$$

och uppfyller följande räkneregler:

Kommutativitet: $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$

Associativitet: $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Identitet: Det existerar ett element 1 sådant att $z \cdot 1 = z$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

Invers: Det existerar för alla $z \neq 0$ ett element $z^{-1} = \frac{1}{z}$ sådant att $z \cdot z^{-1} = 1$.

Division

Identitet: Det existerar ett element 1 sådant att $\frac{z}{1} = z$ för alla $z \in \mathbb{C}$.

Invers: Det existerar ett element z sådant att $\frac{z}{z} = 1$ för alla $z \neq 0$.

För $z \neq 0$ gäller att $\frac{1}{z} = \frac{1}{a + bi}$.

Vi multiplicerar täljare och nämnare med konjugatet $a - bi$ och får

$$\frac{1}{a + bi} \cdot \frac{a - bi}{a - bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

vilket uppdelat i real- och imaginärdel blir

$$\frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}i$$

så

$$\frac{1}{z} = \frac{\Re(z)}{|z|^2} - \frac{\Im(z)}{|z|^2}i.$$

2.2 Analytiska funktioner

Låt $f(z) \in C^1(\Omega)$ vara en komplexvärd funktion som har kontinuerliga derivator i en öppen mängd Ω där $\Omega \subset \mathbb{C}$ är en delmängd av det komplexa planet.

Då är följande fyra definitioner av en analytisk funktion ekvivalenta.[1]

Definition 2.2.1. En komplexvärd funktion f är analytisk i en punkt z om den är komplext deriverbar i en omgivning till z , alltså om gränsvärdet

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

existerar.

Definition 2.2.2. En komplexvärd funktion $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ är analytisk i en öppen mängd $\Omega \subset \mathbb{C}$ om den uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{\partial Q}{\partial x} \end{aligned}$$

i hela mängden Ω .

Definition 2.2.3. En komplexvärd funktion $f(z)$ är analytisk om vi i varje punkt z_0 kan utveckla $f(z)$ som en konvergent potensserie

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

i en omgivning till z_0 .

Genom att använda teori från integration av komplexa funktioner kan man visa att

$$a_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}$$

vilket leder till att serieutvecklingen av en analytisk funktion därför kan skrivas som Taylorutvecklingen

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

Definition 2.2.4. En komplexvärd funktion $f(z)$ är analytisk om integrationen av $f(z)$ är lokalt oberoende av vägen, det vill säga att

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = 0$$

vilket innebär att

$$\int_{\Gamma} f(z) dz$$

bara ska bero av start- och slutpunkt för Γ .

För en djupare genomgång av integration av komplexa funktioner, se exempelvis fjärde kapitlet i Saff och Snider [1].

Följande är exempel på funktioner som är analytiska och som inte är analytiska.

Analytiska funktioner

- Alla polynom $p(z)$ är analytiska.
- Rationella funktioner $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ är analytiska förutom i punkter $z \in \mathbb{C}$ där $q(z) = 0$.
- Exponentialfunktionen $f(z) = e^z$ är analytisk.
- De trigonometriska funktionerna $\cos z$, $\sin z$ och $\tan z$ är analytiska.

Icke-analytiska funktioner

- Komplexkonjugatet $f(z) = \bar{z}$ är inte en analytisk funktion.
- Polynom i konjugatet \bar{z} är inte analytiska.
- Absolutbeloppsfunktionen $f(z) = |z|$ är inte analytisk.

2.3 Matrisen för en linjär avbildning

En matris

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

där m och n är två positiva heltal beskriver en linjär transformation, eller med andra ord en linjär avbildning. Matrisens element a_{mn} kan tillhöra de reella eller komplexa talen, beroende på vilket vektorrum matrisen verkar på.

Matriser spelar en central roll i beskrivningen av linjära avbildningar, eftersom varje linjär avbildning på ett vektorrum kan uttryckas som en matrisoperation givet en bas för vektorrummet.

Följande stycke sammanfattar teorin bakom hur en linjär avbildning beskrivs i matristermeter.

Låt \mathbb{R}^n och \mathbb{R}^m vara vektorrum och låt $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ vara en linjär avbildning.

Med andra ord uppfyller T villkoren

$$T(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = T(\vec{u}_1) + T(\vec{u}_2) \quad \forall \vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathbb{R}^n$$

$$T(c\vec{u}) = c T(\vec{u}) \quad \forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}.$$

Givet en bas $\mathbf{V} = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}$ för \mathbb{R}^n kan varje $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ skrivas som en linjärkombination

$$\vec{u} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \cdots + x_k \vec{v}_k$$

där x_1, x_2, \dots, x_k är koordinaterna för \vec{u} givet basen \mathbf{V} .

Låt $\mathbf{W} = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_m\}$ vara en bas för \mathbb{R}^m och låt

$$T(\vec{v}_j) = a_{1j} \vec{w}_1 + a_{2j} \vec{w}_2 + \cdots + a_{mj} \vec{w}_m.$$

Då kan vi uttrycka $T(\vec{v}_j)$ som en kolonnvektor med koordinater $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$ och vi kan bilda matrisen

$$A = [a_{mn}] = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Då $\vec{u} = x_1 \vec{v}_1 + x_2 \vec{v}_2 + \cdots + x_k \vec{v}_k$ har koordinatvektorn $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_k)$ så kan en linjär avbildning $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ representeras med en $m \times n$ -matris A sådan att:

$$T(\vec{u}) = A\vec{x}$$

där \vec{u} är en kolonnvektor med längd n stycken element.

För vidare läsning av linjär algebra, se Anton och Busby [6].

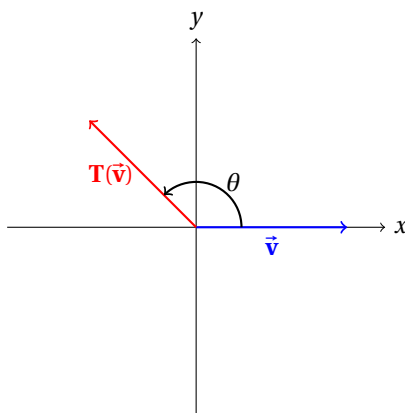
Exempel 2.3.1. Rotation i planet är en linjär avbildning. Låt oss betrakta en rotation med vinkeln θ kring origo. För varje vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ges den roterade vektorn $T(\vec{v})$ av

$$T(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Därmed beskriver matrisen

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

hur varje punkt (x, y) roteras moturs med vinkeln θ kring origo.



Figur 1. Rotation i planet

2.4 Riemannsfären

Definition 2.4.1. Riemannsfären är en utvidgning av det komplexa planet \mathbb{C}

$$\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

där utvidgningen $\hat{\mathbb{C}}$ är unionen mellan det komplexa planet och en punkt i oändligheten.

Geometriskt beskrivs Riemannsfären som en enhetssfär i \mathbb{R}^3 med koordinataxlar x_1, x_2 och x_3 centrerad i origo.

Låt nordpolen $N = (0, 0, 1)$ vara punkten högst upp på sfären och låt $z = x + iy$ vara en punkt i \mathbb{C} . Om vi drar en linje från N till en punkt $z = x + iy$ så skär linjen sfärens yta i en unik punkt. Denna punkt är punkten på sfären som vi identifierar med det komplexa talet $z = x + iy$.

Detta är en bijektion av hela planet med sfären, minus punkten N , då vi identifierar N med ∞ på grund av att om vi går längre och längre ut i det komplexa planet i godtycklig riktning så kommer de motsvarande punkterna på sfären att närma sig N .

Låt sydpolen $S = (0, 0, -1)$ vara punkten längst ned på sfären. Denna punkt identifieras med $z = 0$, vilket förklaras i exempel 2.4.4.

Låt $z = x + iy$ ha koordinaterna $(x, y, 0)$. Vektorn mellan N och z är $\vec{v} = (x, y, 0) - (0, 0, 1) = (x, y, -1)$.

Vi har en punkt N på linjen och en vektor \vec{v} som är parallell med linjen, så vi kan skriva parameterframställningen av linjen som

$$\begin{cases} x_1 = tx \\ x_2 = ty \\ x_3 = 1 - t \end{cases}.$$

Med sfärens ekvation $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ får vi att

$$1 = t^2(x^2 + y^2) + (1 - t)^2$$

och att

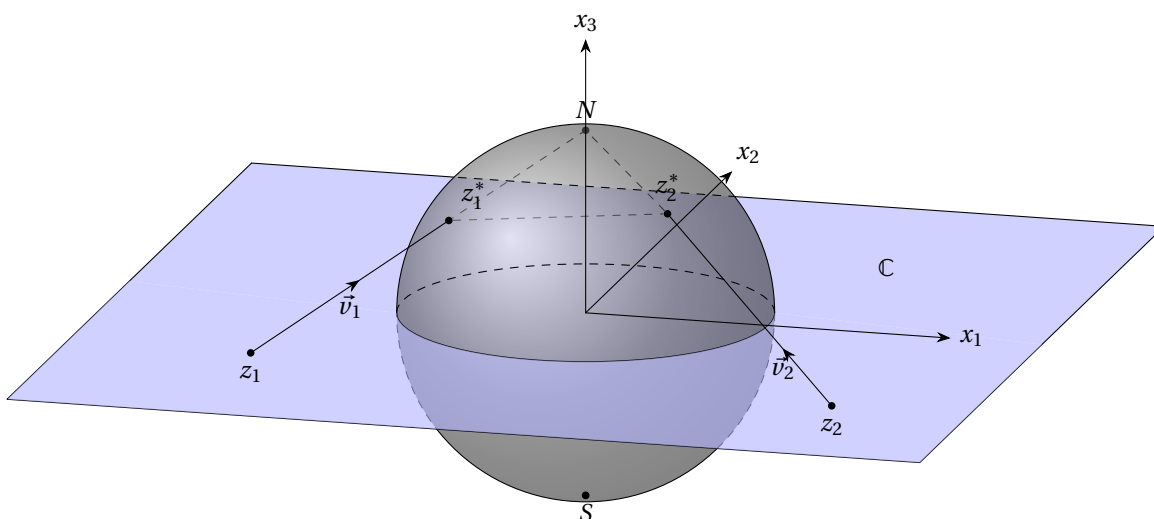
$$t = \frac{2}{x^2 + y^2 + 1} = \frac{2}{|z|^2 + 1}.$$

Ersätter vi detta uttryck för t i parameterframställningen får vi koordinaterna x_1, x_2, x_3 för den punkt på sfären som representerar det komplexa talet $z = x + iy \in \mathbb{C}$.

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1}$$

$$x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1}$$

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}$$



Figur 2. Riemannsfären

Exempel 2.4.2. Låt $z = 3 + 2i$. Med $x = 3$, $y = 2$ och $|z|^2 = x^2 + y^2$ får vi att $|z|^2 = 3^2 + 2^2 = 13$. Detta ger oss koordinaterna

$$x_1 = \frac{6}{14} = \frac{3}{7}$$

$$x_2 = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$$

$$x_3 = \frac{12}{14} = \frac{6}{7}.$$

Detta betyder att punkten $z = 3 + 2i$ i det komplexa talplanet motsvaras av punkten $(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{3}{7}, \frac{2}{7}, \frac{6}{7}\right)$ på Riemannsfären.

För ett komplext tal z sådant att $|z| < 1$ betyder det att z ligger innanför enhetscirkeln, vilket leder till att skärningspunkten på Riemannsfären hamnar på den undre sidan av sfären där x_3 -axeln är negativ.

Exempel 2.4.3. Låt $z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$. Med $|z|^2 = \frac{1}{2}$ och samma uträkningsmetod som ovan får vi koordinaterna

$$x_1 = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$x_2 = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}$$

$$x_3 = \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3}$$

för punkten på Riemannsfären.

Exempel 2.4.4. Låt $z = 0$ vara punkten som associeras med sydpolen $S = (0, 0, -1)$ på Riemannsfären. Detta på grund av att

$$x_1 = \frac{2x}{|z|^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$x_2 = \frac{2y}{|z|^2 + 1} = \frac{0}{1} = 0$$

$$x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

vilket ger oss punkten $(0, 0, -1)$.

3 Konforma avbildningar

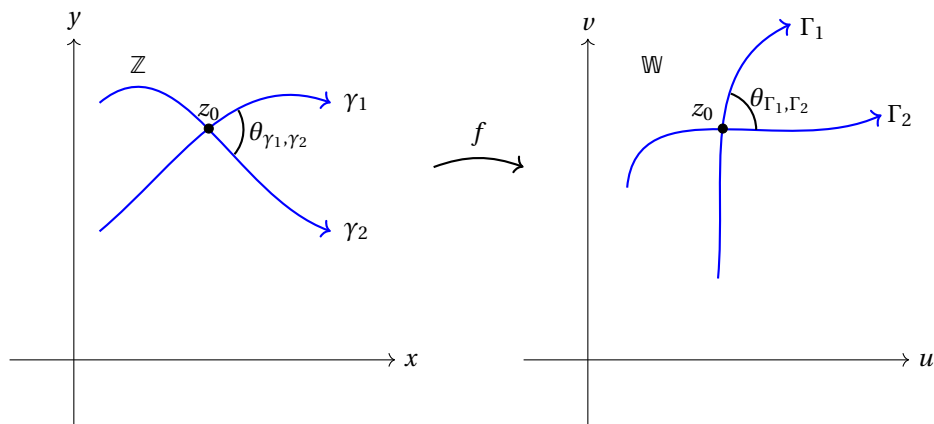
3.1 Konformaltitet

Definition 3.1.1. Låt f vara en avbildning definierad i ett område kring en punkt z_0 . Vi säger att f är konform vid z_0 om den lokalt bevarar vinklar.

Med detta menar vi följande.

Låt γ_1 och γ_2 vara två släta kurvor med z_0 som skärningspunkt. Låt $\theta_{\gamma_1, \gamma_2}$ beteckna vinkeln mellan kurvorna γ_1 och γ_2 och låt $\theta_{\Gamma_1, \Gamma_2}$ beteckna vinkeln mellan Γ_1 och Γ_2 , där $f(\gamma_1) = \Gamma_1$ och $f(\gamma_2) = \Gamma_2$.

Vinkeln bevaras lokalt efter avbildningen om $\theta_{\gamma_1, \gamma_2} = \theta_{\Gamma_1, \Gamma_2}$ och vi säger då att f är konform.



Figur 3. En konform avbildning

Vi utvidgar definitionen av konformaltitet och säger att en funktion f är konform i en mängd Ω om f är konform vid alla punkter $z \in \Omega$.

Vi vet från definition 2.2.3. att en analytisk funktion $f(z)$ kan utvecklas i en Taylorserie kring en punkt z_0 ,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

För z i en nära omgivning till z_0 approximeras $f(z)$ som

$$f(z) \approx f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$$

och denna linjära term beskriver lokalt hur $f(z)$ sträcker och roterar området kring z_0 .

Jacobianen är en matris bestående av en funktions $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$ partiella förstaderivator.

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix}$$

Från definition 2.2.2. vet vi att en analytisk funktion uppfyller Cauchy-Riemanns ekvationer

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial Q}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\frac{\partial Q}{\partial x}. \end{aligned}$$

Vi låter

$$u = \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$$

och

$$v = \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

vilket ger oss Jacobianen

$$J(x, y) = \begin{pmatrix} u & -v \\ v & u \end{pmatrix}.$$

En funktion är lokalt konform vid z_0 om Jacobianen till funktionen beskriver en vinkelbevarande transformation vilket sker när Jacobianen vid varje punkt är en skalärmultipel av en rotationsmatris. Jacobianen liknar nu en klassisk rotationsmatris

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}.$$

Om vi skriver $z = u + iv$ på polär form får vi

$$z = r e^{i\theta}$$

där r är skalningsfaktorn och θ är $\arg(z)$.

Rotationsmatrisen har ingen skalningsfaktor så $r = 1$ här, vilket ger oss $z = e^{i\theta}$.

Vi låter $x = \theta$ och drar oss till minnes att Eulers formel lyder

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

vilket ger

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Vi jämför med $z = u + iv$ och ser att $u = \cos \theta$ och $v = \sin \theta$. □

Sats 3.1.2. Låt f vara en analytisk funktion kring punkten z_0 och låt $f'(z_0) \neq 0$. Då är f konform i z_0 och lokalt injektiv på en öppen skiva S med centrum i z_0 .

Bevis. (Injektivitet) Eftersom f' är analytisk kring z_0 och då $f'(z_0) \neq 0$ medför det att $|f'(z_0)| > 0$. Då kan vi välja en tillräckligt liten öppen skiva S med centrum i z_0 sådan att $|f'(z) - f'(z_0)| \leq \frac{|f'(z_0)|}{2}$ för alla z i S , eftersom för z i närheten av z_0 avviker inte $f'(z)$ alltför mycket från $f'(z_0)$ på grund av kontinuitet hos f' : till varje tal $\epsilon > 0$ existerar ett tal $\delta > 0$ sådant att $|z - z_0| < \delta$ medför att $|f'(z) - f'(z_0)| \leq \epsilon$.

Med andra ord avviker $f'(z)$ som mest $\frac{|f'(z_0)|}{2}$ från $f'(z_0)$.

Låt z_1 och z_2 vara två punkter i S . Om

$$|f(z_1) - f(z_2)| \geq |z_1 - z_2| \left| \frac{f'(z_0)}{2} \right|$$

gäller så är f injektiv i S eftersom detta utesluter möjligheten att $f(z_1) = f(z_2)$.

Låt nu Γ vara kurvsegmentet som förbinder z_1 och z_2 . Då gäller

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)| &= \left| \int_{\Gamma} f'(z) dz \right| = \left| \int_{\Gamma} f'(z_0) dz - \int_{\Gamma} (f'(z_0) - f'(z)) dz \right| \\ &\geq |f'(z_0)(z_2 - z_1)| - \left| \frac{f'(z_0)}{2} \right| |z_2 - z_1| = \left| \frac{f'(z_0)}{2} \right| |z_2 - z_1| \end{aligned}$$

där $|z_2 - z_1|$ är längden av kurvsegmentet som här är en rät linje då integrationen är oberoende av vägen.

(Konformitet) Varje slät kurva γ genom z_0 har en tangent γ' vid z_0 som vrids samma vinkel θ under avbildningen $w = f(z)$. (Se figur 3.)

Låt γ parametreras genom $z = z(t)$ med $z_0 = z(t_0)$ vilket medför att γ då har tangentvektorn $z'(t_0)$ vid punkten z_0 . Under avbildningen har γ' parametreringen

$$w = w(t) = f(z(t)) \text{ med } w_0 = f(z_0) = f(z(t_0))$$

och $w'(t_0) \neq 0$ är tangent till γ' vid w_0 . Med kedjeregeln får vi att

$$w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0)$$

och eftersom $f'(z_0) \neq 0$ måste $w'(t_0) \neq 0$. Vidare ser vi från ekvationen $w'(t_0) = f'(z_0)z'(t_0)$ att vinklarna mellan tangentvektorerna $z'(t_0)$, $w'(t_0)$ och den horisontella koordinataxeln fås av

$$\arg w'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg z'(t_0)$$

där vi utnyttjar egenskaper hos argumentfunktionen, nämligen att $\arg(z \cdot w) = \arg(z) + \arg(w)$. Därav ser vi att varje godtycklig kurva genom punkten z_0 roteras med samma vinkel $\arg f'(z_0)$. \square

Följande är exempel och icke-exempel på konforma avbildningar.

Konform avbildning

- $f(z) = z$ är en konform avbildning då $f'(z) = 1$.
- Den komplexa exponentialfunktionen $f(z) = e^z$ är konform ty $f'(z) = e^z \neq 0$ för alla z .
- $f(z) = z^2$ är konform för alla $z \neq 0$ eftersom $f'(z) = 2z$.

Ej konform avbildning

- $f(z) = \Re(z)$ är inte en konform avbildning då den avbildar hela \mathbb{C} på den reella axeln vilket ändrar vinklarna. Den är ej heller analytisk vilket uppenbarligen medför att den inte är konform.

4 Möbiustransformationer

4.1 Definition och grundläggande egenskaper

Definition 4.1.1. En Möbiustransformation är en funktion av en komplex variabel z på formen

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

där $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ och $ad - bc \neq 0$.

Vi kan derivera w enligt

$$w' = f'(z) = \frac{a(cz + d) - c(az + b)}{(cz + d)^2} = \frac{acz + ad - acz - bc}{(cz + d)^2} = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2}$$

och ser från sats 3.1.2. att kravet $ad - bc \neq 0$ behövs för att avbildningen ska vara konform.

Exempel 4.1.2. Låt $z = -\frac{d}{c}$, $c \neq 0$. Detta ger

$$f(z) = \frac{a(-\frac{d}{c}) + b}{c(-\frac{d}{c}) + d} = \frac{b - \frac{ad}{c}}{0} = \infty$$

som vi likt tidigare identifierar med Riemannsfärens nordpol.

I fallet $c = 0$ säger vi att $f(\infty) = \infty$.

Exempel 4.1.3. Låt $f(z) = \frac{z+1}{2z+2}$ vara en Möbiustransformation.

Denna funktion har parametrarna $a = 1$, $b = 1$, $c = 2$ och $d = 2$, vilket ger $ad - bc = 0$. Vi förenklar uttrycket enligt

$$f(z) = \frac{z+1}{2(z+1)} = \frac{1}{2}.$$

Funktionen är som vi ser konstant lika med $\frac{1}{2}$ och har derivata lika med noll.

Exempel 4.1.4. Låt $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$ vara en Möbiustransformation.

Funktionen har en singularitet vid $z = 1$ eftersom nämnaren då blir noll, och ett nollställe vid $z = -1$ då hela funktionen blir noll. Detta betyder att $f(z)$ avbildar 1 på ∞ och -1 på 0.

Sats 4.1.5.[1] Låt f vara en Möbiustransformation. Då gäller att

- (1) f kan uttryckas som sammansättningen av en ändlig sekvens av translationer, skalning, rotation och inversion.
- (2) f avbildar Riemannsfären injektivt på sig själv.
- (3) f avbildar klassen av cirklar och linjer på sig själv.
- (4) f är konform kring varje punkt förutom dess pol.

Exempel 4.1.6. Låt oss se en Möbiustransformation som en sammansättning av ett flertal steg:

$$z \mapsto cz \mapsto cz + d \mapsto \frac{1}{cz + d} \mapsto \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} \mapsto \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{a(z + \frac{d}{c}) + c - \frac{ad}{c}}{cz + d} = \frac{az + b}{cz + d}$$

där $z \mapsto cz$ är en skalningsavbildning, $cz \mapsto cz + d$ är en translationsavbildning och $cz + d \mapsto \frac{1}{cz + d}$ är inversionsavbildning. Resterande steg använder samma operationer för att komma till slutresultatet. I det som följer introduceras dessa avbildningar.

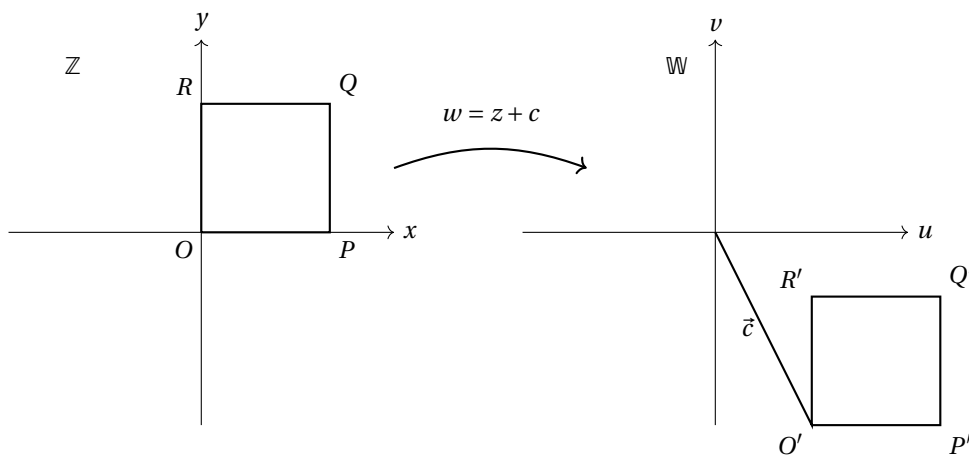
Definition 4.1.7. En translationsavbildning definieras av funktionen

$$w = f(z) = z + c$$

där $c \in \mathbb{C}$.

Denna transformation avbildar varje objekt i planet injektivt på ett kongruent objekt på ett avstånd $\|\vec{c}\|$. Med det menas att hela objektet bara flyttas ett avstånd lika med längden på vektorn \vec{c} .

Exempel 4.1.8.



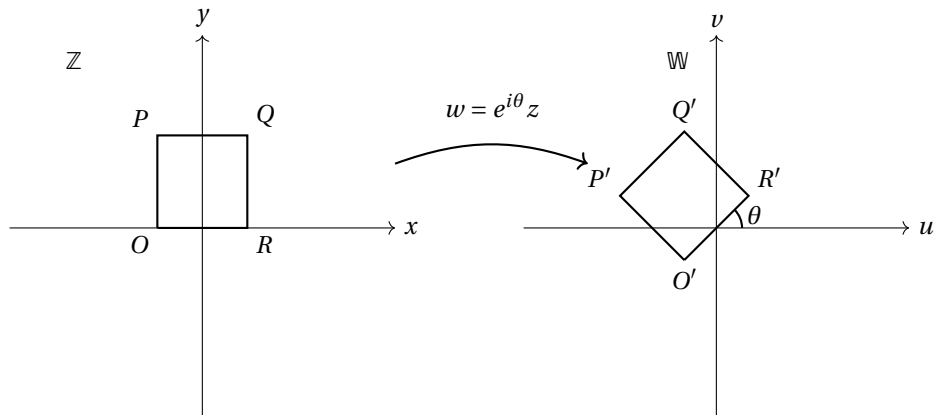
Figur 4. Translationsavbildning

Definition 4.1.9. En rotationsavbildning definieras av funktionen

$$w = f(z) = e^{i\theta} z$$

där $\theta \in \mathbb{R}$.

Denna transformation roterar ett objekt i planet injektivt en vinkel θ kring origo. Likt translationsavbildningen bevaras kongruens under transformationen.

Exempel 4.1.10.

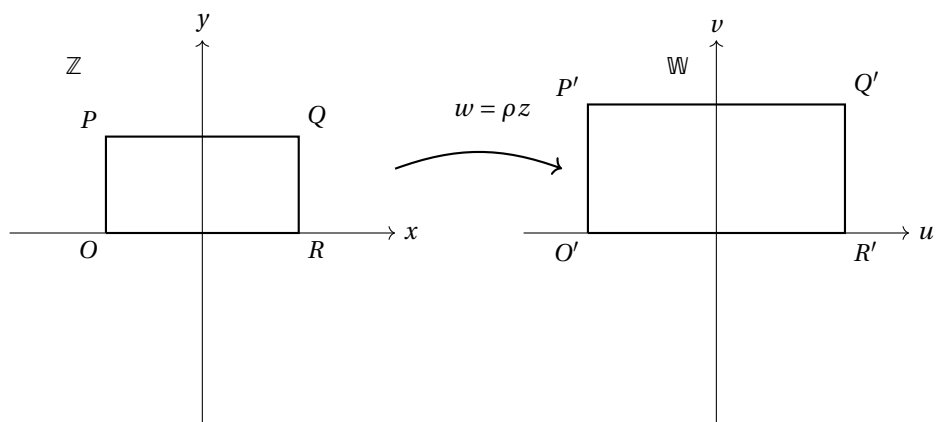
Figur 5. Rotationsavbildning

Definition 4.1.11. En skalningsavbildning definieras av funktionen

$$w = f(z) = \rho z$$

där $\rho \in \mathbb{R}_+$.

Denna transformation förstör ett objekt i planet om $\rho > 1$ eller förminskar ett objekt i planet om $\rho < 1$. Kongruens bevaras inte eftersom storleken på objektet ändras.

Exempel 4.1.12.

Figur 6. Skalningsavbildning

Definition 4.1.13. En inversionsavbildning definieras av funktionen

$$w = f(z) = \frac{1}{z}$$

för $z \neq 0$.

För $z = 0$ sätter vi $f(0) = \infty$.

Denna transformation är en injektiv avbildning av $\hat{\mathbb{C}}$ på sig själv.

Exempel 4.1.14. Låt $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ vara enhetsskivan. Inversen av enhetsskivan skickar alla punkter där $|z| < 1$ till $|z| > 1$ och skickar alla punkter där $|z| > 1$ till $|z| < 1$.

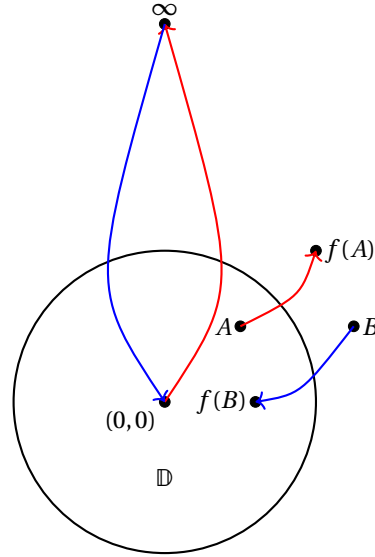
Centrum av cirkeln skickas till oändligheten och oändligheten till centrum.

Varje punkt $A \in \mathbb{D}$ skickas till $f(A) \notin \mathbb{D}$ och varje punkt $B \notin \mathbb{D}$ skickas till $f(B) \in \mathbb{D}$.

I fallet $|z| = 1$, med andra ord enhetscirkeln, förblir punkter på randen punkter på randen efter transformationen $w = f(z)$, alltså $w = z$.

Vi visar detta genom att låta $z = e^{i\theta}$.

Då är $\frac{1}{z} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \cos\theta - i\sin\theta$ med hjälp av Eulers formel. Vidare får vi att $\left|\frac{1}{z}\right| = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. \square



Figur 7. Inversion av enhetsskivan

4.2 Sammansättning och invers

Definition 4.2.1. Låt $f_1(z) = \frac{a_1z+b_1}{c_1z+d_1}$ och $f_2(z) = \frac{a_2z+b_2}{c_2z+d_2}$ vara två Möbiustransformationer.

Då är sammansättningarna

$$f_2 \circ f_1 = \frac{a_2 f_1(z) + b_2}{c_2 f_1(z) + d_2} = \frac{a_2 \left(\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \right) + b_2}{c_2 \left(\frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1} \right) + d_2} = \frac{a_2(a_1 z + b_1) + b_2(c_1 z + d_1)}{c_2(a_1 z + b_1) + d_2(c_1 z + d_2)} = \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1)z + (a_2 b_1 + b_2 d_1)}{(c_2 a_1 + d_2 c_1)z + (c_2 b_1 + d_2 d_1)}$$

och

$$f_1 \circ f_2 = \frac{a_1 f_2(z) + b_1}{c_1 f_2(z) + d_1} = \frac{a_1 \left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right) + b_1}{c_1 \left(\frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2} \right) + d_1} = \frac{a_1(a_2 z + b_2) + b_1(c_2 z + d_2)}{c_1(a_2 z + b_2) + d_1(c_2 z + d_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2)z + (a_1 b_2 + b_1 d_2)}{(c_1 a_2 + d_1 c_2)z + (c_1 b_2 + d_1 d_2)}$$

också Möbiustransformationer.

Vi ser att dessa Möbiustransformationer i allmänhet inte är lika.

Exempel 4.2.2 Låt $f_1(z) = \frac{z-1}{z+1}$ och $f_2(z) = \frac{z+3}{z-2}$.

Sammansättningarna är

$$f_1 \circ f_2 = \frac{\frac{z+3}{z-2} - 1}{\frac{z+3}{z-2} + 2} = \frac{\frac{z+3-(z-2)}{z-2}}{\frac{z+3+2z-4}{z-2}} = \frac{5}{3z-1}$$

och

$$f_2 \circ f_1 = \frac{\frac{z-1}{z+2} + 3}{\frac{z-1}{z+2} - 2} = \frac{\frac{z-1+3z+6}{z+2}}{\frac{z-1-2z-4}{z+2}} = \frac{4z+5}{-3z-5}$$

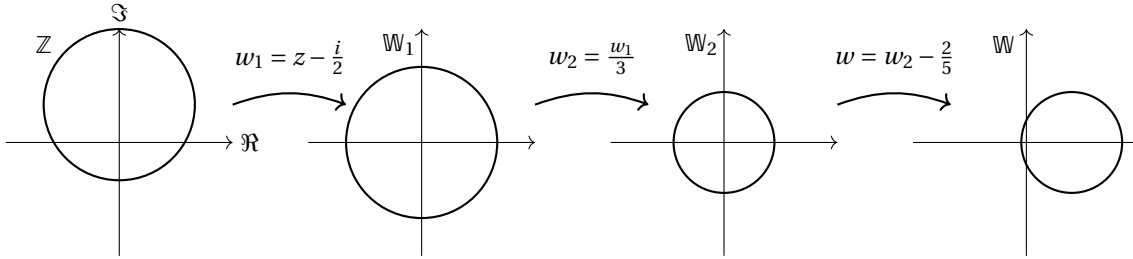
och vi ser att $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$.

Anledningen till att sammansättningarna inte blir identiska är för att $f_1(z)$ beskriver en rotation och $f_2(z)$ beskriver både en skalning och en rotation. Om vi först roterar med $f_1(z)$ och sedan skalar samt roterar med $f_2(z)$ blir det inte nödvändigtvis samma resultat som om vi först skalar samt roterar med $f_2(z)$ och sedan roterar med $f_1(z)$.

I avsnitt 5 återkommer vi till hur vi undersöker en transformations egenskaper.

Exempel 4.2.3. Från sats 4.1.5. vet vi att f kan uttryckas som sammansättningen av en ändlig sekvens av translation, rotation, skalning och inversion.

Låt oss hitta transformationen som tar cirkeln $\left|z - \frac{1}{2}i\right| = 1$ till cirkeln $\left|w - \frac{3}{5}\right| = \frac{2}{3}$.



Figur 8. Sammansättning

Vi hittar en translationsavbildning $w_1 = z - \frac{i}{2}$ som flyttar enhetscirkeln till origo. Därefter förminskar vi cirkeln med en skalningsavbildning till att ha radie $\frac{2}{3}$ och till sist flyttar vi cirkelns centrum med ytterligare en translationsavbildning.

Sammansättningen blir $w = w_2 - \frac{2}{5} = \frac{z - \frac{i}{2}}{3} - \frac{2}{5}$.

Definition 4.2.4. En Möbiustransformation

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

har inversen

$$w^{-1} = f^{-1}(z) = \frac{-dz + b}{cz - a}$$

vilken också är en Möbiustransformation.

Vi visar detta genom

$$f(f^{-1}(z)) = \frac{a\left(\frac{-dz+b}{cz-a}\right) + b}{c\left(\frac{-dz+b}{cz-a}\right) + d} = \frac{a(-dz+b) + b(cz-a)}{c(-dz+b) + d(cz-a)} = \frac{-adz + ab + bcz - ab}{-cdz + bc + cdz - ad} = \frac{z(bc - ad)}{bc - ad} = z.$$

Om $a = d = 0$ och $b = c = 1$ får vi specialfallet av den tidigare nämnda inversionsavbildningen $w = f(z) = \frac{1}{z}$. \square

4.3 Geometrisk tolkning

Låt $\omega = f_1(z) = \frac{a_1z + b_1}{c_1z + d_1}$ och $\zeta = f_2(z) = \frac{a_2z + b_2}{c_2z + d_2}$ vara två Möbiustransformationer.

Låt koefficienterna för ω och ζ vara element i två 2×2 -matriser. Låt M_ω vara koefficientmatrisen för Möbiustransformationen ω och låt M_ζ vara koefficientmatrisen för Möbiustransformationen ζ .

Vi kan använda vanlig matrismultiplikation mellan dessa matriser. Produkten blir då

$$M_\zeta M_\omega = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 a_1 + b_2 c_1 & a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ c_2 a_1 + d_2 c_1 & c_2 b_1 + d_2 d_1 \end{pmatrix}.$$

Dessa matriser kan vi även använda kända matrisoperationer på, såsom spåret $\text{tr}()$ och determinanten $\det()$.

Vi ser att matrisen $M_\zeta M_\omega$ är precis lika med matrisframställningen för sammansättningen $f_2 \circ f_1$ från definition 4.2.1.

Definition 4.3.1. Låt M vara en kvadratisk matris

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1n} \\ m_{21} & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \\ m_{m1} & & & m_{mn} \end{pmatrix}.$$

Då är spåret av M , betecknat $\text{tr}(M)$ lika med summan av elementen längs huvuddiagonalen av M ,

$$\text{tr}(M) = m_{11} + \dots + m_{mn}.$$

Definition 4.3.2. Låt M vara en 2×2 -matris $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Då är determinanten av M , betecknad $\det(M)$ lika med kvantiteten

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Med dessa väldefinierade operationer definierar vi för en allmän Möbiustransformation $w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ med koefficientmatris $M_w = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ en funktion

$$\tau(M_w) = \frac{\text{tr}(M_w)^2}{\det(M_w)} \quad (1)$$

där $\det(M_w) \neq 0$.

Med hjälp av denna funktion och matrisframställningen kommer vi i nästa kapitel kunna klassificera Möbiustransformationer.

Låt återigen $w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ vara en Möbiustransformation. På matrisformen $M_w = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ och med determinanten $\det(M_w)$ definierad ser vi att kravet $ad - bc$ behövs för att transformationen ska vara inverterbar.

Vi visar nu att funktionen τ applicerad på matrisframställningen av sammansättningen av två godtyckliga Möbiustransformationer $m \circ n$ uppfyller egenskapen att $\tau(m \circ n) = \tau(n \circ m)$.

Exempel 4.3.3. Låt $m = f_1$ och $n = f_2$ vara samma Möbiustransformationer som i definition 4.2.1. Matrisframställningarna för $f_2 \circ f_1$ och $f_1 \circ f_2$ blir

$$M_{f_2 \circ f_1} = \begin{pmatrix} a_2 a_1 + b_2 c_1 & a_2 b_1 + b_2 d_1 \\ c_2 a_1 + d_2 c_1 & c_2 b_1 + d_2 d_1 \end{pmatrix}$$

respektive

$$M_{f_1 \circ f_2} = \begin{pmatrix} a_1 a_2 + b_1 c_2 & a_1 b_2 + b_1 d_2 \\ c_1 a_2 + d_1 c_2 & c_1 b_2 + d_1 d_2 \end{pmatrix}.$$

Vi applicerar τ på båda matriserna och får

$$\tau(M_{f_2 \circ f_1}) = \frac{\operatorname{tr}(M_{f_2 \circ f_1})^2}{\det(M_{f_2 \circ f_1})} = \frac{(a_2 a_1 + b_2 c_1 + c_2 b_1 + d_2 d_1)^2}{(a_2 a_1 + b_2 c_1)(c_2 b_1 + d_2 d_1) - (c_2 a_1 + d_2 c_1)(a_2 b_1 + b_2 d_1)}$$

och

$$\tau(M_{f_1 \circ f_2}) = \frac{\operatorname{tr}(M_{f_1 \circ f_2})^2}{\det(M_{f_1 \circ f_2})} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 c_2 + c_1 b_2 + d_1 d_2)^2}{(a_1 a_2 + b_1 c_2)(c_1 b_2 + d_1 d_2) - (c_1 a_2 + d_1 c_2)(a_1 b_2 + b_1 d_2)}$$

och ser att $\tau(M_{f_2 \circ f_1}) = \tau(M_{f_1 \circ f_2})$ eftersom de komplexa talen a_n , b_n , c_n och d_n kommuterar, $n \in \{1, 2\}$. □

5 Klassificering av Möbiustransformationer

5.1 Fixpunkter

En fixpunkt för en Möbiustransformation är en punkt som förblir oförändrad när transformationen tillämpas på den. Detta koncept liknar fixpunkter för symmetrigrupper, där en fixpunkt definieras som en punkt som inte förändras av den specifika symmetrin.

Definition 5.1.1. Punkten $z_0 \in \mathbb{C}$ kallas för en fixpunkt till f om $f(z_0) = z_0$.

Vi drar oss till minnes att en Möbiustransformation har formen

$$w = f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0.$$

En Möbiustransformations fixpunkter fås genom att sätta $f(z) = z$ och lösa $\frac{az + b}{cz + d} = z$. För $c \neq 0$ ger detta oss en andragrads ekvation

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0 \tag{2}$$

där fixpunkterna beror av diskriminanten D .

Från lösningsformeln för en andragradsfunktion får vi formellt lösningarna till $cz^2 + (d - a)z - b = 0$ som

$$z = \frac{(a - d) \pm \sqrt{(a - d)^2 + 4bc}}{2c}$$

där $D = (a - d)^2 + 4bc$.

Med hjälp av determinanten och spåret av en 2×2 -matris $M_w = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kan vi beräkna $\text{tr}(M_w)^2 - 4 \det(M_w)$ som

$$\text{tr}(M_w)^2 - 4 \det(M_w) = (a + d)^2 - 4(ad - bc) = a^2 + 2ad + d^2 - 4ad + 4bc = a^2 - 2ad + d^2 + 4bc$$

vilket är precis lika med diskriminanten

$$D = (a - d)^2 + 4bc = a^2 - 2ad + d^2 + 4bc.$$

Vi ser alltså att vi med hjälp av determinanten och spåret kan skriva diskriminanten D som

$$D = \text{tr}(M_w)^2 - 4 \det(M_w). \tag{3}$$

Lemma 5.1.2. En Möbiustransformation som inte är identitetstransformationen $f(z) = z$ har högst två fixpunkter.

Bevis. Låt $f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ vara en Möbiustransformation. Vi kan antingen sätta $c \neq 0$ eller $c = 0$.

I fallet $c \neq 0$ får vi som ovan ekvationen $cz^2 + (d - a)z - b = 0$ vilken uppenbarligen har en eller två lösningar som bestäms av diskriminanten, vilket ger en eller två fixpunkter.

I fallet $c = 0$ kan vi ändra värden på konstanterna.

Först låter vi $a \neq d$. Då får vi $f = \frac{az + b}{d}$ vilket ger $f(\infty) = \infty$ och $z = \frac{-b}{a - d} = \frac{b}{d - a} \neq \infty$. Detta ger oss två fixpunkter.

Låt nu $a = d$. Vi erhåller således $-b = 0$ från (2) vilket innebär att $b = 0$ och vi ser att transformationen är identitetstransformationen $f(z) = \frac{az + 0}{0z + a} = \frac{az}{a} = z$. Denna transformation har alla punkter som fixpunkt. \square

Exempel 5.1.3. Vi hittar fixpunkterna till transformationerna

$$a) w = f(z) = \frac{z-1}{z+3} \quad b) w = f(z) = \frac{3iz+2}{z+i} \quad c) w = f(z) = \frac{2z+1}{z+1}$$

med hjälp av ekvation (2) och får

$$a) z^2 + 2z + 1 = 0 \text{ vilket ger } z = -1$$

$$b) z^2 - 2iz - 2 = 0 \text{ vilket ger } z = i \pm 1$$

$$c) z^2 - z - 1 = 0 \text{ vilket ger } z = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5}).$$

Vi ska nu introducera ett alternativt sätt att representera en Möbiustransformation.

Låt $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ vara en Möbiustransformation som har 0 och ∞ som fixpunkter. Vi låter $f(0) = 0$ och $f(\infty) = \infty$.

Att $f(0) = 0$ medför att $\frac{a \cdot 0 + b}{c \cdot 0 + d} = \frac{b}{d} = 0$ vilket betyder att $b = 0$.

Att $f(\infty) = \infty$ ger oss att $c = 0$, från beviset av lemma 5.1.2.

Eftersom a och d är komplexa tal och $d \neq 0$ kan vi skriva om kvoten $\frac{a}{d}$ som ett nytt godtyckligt komplext tal j . Detta komplexa tal j skriver vi på polär form som

$$j = re^{i\theta}$$

där $r = |j|$ och $\theta = \arg(j)$.

Vi har alltså att

$$f(z) = \frac{a}{d}z = jz = re^{i\theta}z.$$

Definition 5.1.4. Låt p och q vara två fixpunkter. Då kan *normalformen* av en Möbiustransformation skrivas

$$\frac{f(z) - p}{f(z) - q} = re^{i\theta} \cdot \frac{z - p}{z - q}.$$

Denna normalform ger oss ett annat sätt att beskriva en Möbiustransformation. Likt a , b , c och d har vi med detta skrivsätt fortfarande fyra konstanter; r , θ , p och q , där

r är en skalningsfaktor av cirklar och linjer
 θ är rotation av cirklar och linjer
 p och q är fixpunkter.

Med dessa konstanter får vi en mer intuitiv geometrisk tolkning än vad vi får med a , b , c och d . Denna form har specialfall som vi återkommer till i sektion 5.3 och 5.5.

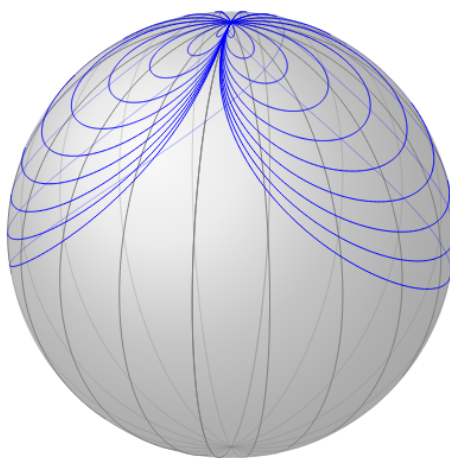
5.2 Paraboliska transformationer

Definition 5.2.1. En Möbiustransformation w sägs vara parabolisk om och endast om $\tau(M_w) = 4$.

Lägg märke till att diskriminanten D kan skrivas om som

$$D = \operatorname{tr}(M_w)^2 - 4 \det(M_w) \Leftrightarrow 4 \det(M_w) = \operatorname{tr}(M_w)^2 - D \Leftrightarrow 4 = \frac{\operatorname{tr}(M_w)^2 - D}{\det(M_w)} = \tau(M_w)$$

vilket stämmer om och endast om $D = 0$ vilket sker precis då andragsgradsfunktionen har en dubbelrot vilket motsvaras av en fixpunkt med multiplicitet två till en parabolisk Möbiustransformation.



Figur 8. En parabolisk Möbiustransformation

Exempel 5.2.2. Låt $w = f(z) = \frac{3z-1}{z+1}$ vara en Möbiustransformation.

Matrisframställningen av w blir

$$M_w = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

som har $\tau(M_w) = \frac{\operatorname{tr}(M_w)^2}{\det(M_w)} = \frac{(3+1)^2}{3+1} = 4$ och därmed är w parabolisk.

Vi hittar fixpunkten med hjälp av ekvation (2) och får $z^2 - 2z + 1 = 0$ vilken har $z = 1$ som lösning.

Figur 8 illustrerar den geometriska verkan av en parabolisk Möbiustransformation på Riemannsfären. Kurvorna beskriver cirklar och linjer som deformerats så att de utgår från och samlas vid samma fixpunkt av multiplicitet två. Eftersom $D = 0$ innebär en dubbelrot från lösningsformeln ser vi att *en* fixpunkt på sfären överensstämmer med teorin.

5.3 Elliptiska transformationer

Definition 5.3.1. En Möbiustransformation w sägs vara elliptisk om och endast om $\tau(M_w) \in \mathbb{R}$ och $0 \leq \tau(M_w) < 4$.

Följande villkor

$$\tau(M_w) < 4 \Leftrightarrow \frac{\operatorname{tr}(M_w)^2}{\det(M_w)} < 4 \Leftrightarrow \operatorname{tr}(M_w)^2 < 4 \det(M_w) \Leftrightarrow \operatorname{tr}(M_w)^2 - 4 \det(M_w) < 0$$

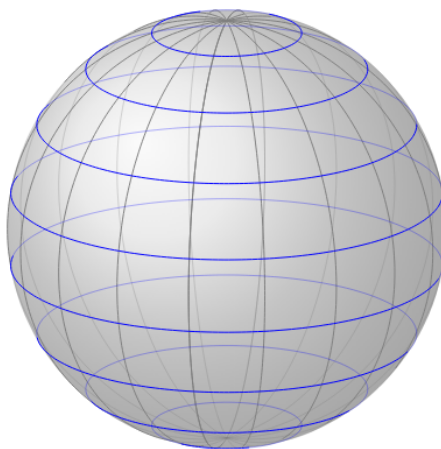
medför, om vi jämför med diskriminantens utseende

$$D = \operatorname{tr}(M_w)^2 - 4 \det(M_w)$$

att $D < 0$.

Om diskriminanten D är negativ i en andragsgradsfunktion betyder det att vi får två konjugerade komplexa rötter, vilket motsvaras av två konjugerade komplexa fixpunkter till en elliptisk Möbiustransformation.

Kravet att $0 \leq \tau(M_w) \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\operatorname{tr}(M_w)^2}{\det(M_w)}$ innebär att eftersom $\operatorname{tr}(M_w)^2$ alltid är större än eller lika med noll måste $\det(M_w)$ alltid vara strikt större än noll. Om $\det(M_w)$ är mindre än noll och $\operatorname{tr}(M_w)^2$ är större än 0 blir $\tau(M_w)$ negativt och uppfyller då inte kravet för en elliptisk transformation. Om $\det(M_w)$ är identiskt lika med noll så uppfylls inte kravet för att $f(z)$ ens kan vara en Möbiustransformation.



Figur 9. En elliptisk Möbiustransformation

Exempel 5.3.2. Låt $w = f(z) = \frac{2z+1}{-2z+3}$ vara en Möbiustransformation med matrisframställningen

$$M_w = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

vilket ger att $\tau(M_w) = \frac{(2+3)^2}{6+2} = \frac{25}{8} < 4$ och reell så w är elliptisk.

Vi hittar transformationens fixpunkter med hjälp av ekvation (2) och får $z^2 - \frac{z}{2} + \frac{1}{2} = 0$ vilken har lösningen $z = \frac{1 \pm 7i}{4}$.

Vi tittar nu på specialfall av normalformen.

Låt $p = 0$ och låt $q = \infty$. Som vi vet identifieras 0 med Riemannsfärens sydpol och ∞ med dess nordpol.

Om $|re^{i\theta}| = 1$ innebär det att cirklar och linjer på sfären inte skalas utan endast roteras kring fixpunkterna $p = S$ och $q = N$. Som vi ser från figur 9 är detta exakt vad en elliptisk Möbiustransformation gör.

5.4 Loxodromiska transformationer

Definition 5.4.1. En Möbiustransformation w sägs vara loxodromisk om och endast om ett av följande krav är uppfyllda,

- $\Im(\tau(M_w)) \neq 0$
- $\tau(M_w) \in \mathbb{R}$ och ligger i unionen av intervallen $(-\infty, 0)$ och $(4, \infty)$.

Nu vill vi visa att kravet att $\tau(M_w)$ strikt mindre än 0 medför att $\det(M_w)$ är strikt mindre än 0. Vi ser att

$$\tau(M_w) = \frac{\operatorname{tr}(M_w)^2}{\det(M_w)} < 0 \Leftrightarrow \det(M_w) < 0$$

eftersom $\operatorname{tr}(M_w)^2$ är icke-negativt för alla M_w .

Från kravet att $\tau(M_w) > 4$ får vi fram en loxodromisk transformations fixpunkter genom

$$\tau(M_w) = \frac{\operatorname{tr}(M_w)^2}{\det(M_w)} > 4 \Leftrightarrow \operatorname{tr}(M_w)^2 > 4 \det(M_w) \Leftrightarrow \operatorname{tr}(M_w)^2 - 4 \det(M_w) > 0$$

vilken vi jämför med uttrycket för diskriminanten i ekvation (3),

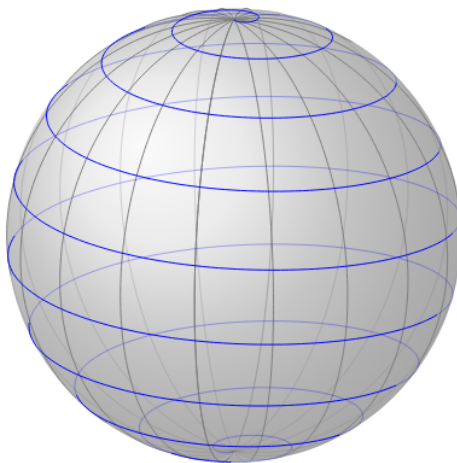
$$D = \operatorname{tr}(M_w)^2 - 4 \det(M_w)$$

och ser att olikheten $\operatorname{tr}(M_w)^2 - 4 \det(M_w) > 0$ gäller då $D > 0$.

Det gäller även att $D > 0$ när $\tau(M_w) < 0$. Vi visade att $\tau(M_w) < 0$ om och endast om $\det(M_w) < 0$. Eftersom $D = \operatorname{tr}(M_w)^2 - 4 \det(M_w)$ där $\operatorname{tr}(M_w)^2 > 0$ och $-4 \det(M_w) > 0$ blir även här $D > 0$.

Sammantaget har vi visat att $D > 0$ för båda intervall som $\tau(M_w)$ kan ligga i för en loxodromisk transformation.

Om diskriminanten D är positiv i en andragsgradsfunktion betyder det att vi får två distinkta reella rötter, vilket motsvaras av två reella distinkta fixpunkter till en loxodromisk Möbiustransformation.



Figur 10. En loxodromisk Möbiustransformation

Exempel 5.4.2. Låt $w = f(z) = \frac{2z+1}{z+1}$ vara en Möbiustransformation med matrisframställningen

$$M_w = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

vilket ger att $\tau(M_w) = \frac{(2+1)^2}{2-1} = 9$ vilket betyder att w uppfyller ett av kraven för att vara loxodromisk.

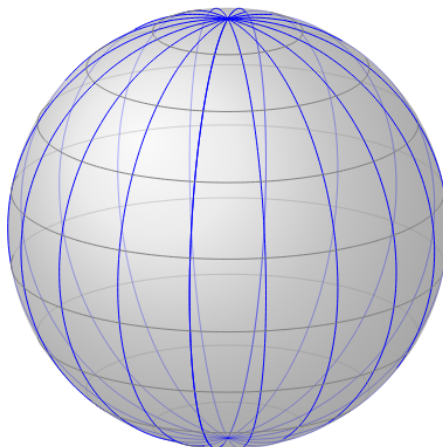
Fixpunkterna hittas återigen med hjälp av ekvation (2) och vi får $z^2 - z - 1 = 0$ som har lösningen $z = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$.

5.5 Hyperboliska transformationer

Vi tittar återigen på normalformen.

Låt $p = 0$ och låt $q = \infty$. Om $\theta = 0$ betyder det att cirklar och linjer på sfären inte utsätts för rotation utan endast skalning.

En hyperbolisk Möbiustransformation skickar alltså punkter från p till q , eller från q till p och är på så sätt repellerande och attraherande, vilket figur 1 visar.



Figur 11. En hyperbolisk Möbiustransformation

Hyperboliska transformationer är en delklass av loxodromiska transformationer, där skillnaden mellan de två är att hyperboliska transformationer inte roteras, alltså att $\theta = 0$, medan loxodromiska transformationer både skalas och roteras.

Exempel 5.5.1. Låt $w = f(z) = \frac{(6+3i)z + (2-3i)}{z+3}$ vara en Möbiustransformation med matrisframställningen $\begin{pmatrix} 6+3i & 2-3i \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Transformationens fixpunkter finner vi som tidigare genom att sätta $f(z) = z$ och får

$$\frac{(6+3i)z + (2-3i)}{z+3} = z \Leftrightarrow z^2 - (3+3i)z - (2-3i) = 0$$

vilket med pq -formeln ger oss lösningarna $z = \frac{3+3i \pm \sqrt{6i+8}}{2}$.

Genom att titta på $\sqrt{6i+8}$ ser vi med hjälp av första kvadreringsregeln att $(3+i)^2 = 9+6i+i^2 = 6i+8$. Då $(3+i)^2 = 6i+8$ är uppenbarligen $3+i = \sqrt{6i+8}$.

Vi får då lösningarna $z = \frac{3+3i \pm (3+i)}{2}$ vilket innebär att fixpunkterna är

$$z_1 = i = p$$

och

$$z_2 = 3+2i = q.$$

Vi sätter nu in dessa fixpunkter i normalformen

$$\frac{f(z) - p}{f(z) - q} = r e^{i\theta} \frac{z - p}{z - q} = r e^{i\theta} \frac{z - i}{z - (3+2i)}$$

och väljer ett lämpligt $z = -3$ så att $f(-3) = \frac{(6+3i)(-3) + (2-3i)}{0} = \infty$.

Vi sätter uttrycket lika med 1 för att kunna lösa ut $re^{i\theta}$.

$$1 = re^{i\theta} \frac{-3-i}{-6-2i} \Leftrightarrow re^{i\theta} = \frac{-6-2i}{-3-i} = 2.$$

Att $re^{i\theta} = 2$ innebär att $r = 2$ och $\theta = 0$ vilket gör så att $e^{i\theta} = e^{i \cdot 0} = 1$.

Som vi tidigare konstaterat betyder $\theta = 0$ att cirklar och linjer på sfären inte utsätts för rotation utan endast skalning vilket associeras med en hyperbolisk Möbiustransformation.

Låt oss nu applicera funktionen τ på matrisframställningen till Möbiustransformationen i exempel 5.5.1.

Låt $M_w = \begin{pmatrix} 6+3i & 2-3i \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ vara transformationens matrisframställning.

$$\tau(M_w) = \frac{\operatorname{tr}(M_w)^2}{\det(M_w)} = \frac{(9+3i)^2}{(6+3i)(3) - (1(2-3i))} = \frac{72+54i}{16+12i} = \frac{18(4+3i)}{4(4+3i)} = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}.$$

Vi ser att $\tau(M_w) > 4$ vilket vi tidigare bara associerat med en loxodromisk Möbiustransformation. Detta är rimligt eftersom hyperboliska Möbiustransformationer som sagt är en delklass av loxodromiska Möbiustransformationer.

För att sammanfatta hur $\tau(M_w)$ påverkas av de olika klasserna av Möbiustransformationer noterar vi nu att $\tau(M_w) = 4$ är ett gränsfall mellan $\tau(M_w) < 4$ och $\tau(M_w) > 4$.

Både en Möbiustransformation med $\tau(M_w) < 4$ och en Möbiustransformation med $\tau(M_w) > 4$ har två fixpunkter, medan en Möbiustransformation med $\tau(M_w) = 4$ endast har en fixpunkt. Vi kan alltså se det som att de två fixpunkterna smälter samman till en fixpunkt med multiplicitet två när $\tau(M_w) \rightarrow 4$.

6 Möbius och Riemann

6.1 Riemanns avbildningssats

Två mängder i \mathbb{C} sägs vara konformt ekvivalenta om det existerar en konform avbildning mellan mängderna.

Sats 6.1.1. *Riemanns avbildningssats.* Om U är en öppen enkelt sammanhängande äkta delmängd av \mathbb{C} så är U konformt ekvivalent till den öppna enhetsskivan $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Vi poängterar att U måste vara en *äkta delmängd* av \mathbb{C} . Om $U = \mathbb{C}$ innebär det att det finns en konform avbildning från hela \mathbb{C} till \mathbb{D} . Enligt Liouvilles sats, se kapitel 5 i Bak & Newman [3], som säger att en begränsad analytisk funktion på hela \mathbb{C} måste vara konstant, är en sådan avbildning inte möjlig. Därför kan \mathbb{C} inte vara konformt ekvivalent till en begränsad mängd som \mathbb{D} .

Exempel 6.1.2. Låt oss hitta avbildningen som tar enhetsskivan \mathbb{D} på $\Re(z) > 0$.

Avbildningen av enhetsskivan på högra halvplanet innebär att en cirkel avbildas på en linje, nämligen på linjen genom från $-\infty$, genom $-i$, 0 , i till ∞ . Med andra ord är linjen hela den imaginära axeln.

Vi behöver avbilda punkter på skivan till punkter på $\Im(z)$. Transformationen

$$w = f(z) = \frac{z+1}{z-1}$$

avbildar 1 på ∞ och -1 på 0.

Eftersom

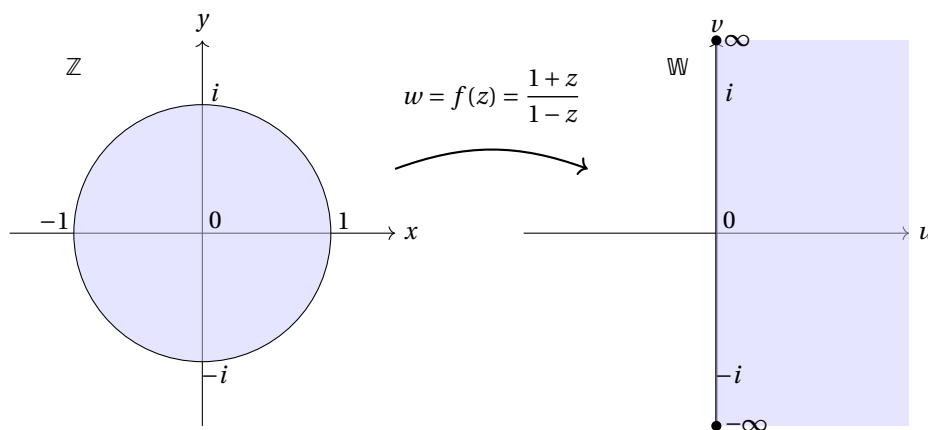
$$f(i) = \frac{i+1}{i-1} = \frac{(i+1)(i+1)}{(i-1)(i+1)} = \frac{i^2+2i+1}{i^2-1} = -i$$

ligger på $\Im(z)$ ser vi att $f(z)$ är på god väg till att vara rätt transformation.

Vi tittar nu på punkten $z = 0$ och får att $f(0) = -1$ vilken ligger i $\Re(z) < 0$, så om vi multiplicerar hela transformationen med -1 så får vi

$$w = f(z) = -\frac{z+1}{z-1} = \frac{1+z}{1-z}$$

som då är transformationen som avbildar enhetsskivan \mathbb{D} på högra halvplanet $\Re(z) > 0$.



Figur 12. Enhetsskivan avbildas på högra halvplanet

Exempel 6.1.3. Låt $f(z) = z - \frac{1}{2}z^2$ och låt \mathbb{D} vara enhetsskivan. Vi kan se vad \mathbb{D} avbildas på.

$$f(0) = 0, f(1) = \frac{1}{2}, f(-1) = -\frac{3}{2}, f(i) = i + \frac{1}{2}, f(-i) = -i + \frac{1}{2}.$$

Detta visar hur fyra punkter avbildas och vi kan få en generell idé av formen avbildningen. Med övergång till polära koordinater kan vi se hur alla punkter avbildas. Med

$$z = re^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$$

får vi

$$f(z) = re^{i\theta} - \frac{1}{2}(re^{i\theta})^2 = e^{i\theta}\left(r - \frac{r^2}{2}e^{i\theta}\right)$$

Vi låter $r = 1$ för att se hur enhetscirkeln avbildas.

$$e^{i\theta}\left(1 - \frac{1}{2}e^{i\theta}\right) = (\cos\theta + i\sin\theta)\left(1 - \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}i\sin\theta\right).$$

Vi utvecklar uttrycket och får

$$\cos\theta + i\sin\theta + \frac{1}{2}(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - i\cos\theta\sin\theta$$

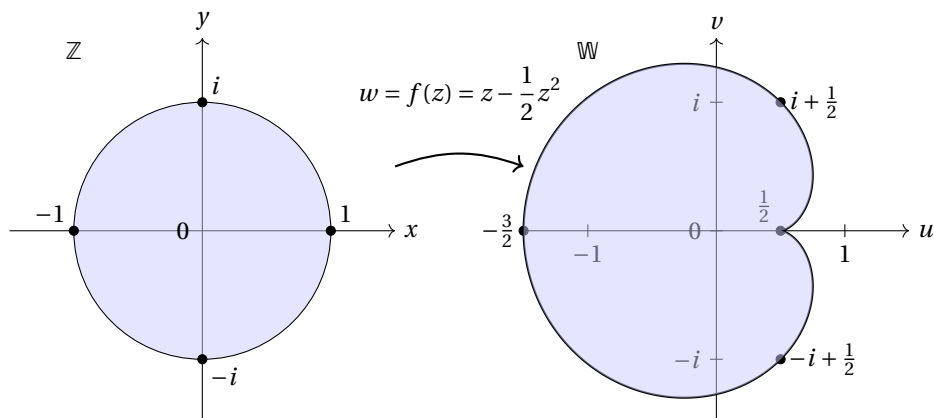
vilket med hjälp av trigonometriska samband kan utvecklas till

$$\cos\theta + i\sin\theta - \left(\frac{\cos 2\theta - i\sin 2\theta}{2}\right) = \cos\theta - \frac{\cos 2\theta}{2} + i\left(\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right).$$

Vi har alltså kommit fram till att $f(z)$ kan skrivas om som

$$f(z) = \cos\theta - \frac{\cos 2\theta}{2} + i\left(\sin\theta + \frac{\sin 2\theta}{2}\right)$$

och nu kan hela objektet ritas upp i ett koordinatsystem. Formen på objektet kallas *kardioid* och har många tillämpningsområden. Exempelvis finns mikrofoner formade som en kardioid för att kunna ta upp ljud effektivt.



Figur 13. Enhetsskivan avbildas på en kardioid

6.2 Möbius och Riemanns avbildningssats

Riemanns avbildningssats och Möbiustransformation är nära relaterade genom deras koppling till konforma avbildningar som lokalt bevarar vinklar. Medan Möbiustransformationer beskriver specifika konforma avbildningar på Riemannsfären, generaliserar Riemanns avbildningssats detta till att omfatta en bredare geometri av godtyckliga öppna enkelt sammanhängande äkta delmängder av det komplexa planet \mathbb{C} .

Möbiustransformationer används inte bara i beviset av satsen, då genom att klassificera avbildningarna av enhetsskivan på sig själv, utan även i många praktiska tillämpningar.

6.3 Något om tillämpningar

Riemanns avbildningssats gör det möjligt att lösa problem som annars vore svåra att hantera genom att omvandla komplicerade geometriska områden till den mer lätthanterliga enhetsskivan \mathbb{D} . Ett tydligt exempel på detta är inom aerodynamik, där man studerar luftflöden kring flygplansvingar. Genom att använda avbildningar kan man transformera vingen som ofta har en komplex form, till en enhetsskiva där flödesekvationerna blir enklare att lösa. Detta görs med hjälp av Joukowskiavbildningen,

$$w = z + \frac{1}{z}.$$

Denna avbildning gör det möjligt att beräkna lyftkraft och luftmotstånd med hög precision. Vi observerar att denna avbildning inte är en Möbiustransformation, ty om vi bildar gemensam nämnare får vi

$$\frac{z^2 + 1}{z}.$$

Inom elektrostatik är en annan praktisk tillämpning att analysera elektriska fält kring ledare med komplicerade former. Området kring ledaren transformeras till en enhetsskiva, fältet beräknas och resultaten transformeras tillbaka till den ursprungliga formen.

I datorgrafik används Riemanns avbildningssats exempelvis inom medicinsk bildbehandling, där man kan projicera avancerade områden som hjärnans yta på enhetsskivan för att lättare analysera avvikelser.

En annan tillämpning finns inom navigation och kartografi. För att skapa vinkeltrogna kartor, som den tidigare nämnda Mercators projektion, används avbildningar som bygger på teorin bakom Riemanns avbildningssats. Detta gör det möjligt för navigatörer att rita ut rättvisande rutter på kartor trots jordens sfäriska form. I varje exempel blir den centrala idén densamma: att ta något komplext och omvandla det till något enkelt utan att förlora den viktiga strukturen i problemet.

7 Referenser

Referenser

- [1] Edward B. Saff och Arthur David Snider, *Fundamentals of Complex Analysis*, 3:e upplagan, Upper Saddle River, NJ, Pearson Education, 2003.
- [2] James W. Anderson, *Hyperbolic Geometry*, 2:a upplagan, London, Springer, 2005.
- [3] Joseph Bak och Donald J. Newman, *Complex Analysis*, 3:e upplagan, New York, Springer, 2010.
- [4] Michael P. Hitchman, *Geometry with an Introduction to Cosmic Topology*, Boston, Jones & Bartlett Learning, 2009.
- [5] Martin Tamm och Andrzej Szulkin, *Analytiska funktioner, likformig konvergens och potensserier*, Stockholm, Matematiska institutionen, 2010.
- [6] Howard Anton och Robert C. Busby, *Contemporary Linear Algebra*, 1:a upplagan, Anton Textbooks, 2003.
- [7] Bashar Saleh, *Kompendium i linjär algebra*, Stockholm, Matematiska institutionen, 2023.
- [8] Arne Persson och Lars-Christer Böiers, *Analys i en variabel*, 3:a upplagan, Lund, Studentlitteratur 2010.