SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Möbiustransformationer

av

Robin Johansson

2024 - No L2

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Möbiustransformationer

Robin Johansson

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Rikard Bögvad

2024

Abstract

This essay is aboust Möbius transformations. Student in the swedish school gets introduced to complex numbers in the late stage of upper secondary school. We start this essay with repeating the basics of complex numbers, this to be sure that everyone is on the same level knowlege wise. After that we go into Möbius transformations, an area of matematics were complex number are getting used for something else than finding roots for negative numbers. My wish is that this essay will be used as a compendium for the course Matematik - Specialisering were I think student will find the combination of linear algebra and translations will intrigued.

Sammanfattning

Denna uppsats behandlar Möbiustransformationer. Elever i svenska skolan introduceras för komplexa tal i de senare kurserna på gymnasiet. Denna uppsats repeterar de komplexa talen för att sedan introducera Möbiustransformationer, ett område där komplexa tal kommer till användning i andra fall än att hitta rötter till negativa tal. Tanken är att elever ska kunna använda uppsatsen som ett kompendium i kursen Matematik - Specialisering där kombinationen av linjär algebra och translationer bör väcka intresse. Eleverna kommer även få möjlighet visa flera olika kunskapsområden inom samma moment.

Innehåll

1 Inledning

Denna uppsats kommer handla om Möbiustransformationer. Dessa transformationer sker som avbildningar i det komplexa talplanet. Därför kommer det första kapitlet kort redogöra för de komplexa talen. Vi kommer därefter titta på utvidgningen av de komplexa talen till den komplexa talsfären (Riemannsfären) för att kunna innefatta oändligheten.

Möbiustransformationer bildar en grupp som är den minsta möljiga utvidningen som grupp av de affina avbildningarna. En affin avbildning är en sammansättning av en linjär avbildning och en translation. Men innan vi tar oss vidare med matematiken tar i en kort historisk blick på den man Möbiustransformationerna är döpta efter.[1, 2]

1.1 August Ferdinand Möbius

August Ferdinand Möbius föddes i Schulpforta, Sachsen i dagens Tyskland, den 26 september 1790. Han var det enda överlevande barnet till Johann Heinrich Möbius (1732-1793) och Johanne Catharine Cristiane Keil (1756 - 1820). Johann var dansmästare i Schulpforta och dog redan när Möbius var tre år. Hans ogifta bror tog då över hans titel som dansmästare och försörjde familjen. Johanne var på långt håll släkt med Martin Luther (1483-1546). Hon kom att leva med sin son tills hon dog 1820.

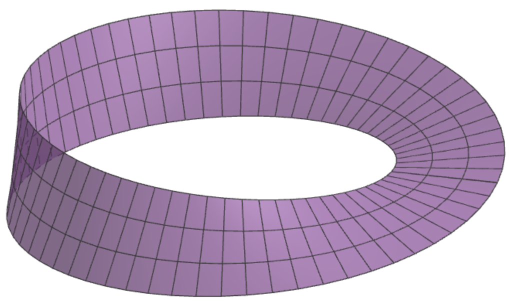
Figur 1: August Ferdinand Möbius 1790 - 1868

Möbius skolades hemma tills han fyllde 13 år. Han fick då börja på gymnasiet i Schulpforta, där visade han redan från början ett intresse för matematik. Detta blev dock inte det han började studera 1809 på universitet i Leipzig. Det blev istället juridik på hans familjs önskan. Men juridik var inte för Möbius och redan under det första året följde han sina egna intressen och övergav studier i juridik för studier i matematik, astronomi och fysik. Den lärare i Leipzig som kom att påverka honom mest var Karl Mollweide (1774-1825), som var han lärare i astronomi. Mollweide är idag mest känd för sin upptäcker inom just matematik framförallt Mollweides formel inom trigonometrin och Mollweides projektion som de flesta idag kommer i kontakt med när vi ser en elliptisk karta.

Möbius fortsatte sina studier genom att först resa till Göttingen för att studera astronomi under Carl Friedrich Gaus (1777 - 1855). Igen studerade Möbius under en astronom mest känd för sin matematik. Från Göttingen reste han sedan vidare till Halle för att studera denna gång matematik under Johann Friedrich Pfaff (1765 - 1825). Pfaff hade en gång varit Gauss lärare i matematik. Möbius var nu aktiv inom både astronomi och matematik.

1814 var har tillbaka på Leipzig Universistet och skrev klart sin doktorsavhandling i astronomi. För att få undervisa på universitet gjorde han sedan klart sin habilitation 1815. Mollweide hade det året gått över till den matematiska institutionen i Leipzig och hans stol i astronomi stod tom. Möbius hoppades kunna få Mollweides gamla jobb och 1816 blev han extra ordinarie professor (en typ av underprofessor) i astronomi och mekanik på Leipzig Universitet. Hans akademiska karriär ansågs hittils snabb då han var blott 26 år gammal. Men här skulle det ta stopp ett tag för Möbius.

Det var inte förrän 1844 han blev full professor i Leipzig. Anledningen till detta var inte kopplat till hans forskning eller det han producerade. Möbius var en tillbakadragen man. Han erbjöds flera tjänster på andra universitet som han tackade nej till då han inte vill lämna Sachsen och ansåg att Leipzigs universitet var det främsta. Det sägs också att han inte var en särskilt bra föreläsare. Det var svårt för honom att fylla sin klasser och vissa kurser erbjöd han gratis för att studenter skulle komma. Det var först när han blev erbjuden en stol på matematiska instutitionen på universitet i Jena som han fick en full professortjänst i astronomi på Leipzig Universitet.[3, 4]



Figur 2: Möbiusband

Mellan 1816 och 1844 han Möbius se över ombyggnationen av Leipzig observatorium, gifta sig och skaffa tre barn och ge ut en mängd publikationer i både matematik och astronomi. Hans största och viktigaste verk var Der Barycentrische Culcul (1827) som även mycket av hans senare forskning byggde vidare på. När Möbius avled 1868 hade han undervisat på Leipzig Universitet i över 50 år. För bred allmänhetet är Möbius bäst känd för Möbiusbandet. En icke orienterbar yta som enbart har en sida. Vem som helst kan skapa ett Möbiusband genom att tejpa ihop ändarna på en pappersremsa som man först roterat ena ändan på 180 grader. På så vis kan vi minnas denna fantastiska man.

2 Komplexa tal

2.1 Grundläggande egenskaper hos komplexa tal

Jag vill börja denna uppsats med att påminna om egenskaperna hos de komplexa talen. Samtliga komplexa tal kan skriva på formen:

$$z = x + iy, \qquad x, y \in \mathbb{R}.$$

Där x och y är reella tal. Talet i har egenskapen att $i^2 = -1$, x kallas realdel av z och y imaginärdel av z.

$$x = Re\, z,$$
$$y = Im\, z.$$

Om z:s imaginärdel är lika med noll är z helt reellt och om realdelen är likamed noll är z helt imaginärt.

$$Im(z) = 0 \iff z \in \mathbb{R},$$
$$Re(z) = 0 \iff z \textbf{ är helt imaginärt}.$$

Komplexa tal beter sig normalt under addition, subtraktion och multiplikation. Detta så länge man har koll på vilka tal är reella och vilka som är imaginära. I de fallen där i^2 dyker upp i ersätter vi det med -1. Här följer en defnition för addition och multiplikation.

Definition 2.1. *Ett komplext tal $a + ib$ där a, b är reella och $i^2 = -1$. Addition och multiplikation definieras av formlerna*

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \qquad (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Subtraktion kan enkelt defnieras genom addition av negativa tal.

Definition 2.2.

$$(a + ib) - (c + id) = (a + ib) + (-c - id) = (a - c) + i(b - d)$$

För att kunna definiera division måste vi först se till komplexa tals konjugat. Vi börjar med en definition och följer upp med en sats med några viktiga egenskaper.

Definition 2.3. *$\bar{z} = x - iy$ kallas det konjugerade talet till z.*

Av definitionen kan vi beräkna följande identiteter:

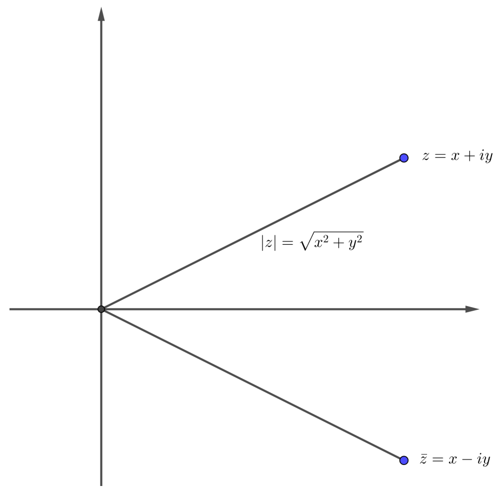
$$\textbf{Sats 2.4.} \begin{cases} \frac{z+\bar{z}}{2} = \boldsymbol{Re}(z), \\ \frac{z-\bar{z}}{2i} = \boldsymbol{Im}(z), \\ \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2, \\ \bar{z}_1 \bar{z}_2 = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2, \\ z = \bar{z} \Longrightarrow z \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Den egenskap hos konjugatet som behövs för att kunna definiera division är följande:

Sats 2.5. *Låt $z = x + iy$. Vi får då*

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \geq 0.$$

Detta är ett reellt icke-negativt tal som uppfyller $z\bar{z} = 0$ endast då $z = 0$.



Figur 3: Grafiskt representation av konjugat och absolutbelopp

Tittar vi på figur 3 ser vi att konjugatet motsvarar en spegling av z i den reella talaxeln. Denna geometriska tolkning av z hjälper oss också tolka det som kallar absolutbelopp.

Definition 2.6. *Talet $z = x + iy$ har absolutbeloppet:*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Detta är ett icke negativt tal som uppfyller att $|z| = 0$ endast då $z = 0$

Detta tal motsvarar längden från origo till z i det komplexa talplanet. Se figur 3.

Sats 2.7. *Om z_1 och z_2 är komplexa tal, så gäller:*

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|.$$

Vi får även att

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

Vi kan nu definiera division. Precis som för reella tal är det den multiplikativa inversen vi använder enligt formeln $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1}$.

Definition 2.8. *Låt z_1 och z_2 vara två komplexa tal. Då gäller*

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = z_1 \cdot \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

Bevis. Kalla den multiplikativa inversen till z för $z*$, vi har då att $zz^* = 1$. Låt nu $z = x + iy$, den multiplikativa inversen z^* blir då:

$$z^* = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}.$$

Vi kontrollerar detta:

$$\begin{aligned}&(x+iy)\left(\frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2}\right) = \\ &x \cdot \frac{x}{x^2+y^2} - x \cdot \frac{iy}{x^2+y^2} + iy \cdot \frac{x}{x^2+y^2} - iy \cdot \frac{iy}{x^2+y^2} = \\ &\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = 1.\end{aligned}$$

Tittar vi nu på z^* ser vi att detta är ekvivalent med:

$$z^* = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Division av komplexa tal görs alltså genom förlängning av nämnarens konjugat enligt:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}} = \frac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2} = z_1 \cdot \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2}.$$

□

Nu kan vi även få till en sats för division med konjugat och absolutbelopp.

Sats 2.9. *Om z_1 och z_2 är två komplexa tal så gäller:*

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}, \qquad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

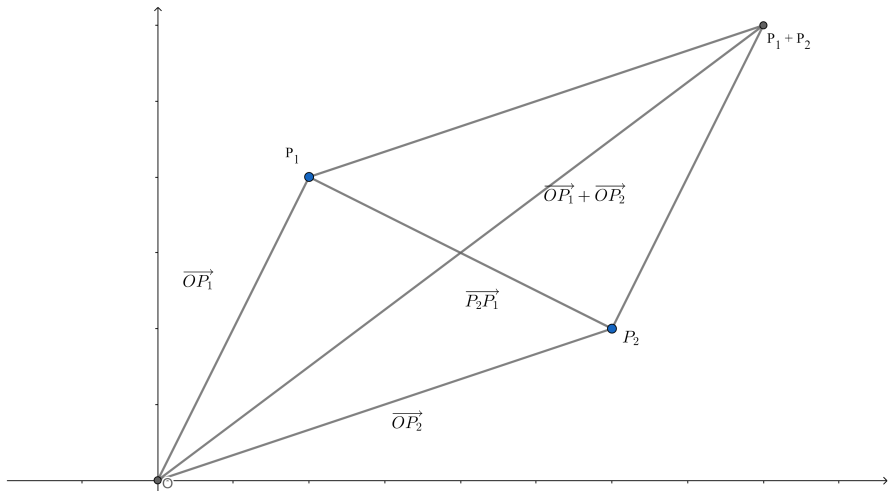
2.2 Komplexa talplanet

I figur 3 har vi gjort en geometrisk tolkning av konjugat och absolutbelopp i det komplexa talplanet. Benämningen kommer från att detta plan kan tolkas som mängden $\mathbb{C}$ av alla komplexa tal. För att kunna göra detta behöver vi göra om ett komplext tal till de koordinater vi använder i $\mathbb{R}^2$. Vi låter den reella delen av ett komplext tal vara koordinaten på den horisontella axeln. Samt imaginärdelen av ett komplext tal vara koordinaten på den vertikala axeln.

Definition 2.10. *Låt $z = x + iy$ vara ett komplext tal. Re $z = x$ och Im $z = y$. Då svarar (x, y) mot punkten z i det komplexa talplanet.*

2.2.1 Vektorer

När vi grafiskt representerar komplexa tal i planet gör vi det enklas med hjälp av vektorer. Om vi låter punkten P vara punkten för det komplexa talet z, representerar vektorn $\overrightarrow{OP}$ även talet z. Längden av denna vektor ges av absolutbeloppet, $|z|$ för z. Detta ger oss ett tydligt samband mellan vektorer i planet och de komplexa talen. Visualisering av addition och subtraktion blir på detta sätt väldigt tydlig. Låt vektorerna $\overrightarrow{OP_1}$ och $\overrightarrow{OP_2}$ representera de komplexa talen z_1 och z_2. Addition av z_1 och z_2 ges av vektorn $\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2}$. Motsvarande sätt ges differensen, $z_1 - z_2$, av vektorn $\overrightarrow{OP_1} - \overrightarrow{OP_2} = \overrightarrow{P_2P_1}$. Se figur 4.



Figur 4: Komplexa talplanet och triangelolikheten

2.2.2 Triangelolikheten

Denna geometriska tolkning ger oss även en visualisering av triangelolikheten. Denna säger att två sidor i en triangel är längre än den tredje. Ser vi till figur 4 är det uppenbart att sträckan $\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{OP_2}$ är den kortaste vägen till $P_1 + P_2$ och allt annat är en omväg. Detta är triangelolikheten.

Sats 2.11. *Låt z_1 och z_2 vara två komplexa tal. Då gäller*

$$||z_1| - |z_2|| \leqslant |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

Likhet till höger inträffar då z_1 och z_2 har samma riktning, medan likheten till vänster inträffar då z_1 och z_2 har motsatt riktning.

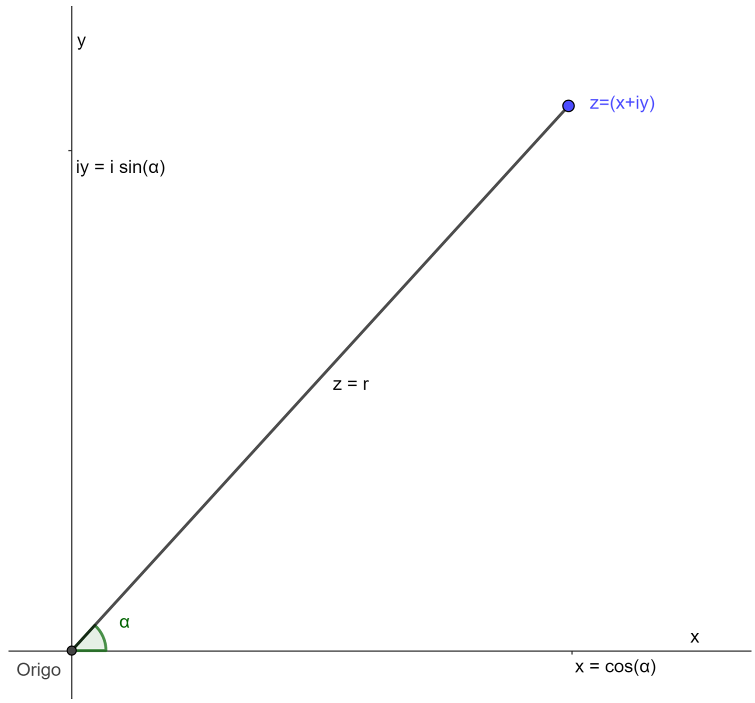
2.3 Polär form

Med en vektor för det komplexa talet z på plats kan vi mäta vinkeln α mellan den positiva reella axeln x och vektorn för z. Vi kallar denna vinkel α för argumentet för z. Denna vinkel kommer ligga mellan 0 och 2π plus en additiv multipel av 2π, detta gör att α alltid är reellt. Vidare kallar vi vektorns längd, som vi tidigare bestämt till $|z|$, för r. Vi kan nu med hjälp av trigonometriska funktioner definiera den polära formen av z.

Definition 2.12. *Låt $z = x + iy$ vara ett komplext tal. Då gäller de att polära formen för z är:*

$$z = r(cos\ \alpha + i\ sin\ \alpha) = re^{i\alpha}$$
$$där\ r = |z|,\ \alpha = arg\ z.$$

Precis som vektorer är särskillt bra för addtion och subtraktion av komplexatal, förenklar polärform multiplikation och division av komplexatal.



Figur 5: Polär form

Sats 2.13. *Vi har:*

(1) $e^{i\alpha}e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$

(2) $\dfrac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}} = e^{i(\alpha-\beta)}$

Bevis. (1) Låt $z = re^{i\alpha}$ och $w = se^{i\beta}$

$$\begin{aligned} re^{i\alpha}se^{i\beta} &= r(cos\alpha + isin\alpha)s(cos\beta + isin\beta) \\ &= rs(cos\alpha cos\beta + icos\alpha sin\beta + isin\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta) \\ &= rs((cos\alpha cos\beta - sin\alpha sin\beta) + i(cos\alpha sin\beta + sin\alpha cos\beta)) \\ &= rs(cos(\alpha+\beta) + isin(\alpha+\beta)) = rse^{i(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

(2) Division av komplexa tal vet vi sedan tidigare görs av förlängning med konjugatet. Konjugatet till z $= e^{i\alpha}$ är $e^{-i\alpha}$. Enligt definitionen får vi $e^{-i\alpha} = cos(-\alpha) + isin(-\alpha) = cos\alpha - isin\alpha = \bar{z}$.

$$\frac{re^{i\alpha}}{se^{i\beta}} = \frac{r}{s}\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}\frac{e^{-i\beta}}{e^{-i\beta}} = \frac{r}{s}e^{i\alpha}e^{-i\beta}$$

Enligt (1) blir $\frac{r}{s}e^{i\alpha}e^{-i\beta} = \frac{r}{s}\ e^{i\alpha-\beta}$ □

2.4 Räta linjen och cirkelns ekvation i det komplexa talplanet.

Räta linjer har i ett koordinatsystem ekvationen $Ax + By + C = 0$. Denna ekvation vill vi överföra till komplex form. Koordinaten (x, y) ska svara mot det komplexa talet $z = x + iy$. Vi vet sedan tidigare att $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$ och $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$. $Re(z)$ kommer motsvara x och $Im(z)$ motsvarar y. Vi får då den ekvivalenta ekvationen

$$A\frac{z+\bar{z}}{2} + B\frac{z-\bar{z}}{2i} + C = 0, \qquad A, B, C \in \mathbb{R}.$$

Detta kan vi utveckla till

$$(A - iB)z + (A + iB)\bar{z} + 2C = 0.$$

Därefter ansätter vi $A + iB = a$ och $b = 2C$. Vi får då följande sats.

Sats 2.14. *En linje i det komplexa talplanet ges av*

$$\bar{a}z + a\bar{z} + b = 0,$$
$$\textit{där } a \neq 0 \textit{ och } b \in \mathbb{R}.$$

Vi går vidare och tittar på ekvationen för en cirkel i det komplexa talplanet. En cirkel med medelpunkt i z_0 och radien r ges av ekvationen

$$|z - z_0| = r$$

Då båda sidor i denna ekvation är icke-negativa kan vi kvadera dem utan att förlora information och får då

$$(z - z_0)(\bar{z} - \bar{z_0}) = r^2 \iff$$
$$z\bar{z} - z\bar{z_0} - z_0\bar{z} + z_0\bar{z_0} = r^2$$

Vi sätter $a = -z_0$ och $b = z_0\bar{z_0} - r^2$ och får då följande sats.

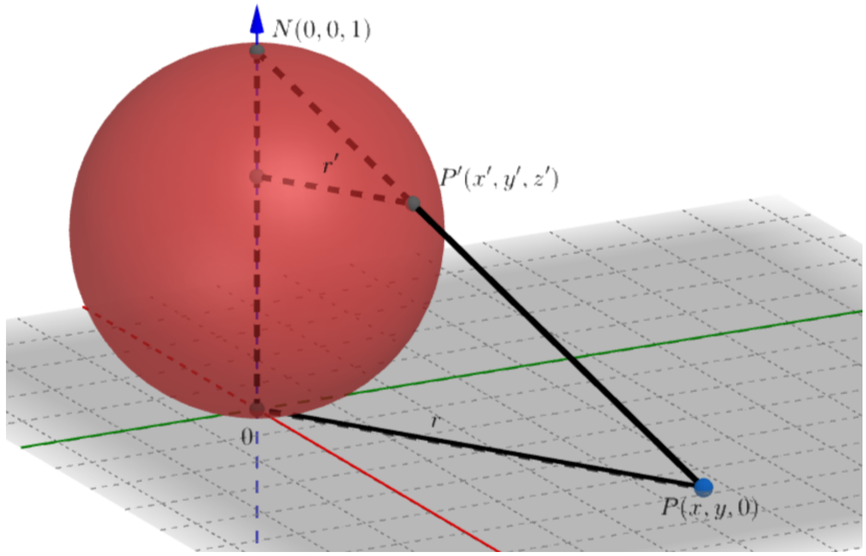
Sats 2.15. *En cirkel i det komplexa talplanet ges av*

$$z\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} + b = 0, \qquad a \in \mathbb{C}, \quad b \in \mathbb{R},$$

där $b - a\bar{a} < 0$.

Att b är reellt blir uppenbart om man betänker att $z_0\bar{z_0} = |z_0|^2$, och villkoret är klart:

$$b - a\bar{a} = z_0 \cdot \overline{z_0} - r^2 - z_0\overline{z_0} = -r^2.$$



Figur 6: Riemannsfären

3 Riemannsfären (Komplexa talsfären) och det utökade komplexa talplanet

Antag att vi har ett ortonormerat system för rummet med origo, 0, och basverktorerna e_x, e_y, e_z. Vi identifierar xy-planet med det komplexa talplanet. Ekvationen:

$$x^2 + y^2 + (z - \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4},$$

beskriver den sfär som då ligger på xy-planet i origo med en radie på $\frac{1}{2}$. Sfären skär z-axeln endast i origo och punkten $N = (0, 0, 1)$. Från punkten N kan vi nu avbilda hela xy-planet på sfären genom centralprojektion. En punkt P i xy-planet avbildas alltså på punkten P' på sfären som i sin tur ligger på den punkt på sfären som linjen mellan N och P skär. Detta skapar en omvändbar relation mellan punkter i det komplexa talplanet och punkter på sfären utom just punkten N. Sfären kallas för den komplexa talsfären eller Riemann-sfären efter den tyska matematikern Bernhard Riemann. Se Figur 6.

Men vi vill kunna representera det komplexa talsystemet på hela sfären, alltså även punkten N. Därför utvidgar vi mängden av komplexa tal med en extra punkt: oändligheten ∞. När vi talar om oändlighet hos komplexa tal är vi intresserade av sträckan från origo eller den punkt i den komplexa talplanet vi utgår ifrån. Alltså absolutbeloppet till den vektor vi tittar på eller den cirkulära omgivning i söker. Om vi tittar på Figur 6 förstår vi att desto längre bort från origo vår punkt P kommer desto närmare N kommer vår punkt P' komma.

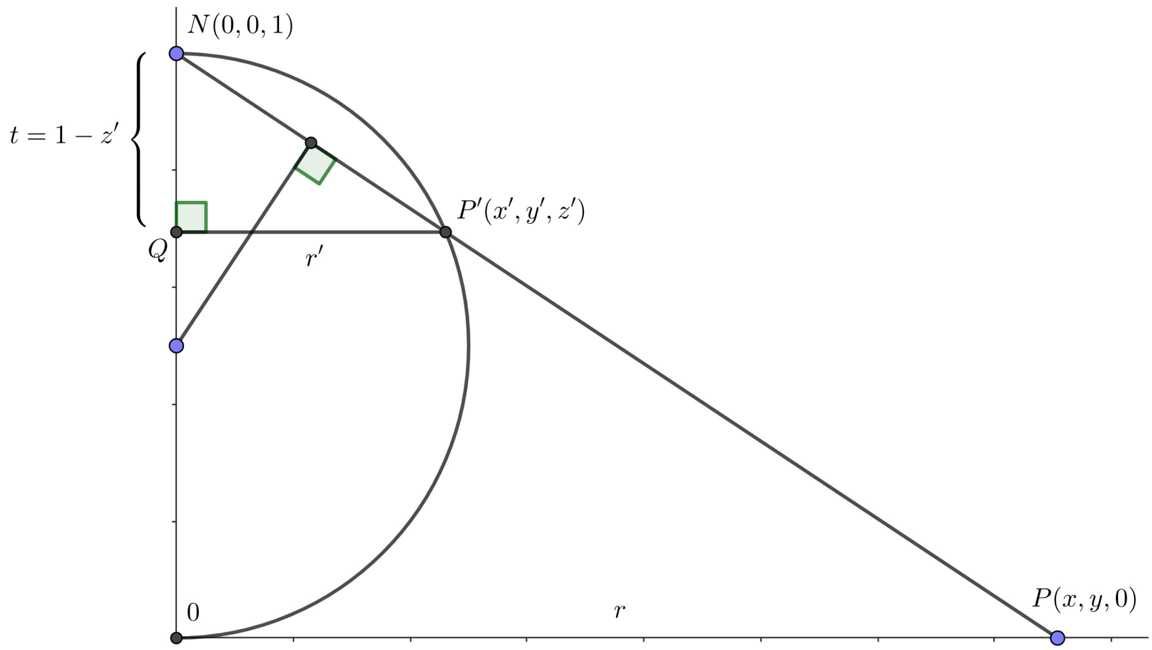
Detta talsystem blir större än det komplexa talsystemet och vi kallar det för det utvidgade komplexa planet.

Definition 3.1. *Mängden* $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *kallas det utvidgade komplexa talplanet.*

Vi behöver nu beskriva hur räkneoperationer med vår nya oändlighet fungerar.

Sats 3.2. *Låt* z *vara ett komplext tal, följande gäller då i* $\widehat{\mathbb{C}}$

$$\begin{aligned} &z + \infty = \infty, \qquad && \frac{z}{\infty} = 0 \qquad && \text{om } z \neq \infty, \\ &z \cdot \infty = \infty, && \frac{z}{0} = \infty && \text{om } z \neq 0, \\ &\infty \cdot \infty = \infty. \end{aligned}$$



Figur 7:

Om vi ska beskriva hur en punkt $P = (x, y, 0)$ i xy-planet avbildas på en punkt $P' = (x', y', z')$ på Riemann-sfären har vi följande samband.

$$\frac{x_1'}{x_1} = \frac{x_2'}{x_2} = \frac{1 - x_3'}{1} = \frac{r'}{r}.$$

Vi kan från figur 7 härleda detta. Linjen genom N och P har riktningsvektor $(x, y, -1)$ så punkterna på den linjen uppfyller:

$$(x', y', z') = (0, 0, 1) + t(x, y, -1) \Longrightarrow t = \frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{1 - z'}{1}. \tag{1}$$

Vi behöver nu beräkna t och ser att:

$$t = 1 - z' = |\overrightarrow{NQ}| = CosN \cdot |\overrightarrow{NP'}|.$$

Den sista likheten kan vi med hjälp av figur 7 räkna till:

$$CosN = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \quad \text{och} \quad |\overrightarrow{NP'}| = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot CosN = CosN = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}.$$

Vilket ger oss:

$$t = CosN \cdot |\overrightarrow{NP'}| = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+r^2}} = \frac{1}{1+r^2}.$$

Sedan avsnitt 2.3 vet vi att r är lika med absolutbeloppet av ett komplext tal. Så $r = \sqrt{x^2 + y2}$ vilket get oss att:

$$t = \frac{1}{1+x^2+y^2}.$$

Nu när vi vet t får vi direkt ur (1) att:

$$x' = \frac{x}{1+x^2+y^2}.$$

På liknande sätt får vi även:

$$y' = \frac{y}{1+x^2+y^2}.$$

Och slutligen ur $t = 1 - z'$ får vi:

$$1 - z' = t = \frac{1}{1+x^2+y^2} \Longleftrightarrow z' = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}.$$

Följande sats kan då ges.

Sats 3.3. *Punkten $P(x, y, 0)$ i det komplexa talplanet avbildas på en punkt $P'(x', y', z')$ på Riemannsfären enligt följande:*

$$\begin{cases} x' = \frac{x}{1+x^2+y^2} \\ y' = \frac{y}{1+x^2+y^2} \\ z' = \frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2} \end{cases}.$$

3.1 Cirklar på Riemannsfären

En cirkel på en sfär utgörs av skärningen mellan sagda sfär och ett plan, $Ax + By + Cz + D = 0$. Söker vi ett plan som skär Riemannsfären är det samma sak som att det finns en punkt i planet som har avstånd $\frac{1}{2}$ från sfärens centrum. Formeln för att beräkna avståndet mellan en punkt och en sfär ges av följande sats:

Sats 3.4. *Avståndet mellan punkten* $P = (x_0, y_0, z_0)$ *och planet* Π:$Ax + By + Cz + D$ *i rummet ges av formeln*

$$d(P : \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Bevis för denna lämnas inte i denna uppsats men finns att finna i [2]. Satsen behöver vi använda för att se till de cirklar vi söker på Riemannsfären inte urartar, alltså att cirklarna fortfarande är cirklar på sfären.

Vi tillämpar nu sats 3.4. Avståndet från Riemannsfärens medelpunkt, $(0, 0, \frac{1}{2})$, till planet är:

$$d\left((0, 0, \frac{1}{2}), \Pi\right) = \left(\frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right) = \frac{\left|\frac{1}{2}C + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Vi vill se till att planet skär Riemannsfären och får då följande villkor:

$$\frac{(\frac{1}{2}C + D)^2}{A^2 + B^2 + C^2} < \frac{1}{4},$$

som alltså säger att det finns en punkt på planet som har avstånd från sfärens medelpunkt som är mindre än sfärens radie.

Vi kan ytterligare förenkla detta:

$$\frac{\frac{1}{4}C^2 + CD + D^2}{A^2 + B2 + C^2} < \frac{1}{4} \iff \frac{1}{4}C^2 + CD + D^2 < \frac{1}{4}(A^2 + B^2 + C^2) \iff$$

$$C^2 + 4CD + 4D^2 < A^2 + B^2 + C^2 \iff 4D(C + D) < A^2 + B^2.$$

Vi har nu en ekvation som tillåter oss ange följande sats.

Sats 3.5. *För att cirkeln på Riemannsfären som fås av planet med ekvationen* $Ax+By+Cz+D = 0$, *inte ska urarta måste följande förhållande mellan koefficienterna i planets ekvation vara uppfyllda.*

$$4D(C + D) < A^2 + B^2.$$

Ur planets ekvation och sats 3.3 får vi nu en ekvation för cirkeln på Riemannsfären.

Sats 3.6. *En cirkel på Riemansfären ges av ekvationer av typen*

$$\frac{C(x^2 + y^2 + z^2) + Ax + By}{x^2 + y^2 + 1} + D = 0 \quad , \quad z = x^2 + y^2 + z^2$$

Bevis. Att $(x, y, z) \in \Pi \iff Ax+By+Cz+D = 0$. Om punkten dessutom ligger på Riemannsfären är:

$$x^2 + y^2 + (z + \frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \iff x^2 + y^2 + z^2 - z = 0 \iff z = x^2 + y^2 + z^2.$$

Alltså är $Ax + By + C(x^2 + y^2 + z^2) + D = 0$, vilket är ekvivalent med uttrycket i satsen. $\square$

Projekttionen av en cirkel på Riemannsfären ner på planet kan vi intuitivt förstå blir en cirkel. Men om cirkeln går genom punkten N på Riemannsfären får vi istället en rät linje. För att förstå detta kan vi tänkta på att punkten N svarar mot ∞ i $\widehat{\mathbb{C}}$. En rätlinje i det komplexa talplanet som går genom origo kommer i båda ändarna nå samma ∞.

Sats 3.7. *En cirkel på Riemannsfären motsvarar antingen en cirkel eller en rätlinje i det komplexa talplanet och omvänt.*

Bevis. Ur ekvationen för cirkeln på Riemannsfären $Ax' + By' + Cz' + D = 0$ och sats 3.3, får vi dess bild i det komplexatalplanet.

$$(C + D)(x^2 + y^2) + Ax + By + D = 0$$

Om $(C + D) = 0$ får vi kvar $Ax + Bx + D = 0$, detta är formen för en rätlinje. Vi kan också se att när $(C + D) = 0$ uppfyller punkten N=(0,0,1), som svarar för ∞, planet ekvation.

I fallet där $(C + D) \neq 0$ kan vi med lite räkning se att vi har med en cirkel att göra.

$$\begin{aligned}
(C+D)(x^2+y^2) + Ax + By + D = 0 \quad &\iff \frac{(C+D)(x^2+y^2) + Ax + By + D}{(C+D)} = 0 \quad \iff \\
x^2 + y^2 + \frac{Ax + By + D}{(C+D)} = 0 \quad &\iff x^2 + \frac{Ax}{(C+D)} + y^2 + \frac{By}{(C+D)} + \frac{D}{(C+D)} = 0 \quad \iff \\
\left(x + \frac{A}{2(C+D)}\right)^2 + \left(y + \frac{B}{2(C+D)}\right)^2 \quad &= \frac{A^2 + B^2 - 4D(C+D)}{(2(C+D))^2}.
\end{aligned}$$

En cirkel på riemannsfären svarar alltså mot en linje i planet om och endast om den går genom ∞. Annars mot en cirkel. I $\widehat{\mathbb{C}}$ försvinner alltså skillnaden mellan cirklar och linjer. $\square$

4 Möbiustransformationer

Möbiustransformationer är funktioner från de komplexa talen till de komplexa talen.

Definition 4.1. *Möbiustransformationen är funktioner från $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ som ges av*

$$z \longrightarrow w = Tz = \frac{az+b}{cz+d} \qquad a, b, c, d \in \mathbb{C}$$

där $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ och kravet $ad - bc \neq 0$ är uppfyllt.

Det sista kravet utesluter alla fall där w är en konstant. För säg att $ad - bc = 0$. Vi får då att a och c är lika med någon konstant, k, gånger b och d. Så att $a = kb$ och $c = kd$. Detta ger $kbd - kbd = 0$ och vi ser då att w kommer vara en konstant

$$\frac{az+b}{cz+d}, \quad a = kb, \quad c = kd$$
$$\frac{kbz+b}{kdz+d} = \frac{kz+1}{kz+1} \cdot \frac{b}{d} = \frac{b}{d}$$

Om vi istället vänder argumentet och låter:

$$w_0 = \frac{az+b}{cz+d} \Longleftrightarrow w_0cz + w_0d = az + b \Longleftrightarrow (w_0c - a)z = b - w_0d.$$

Om detta gäller för alla z så är $w_0c - a = 0$ och $b - w_0d = 0$. Vilket ger oss att $ad - bc = 0$. Även fallet där $C = D = 0$ utesluts av kravet $ad - bc \neq 0$. Vi har då en funktion som är definierad för alla fall z där nämnaren är skillt från noll. Om $c = 0$ gäller det för alla $z \in \mathbb{C}$ men om $c \neq 0$ så blir vår nämnare noll i $z = \frac{-d}{c}$. Om vi då utvidgar till det utvidgade komplexa talplanet kan vi göra följande definition.

Definition 4.2.

$$T(z) = \begin{cases} c \neq 0: & T(\frac{-d}{c}) = \infty, \quad T(\infty) = \frac{a}{c} \\ c = 0: & T(\infty) = \infty \end{cases}$$

Denna definition stämmer överens med räknereglerna i Sats 3.2 för ∞. Denna utvidgade avbildning av definition 4.1. kallar vi en Möbiustransformation.

Till varje Möbiustransformation $T(z)$ som i def 4.1 kan man associera en matris:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Om determinanten till denna matris A är nollskilld så har vi uppfyllt vilkoret att $ad - bc \neq 0$ då:

$$detA = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

4.1 Invers, sammansättning och speciella fall i $\widehat{\mathbb{C}}$

Sats 4.3. *Inversen till en möbiustransformation är en möbiustransformation*

Bevis. Vi utgår ifrån definitionen 4.1. och löser där ut z.

$$
\begin{aligned}
w = \frac{az+b}{cz+d} \quad &\longleftrightarrow \quad wcz + wd = az + b, \\
wcz - az = -dw + b \quad &\longleftrightarrow \quad z(wc - a) = -dw + b, \\
&z = \frac{-dw+b}{cw-a}.
\end{aligned}
$$

Detta gäller alla w skillt från $\frac{a}{c}$ och ∞. Så vi använder definition 4.2 och ser att T är omvändbart med inversen enligt

$$
T^{-1}(w) = \begin{cases} \dfrac{-dw+b}{cw-a}, & w \neq \frac{a}{c}, \quad w \neq \infty, \\ \infty, & w = \frac{a}{c}, \\ \frac{-d}{c}, & w = \infty. \end{cases}
$$

Denna transformation är precis som i definition 4.1. och 4.2. och är utvidgad till hela $\widehat{\mathbb{C}}$. Inversen till en möbiustransformation är en möbiustransformation. $\square$

Sats 4.4. *Sammansättning av två möbiustransformationer ger en möbiustransformation.*

Bevis. Antag att vi har två möbiustransformationer T och T' som ges av:

$$
Tz = \frac{az+b}{cz+d} \qquad , \qquad T'z = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}.
$$

För alla z utom de speciella fall vi får av definition 4.2. får vi då:

$$
T'T(z) = T'(Tz) = \frac{a'(\dfrac{az+b}{cz+d}) + b'}{c'(\dfrac{az+b}{cz+d}) + d'} = \frac{\dfrac{a'az + a'b + b'cz + b'd}{cz+d}}{\dfrac{c'az + c'b + d'cz + d'd}{cz+d}} = \frac{(a'a + b'c)z + a'b + b'd}{(c'a + d'c)z + c'b + d'd}
$$

Vi ser att detta är en möbiustransformation. Nu utvidgar vi enligt definition 4.2. detta till $\widehat{\mathbb{C}}$ och tittar på de speciella punkter som ges. Dessa punkter är:

$$
z = \frac{-d}{c} \quad , \quad z = \infty \quad \text{och} \quad z = T^{-1}\left(\frac{-d}{c}\right).
$$

Dessa behöver kontrolleras för att se att sammansättningarna är giltiga för alla $z \in \widehat{\mathbb{C}}$. Men innan vi gör det går vi tillbaka och tittar på den matris A vi kunde associera till varje Möbiustransformation Tz. Vi kan nämligen göra en sammansättning av två Möbiustransformationer med hjälp av matrismultiplikation. Vi låter Tz och $T'z$ vara två Möbiustransformationer. Till dessa kan vi associera två matriser, matrisen A till Tz och matrisen A' till $T'z$. Genom matrismultiplikationen får vi då:

$$
A'A = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{pmatrix}
$$

Vi ser att detta är ekvivalent med koefficienterna på sammansättningen av två Möbiustransformationer. Vidare kan vi använda determinanten av båda matriserna för att säkerställa att vår sammansättning uppfyller kravet att $ad - bc \neq 0$ enligt:

$$
det(A'A) = \begin{vmatrix} a'a + b'c & a'b + b'd \\ c'a + d'c & c'b + d'd \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.
$$

Nu går vi tillbaka till att kontrollera de tre punker i $\widehat{\mathbb{C}}$ som vi fick. Vi börjar med att titta på $\frac{-d}{c}$. Enligt Definition 4.2. ska detta bli:

$$(T'T)(\frac{-d}{c}) = T'(T\frac{-d}{c}) = T'(\infty) = \frac{a'}{c'}.$$

Vi kontrollerar att detta stämmer:

$$\frac{(a'a+b'c)\left(\frac{-d}{c}\right)+a'b+b'd}{(c'a+d'c)\left(\frac{-d}{c}\right)+c'a+d'd} = \frac{\frac{-a'ad-b'cd+a'bc+b'cd}{c}}{\frac{-c'ad-d'cd+c'bc+d'cd}{c}} =$$

$$\frac{a'bc-a'ad}{c'bc-c'ad} = \left(\frac{a'}{c'}\right)\left(\frac{bc-ad}{bc-ad}\right) = \frac{a'}{c'}.$$

Det första speciellla z fungerar. Vi fortsätter med $T'T(\infty)$, intuitivt skulle vi kanske vilja sätta in ∞ i vår sammansättning och få:

$$\frac{(a'a+b'c)\infty+a'b+b'd}{(c'a+d'c)\infty+c'b+d'd} = \frac{a'a+b'c}{c'a+d'c}.$$

Men vi måste komma ihåg att i räknereglerna för $\hat{\mathbb{C}}$ så är inte $\frac{\infty}{\infty}$ definierat enligt sats 3.2. Så vi sätter in enligt definition 4.3. och får:

$$(T'T(\infty) = T'(T\infty) = T'\frac{a}{c} = \frac{a'\frac{a}{c}+b'}{c'\frac{a}{c}+d'} = \frac{a'a+b'c}{c'a+d'c}.$$

Även detta fall fungerar enligt 4.2. Tillsist undersöker vi nu $T^{-1}(\frac{-d'}{c'})$. Vi börjar med att se vad vi borde får enligt 4.2.:

$$(T'T)(T^{-1}\left(\frac{-d'}{c'}\right) = T'(TT^{-1})\left(\frac{-d'}{c'}\right) = T'\left(\frac{-d'}{c'}\right) = \infty.$$

Vi kontrollerar:

$$T^{-1}\left(\frac{-d'}{c'}\right) = \frac{-d\frac{-d'}{c'}+b}{c\frac{-d'}{{}'c}-a} = \frac{d'd+c'b}{-(c'a+d'c)}$$

$$(T'T)(T^{-1}\left(\frac{-d'}{c'}\right) = T'T\left(\frac{d'd+c'b}{-(c'a+d'c)}\right) = T'\left(\frac{a\frac{d'd+c'b}{-(c'a+d'c)}+b}{c\frac{d'd+c'b}{-(c'a+d'c)}+d}\right) =$$

$$T'\left(\frac{d'ad-d'bc}{c'bc-c'ad}\right) = T'\left(\frac{-d'}{c'}\left(\frac{bc-ad}{bc-ad}\right)\right) = T'\left(\frac{-d'}{c'}\right) = \infty. \quad \textit{Det sista steget enligt 4.3.}$$

Vi ser att alla tre special fall fungerar för en sammansättning av två möbiustransformationer. $\square$

Sats 4.5. *Möbiustransformationerna utgör en grupp i* $\widehat{\mathbb{C}}$

Bevis. Vi har redan visat att möbiustransformationer är inverterbara och att sammasättningarna av möbiustransformationer är en möbiustransformation. En sammansättning av transformationer är alltid associativ så vi har påvisat gruppegenskaperna sånär som på Identitetelementet, $Id(z) = z$ som ja, också är en Möbiustransformation $Tz = z$. □

4.2 Fixpunkter

Vi säger att z_0 är en fixpunkt till transformationen T om $Tz_0 = z_0$.

Sats 4.6. *Om en möbiusavbildning har mer än två fixpunkter i* $\widehat{\mathbb{C}}$ *måste den vara den identiska avbildningen.*

Bevis. Antag att $z \in \mathbb{C}$ är en fixpunkt till T,

$$Tz = z \Longleftrightarrow \frac{az+b}{cz+d} = z \Longleftrightarrow cz^2 + z(d-a) - b = 0.$$

Om denna ekvation har fler än två lösningar måste alla koefficienter vara noll. Alltså att $c = b = 0$ och $a = d$. Detta ger oss transformationen:

$$Tz = \frac{az}{d} = z.$$

Detta ger oss tydligt den identiska avbildningen. Men vi måste även titta på special fallet $T\infty = \infty$, alltså att fixpunkten är ∞. Då får vi enligt 4.3. att $c = 0$. Andra $z \in \mathbb{C}$ som kan vara fixpunkter uppfyller då:

$$\frac{az+b}{d} = z \Longleftrightarrow (a-d)z + b = 0$$

Har denna ekvation mer än en lösning måste alla koefficienter igen vara noll, så:

$$Tz = \frac{az}{d} = z.$$

□

4.3 Tre punkter

Sats 4.7. *Det finns en unik möbius transformation som tar tre distinkta punkter till tre andra destinkta punkter.*

Bevis. Med hjälp av sats 4.6. kan vi bevis detta. Säg att vi har tre distinkta punkter z_1, z_2 och z_3, dessa tre avbildas på w_1, w_2 och w_3 av både S och T så att:

$$w_k = Sz_k = Tz_k, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Om vi nu tar inversen till T, T^{-1} och sätter ihop med S får vi:

$$(T^{-1}S)z_k = T^{-1}(Sz_k) = T^{-1}(w_k) = z_k, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Detta betyder att det finns tre stycken fixpunkter z_1, z_2 och z_3, alltså är $T^{-1}S$ den identiska avbildningen enligt sats 4.6. Vi kan då säga:

$$(T^{-1}S)(z) = z, \qquad z \in \widehat{\mathbb{C}}$$

Detta säger att $S = T$ för alla z och vi vet alltså att transformationen är unik. Vi behöver nu också visa att det alltid finns en sådan möbiustransformation. Vi gör det genom att visa att det alltid finns en möbiustransformation som avbildar tre godtyckliga skilda punkter, (z_1, z_2, z_3), på tre andra godtyckliga punkter, (w_1, w_2, w_3), i $\hat{\mathbb{C}}$. Först tar vi (z_1, z_2, z_3) och avbildar dem på $(0, 1, \infty)$ genom följande transformation:

$$Tz = \frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = (z, z_1, z_2, z_3), \qquad z_1, z_2, z_3 \neq \infty.$$

Här förutsätts att $z_1, z_2, z_3 \neq \infty$, det fallet behandlas nedan. Vi ser att detta är en möbius transformation med lite räkning.

$$\frac{z - z_1}{z - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \frac{zz_2 - zz_3 - z_1z_2 + z_1z_3}{zz_2 - zz_1 - z_2z_3 + z_1z_3} = \frac{(z_2 - z_3)z - z_1(z_2 - z_3)}{(z_2 - z_1)z - z_3(z_2 - z_1)}$$

Vidare är denna möbius transformation skapad så att T av z_1, z_2, z_3 respektiva avbildas på $0, 1$ och ∞. Vi kontrollerar:

$$\begin{aligned}
Tz_1 &= \frac{z_1 - z_1}{z_1 - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = 0 \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = 0, \\
Tz_2 &= \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \left(\frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_1}\right)\left(\frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_3}\right) = 1 \cdot 1 = 1, \\
Tz_3 &= \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_3} \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_1} = \infty.
\end{aligned}$$

I fallet Tz_3 är det uppenbart att vi rör oss mot ∞ enligt def 4.2, som säger att när $c = 0$ så ger $T(\infty) = \infty$. Vi tittar nu vidare på fallen där z_1, z_2, z_3 respektiva ansätts till ∞. Detta resulterar i följande fall där vi säger att kvoten mellan täljaren och nämnaren som är ∞ sätt till 1. Vi definierar då transformationerna som följande:

$$\frac{z_2 - z_3}{z - z_3}, \qquad \frac{z - z_1}{z - z_3} \quad samt \quad \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Vi kontrollerar att även dessa fall tar vår funktion oss till rätt punker.

$$\begin{array}{lll}
z_1 = \infty & T(z_2) & T(z_3) \\
T(z) = \dfrac{z_2 - z_3}{z - z_3} & \dfrac{z_2 - z_3}{z_2 - z_3} = 1 & \dfrac{z_2 - z_3}{z_3 - z_3} = \infty
\end{array}$$

$z_2 = \infty$ | $T(z_1)$ | $T(z_3)$

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z - z_3} \qquad \frac{z_1 - z_1}{z_1 - z_3} = 0 \qquad \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_3} = \infty$$

$z_3 = \infty$ | $T(z_1)$ | $T(z_2)$

$$T(z) = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \qquad \frac{z_1 - z_1}{z_2 - z_1} = 0 \qquad \frac{z_2 - z_1}{z_2 - z_1} = 1$$

Vi låter nu S vara en ny möbiustransformation som tar w_1, w_2 och w_3 till 0, 1 och ∞. Vi definierar den som:

$$Sz = (z, w_1, w_2, w_3)$$

Denna transformations invers, S^{-1}, tar då 0, 1 och ∞ till w_1, w_2 och w_3. Sammasättningen av S^{-1} och T ger oss möbiustransformationen $U = S^{-1}T$ som har följande egenskap:

$$Uz_k = S^{-1}(Tz_k) = w_k, \qquad k = 1, 2, 3.$$

Vi har nu bevisat att transformationen finns och sedan tidigare att den också är unik. □

Ur $S^{-1}(Tz) = w$ ser vi att $Tz = Sw$. Vi kan då vidare se att:

$$Tz = (z, z_1, z_2, z_3) = (z, w_1, w_2, w_3) = Sz \qquad \textit{för alla } z.$$

Detta betyder att avbildningen U enkelt får av att lösa för w ur likheten ovan.

4.4 Avbildningar

Alla möbiustransformationer kan brytas ner till tre olika typer av avbildningar. Translationer, en kombination av rotation och utvidgning samt inversioner. Vi titar på samtliga av dessa typer av avbildningar. Vi börjar med att betrakta translationer:

$$z \longrightarrow w = z + b.$$

En transaltion flyttar z någon riktning. Därefter har vi rotation och utvidning.

$$z \longrightarrow w = az \qquad a \neq 0$$

Med en polär omskrivning blir det tydligare vad som händer här:

$$\begin{cases} z = |z|e^{i\alpha} \\ a = |a|e^{i\beta} \end{cases}$$

Detta ger oss $w = |a||z|e^{i\alpha\beta}$ som betyder att vi får en rotation med vinkeln β och en förstoring om $|a| < 1$ och en förminskning om $|a| > 1$. Tillsist har vi avbildningen:

$$z \longrightarrow w = \frac{1}{z}.$$

Där vi ser att:

$$\begin{cases} |z||w| = 1 \\ argz = -argw \end{cases}$$

Bilden av w ges alltså genom en inversion följt av att ta konjugatet på punkten vi får.

Vi kan nu säga följande.

Sats 4.8. *Alla möbiustransformationer är sammansättningar av translation, rotation, utvidgning och inversion.*

Bevis. Två fall uppstår när vi ska visa dessa sammansättningar. Låt en möbiustransformation vara:

$$w = Tz = \frac{az+b}{cz+d}$$

Det första fallet är när $c = 0$. Vi får då:

$$\begin{aligned} z &\longrightarrow w_1 = \frac{a}{d}z, && \text{en rotation,} \\ w_1 &\longrightarrow w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}, && \text{en translation.} \end{aligned}$$

Det andra fallet när $c \neq 0$ kräver lite mer räkning med genom följande transformationer :

$$\begin{aligned} z &\longrightarrow w_1 = z + \frac{d}{c}, && \text{en translation,} \\ w_1 &\longrightarrow w_2 = \frac{1}{w_1}, && \text{en inversion,} \\ w_2 &\longrightarrow w_3 = w_2 \cdot \frac{bc-ad}{c^2}, && \text{en rotation,} \\ w_3 &\longrightarrow w = w_3 + \frac{a}{c}, && \text{en translation.} \end{aligned}$$

Låt oss kontrollera det sista.

$$\begin{aligned} w_3 + \frac{a}{c} = w_2 \cdot \frac{bc-ad}{c^2} + \frac{a}{c} = \frac{1}{w_1} \cdot \frac{bc-ac}{c^2} + \frac{a}{c} = \left(\frac{1}{z + \frac{d}{c}} \right) \left(\frac{bc-ad}{c^2} \right) + \frac{a}{c} \\ = \frac{bc-ad}{c(cz+d)} + \frac{a}{c} = \frac{1}{c}\left(\frac{bc-ad}{cz+d} + a \right) = \frac{1}{c}\left(\frac{bc-ad+acz+ad}{cz+d} \right) = \frac{az+b}{cz+d}. \end{aligned}$$

Varje möbiustransformation är en sammansättning av dessa avbildningar. □

4.5 Cirkelinvarians hos möbiustransformationer

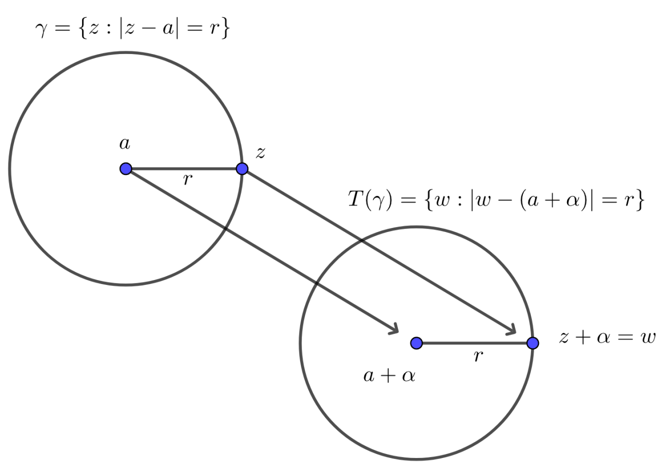
Detta leder oss in på en intressant engenskap hos möbiustransformationer. Det är nämligen så att en linje eller en cirkel avbildas under möbiustransformationer på en linje eller en cirkel.

Sats 4.9. *Varje möbiustransformation överför en cirkel eller linje i $\mathbb{C}$ till en cirkel eller linje i $\mathbb{C}$*

Bevis. Enligt sats 4.8 är en möbiustransformation en sammansättning av vissa enkla avbildningar. Det räcker då att bevisa att desssa avbildningar som visas i 4.8 överför cirklar och linjer till cirklar eller linjer då även dess sammansättning skulle göra det. Vi börjar med att titta på translationer:

$$z \longrightarrow w = z + b \Longleftrightarrow z = w - b.$$

Vi börjar med att titta på en cirkel. Låt $\gamma = \{z : |z-a| = r\}$ vara en cirkel i det komplexa talplanet. Om vi nu utför transformationen $T(\gamma) = z + \alpha = w$ får vi en ny cirkel där mittpunkten a flyttas motsvarande α och alla punkter på avståndet r från den nya mittpunkten $a+\alpha$ uppfyller $z+\alpha = w$. Dess bild blir då $\{z + \alpha : z \in \mathbb{C}\} = \{w : |w - (a + \alpha)| = r\}$., vilket uppenbart är en cirkel med medelpunk i $a + \alpha$ och radie r. Se figur 8.



Figur 8: Translation av en cirkel

För en linje $\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta + b = 0$ får vi av en translation följande ekvation,

$$\begin{aligned} &\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + \beta + b = 0 &&\Longleftrightarrow \quad \bar{\alpha}(w - b) + \alpha\overline{(w - b)} + \beta + b = 0 \quad \Longleftrightarrow \\ &\bar{a}w - \bar{a}b + a\bar{w} - a\bar{b} + \beta = 0 &&\Longleftrightarrow \quad \bar{a}w + a\bar{w} + \beta - (\bar{a}b + a\bar{b}). \end{aligned}$$

Notera att $\bar{a}b + a\bar{b} = a\bar{b} + \bar{a}b$ så det är ett reellt tal. Alltså har vi en linje och har då visat att både cirklar och linjer bevaras under translationer. Näst tittar vi på rotation och förstoring. För en cirkel har vi ekvationen:

$$|z - z_0| = r.$$

Om vi nu genomför möbiustransformationen $z \longrightarrow w = az$ får vi följande:

$$\begin{aligned} w = az = a|z - z_0| &= ar \\ a^2(z - z_0)(\bar{z} - \overline{z_0}) &= a^2r^2 \\ a^2(z\bar{z} - z\overline{z_0} - z_0\bar{z} - z_0\overline{z_0}) &= a^2r^2 \\ (az - az_0)(a\bar{z} - a\overline{z_0}) &= a^2r^2 \\ |az - az_0| &= |a|r \\ |w - az_0| &= |a|r. \end{aligned}$$

Detta är fortfarande ekvationen för en cirkel. En linje ger oss:

$$\begin{aligned} w = az = a(\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + b) \\ \bar{\alpha}az + \alpha a\bar{z} + ab \\ \alpha w + \alpha a\bar{z} + ab \\ \frac{\alpha w + \alpha a\bar{z} + ab}{a} \\ \frac{\alpha w}{a} + \alpha\bar{z} \cdot \frac{\bar{a}}{\bar{a}} + b \\ \frac{\alpha w}{a} + \frac{\alpha\bar{a}\bar{z}}{\bar{a}} + b \\ \frac{\alpha w}{a} + \frac{\alpha\bar{w}}{\bar{a}} + b. \end{aligned}$$

Detta är fortfarande en linje, så en linje avbildas på en linje och en cirkel avbildas på en cirkel efter rotation och förstorning. Tillsist ska vi titta på inversion. Inversion tar z till $\frac{1}{z}$. Skriver vi om detta på formen $x + iy$ får vi:

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Detta kommer hjälpa oss se hur ekvationerna borde se ut efter inversionen. Vi tittar på cirkeln och linjens ekvation och börjar med ekvationen för en cirkel:

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + b = 0.$$

Vi skriver om detta som $z = x + iy$ och får då:

$$(x^2 + y^2) + \bar{\alpha}(x + iy) + \alpha(x - iy) + b.$$

Vi ser nu att om vi dividerar hela ekvationen med $x^2 + y^2$ kommer vi få den form vi söker:

$$\frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} + \bar{\alpha}\frac{x + iy}{x^2 + y^2} + \alpha\frac{x - iy}{x^2 + y^2} + b\frac{1}{x^2 + y^2}.$$

Det första uttrycker förenklas till ett och vi ser i våra två uttryck med α har vi precis:

$$\frac{x + iy}{x^2 + y^2} = \bar{w} \quad \text{och} \quad \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = w.$$

Kvar då är att se vad uttrycket $\frac{1}{x^2+y^2}$ står för. Vi masserar om det lite:

$$\frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x+iy}{x^2+y^2}\frac{x-iy}{x^2+y^2} = \bar{w}w.$$

Vår ekvation blir tillsist följande:

$$1 + \bar{\alpha}\bar{w} + \alpha w + b\bar{w}w = 0.$$

Vi ser att enligt sats 2.15 är detta en cirkel så länge $b \neq 0$ och en linje om $b = 0$. Detta betyder att den ursprungliga cirkeln gick genom 0, alltså att 0 var en lösningt till ekvationen.

Tittar vi nu vidare på linjens ekvation:

$$z\bar{z} + \bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + b = 0.$$

Observerar vi att med samma metod som för cirkeln får:

$$\bar{\alpha}\bar{w} + \alpha w + b\bar{w}w = 0.$$

Vi ser då att om $b = 0$ så är inversionen fortfarande en linje, detta betyder att den ursprungliga linjen gick igenom $z = 0$. Om $b \neq 0$ då är ekvationen en cirkel genom $w = 0$.

Vi har nu bevisat att cirklar och linjer genom möbiustransformationer avbildas på cirklar och linjer. Tillsammans med sats 4.8 som visar att sammanssättningar av dessa transformationer gör samma sak och sats 3.6 som visar att detta även gäller i den utvidgade komplexa talplanet kan vi nu säga att satsen är bevisat för alla möbiustransformationer. □

4.6 Konformitet

Möbiustransformationer är konforma i varje avbildning. Det betyder att de bevarar vinklar mellan kurvor i planet. Vinkeln är invarant till storlek och riktning. Vi kan uttrycka detta i följande sats:

Sats 4.10. *Möbiustransformationer bevara vinklar mellan cirklar och linjer.*

Bevis. För att en funktion ska kunna vara konform måste den först vara analytisk, alltså att dess derivata är skilld från noll. Detta är Möbiustransformationer i alla punker utom $\frac{-d}{c}$. Vi kan uttrycka detta enligt:

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}.$$

Då gäller

$$T'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2} \neq 0, \qquad (z \neq \frac{-d}{c}).$$

Enligt 4.1 är $ad - bc \neq 0$ för alla möbiustransformationer och 4.2 visar att $\frac{-d}{c}$ är oändlighetspunken för möbiustransformationer. En Möbiustransformation är således analytisk. Att vinkeln mellan två kurvor (alltså cirklar eller linjer) som möts bevaras kan vi börja bevisa genom att beräkna tangentvektorn där de möts.

Låt R_1 och R_2 vara två kurvor som möts i z_0 så att $z_0 = R_1(z_0) = R_2(z_0)$. θ är vinkel mellan R_1 och R_2 i punkten z_0, alltså tangentvektorn mellan $R_1'(z_0)$ och $R_2'(z_0)$. Båda kurvorna tas nu genom Möbiustransformationen T och vi vill visa att de transformerade kurvorna $T(R_1)$ och $T(R_2)$ har samma vinkel, θ, mellan dess tangentvektorer.

Derivatan av transformationerna ges enligt kedjeregel:

$$\frac{d}{dt}T(R_1(z_0)) = T'(R_1(z_0)) \cdot R_1'(z_0) = T'(z_0) \cdot R_1'(z_0)$$
$$\frac{d}{dt}T(R_2(z_0)) = T'(R_2(z_0)) \cdot R_2'(z_0) = T'(z_0) \cdot R_2'(z_0).$$

Vi ser nu att vi får samma faktor i båda beräkningarna. Denna faktor är en rotation samt en förstorning eller förminskning. Vinkeln mellan R_1 och R_2 kommer alltså bevaras efter transformationen till $T(R_1)$ och $T(R_2)$ då båda kurvorna påverkas av precis samma faktor. $\square$

5 Konjugerade punkter

Vi vet vad spegling i en linje är. Konjugerade punkter låter oss spegla punkter i en cirkel i $\widehat{\mathbb{C}}$ För att göra detta måste vi hitta den Möbiusavbildning, S som tar vår cirkel i $\mathbb{C}$ till en rätlinje vilket är x-axeln, reella axeln. Den punkt vi får av S tar vi nu konjugatet till, därefter använder vi inversen till Möbiustransformationen, S, och den nya punkt vi får är speglingen av vår ursprungliga punkt i cirkeln. Vi ska nu visa att detta fungerar och definiera det som kallas konjugerande punkter.

Låt a, b, c, d i Möbiustransformationen:

$$Tz = \frac{az+b}{cz+d},$$

vara reella. I det fallet avbildar T reella axeln på sig själv, om z är reellt är även Tz rellt. Vi får även att:

$$T\bar{z} = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} = \overline{\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)} = \overline{(Tz)}.$$

Vilket betyder att två konjugerade punkter, z och $\bar{z}$, avbildas på två konjugerade punkter. Detta leder oss in i följande lemma.

Lemma 5.1. *En Möbiustransformation, T, avbildar reella axeln på sig själv om och endast om*

$$T\bar{z} = \overline{(Tz)}, \qquad \textit{alla } z \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

Bevis. Låt z vara reellt, $z = x$, $x \in \mathbb{R}$. Då gäller lemma för:

$$\overline{(Tx)} = T\bar{x} = Tx.$$

Omvänt gäller att en transformation som tar $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ kan skrivas med reella koefficienter. Låt x_1, x_2 och x_3 vara tre skilda punkter på den rella axeln. Deras bilder y_1, y_2 och y_3 ligger också på reella axeln och $w = Tz$. Då får vi enligt sats 4.8:

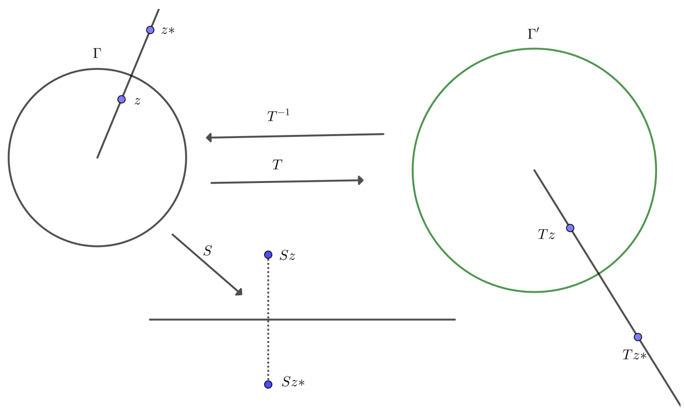
$$(z, x_1, x_2, x_3) = (w, y_1, y_2, y_3),$$
$$\frac{z-x_1}{z-x_3} \cdot \frac{x_2-x_3}{x_2-x_1} = \frac{w-y_1}{w-y_3} \cdot \frac{y_2-y_3}{y_2-y_1}.$$

Löser vi ut w får vi en Möbiustransformation med enbart reella koefficienter och Lemma 5.1 stämmer.

Detta leder oss in i definitionen för konjugerande punkter. □

Definition 5.2. *Låt* Γ *vara en cirkel i* $\widehat{\mathbb{C}}$. *Två punker* z *och* $z*$ *är konjugerande i* Γ *om för någon Möbiustransformation, S som avbildar* Γ *på reella axeln gäller:*

$$\overline{Sz} = Sz*.$$



Figur 9: Illustration defenition 5.2 och sats 5.3

Sats 5.3. *Låt T vara en Möbiustransformation som tar en cirkel Γ i $\widehat{\mathbb{C}}$ till en cirkel Γ' i $\widehat{\mathbb{C}}$. Punkterna z och $z*$ är då konjugerande i Γ endast om Tz och Tz^* är konjugerade i Γ'.*

Bevis. Antag att z och $z*$ är konjugerande i Γ. Vi vet då att det enligt def 5.2 finns en Möbiustransformation som överför Γ på reella axeln. Vi kallar den transformationen för S för vilket $\overline{Sz} = Sz*$. T förde över Γ på Γ' så den sammansatta transformationen $U = ST^{-1}$ måste då ta Γ' till den reella axeln. Vi får då:

$$\overline{U(Tz)} = \overline{ST^{-1}(Tz)} = \overline{Sz} = Sz* = ST^{-1}(Tz*) = U(Tz*)$$

Med andra ord är Tz och Tz^* konjugerade. □

Vi kommer avsluta denna uppsats med två satser och två lemma om konjugerade punkter. Satserna underlättar för att hitta konjugerade punkter i cirklar och linjer och de två lemma vi presenterar underlättar vissa avbildnings problem som kan uppstå. Vi börjar med de två satserna.

Sats 5.4. *Punkterna z och z^* är konjugerade på cirkeln Γ $|z - a| = r$ precis då:*

$$(z^* - a)(\bar{z} - \bar{a}) = r^2.$$

Bevis. Vi börjar med att göra transformationen:

$$Tz = w = z - a.$$

Detta ger oss cirkeln Γ':

$$|w| = r.$$

Enligt sats 5.3 är då z och $z*$ konjugerade i Γ preics då de är konjugerade i Γ'. Vi avbildar nu Γ' på den reella axeln med transformationen:

$$Sw = i\frac{w - r}{w + r}.$$

Denna transformationen tar Γ' till reella axeln, efter som t.ex. $\pm\Gamma$ tas till 0, ∞ och

$$ir \mapsto i\frac{ir - r}{ir + r} = \frac{-r - ir}{ir + r} = -1. \tag{3}$$

Den enda cirkeln eller linjen genom dessa tre punkter är den reella axeln så hela Γ' tas till reella axeln.

Enligt definition 5.2 är nu w och w^* konjugerade då $\overline{Sw} = Sw^*$. Vi beräknar detta till:

$$i\frac{w^* - r}{w^* + r} = -i\frac{\bar{w} - r}{\bar{w} + r}$$

vi förlänger med $-i$

$$\begin{aligned}\frac{w^* - r}{w^* + r} &= \frac{-\bar{w} + r}{\bar{w} + r} \iff \\ (w^* - r)(\bar{w} + r) &= (w^* + r)(-\bar{w} + r) \iff \\ w^*\bar{w} - r^2 &= -w^*\bar{w} + r^2 \iff \\ w^*\bar{w} &= r^2,\end{aligned}$$

och detta är ekvivalent med $(z^* - a)(\bar{z} - \bar{a}) = r^2$ $\square$

Ur detta kan vi konstatera att:

$$|z - a||z^* - a| = r^2.$$

Och genom det att:

$$arg(z^* - a) = -arg(\bar{z} - \bar{a}) = arg(z - a)$$

Som vi ser i figur 9 ligger alltså z^* alltid på en halvstråle från Γ's medelpunkt genom z. Vi kan då säga att man får z^* genom spegling av z i cirkeln Γ.

Om cirkeln Γ går genom ∞ är den som vi vet istället en linje. Om vi väljer två godtyckliga skilda punkter på linjen och kallar dom a och b hittar vi den konjugerade punkten z^* enligt följande sats.

Sats 5.5. *Punkterna z och z^* är konjugerade på linjen Γ precis då:*

$$\frac{\bar{z} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}} = \frac{z^* - a}{b - a}$$

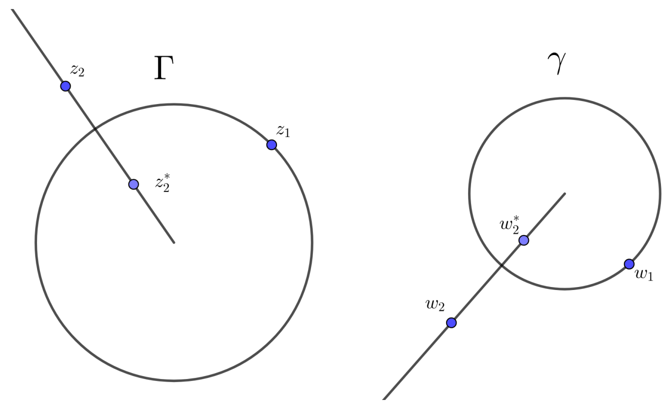
Bevis. Låt a och b vara på skilda punkter på linjen Γ. Transformationen:

$$Tz = \frac{z - a}{b - a},$$

tar linjen till den reella axeln. Vi får att $T(a) = 0$, $T(b) = 1$ och $T(\infty) = \infty$, och den enda cirkeln eller linjen genom 0, 1 och ∞ är den reella axeln. Enligt definition 5.2 är då punkterna z och z^* konjugerade precis då $\overline{Tz} = Tz^*$. Detta ger oss:

$$\frac{\bar{z} - \bar{a}}{\bar{b} - \bar{a}} = \frac{z^* - a}{b - a}.$$

Vilket är precis det som satsen säger. $\square$



Figur 10: Illustration Lemma 5.7.

Nu avslutar vi med de två lemman som utlovats.

Lemma 5.6. *Låt z_1, z_2 och z_3 vara tre skilda punkter i $\widehat{\mathbb{C}}$. Då finns det precis en cirkel, Γ, som går genom z_1, så att z_2 och z_3 är konjugerade med avseende på Γ.*

Bevis. Ta den möbiustransformation som överför z_2, z_1 och z_3 till 0, 1 och ∞. Vi känner igen denna transformation från beviset till sats 4.7, observera att ordningen är ändrad. Betrakta nu enhets cirkeln $|w| = 1$, $Tz_1 = 1$ tillhör cirkeln och $Tz_2 = 0$ samt $Tz_3 = \infty$ är konjugerade med avseende på den. Varje cirkel som av T avbildas på $|w| = 1$ uppfyller lemmats krav, och att det finns precis en sådan cirkel kan vi omvänt se genom sats 5.3. □

Lemma 5.7. *Låt Γ och γ vara två cirklar. z_1 och w_1 punkter på Γ, respektive γ. z_2 och w_2 punkter utanför Γ, respektive γ. Då finns precis en möbiustransformation som överför Γ till γ, z_1 till w_1 och z_2 till w_2.*

Bevis. Låt z_2^* och w_2^* vara konjugerade punkter till z_2 respektive w_2 med avseende på Γ och γ. Enligt sats 5.3 måste z_2^* avbildas på w_2^*. Vi har nu tre skilda punkter z_1, z_2 och z_2^* som ger precis en möbiustransformation, T, som för över Γ på en cirklen genom w_1 där w_2 och w_2^* är konjugerade. γ är precis den cirkeln och enligt lemma 5.6 finns endast en sådan cirkel. □

Referenser

[1] Inge Brinck och Arne Persson. *Elementär teori för analytiska funktioner*. 2. uppl. Lund: Studentlitt., 1967.

[2] Rikard Bøgvad och Paul Vaderlind. *Linjär algebra : grundkurs*. Upplaga 1. Stockholm: Liber, 2017. ISBN: 9789147112449.

[3] Encyclopedia.com. *Encyclopedia.com*. 2024. URL: `https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/mathematics-biographies/august-ferdinand-mobius#2830902994` (hämtad 2024-12-20).

[4] E F Robertson J J O'Connor. *MacTutor*. 2024. URL: `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Mobius/` (hämtad 2024-12-20).