



# SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

## Nollställen till polynom

av

**Somaya Abou-Gabal**

2025 - No L6



# Nollställen till polynom

Somaya Abou-Gabal

---

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Per Alexandersson

2025



## **Abstract**

There are several different methods for finding roots of polynomials. This essay provides an overview of various methods that can be used to find the roots of a polynomial. Those methods include formulas for degrees 2-4, the rational root theorem, techniques for managing multiple roots, the Newton-Raphson method, the bisection method, Descartes' rule of signs, and Sturm's theorem for determining the number of real roots within a given interval. The essay will highlight the methods background, development, and examples of how these methods are applied. The aim is to offer an overview of the different methods that exist, as well as the actual origins and backgrounds of these methods.

## **Abstrakt**

Det finns flera olika metoder för att hitta rötter till polynom. Denna uppsats kommer att ge en överblick över olika metoder som kan användas för att hitta rötter till polynom. Fokus ligger på formler för grad 2-4, rationella rotsatsen, hantering av multipelrötter, Newton-Raphson metoden, bisektor-metoden, Descartes teckenregel samt Sturms sats för att räkna antal reella rötter på ett intervall. Uppsatsen kommer lyfta metodens bakgrund, uppväxt samt nutida exempel på hur dessa metoder används. Syftet är att ge en överblick på några av de olika metoder som finns, grundarna samt bakgrunderna till metoderna.

# Innehållsförteckning

<b>1 Inledning</b>	<b>4</b>
<b>2 Andragradsekvationer</b>	<b>5</b>
2.1 Historia	5
2.2 Formel	6
2.3 Bevis	7
2.4 Exempel	7
<b>3 Tredjegrads ekvationer</b>	<b>8</b>
3.1 Historia	8
3.2 Formel	9
3.3 Bevis	9
3.4 Exempel	13
<b>4 Fjärdegradsekvationer</b>	<b>17</b>
4.1 Historia	17
4.2 Sats	18
4.3 Bevis	18
4.4 Exempel	28
<b>5 Rationella rotsatsen</b>	<b>32</b>
5.1 Sats	32
5.2 Bevis	32
5.3 Exempel	33
<b>6 Hantering av multipelrötter</b>	<b>34</b>
6.1 Sats	35
6.2 Bevis	35
6.3 Exempel	38
<b>7 Bisektor-metoden</b>	<b>40</b>
7.1 Sats	40
7.2 Förklaring	41
7.3 Exempel	41
<b>8 Newton-Raphson metoden</b>	<b>43</b>
8.1 Historia	44
8.2 Sats	44
8.3 Bevis	44
8.4 Exempel	47

<b>9</b>	<b>Descartes teckenregel</b>	<b>48</b>
9.1	Historia	48
9.2	Sats	50
9.3	Bevis	50
9.4	Exempel	56
<b>10</b>	<b>Sturms sats för att räkna antal reella rötter på ett intervall</b>	<b>57</b>
10.1	Sats	57
10.2	Bevis	58
10.3	Exempel	61
<b>11</b>	<b>Bilaga</b>	<b>63</b>
11.1	Pythonkod till Bisektor-metoden	63
11.2	Pythonkod till Newton-Raphson metoden	64
	<b>Referenser</b>	<b>65</b>

# 1 Inledning

Idén med begrepp är att skapa enkla modeller för en komplicerad verklighet. Verkligheten är komplex och föränderlig. Tar man ett vardagligt exempel som människans längd, ser vi att längden egentligen varierar mellan morgon och kväll. Det finns alltså inget fixt tal för en människas längd, utan flera. Många faktorer kan påverka längden, till exempel dagens tidpunkt, dagens frisyra, höjd på skor och så vidare. Hade man skapat en funktion för längden hade det krävts flera dagar av intensivt arbete för till exempel en skolsköterska att fylla i en anteckning kring en elevs lägd [2]. I fall som denna kommer det även förekomma funktioner som vi inte kan explicit beskriva eller beräkna, men som vi genom en förenklad modell av verkligheten kan komma åt. Om vi applicerar detta på vårt exempel är människans längd en komplicerad funktion där längden varierar beroende på flera faktorer. För att förenkla verkligheten, bestämmer man ett systematiskt sätt för att mäta längden och därigenom approximerar man längden med ett enda tal, genom en konstant funktion. Vi behöver ett förråd av funktioner som är tillräckligt enkla för att vi ska kunna använda dem, men som även är tillräckligt komplicerade för att vara nära verkligheten. Polynomer är matematikens enklaste funktioner då deras värden beräknas genom tre elementära räknesätt: addition, subtraktion och multiplikation [2].

Under flera århundraden har flera matematiker försökt hitta metoder för att bestämma polynomets nollställen, vilket har lett till att det idag finns flera olika metoder för att hitta rötter till polynom. Denna uppsats kommer att ge en överblick över olika metoder som kan användas för att hitta reella rötter till polynom. Uppsatsen kommer ta upp olika metoder som täcker tre huvudområden:

1. Metoder som ger de exakta nollställena
2. Metoder som approximerar nollstället
3. Metoder som bestämmer antalet reella nollställen.

Då flera metoder endast kan beräkna enkla rötter kommer uppsatsen även ta upp en metod som omskriver polynom med multipelrötter till polynom med endast enkla rötter. Denna metod, som jag kommer kalla för hantering av multipelrötter, är till för att underlätta beräkning av nollställen i polynom med multipelrötter.

Första delen i uppsatsen behandlar metoder som ger exakta nollställen. Denna del inkluderar formeln för andragradsekvationer, formeln för tredjegradsekvationer, formeln för fjärdegradsekvationer och sist rationella rotsatsen. Andra delen fokuserar på metoder som approximerar nollstället och inkluderar metoderna Bisektor-metoden och Newton-Raphson metoden. Sist, är delen som lyfter metoder som bestämmer antalet reella nollställen och den innehåller Descartes teckenregel och Sturms sats för att bestämma antal reella rötter i ett givet intervall.



Varje formel och metod kommer att inledas med dess historia där det beskrivs vem uppfann metoden och hur den utvecklades. Syftet med uppsatsen är att ge en överblick på några av de olika metoder som existerar. Uppsatsen kommer även ta upp de egentliga grundarna samt bakgrunderna till metoderna, i hopp om att tillkännage de ursprungliga upptäckarna.

## 2 Andragradsekvationer

Andragradsekvationer dyker upp i en mängd olika sammanhang i vardagen. Exempelvis används andragradsekvationer för att beräkna banan för ett kastat föremål. I ekonomin kan till exempel kvadratiska modeller användas för att beräkna optimal prissättning i företag för att maximera vinsten [4]. Ytterligare, kan man använda andragradsekvationer i fysik för att beräkna hur mycket tid det tar för ett föremål att falla till marken från en viss höjd [21].

### 2.1 Historia

Varje forntida civilisation utvecklade en samling av matematiska kunskaper. Deras matematik var i huvudsak fokuserad på problemlösning inom områden som handel, jordbruk och konstruktion. Det antika Greklands arbete är en av de mest bekanta, tack vare Euklides, men viktiga bidrag gjordes också av de Mesopotamiska, Egyptiska, Indiska och Kinesiska civilisationerna [12]. Vi kommer endast fokusera på Mesopotamierna och matematikern Al-Khwārizmī.

Låt oss börja med Mesopotamierna, 1900–1600 f.Kr. använde de sig av bland annat geometriska föreställningar för att lösa matematiska problem. De använde en metod som kallas ”klippa-och-klistra-geometri” för att bland annat lösa andragradsekvationer. Denna metod innebar att man visualiserade ekvationerna genom geometriska former och manipulerade dem för att hitta lösningar. Under denna tid hade man inte formler, istället hade man detaljerade steg-för-steg instruktioner för att lösa olika problem [12]. De hade även inte negativa värden och därför behövdes flera former av ett av dagens problem. Med hjälp av ”klippa-och-klistra” utvecklade Mesopotamierna det vi idag kallar för kvadratkomplettering. De använde sig av kvadratkomplettering för att lösa andragradsekvationer på formerna  $x^2 + bx = c$ ,  $x^2 - bx = c$  och  $ax^2 + bx = c$  [12].

Här är ett exempel på hur de löste ekvationer på formen  $x^2 + bx = c$ :

För ekvationen  $x^2 + \frac{2}{3}x = \frac{7}{12}$  började Mesopotamierna med att ta hälften av koefficienten till  $x$ -termen,  $\frac{2/3}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ , och kvadrerade den  $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ . Sedan

adderade de det kvadrerade värdet till både vänster- och högersidan av ekvationen för att skapa en fullständig kvadrat:

$$x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{7}{12} + \frac{1}{9} \iff x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{9} = \frac{25}{36} \iff \left(x + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{25}{36}$$

$$\iff x + \frac{1}{3} = \sqrt{\frac{25}{36}} \iff x + \frac{1}{3} = \frac{5}{6} \iff x = \frac{5}{6} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}.$$

Runt år 825 publicerade matematikern Al-Khwārizmī hans detaljerade steg-för-steg instruktioner för hur man löser sex olika typer av andragradsekvationer. Al-Khwārizmīs mål var att skapa en manual för hur man löser kvadratiske ekvationer. Under den tiden tog sig matematikern inte an de negativa talen, det vill säga både koefficienter och rötter behövde vara positiva. Al-Khwārizmīs sex olika typer av andragradsekvationer var:

1.  $ax^2 = bx$  (kvadrat lika med rot)
2.  $ax^2 = c$  (kvadrat lika med tal)
3.  $bx = c$  (rot lika med tal)
4.  $ax^2 + bx = c$  (kvadrat och rot lika med tal)
5.  $ax^2 + c = bx$  (kvadrat och tal lika med rot)
6.  $bx + c = ax^2$  (rot och tal lika med kvadrat).

Al-Khwārizmīs arbete översattes till latin och hade följaktligen en stor inverkan på Europa. Idéerna spreds och påverkade forskare som Fibonacci, som tog sig an metoderna, spred dem vidare genom Europa och integrerade dem med hindu-arabiska siffror [11]. Detta banade väg till återupplivningen av matematiken i medeltidens Europa. Senare byggde italienska matematiker, såsom Luca Pacioli, vidare på dessa grunder och baddade för studierna av kubiska ekvationer [11].

## 2.2 Formel

Andragradsekvationen

$$x^2 + px + q = 0$$

har rötterna

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

## 2.3 Bevis

Formel och bevis kommer från Bøgvad et al. [2].

Vi vet att

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + 2 \cdot \frac{p}{2} \cdot x + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Alltså är

$$x^2 + px = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2.$$

Detta leder till

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 + px + q \\ \iff 0 &= \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 + q \\ \iff \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 &= \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q \\ \iff x + \frac{p}{2} &= \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} \\ \iff x &= -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}. \end{aligned}$$

□

## 2.4 Exempel

**1. Lös ekvationen**  $x^2 - 5x + 6 = 0$ .

**Lösning:**

Vi använder oss av formeln  $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ , där  $p = -5$  och  $q = 6$ , för att hitta rötterna till ekvationen  $x^2 - 5x + 6 = 0$ . Detta ger

$$\begin{aligned} x &= -\frac{-5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-5}{2}\right)^2 - 6} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 6} \\ &= \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - \frac{24}{4}} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} = \frac{(5 \pm 1)}{2} \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3, \quad x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2. \end{aligned}$$

Svar: Rötterna till ekvationen  $x^2 - 5x + 6 = 0$  är  $x_1 = 3$  och  $x_2 = 2$ .

**2. Lös ekvationen**  $x^2 + 4x + 7 = 0$ .

**Lösning:**

Vi använder oss av formeln  $x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$ , där  $p = 4$  och  $q = 7$ , för att hitta rötterna till ekvationen  $x^2 + 4x + 7 = 0$ . Detta ger

$$\begin{aligned} x &= -\frac{4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4}{2}\right)^2 - 7} = -2 \pm \sqrt{\frac{16}{4} - 7} \\ &= -2 \pm \sqrt{\frac{16}{4} - \frac{28}{4}} = -2 \pm \sqrt{\frac{(16 - 28)}{4}} = -2 \pm \sqrt{\frac{-12}{4}} = -2 \pm \sqrt{-3} \\ &\Rightarrow x_1 = -2 + \sqrt{3}i, \quad x_2 = -2 - \sqrt{3}i. \end{aligned}$$

Svar: Rötterna till ekvationen  $x^2 + 4x + 7 = 0$  är  $x_1 = -2 + \sqrt{3}i$  och  $x_2 = -2 - \sqrt{3}i$ .

### 3 Tredjegrads ekvationer

Tredjegrads ekvationer har fascinerat matematiker i århundraden och spelar en central roll inom både teori och tillämpningar. Lösningen av tredjegrads ekvationer markerar en viktig milstolpe i algebrans historia. Metoderna för deras lösning utvecklades under renässansen av italienska matematiker såsom Scipione del Ferro, Niccolò Fontana och Gerolamo Cardano. Dessa metoder ledde till upptäckten av komplexa tal och öppnade dörren för ett nytt era av matematiskt tänkande [11]. I praktiska tillämpningar förekommer tredjegrads ekvationer ofta inom fysik, teknik och ekonomi. Till exempel används tredjegrads ekvationer i hydraulik för att modellera flödet av vätskor genom rör [25].

#### 3.1 Historia

Notera att de flesta matematikerna som kommer nämnas nedan aldrig skrev ned en formel. De beskrev istället sina metoder med ord och visade exempel. Notera även att man under 1500-talet bestämde den bästa matematikern genom tävlingar och därför ville matematiker inte publicera sina metoder [11].

Matematikern Scipione del Ferro var den första personen som uppfann en formel för att lösa tredjegrads ekvationer i formen  $x^3 + px = q$  samt studerade ekvationerna  $x^3 = px + q$  och  $x^3 + q = px$  [11]. Del Ferro räknade rötterna för de tre olika formerna då han endast räknade med positiva koefficienter och lösningar. Del Ferro publicerade aldrig sin lösningsmetod men han förklarade den till sin svärson och sin kollega Antonio Maria Fiore. År 1535 tävlade Fiore och matematikern Niccolò Fontana, även känd som Tartaglia, om vem som kan lösa den andre spelarens 30 frågor snabbast [11]. Fior ställde alla hans 30 frågor om tredjegrads ekvationer på

formen  $x^3 + px = q$ . I slutet av utmaningen vann Fontana tävlingen inte minst det, han kom även på en metod för att lösa tredjegradslikningar på formen  $x^3 + px = q$  [11].

År 1539 frågade Girolamo Cardano vinnaren Fontana om hans metod. Cardano behövde anstränga sig för att övertyga Fontana att delge metoden, den 29 mars 1539 fick Cardano metoden och svor en ed om att aldrig publicera den [11]. Efter Fontanas förklaring kom Cardano på en metod för att lösa likningar på formerna  $x^3 = px + q$  och  $x^3 + q = px$ . Efter flera år och mycket tänkande bestämde sig Cardano att bryta löftet, då metoden ursprungligen kom från Ferro. Han publicerade metoden 1545 i den latinska boken *Ars Magna*, i vilket han nämner att metoden för att lösa likningar på formen  $x^3 + px = q$  uppfanns först av Ferro och sedan återuppfanns av Fontana. I hans bok beskriver Cardano att det kan finnas negativa kvadratrötter och icke-reella kubrötter, han var dock osäker på hur man ska hantera dem [11].

I boken *L'Algebra*, 1572, försöker Rafael Bombelli hantera de komplexa rötterna. Bombelli lyfter likningen  $x^3 = 15x + 4$  som, enligt Cardano, har lösning  $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$ . Han beskrev metoden som sofistikerad, och ville klura ut hur man räknar ut lösningen då han vet att  $x = 4$  är en rot. Han klurade ut en metod för att räkna rötterna vid negativa kvadratrötter. I slutet av 1500-talet utvecklade den franska matematikern François Viète ett trigonometriskt liknande metod för att lösa tredjegradslikningar med negativa kvadratrötter, för att undvika komplexa tal [11].

## 3.2 Formel

Om man har likningen  $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$ , då har likningen reella rötterna:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2} - \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \frac{b^2}{9}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2} + \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \frac{b^2}{9}\right)^3}} - \frac{b}{3}.$$

## 3.3 Bevis

Formel och bevis kommer från Irving [11]. Beviset består av följande delar:

1. Reduktion
2. Beräkning av  $y^3 + py + q = 0$

2.1 Sätt  $y = z - \frac{p}{3z}$

2.2 Skapandet av formeln  $y = z_1 + z_2$

2.3 Uppfyller vår  $z_1$  och  $z_2$  villkoren för  $u$  och  $v$  som nämns i (2.2)

3. Lösning av ekvationen  $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$  där  $x = y - \frac{b}{3}$

3.1 Sätt tillbaka ursprungstermerna  $p = c - \frac{b^2}{3}$  och  $q = \frac{2b^3}{27} + \frac{bc}{3} - d$

3.2 Räkna ut  $x = y - \frac{b}{3}$

### (1) Reduktion

Vi börjar med vår funktion  $x^3 + bx^2 + cx + d$  och sätter  $x = y - \frac{b}{3}$ . Detta ger:

$$\begin{aligned} & \left(y - \frac{b}{3}\right)^3 + b\left(y - \frac{b}{3}\right)^2 + c\left(y - \frac{b}{3}\right) + d = 0 \\ \iff & y^3 - 3y^2 \cdot \frac{b}{3} + 3y \cdot \frac{b^2}{9} - \frac{b^3}{27} + b\left(y^2 - 2y \cdot \frac{b}{3} + \frac{b^2}{9}\right) + yc - \frac{bc}{3} + d = 0 \\ \iff & y^3 + y^2(-b + b) + y\left(\frac{b^2}{3} - \frac{2b^2}{3} + c\right) + \left(-\frac{b^3}{27} + \frac{b^3}{9} - \frac{bc}{3} + d\right) = 0 \\ \iff & y^3 + y\left(c - \frac{b^2}{3}\right) + \left(\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d\right) = 0. \end{aligned}$$

Sedan substituerar vi  $p = c - \frac{b^2}{3}$  och  $q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$ , vilket leder till:

$$y^3 + y\left(c - \frac{b^2}{3}\right) + \left(\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d\right) = 0 \iff y^3 + py + q = 0.$$

### (2) Beräkning av $y^3 + py + q = 0$

(2.1) Sätt  $y = z - \frac{p}{3z}$

Sätt  $y = z - \frac{p}{3z}$  i ekvationen  $y^3 + py + q = 0$ . Detta ger:

$$\begin{aligned} & \left(z - \frac{p}{3z}\right)^3 + p\left(z - \frac{p}{3z}\right) + q = 0 \\ \iff & z^3 - 3z^2 \cdot \frac{p}{3z} + 3z \cdot \frac{p^2}{9z^2} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0 \end{aligned}$$

$$\iff z^3 - pz + \frac{p^2}{3z} - \frac{p^3}{27z^3} + pz - \frac{p^2}{3z} + q = 0$$

$$\iff z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$$

Vi multiplicerar båda sidorna med  $z^3$ :

$$z^3 - \frac{p^3}{27z^3} + q = 0$$

$$\iff z^6 - \frac{p^3}{27} + qz^3 = 0.$$

Detta är en andragradsekvation för  $z^3$ , vilken vi kan identifiera med hjälp av pq-formeln:

$$z^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \frac{p^3}{27}} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$$

$$\Rightarrow z_1^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \iff z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$\Rightarrow z_2^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \iff z_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

## (2.2) Skapandet av formeln $y = z_1 + z_2$

Just nu vet vi att  $y^3 + py + q = 0$  och att:

$$(u + v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3$$

$$\iff (u + v)^3 = 3uv(u + v) + (u^3 + v^3)$$

$$\iff (u + v)^3 - 3uv(u + v) - (u^3 + v^3) = 0.$$

Om vi hittar ett  $u$  och  $v$  värde så att  $y = u + v$ ,  $p = -3uv$  och  $q = -(u^3 + v^3)$ , så är  $y^3 + py + q = 0$  en perfekt kub och på så sätt kan man lösa ekvationen. Det vill säga om  $uv = -\frac{p}{3}$  och  $u^3 + v^3 = -q$  är  $y = u + v$ .

## (2.3) Uppfyller vår $z_1$ och $z_2$ villkoren för $u$ och $v$ som nämns i (2.2)

Villkor 1:  $uv = -\frac{p}{3}$  där  $u = z_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$  och  $v = z_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$ :

$$\begin{aligned}
uv = z_1 z_2 &= \left( \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \right) \left( \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \right) \\
&= \sqrt[3]{\left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right) \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)} \\
&= \sqrt[3]{\frac{q^2}{4} - \left(\sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right)^2} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{4} - \frac{q^2}{4} - \frac{p^3}{27}} = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} = -\frac{p}{3}.
\end{aligned}$$

Nu kontrollerar vi villkor 2:  $u^3 + v^3 = -q$  där  $u^3 = z_1^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$  och  $v^3 = z_2^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}$ :

$$\begin{aligned}
u^3 + v^3 &= z_1^3 + z_2^3 = \left(-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right) + \left(-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\right) \\
&= -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} - \frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} = -\frac{2q}{2} = -q.
\end{aligned}$$

Eftersom  $z_1$  och  $z_2$  uppfyller både villkoren vet vi att  $y$  är en kub och att  $y = z_1 + z_2$  vilket ger:

$$y = z_1 + z_2 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

**(3) Lösning av ekvationen  $x^3 + bx^2 + cx + d = 0$  där  $x = y - \frac{b}{3}$**

**(3.1) Sätt tillbaka ursprungstermerna  $p = c - \frac{b^2}{3}$  och  $q = \frac{2b^3}{27} + \frac{bc}{3} - d$**   
Sätt tillbaka ursprungstermerna  $p = c - \frac{b^2}{3}$  och  $q = \frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d$ . Detta ger:

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \\
\iff y &= \sqrt[3]{-\left(\frac{\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d}{2}\right) + \sqrt{\left(-\left(\frac{\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{c - \frac{b^2}{3}}{3}\right)^3}} \\
&\quad + \sqrt[3]{-\left(\frac{\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d}{2}\right) - \sqrt{\left(-\left(\frac{\frac{2b^3}{27} - \frac{bc}{3} + d}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{c - \frac{b^2}{3}}{3}\right)^3}}
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \Leftrightarrow y &= \sqrt[3]{-\left(\frac{b^3}{27} - \frac{bc}{6} + \frac{d}{2}\right) + \sqrt{\left(-\left(\frac{b^3}{27} - \frac{bc}{6} + \frac{d}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \frac{b^2}{9}\right)^3}} \\ &+ \sqrt[3]{-\left(\frac{b^3}{27} - \frac{bc}{6} + \frac{d}{2}\right) - \sqrt{\left(-\left(\frac{b^3}{27} - \frac{bc}{6} + \frac{d}{2}\right)\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \frac{b^2}{9}\right)^3}} \\ \Leftrightarrow y &= \sqrt[3]{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2}\right) + \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \frac{b^2}{9}\right)^3}} \\ &+ \sqrt[3]{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2}\right) - \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \frac{b^2}{9}\right)^3}}. \end{aligned}$$

**(3.2) Räkna ut**  $x = y - \frac{b}{3}$

Vi vet att  $x = y - \frac{b}{3}$  och värdet på  $y$  från (3.1). Detta ger att

$$x = y - \frac{b}{3}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2} - \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \frac{b^2}{9}\right)^3}} \\ &+ \sqrt[3]{-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2} + \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \frac{b^2}{9}\right)^3}} - \frac{b}{3}. \end{aligned}$$

□

### 3.4 Exempel

**1. Lös ekvationen**  $x^3 + 12x^2 + 42x + 36 = 0$ .

**Lösning:**

Vi använder oss av tredjegradsformeln:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2} + \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \frac{b^2}{9}\right)^3}}$$

$$+ \sqrt[3]{-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2} - \sqrt{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \frac{b^2}{9}\right)^3}} - \frac{b}{3},$$

där  $b = 12$ ,  $c = 42$  och  $d = 36$ . Detta ger följande:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{12^3}{27} + \frac{12 \cdot 42}{6} - \frac{36}{2} + \sqrt{\left(-\frac{12^3}{27} + \frac{12 \cdot 42}{6} - \frac{36}{2}\right)^2 + \left(\frac{42}{3} - \frac{12^2}{9}\right)^3}} \\ + \sqrt[3]{-\frac{12^3}{27} + \frac{12 \cdot 42}{6} - \frac{36}{2} - \sqrt{\left(-\frac{12^3}{27} + \frac{12 \cdot 42}{6} - \frac{36}{2}\right)^2 + \left(\frac{42}{3} - \frac{12^2}{9}\right)^3}} - \frac{12}{3}.$$

Låt oss fokusera på:

$$-\frac{12^3}{27} + \frac{12 \cdot 42}{6} - \frac{36}{2} = -\frac{(3 \cdot 4)^3}{27} + \frac{6 \cdot 2 \cdot 42}{6} - 18 = -64 + 84 - 18 = 2.$$

Låt oss även räkna ut  $\left(\frac{42}{3} - \frac{12^2}{9}\right)^3$ :

$$\left(\frac{42}{3} - \frac{12^2}{9}\right)^3 = \left(14 - \frac{(3 \cdot 4)^2}{9}\right)^3 = (14 - 16)^3 = (-2)^3 = -8.$$

Nu låt oss återvända till formeln:

$$x = \sqrt[3]{-\frac{12^3}{27} + \frac{12 \cdot 42}{6} - \frac{36}{2} + \sqrt{\left(-\frac{12^3}{27} + \frac{12 \cdot 42}{6} - \frac{36}{2}\right)^2 + \left(\frac{42}{3} - \frac{12^2}{9}\right)^3}} \\ + \sqrt[3]{-\frac{12^3}{27} + \frac{12 \cdot 42}{6} - \frac{36}{2} - \sqrt{\left(-\frac{12^3}{27} + \frac{12 \cdot 42}{6} - \frac{36}{2}\right)^2 + \left(\frac{42}{3} - \frac{12^2}{9}\right)^3}} - \frac{12}{3} \\ \iff x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{2^2 - 8}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{2^2 - 8}} - 4 \\ \iff x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-4}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-4}} - 4 \\ \iff x = \sqrt[3]{2 + 2i} + \sqrt[3]{2 - 2i} - 4.$$

Vi kan skriva om detta till:

$$x = \sqrt[3]{\sqrt{8} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)} + \sqrt[3]{\sqrt{8} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)} - 4.$$

Låt oss fokusera på beräkningen av följande del:

$$\sqrt[3]{\sqrt{8} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)} + \sqrt[3]{\sqrt{8} \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)\right)}$$

$$\begin{aligned}
&= \left( \sqrt{8} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \right) \right)^{\frac{1}{3}} + \left( \sqrt{8} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) - i \sin \left( \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \right) \right)^{\frac{1}{3}} \\
&= \sqrt[3]{\sqrt{8}} \left( \cos \left( \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right) \right) + \sqrt[3]{\sqrt{8}} \left( \cos \left( \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right) - i \sin \left( \frac{\frac{\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right) \right) \\
&= \sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right) + \sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) - i \sin \left( \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right) \\
&= \sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) + \cos \left( \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) - i \sin \left( \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) \right) \\
&= 2\sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right), \quad \text{för } k = 0, 1, 2.
\end{aligned}$$

Det vill säga:

$$\begin{aligned}
x &= \sqrt[3]{\sqrt{8} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) + i \sin \left( \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \right)} + \sqrt[3]{\sqrt{8} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) - i \sin \left( \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) \right)} - 4 \\
&= 2\sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3} \right) - 4, \quad \text{för } k = 0, 1, 2.
\end{aligned}$$

Vi beräknar  $k = 0$ :

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2\sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{12} \right) + 4 = 2\sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) - 4 \\
&= 2\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{4} \right) \cos \left( \frac{\pi}{6} \right) + \sin \left( \frac{\pi}{4} \right) \sin \left( \frac{\pi}{6} \right) \right) - 4 \\
&= 2\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) - 4 = 2\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}\sqrt{3} + \sqrt{2}}{4} \right) - 4 \\
&= 2\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4} \right) - 4 = \frac{2(2(\sqrt{3} + 1))}{4} - 4 \\
&= \sqrt{3} + 1 - 4 = \sqrt{3} - 3.
\end{aligned}$$

Nu räknar vi  $k = 1$ :

$$x_2 = 2\sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \right) - 4 = 2\sqrt{2} \cos \left( \frac{9\pi}{12} \right) - 4 = 2\sqrt{2} \cos \left( \frac{3\pi}{4} \right) - 4 = -2 - 4 = -6.$$

Slutligen  $k = 2$ :

$$\begin{aligned}
x_3 &= 2\sqrt{2} \cos \left( \frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} \right) - 4 = 2\sqrt{2} \cos \left( \frac{17\pi}{12} \right) - 4 = 2\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{4} \right) \right) - 4 \\
&= 2\sqrt{2} \left( \cos \left( \frac{\pi}{6} \right) \cos \left( \frac{5\pi}{4} \right) - \sin \left( \frac{\pi}{6} \right) \sin \left( \frac{5\pi}{4} \right) \right) - 4 \\
&= 2\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} \cdot \left( -\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right) - 4 = (-\sqrt{3} + 1) - 4 = -\sqrt{3} - 3.
\end{aligned}$$

Sammanfattningsvis är rötterna till ekvationen  $x^3 + 12x^2 + 42x + 36 = 0$ :

$$x_1 = \sqrt{3} - 3, \quad x_2 = -6, \quad x_3 = -\sqrt{3} - 3.$$

**2. Lös ekvationen**  $j^3 + 6j^2 + 129j - 676 = 0$ .

**Lösning:**

Vi ska använda oss av formeln för tredjegradslikningar för att hitta reella rötter. Vi vet att  $b = 6$ ,  $c = 129$  och  $d = -676$  i tredjegradsformeln. För att göra det enklare, låt oss räkna följande delar:

$$-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2} = -\frac{6^3}{27} + \frac{6 \cdot 129}{6} - \left(-\frac{676}{2}\right) = -\frac{216}{27} + 129 + 338 = -8 + 467 = 459,$$

$$\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2}\right)^2 = (459)^2 = 210681,$$

$$\left(\frac{c}{3} - \frac{b^2}{9}\right)^3 = \left(\frac{129}{3} - \frac{6^2}{9}\right)^3 = 39^3 = 59319,$$

$$\frac{b}{3} = \frac{6}{3} = 2.$$

Nu beräknar vi:

$$\sqrt{\left(-\frac{b^3}{27} + \frac{bc}{6} - \frac{d}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{3} - \frac{b^2}{9}\right)^3} = \sqrt{210681 + 59319} = \sqrt{270000} = 300\sqrt{3}.$$

Nu sätter vi allting i formeln:

$$j = \sqrt[3]{459 - 300\sqrt{3}} + \sqrt[3]{459 + 300\sqrt{3}} - 2 = 4.$$

Från formeln fick vi fram att ekvationen  $j^3 + 6j^2 + 129j - 676 = 0$  har den reella roten 4. Genom polynomdivision får vi veta att

$$j^3 + 6j^2 + 129j - 676 = (j^2 + 10j + 169)(j - 4).$$

När vi löser andragradslikningen  $j^2 + 10j + 169 = 0$  med hjälp av pq-formeln får vi:

$$j = -\frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 169} = -5 \pm \sqrt{25 - 169} = -5 \pm \sqrt{-144} = -5 \pm 12i.$$

Det vill säga rötterna till ekvationen  $j^2 + 10j + 169 = 0$  är:

$$j_1 = -5 + 12i, \quad j_2 = -5 - 12i.$$

Detta ger att rötterna till ekvationen  $j^3 + 6j^2 + 129j - 676 = 0$  är:

$$j_1 = -5 + 12i, \quad j_2 = -5 - 12i, \quad j_3 = 4.$$

## 4 Fjärdegradsekvationer

Fjärdegradsekvationer tillämpas i bland annat fysik och ekonomi. Till exempel använder finansiella modeller fjärdegradsekvationer för att utvärdera investeringsalternativ och analysera risk [4]. Fjärdegradsekvationer används även i Alhazens problemet [9]. Alhazens problemet handlar om att förutsäga hur ljus beter sig när det reflekteras från en spegel. Denna typ av beräkning är central för att förstå hur ljus kan kontrolleras och dirigeras i optiska system. Detta är viktigt för att designa och optimera speglar och andra optiska enheter som används i allt från teleskop och mikroskop till kameror och laserutrustning [9].

### 4.1 Historia

Lodovico Ferrari var den första matematikern som utvecklade en metod för att lösa fjärdegradsekvationer [11]. Hans metod publicerades i hans mentors, Girolamo Cardano, bok *Ars Magna* 1545. Hans metod gick ut på att skriva om den reducerade fjärdegradsekvationen  $y^4 + py^2 + qy + r = 0$  till ekvationen

$$\left(y^2 + \frac{(p+\lambda)}{2}\right)^2 - \lambda\left(y - \frac{q}{2\lambda}\right)^2 = \left(\frac{(p+\lambda)}{2}\right)^2 - r - \frac{q^2}{4\lambda},$$

genom att introducera  $\lambda y^2 - \lambda y^2$  till ekvationen  $y^4 + py^2 + qy + r = 0$ . Sedan tar man vänsterledet av ekvationen  $\left(y^2 + \frac{(p+\lambda)}{2}\right)^2 - \lambda\left(y - \frac{q}{2\lambda}\right)^2 = \left(\frac{(p+\lambda)}{2}\right)^2 - r - \frac{q^2}{4\lambda}$  och sätter det till 0. Det vill säga  $\left(\frac{(p+\lambda)}{2}\right)^2 - r - \frac{q^2}{4\lambda} = 0$ . Detta ger en tredjegrads ekvation vid lösningen av parametern  $\lambda$ . Efter lösningen av tredjegrads ekvationen får man reda på  $\lambda$  och sätter in det i ekvationen  $\left(y^2 + \frac{(p+\lambda)}{2}\right)^2 - \lambda\left(y - \frac{q}{2\lambda}\right)^2 = \left(\frac{(p+\lambda)}{2}\right)^2 - r - \frac{q^2}{4\lambda}$ . Detta resulterar i  $\left(y^2 + \frac{(p+\lambda)}{2}\right)^2 - \lambda\left(y - \frac{q}{2\lambda}\right)^2 = 0$ , där  $\lambda$  är ett känt värde. Sedan löser man ekvationen som vanligt, genom att lösa andragradsekvationerna, och ta reda på rötterna till ekvationen.

Senare år 1637 publicerade Descartes en ny metod för lösning av fjärdegradsekvationer i hans verk *La Géométrie* [11]. Hans metod gick ut på att man omskriver den reducerade fjärdegradsekvationen  $y^4 + py^2 + qy + r = 0$  till  $(z^2 + kz + l)(z^2 - k'z + m) = 0$  där  $y = z$ . Efter flera steg får man reda på värdet på  $k$  genom att lösa en tredjegrads ekvation, som han kallade hjälpande tredjegrads ekvation [11]. Efter man tar reda på värdet på  $k$ , är alla variabler kända. Därför blir sista steget att lösa ekvationen  $(z^2 + kz + l)(z^2 - k'z + m) = 0$ , genom att lösa andragradsekvationerna. På det sättet får man veta rötterna till den reducerade fjärdegradsekvationen.

På 1700-talet byggde Leonhard Euler vidare på Ferraris metod och utvecklade en ny metod för att lösa fjärdegradsekvationer, genom att uttrycka en rot som en summa av tre kvadratrötter [11]. Dessa kvadratrötter är lösningarna till den hjälpande tredjegrads ekvationen från Ferraris metod. Eulers metod utgår från Cardanos formel för

kubiska ekvationer och innefattar en mer strukturerad väg till att bestämma alla rötter, inklusive negativa och komplexa rötter [11].

Både Descartes och Ferrari hjälpande tredjegrads ekvation är samma tredjegrads ekvation. Descartes använder sig av den hjälpande tredjegrads ekvation  $j^3 + 2qj + (q^2 - 4s)j - r^2$  medan Ferrari använder sig av  $\lambda^3 + 2q\lambda + (q^2 - 4s)\lambda - r^2$ . I både Descartes och Ferraris tredjegrads ekvation kommer  $q$ ,  $s$  och  $r$  från den reducerade fjärdegrads ekvationen  $z^4 + qz^2 + rz + s = 0$ . Skillnaden är att Descartes metod använde tredjegrads ekvationen för att hitta  $k$  värdet i  $(z^2 + kz + l)(z^2 - k'z + m) = 0$  då  $k^2 = j$ . Medan Ferraris metod använde tredjegrads ekvationen för att hitta  $\lambda$  i  $(y^2 + \frac{(p+\lambda)}{2})^2 - \lambda(y - \frac{q}{2\lambda})^2 = 0$ . Det jag vill komma fram till är att man kan härleda Eulers metod från Descartes fastän Eulers metod härleds från Ferris metod [11]. Det är även det vi ska göra i vårt bevis, härleda Eulers metod från Descartes.

## 4.2 Sats

Fjärdegrads ekvationen  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  har rötterna

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( -\sqrt{j_1} + \sqrt{j_2} - \sqrt{j_3} \right) - \frac{a}{4},$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( -\sqrt{j_1} - \sqrt{j_2} + \sqrt{j_3} \right) - \frac{a}{4},$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{j_1} + \sqrt{j_2} + \sqrt{j_3} \right) - \frac{a}{4},$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{j_1} - \sqrt{j_2} - \sqrt{j_3} \right) - \frac{a}{4},$$

där  $\sqrt{j_1 j_2 j_3} = -q$  och  $j_i$ , för  $i = 1, 2, 3$ , är rötterna till tredjegrads ekvationen

$$j^3 + 2 \left( b - \frac{3a^2}{8} \right) j^2 + j \left( \left( b - \frac{3a^2}{8} \right)^2 - 4 \left( -\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2 b}{16} - \frac{ac}{4} + d \right) \right) - \left( \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c \right)^2 = 0.$$

## 4.3 Bevis

Sats, formel och bevis kommer från Irving [11] och Nickalls [17].

Beviset består av tre huvuddelar:

1. Beskrivning av Vieta's formel [13]
2. Lemma och dess bevis
3. Beviset för satsen

### 3.1 Reducering

3.2 Omskrivning så  $y^4 + py^2 + qy + r = (z^2 + kz + l)(z^2 + k'z + m)$

3.3 Noteringar: Om  $j$  och att det inte spelar roll om vi väljer  $+k_i$  eller  $-k_i$

3.4 Lösning till fjärdegradekvationen  $y^4 + py^2 + qy + r = (z^2 + kz + l)(z^2 + k'z + m)$

### 3.5 Sammanställning

Låt oss börja.

#### (1) Vieta's formel [13]

Låt  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  där  $a_0 \neq 0$  och dess rötter vara  $r_1, r_2, \dots, r_n$ . Då kommer

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = -\frac{a_{n-1}}{a_n}.$$

#### (2) Lemma och dess bevis

##### (2.1) Lemma

Låt den reducerade fjärdegradekvationen  $z(x) = ax^4 + px^2 + qx + r = 0$  och  $z_j$  där  $j = 1, 2, 3, 4$  vara rötterna till ekvationen. Låt

$$\begin{cases} z_3 + z_4 = 2g_1 \\ z_3 + z_1 = 2g_2 \\ z_3 + z_2 = 2g_3. \end{cases}$$

Då kan vi uttrycka rötterna som följande:

$$\begin{cases} z_1 = -g_1 + g_2 - g_3 \\ z_2 = -g_1 - g_2 + g_3 \\ z_3 = g_1 + g_2 + g_3 \\ z_4 = g_1 - g_2 - g_3. \end{cases}$$

##### (2.2) Bevis av lemma

Låt den reducerade fjärdegradekvationen  $z(x) = ax^4 + px^2 + qx + r = 0$  och  $z_j$  där  $j = 1, 2, 3, 4$  vara rötterna till ekvationen. Från Vieta's formel vet vi att

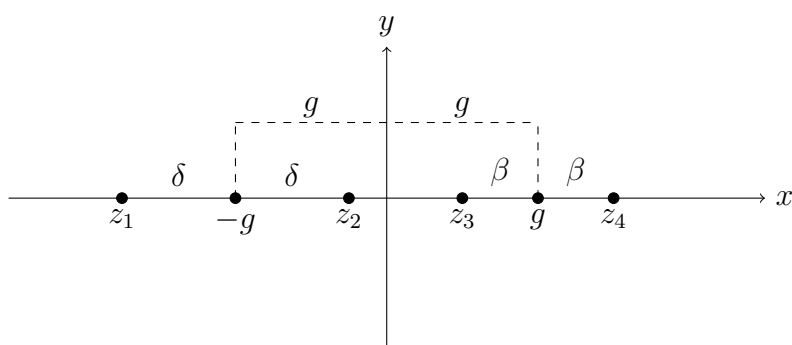
$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -\frac{\text{koefficienten för } x^3}{\text{koefficienten för } x^4} = -\frac{0}{a} = 0.$$

Låt  $2\beta = z_4 - z_3$  och  $2\delta = z_2 - z_1$ . Låt även  $g$  vara mittpunkten mellan  $z_1, z_2$  och  $z_3, z_4$ . Se Figur 1 för förtydligande.

Enligt Vieta's formel gäller att summan av rötterna är noll [13]. Eftersom summan av rötterna är noll, innebär detta att rötterna måste balansera varandra symmetrisk runt origo. Det vill säga, den reducerade fjärdegradsekvationen har rotsymmetri [11, 17].

Rotsymmetri innebär att rötterna till en ekvation är symmetriskt fördelade kring en axel (vanligtvis x-axeln) eller en punkt (vanligtvis origo). Detta är ofta en konsekvens av ekvationens struktur och koefficienternas egenskaper, såsom att summan av rötterna är noll [11, 17]. Punkten  $g$  representerar symmetripunkten mellan två grupper av rötter:  $z_1$  och  $z_2$  på den vänstra sidan (negativa sidan av x-axeln) samt  $z_3$  och  $z_4$  på den högra sidan (positiva sidan av x-axeln). Symmetripunkten  $g$  representerar mittpunkten mellan rötterna, där rötterna  $z_1$  och  $z_2$  har samma avstånd från  $-g$  (avstånd  $\delta$ ) och rötterna  $z_3$  och  $z_4$  har samma avstånd från  $g$  (avstånd  $\beta$ ) [17]. Se Figur 1.

Termerna i den reducerade fjärdegradsekvationen bidrar till rotsymmetri. Fjärdegradstermen,  $x^4$ , är en jämn funktion, vilket innebär att rötterna kommer att vara symmetriskt fördelade kring origo. Likaså är andragradstermen,  $x^2$ , en jämn funktion och kommer därför att påverka rötterna symmetriskt [11, 17]. Den linjära termen,  $qx$ , kan "skifta" rötterna längs x-axeln, men den förändrar inte den grundläggande symmetrin för rötterna. Vare sig det finns reella eller komplexa rötter, kommer summan av alla rötter ändå att vara noll i enlighet med Vieta's formel, vilket tvingar rötterna att balansera sig så att den totala summan är noll. Sist påverkar konstanttermen,  $r$ , också rötterna men inte symmetrin i sig. Eftersom fjärdegradstermen och andragradstermen är de huvudsakliga faktorerna som styr symmetrin, kommer rötterna fortfarande att fördela sig symmetriskt, även om  $r$  påverkar den exakta fördelningen och storleken på rötterna [11, 17].



Figur 1

Från Figur 1 får vi

$$z_1 = -g - \delta, \quad z_2 = -g + \delta, \quad z_3 = g - \beta \quad \text{och} \quad z_4 = g + \beta.$$



Detta leder till följande:

$$\begin{cases} z_3 + z_4 = (g_1 - \beta) + (g_1 + \beta) = 2g_1 \\ z_3 + z_1 = (g_1 - \beta) + (-g_1 - \delta) = -\beta - \delta = 2g_2 \\ z_3 + z_2 = (g_1 - \beta) + (-g_1 + \delta) = -\beta + \delta = 2g_3, \end{cases}$$

där  $g = g_1$ . Vilket i sin tur leder till:

$$\begin{aligned} 2(g_2 + g_3) &= z_3 + z_1 + z_3 + z_2 = 2z_3 + z_2 + z_1 = 2z_3 + z_2 + z_1 + z_4 - z_4 \\ &= (z_1 + z_2 + z_3 + z_4) + z_3 - z_4 = 0 + z_3 - z_4 = z_3 - z_4. \end{aligned}$$

Då

$$2\beta = z_4 - z_3 \iff z_3 - z_4 = -2\beta$$

kommer

$$2(g_2 + g_3) = z_3 - z_4 \iff 2(g_2 + g_3) = -2\beta \iff g_2 + g_3 = -\beta.$$

Detta stämmer även överens med

$$2(g_2 + g_3) = -\beta - \delta + (-\beta + \delta) = -2\beta \iff g_2 + g_3 = -\beta.$$

Liknande gäller

$$\begin{aligned} 2(g_2 - g_3) &= z_3 + z_1 - (z_3 + z_2) = z_1 - z_2 = -2\delta \\ \iff 2(g_2 - g_3) &= -2\delta \iff g_2 - g_3 = -\delta, \end{aligned}$$

ty  $2\delta = z_2 - z_1 \iff z_1 - z_2 = -2\delta$ . Detta stämmer även överens med

$$2(g_2 - g_3) = -\beta - \delta - (-\beta + \delta) = -2\delta \iff g_2 - g_3 = -\delta.$$

Detta resulterar i

$$\begin{cases} z_1 = -g_1 - \delta = -g_1 + (g_2 - g_3) = -g_1 + g_2 - g_3 \\ z_2 = -g_1 - \delta = -g_1 - (g_2 - g_3) = -g_1 - g_2 + g_3 \\ z_3 = g_1 - \beta = g_1 + (g_2 + g_3) = g_1 + g_2 + g_3 \\ z_4 = g_1 + \beta = g_1 - (g_2 + g_3) = g_1 - g_2 - g_3. \end{cases}$$

□

### (3) Beviset för satsen

#### (3.1) Reducering

Låt

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

Sätt  $x = y - \frac{a}{4}$ . Detta ger

$$\begin{aligned} & \left(y - \frac{a}{4}\right)^4 + a\left(y - \frac{a}{4}\right)^3 + b\left(y - \frac{a}{4}\right)^2 + c\left(y - \frac{a}{4}\right) + d = 0 \\ &= y^4 + \frac{3}{8}a^2y^2 + \frac{a^4}{256} - ay^3 - \frac{a^3y}{16} + ay^3 - \frac{3a^2y^2}{4} + \frac{3a^3y}{16} - \frac{a^4}{64} + by^2 - \frac{aby}{2} + \frac{a^2b}{16} + cy - \frac{ac}{4} + d \\ &= y^4 + y^3(-a+a) + y^2\left(\frac{3a^2}{8} - \frac{3a^2}{4} + b\right) + y\left(-\frac{a^3}{16} + \frac{3a^3}{16} - \frac{ab}{2} + c\right) + \left(\frac{a^4}{256} - \frac{a^4}{64} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d\right) \\ &\iff y^4 + y^2\left(b - \frac{3a^2}{8}\right) + y\left(\frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c\right) + \left(-\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d\right) = 0. \end{aligned}$$

Sätt  $p = b - \frac{3a^2}{8}$ ,  $q = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c$  och  $r = -\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d$ . Detta ger

$$\begin{aligned} & y^4 + y^2\left(b - \frac{3a^2}{8}\right) + y\left(\frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c\right) + \left(-\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d\right) = 0 \\ &\iff y^4 + py^2 + qy + r = 0, \end{aligned}$$

vilket är vårt reducerade fjärdegradsekvation.

**(3.2) Omskrivning så**  $y^4 + py^2 + qy + r = (z^2 + kz + l)(z^2 + k'z + m)$

Nu ska vi försöka skriva om uttrycket  $y^4 + py^2 + qy + r$  i formen  $(z^2 + kz + l)(z^2 + k'z + m)$ . Det vill säga

$$\begin{aligned} & (z^2 + kz + l)(z^2 + k'z + m) = y^4 + py^2 + qy + r \\ &\iff z^4 + z^3k' + z^2m + z^3k + z^2k'k + zkm + z^2l + zk'l + lm = y^4 + py^2 + qy + r \\ &\iff z^4 + z^3(k + k') + z^2(m + kk' + l) + z(km + k'l) + ml = y^4 + py^2 + qy + r. \end{aligned}$$

Detta ger följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} k + k' = 0 \\ m + kk' + l = p \\ km + k'l = q \\ ml = r. \end{cases}$$

Från första ekvationen får vi att

$$k + k' = 0 \iff k' = -k.$$

Vilket resulterar i

$$(z^2 + kz + l)(z^2 - kz + m) = y^4 + py^2 + qy + r \quad \text{där} \quad \begin{cases} m + k^2 + l = p \\ k(m - l) = q \\ ml = r \end{cases}.$$

Från detta ekvationssystem skapar vi två nya ekvationssystem. Ena ekvationssystemet för att räkna ut  $2m$  och det andra för att räkna ut  $2l$ . Vi börjar med att räkna  $2m$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} m - k^2 + l = p \\ k(m - l) = q \end{cases} &\iff \begin{cases} m = p + k^2 - l \\ m = \frac{q}{k} + l \end{cases} \iff 2m = p + k^2 + \frac{q}{k} - l + l \\ &\iff 2m = p + k^2 + \frac{q}{k}. \end{aligned}$$

Nu för  $2l$ :

$$\begin{aligned} \begin{cases} m - k^2 + l = p \\ k(m - l) = q \end{cases} &\iff \begin{cases} l = p + k^2 - m \\ l = m - \frac{q}{k} \end{cases} \iff 2l = p + k^2 - m + m - \frac{q}{k} \\ &\iff 2l = p + k^2 - \frac{q}{k}. \end{aligned}$$

För att bestämma  $k$  använder vi  $2m$  och  $2l$  i ekvationen  $ml = r$ :

$$\begin{aligned} ml = r &\iff 4ml = 4r \iff 2m \cdot 2l = 4r \\ &\iff (p + k^2 + \frac{q}{k})(p + k^2 - \frac{q}{k}) = 4r \\ &\iff \frac{(kp + k^3 + q)(kp + k^3 - q)}{k^2} = 4r \\ &\iff \frac{k^2p^2 + k^4p - kpq + k^4p + k^6 - k^3q + kqp + k^3q - q^2}{k^2} = 4r \\ &\iff \frac{k^6 + 2pk^4 + k^2p^2 - q^2}{k^2} = 4r \iff k^6 + 2pk^4 + k^2p^2 - q^2 = 4rk^2 \\ &\iff k^6 + 2pk^4 + k^2(p^2 - 4r) - q^2 = 0. \end{aligned}$$

Sätt  $k^2 = j$  för att tydligt visa att detta är en tredjegrads ekvation:

$$k^6 + 2pk^4 + k^2(p^2 - 4r) - q^2 = 0 \iff (k^2)^3 + 2p(k^2)^2 + k^2(p^2 - 4r) - q^2 = 0$$

$$\iff j^3 + 2pj^2 + j(p^2 - 4r) - q^2 = 0.$$

Löser vi tredjegrads ekvationen  $j^3 + 2pj^2 + j(p^2 - 4r) - q^2 = 0$  får vi svaret på  $k^2$ . Från tredjegrads ekvationen kommer vi maximalt få tre rötter. För att göra det enklare att följa argumenten, anta att ekvationen  $j^3 + 2pj^2 + j(p^2 - 4r) - q^2 = 0$  har de tre rötterna  $j_1, j_2$  och  $j_3$ . Vårt mål är att kunna uttrycka lösningen till ekvationen  $y^4 + py^2 + qy + r = 0$  med termerna  $j_1, j_2$  och  $j_3$ .

**(3.3) Noteringar: Om  $j$  och att det inte spelar roll om vi väljer  $+k_i$  eller  $-k_i$ .**

**(3.3.1) Om  $j$**

Eftersom  $j_1, j_2$  och  $j_3$  är rötter till ekvationen  $j^3 + 2pj^2 + j(p^2 - 4r) - q^2 = 0$  vet vi att

$$(j - j_1)(j - j_2)(j - j_3) = j^3 + 2pj^2 + j(p^2 - 4r) - q^2$$

$$\iff (j^2 - jj_2 - jj_1 + j_1j_2)(j - j_3) = j^3 + 2pj^2 + j(p^2 - 4r) - q^2$$

$$\iff j^3 - j^2j_2 - j^2j_1 - jj_1j_2 - j^2j_3 + jj_2j_3 + jj_1j_3 - j_1j_2j_3 = j^3 + 2pj^2 + j(p^2 - 4r) - q^2$$

$$\iff j^3 - j^2(j_1 + j_2 + j_3) + j(-j_1j_2 + j_2j_3 + j_1j_3) - j_1j_2j_3 = j^3 + 2pj^2 + j(p^2 - 4r) - q^2.$$

Från detta får vi följande ekvationssystem:

$$\begin{cases} -(j_1 + j_2 + j_3) = 2p \\ -j_1j_2 + j_2j_3 + j_1j_3 = p^2 - 4r \\ -j_1j_2j_3 = -q^2 \end{cases} \iff \begin{cases} j_1 + j_2 + j_3 = -2p \\ -j_1j_2 + j_2j_3 + j_1j_3 = p^2 - 4r \\ j_1j_2j_3 = q^2 \end{cases}.$$

Vi vet även att  $k_i^2 = j_i$  där  $i = 1, 2, 3$ . Detta ger:

$$j_1j_2j_3 = k_1^2k_2^2k_3^2 = q^2 \iff k_1k_2k_3 = \pm q$$

och

$$j_1 + j_2 + j_3 = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = -2p.$$

**(3.3.2) Det spelar ingen roll om vi väljer  $+k_i$  eller  $-k_i$ .**

Låt oss återvända till

$$(z^2 + kz + l)(z^2 - kz + m) = y^4 + py^2 + qy + r \quad \text{där} \quad \begin{cases} m + k^2 + l = p \\ k(m - l) = q \\ ml = r \end{cases}.$$

Vi vet att

$$2m = p + k^2 + \frac{q}{k} \quad \text{och} \quad 2l = p + k^2 - \frac{q}{k}.$$

Detta ger

$$(z^2 + kz + l)(z^2 - kz + m) = \left( z^2 + kz + \frac{1}{2} \left( p + k^2 - \frac{q}{k} \right) \right) \left( z^2 - kz + \frac{1}{2} \left( p + k^2 + \frac{q}{k} \right) \right)$$

Då  $k_i^2 = j_i$  där  $i = 1, 2, 3$ , är  $k_i = \pm\sqrt{j_i}$  men för enkelhetens skull skriver vi om det till att  $\sqrt{j_i} = \pm k_i$ . Det vill säga  $\sqrt{j_i}$  ger  $k_i$  och  $-k_i$ . Detta gör att det inte spelar någon roll om vi jobbar med  $+k_i$  eller  $-k_i$  eftersom båda kommer leda till samma svar. Ett förtydligande:

$$+k_i : \left( z^2 + k_i z + \frac{1}{2} \left( p + k_i^2 - \frac{q}{k_i} \right) \right) \left( z^2 - k_i z + \frac{1}{2} \left( p + k_i^2 + \frac{q}{k_i} \right) \right),$$

$$-k_i : \left( z^2 - k_i z + \frac{1}{2} \left( p + k_i^2 + \frac{q}{k_i} \right) \right) \left( z^2 + k_i z + \frac{1}{2} \left( p + k_i^2 - \frac{q}{k_i} \right) \right).$$

Så när vi löser  $k_i$  spelar det ingen roll vilken  $\pm k_i$  vi väljer.

**(3.4) Lösning till fjärdegradekvationen**  $(z^2 + kz + l)(z^2 + k'z + m) = y^4 + py^2 + qy + r$

Man kan lösa fjärdegradekvationen

$$y^4 + py^2 + qy + r = (z^2 + kz + l)(z^2 + k'z + m) = (z^2 + kz + l)(z^2 - kz + m)$$

$$\iff y^4 + py^2 + qy + r = \left( z^2 + k_i z + \frac{1}{2} \left( p + k_i^2 - \frac{q}{k_i} \right) \right) \left( z^2 - k_i z + \frac{1}{2} \left( p + k_i^2 + \frac{q}{k_i} \right) \right)$$

genom att lösa

$$z = -\frac{k_i}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{k_i^2 - 2p - 2k_i^2 + \frac{2q}{k_i}} \quad \text{och} \quad z = \frac{k_i}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{k_i^2 - 2p - 2k_i^2 - \frac{2q}{k_i}},$$

där  $i = 1, 2, 3$ .

Vi vet att  $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = -2p$  och att  $k_1 k_2 k_3 = \pm q$ . Låt oss börja med

$$k_1 k_2 k_3 = +q \quad \text{och} \quad z = -\frac{k_i}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{k_i^2 - 2p - 2k_i^2 + \frac{2q}{k_i}}$$

där  $i = 1$ :

$$z = -\frac{k_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{k_1^2 - 2p - 2k_1^2 + \frac{2q}{k_1}}$$

$$= -\frac{k_1}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{k_1^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - 2k_1^2 + 2\frac{k_1 k_2 k_3}{k_1}}$$

$$= -\frac{k_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{k_2^2 + k_3^2 + 2k_2k_3} = -\frac{k_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(k_2 + k_3)^2} = \frac{1}{2}(-k_1 \pm k_2 \pm k_3).$$

Alltså, för ekvationen  $(z^2 + k_i z + \frac{1}{2}(p + k_i^2 - \frac{q}{k_i})) = 0$  där  $i = 1$  och  $k_1 k_2 k_3 = +q$ , är

$$z_1 = \frac{1}{2}(-k_1 + k_2 + k_3) \quad \text{och} \quad z_2 = \frac{1}{2}(-k_1 - k_2 - k_3).$$

Nu för ekvationen  $(z^2 - k_i z + \frac{1}{2}(p + k_i^2 + \frac{q}{k_i})) = 0$ , där  $i = 1$  och  $k_1 k_2 k_3 = +q$ :

$$\begin{aligned} z &= \frac{k_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{k_1^2 - 2p - 2k_1^2 - \frac{2q}{k_1}} \\ z &= \frac{k_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{k_1^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 - 2k_1^2 - 2\frac{k_1 k_2 k_3}{k_1}} \\ &= \frac{k_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{k_2^2 + k_3^2 - 2k_2 k_3} = \frac{k_1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(k_2 - k_3)^2} = \frac{1}{2}(k_1 \pm k_2 \mp k_3). \end{aligned}$$

Detta ger

$$z_3 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 - k_3) \quad \text{och} \quad z_4 = \frac{1}{2}(k_1 - k_2 + k_3).$$

På liknade sätt räknar vi rötterna för varje fall. Detta resulterar i:

Fall 1:  $k_1$  och  $k_1 k_2 k_3 = +q$

$$z_1 = \frac{1}{2}(-k_1 + k_2 + k_3), \quad z_2 = \frac{1}{2}(-k_1 - k_2 - k_3), \quad z_3 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 - k_3), \quad z_4 = \frac{1}{2}(k_1 - k_2 + k_3).$$

Fall 2:  $k_2$  och  $k_1 k_2 k_3 = +q$

$$z_1 = \frac{1}{2}(k_1 - k_2 + k_3), \quad z_2 = \frac{1}{2}(-k_1 - k_2 - k_3), \quad z_3 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 - k_3), \quad z_4 = \frac{1}{2}(-k_1 + k_2 + k_3).$$

Fall 3:  $k_3$  och  $k_1 k_2 k_3 = +q$

$$z_1 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 - k_3), \quad z_2 = \frac{1}{2}(-k_1 - k_2 - k_3), \quad z_3 = \frac{1}{2}(k_1 - k_2 + k_3), \quad z_4 = \frac{1}{2}(-k_1 + k_2 + k_3).$$

Fall 4:  $k_1$  och  $k_1 k_2 k_3 = -q$

$$z_1 = \frac{1}{2}(-k_1 + k_2 - k_3), \quad z_2 = \frac{1}{2}(-k_1 - k_2 + k_3), \quad z_3 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_3), \quad z_4 = \frac{1}{2}(k_1 - k_2 - k_3).$$

Fall 5:  $k_2$  och  $k_1 k_2 k_3 = -q$

$$z_1 = \frac{1}{2}(k_1 - k_2 - k_3), \quad z_2 = \frac{1}{2}(-k_1 - k_2 + k_3), \quad z_3 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_3), \quad z_4 = \frac{1}{2}(-k_1 + k_2 - k_3).$$

Fall 6:  $k_3$  och  $k_1k_2k_3 = -q$

$$z_1 = \frac{1}{2}(k_1 - k_2 - k_3), \quad z_2 = \frac{1}{2}(-k_1 + k_2 - k_3), \quad z_3 = \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_3), \quad z_4 = \frac{1}{2}(-k_1 - k_2 + k_3).$$

Lägg märke till att för  $k_1k_2k_3 = +q$  repeteras följande formler för  $k_1$ ,  $k_2$  och  $k_3$ , ej skrivna i ordning:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2}(k_1 - k_2 + k_3), \\ z_2 &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2 - k_3), \\ z_3 &= \frac{1}{2}(-k_1 - k_2 - k_3), \\ z_4 &= \frac{1}{2}(-k_1 + k_2 + k_3). \end{aligned}$$

Medan för  $k_1k_2k_3 = -q$  repeteras följande 4 formler, ej skrivna i ordning:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2}(-k_1 + k_2 - k_3), \\ z_2 &= \frac{1}{2}(-k_1 - k_2 + k_3), \\ z_3 &= \frac{1}{2}(k_1 + k_2 + k_3), \\ z_4 &= \frac{1}{2}(k_1 - k_2 - k_3). \end{aligned}$$

Enligt vårt lemma kan man uttrycka

$$\begin{cases} z_1 = -g_1 + g_2 - g_3 \\ z_2 = -g_1 - g_2 + g_3 \\ z_3 = g_1 + g_2 + g_3 \\ z_4 = g_1 - g_2 - g_3 \end{cases}$$

och vi ser att  $k_1k_2k_3 = -q$  uttrycker sig likt vårt lemma, därför kommer  $k_1k_2k_3 = -q$  ge oss rötterna till vår fjärdegradsekvation.

### (3.5) Sammanställning

Vi vet ju att  $y = z$  och att  $k_i^2 = j_i$  där  $i = 1, 2, 3$ , därför kan vi skriva ekvationerna som skapades av  $k_1k_2k_3 = -q$ , från sektion 3.4, till:

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{1}{2} \left( -\sqrt{j_1} + \sqrt{j_2} - \sqrt{j_3} \right), \\ y_2 &= \frac{1}{2} \left( -\sqrt{j_1} - \sqrt{j_2} + \sqrt{j_3} \right), \end{aligned}$$

$$y_3 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{j_1} + \sqrt{j_2} + \sqrt{j_3} \right),$$

$$y_4 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{j_1} - \sqrt{j_2} - \sqrt{j_3} \right).$$

Detta gör att vår reducerade fjärdegradsekvation  $y^4 + py^2 + qy + r = 0$  har rötterna

$$y_1 = \frac{1}{2} \left( -\sqrt{j_1} + \sqrt{j_2} - \sqrt{j_3} \right), \quad y_2 = \frac{1}{2} \left( -\sqrt{j_1} - \sqrt{j_2} + \sqrt{j_3} \right),$$

$$y_3 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{j_1} + \sqrt{j_2} + \sqrt{j_3} \right), \quad y_4 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{j_1} - \sqrt{j_2} - \sqrt{j_3} \right),$$

där  $\sqrt{j_1 j_2 j_3} = -q$  och  $j_i$ , för  $i = 1, 2, 3$ , är rötterna till tredjegradekvationen  $j^3 + 2pj^2 + j(p^2 - 4r) - q^2 = 0$ .

Då  $x = y - \frac{a}{4}$ ,  $p = b - \frac{3a^2}{8}$ ,  $q = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c$  och  $r = -\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d$ , kommer rötterna till fjärdegradsekvationen  $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  att vara

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( -\sqrt{j_1} + \sqrt{j_2} - \sqrt{j_3} \right) - \frac{a}{4},$$

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( -\sqrt{j_1} - \sqrt{j_2} + \sqrt{j_3} \right) - \frac{a}{4},$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{j_1} + \sqrt{j_2} + \sqrt{j_3} \right) - \frac{a}{4},$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{j_1} - \sqrt{j_2} - \sqrt{j_3} \right) - \frac{a}{4}.$$

där  $\sqrt{j_1 j_2 j_3} = -q$  och  $j_i$ , för  $i = 1, 2, 3$ , är rötterna till tredjegradekvationen

$$j^3 + 2 \left( b - \frac{3a^2}{8} \right) j^2 + j \left( \left( b - \frac{3a^2}{8} \right)^2 - 4 \left( -\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d \right) \right) - \left( \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c \right)^2 = 0.$$

□

## 4.4 Exempel

### 1. Lös ekvationen

$$x^4 + 3x^3 + \frac{51}{8}x^2 - \frac{317}{16}x - \frac{12159}{256} = 0.$$

**Lösning:**

Första steget är att lösa ekvationen

$$j^3 + 2 \left( b - \frac{3a^2}{8} \right) j^2 + j \left( \left( b - \frac{3a^2}{8} \right)^2 - 4 \left( -\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d \right) \right) - \left( \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c \right)^2 = 0$$



där  $a = 3$ ,  $b = \frac{51}{8}$ ,  $c = -\frac{317}{16}$ , och  $d = -\frac{12159}{256}$ .

För att göra det enklare att följa räknar vi följande delar först:

$$2\left(b - \frac{3a^2}{8}\right) = 2\left(\frac{51}{8} - \frac{3 \cdot 3^2}{8}\right) = 2\left(\frac{51 - 27}{8}\right) = 2\left(\frac{24}{8}\right) = 2 \cdot 3 = 6,$$

$$\begin{aligned} & \left(b - \frac{3a^2}{8}\right)^2 - 4\left(-\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d\right) \\ &= \left(\frac{51}{8} - \frac{3 \cdot 3^2}{8}\right)^2 - 4\left(-\frac{3 \cdot 3^4}{256} + \frac{3^2 \cdot \frac{51}{8}}{16} - \frac{3 \cdot \left(-\frac{317}{16}\right)}{4} + \left(-\frac{12159}{256}\right)\right) \\ &= 3^2 - 4\left(-\frac{3^5}{256} + \frac{459}{128} + \frac{951}{64} - \frac{12159}{256}\right) = 9 - 4(-30) = 129, \end{aligned}$$

$$\left(\frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c\right)^2 = \left(\frac{3^3}{8} - \frac{3 \cdot \frac{51}{8}}{2} + \left(-\frac{317}{16}\right)\right)^2 = \left(\frac{27}{8} - \frac{153}{16} - \frac{317}{16}\right)^2 = (-26)^2 = 676.$$

Detta ger följande tredjegrads ekvation:

$$\begin{aligned} j^3 + 2\left(b - \frac{3a^2}{8}\right)j^2 + j\left(\left(b - \frac{3a^2}{8}\right)^2 - 4\left(-\frac{3a^4}{256} + \frac{a^2b}{16} - \frac{ac}{4} + d\right)\right) - \left(\frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c\right)^2 &= 0 \\ \iff j^3 + 6j^2 + 129j - 676 &= 0. \end{aligned}$$

Med hjälp av tredjegrads formeln kan vi räkna ut reella rötterna till tredjegraden och från det veta de komplexa rötterna. När man löser ekvationen  $j^3 + 6j^2 + 129j - 676 = 0$  får man rötterna  $j_1 = -5 + 12i$ ,  $j_2 = -5 - 12i$  och  $j_3 = 4$ . Se exempel 2 i kapitlet tredjegrads ekvationer för följa lösningen steg för steg.

Nu använder vi  $j_1$ ,  $j_2$  och  $j_3$  för att beräkna rötterna till fjärdegradsekvationen:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt{j_1} + \sqrt{j_2} - \sqrt{j_3}\right) - \frac{a}{4} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{-5 + 12i} + \sqrt{-5 - 12i} - \sqrt{4}\right) - \frac{3}{4}, \\ x_2 &= \frac{1}{2}\left(-\sqrt{j_1} - \sqrt{j_2} + \sqrt{j_3}\right) - \frac{a}{4} = \frac{1}{2}\left(-\sqrt{-5 + 12i} - \sqrt{-5 - 12i} + \sqrt{4}\right) - \frac{3}{4}, \end{aligned}$$

$$x_3 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{j_1} + \sqrt{j_2} + \sqrt{j_3} \right) - \frac{a}{4} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{-5+12i} + \sqrt{-5-12i} + \sqrt{4} \right) - \frac{3}{4},$$

$$x_4 = \frac{1}{2} \left( \sqrt{j_1} - \sqrt{j_2} - \sqrt{j_3} \right) - \frac{a}{4} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{-5+12i} - \sqrt{-5-12i} - \sqrt{4} \right) - \frac{3}{4}.$$

Låt oss fokusera på räkningen av  $\sqrt{-5+12i}$ . Vi vill skriva det på formeln  $(a+bi)^2$ . Vi vet att

$$(a+bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$$

där  $(a^2 - b^2)$  är realdelen  $-5$  medan  $2abi$  är den imaginära delen  $12i$ . Det vill säga

$$2abi = 12i \iff ab = 6 \iff a = \frac{6}{b} \quad \text{och} \quad a^2 - b^2 = -5.$$

Vi sätter in  $a = \frac{6}{b}$  i  $a^2 - b^2 = -5$ :

$$\left(\frac{6}{b}\right)^2 - b^2 = -5 \iff \frac{36}{b^2} - b^2 = -5 \iff 36 - b^4 = -5b^2 \iff 0 = b^4 - 5b^2 - 36.$$

Vi sätter  $t = b^2$ :

$$0 = b^4 - 5b^2 - 36 \iff 0 = t^2 - 5t - 36.$$

Vi använder pq-formeln för att lösa andragraden:

$$t = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(5)^2 + 4 \cdot 36} = \frac{5}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{25 + 144} = \frac{5 \pm 13}{2},$$

vilket ger

$$t_1 = \frac{5+13}{2} = 9 \quad \text{och} \quad t_2 = \frac{5-13}{2} = -4.$$

Vilket i sin tur ger

$$b_1 = \pm\sqrt{t_1} = \pm 3 \quad \text{och} \quad b_2 = \pm\sqrt{t_2} = \pm 2i.$$

Vilket innebär att vi har värdena på  $a$  och  $b$ :

$$b_1 = 3, \quad b_2 = -3, \quad b_3 = 2i, \quad b_4 = -2i,$$

$$a_1 = 2, \quad a_2 = -2, \quad a_3 = 3i, \quad a_4 = -3i.$$

Som nämnt tidigare vill vi skriva det i formeln  $(a+bi)^2$  så att  $(a+bi)^2 = -5+12i$ . Låt oss undersöka vilka rötter som ger oss svaret  $-5+12i$ :

$$b_1, a_1 : (2+3i)^2 = 4 - 9 + 2 \cdot 2 \cdot 3i = -5 + 12i,$$

$$b_2, a_2 : (-2-3i)^2 = (-1(2+3i))^2 = (2+3i)^2,$$

$$b_3, a_3 : (3i+2i \cdot i)^2 = (3i-2)^2 = 4 - 9 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3i = -5 - 12i,$$

$$b_4, a_4 : (-3i-2i \cdot i)^2 = (-3i+2)^2 = 4 - 9 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3i = -5 - 12i.$$

Som vi ser är  $b_1, a_1$  och  $b_2, a_2$  samma uttryck och därför räcker det med att endast välja en av dem. Medan  $b_3, a_3$  och  $b_4, a_4$  inte ger svaret vi söker. Därför är

$$-5 + 12i = (2 + 3i)^2.$$

Eftersom  $-5 - 12i$  är konjugatet till  $-5 + 12i$  kommer även dess  $(a+bi)^2$  vara konjugatet till  $(2+3i)^2$ . Därför kan man skriva  $-5 - 12i = (2-3i)^2$  och vi ser att detta stämmer från  $b_4, a_4$ .

Sammanfattningsvis,  $-5 - 12i = (2-3i)^2$  och  $-5 + 12i = (2+3i)^2$ . Låt oss återvända till beräkningarna av rötterna  $x_1, x_2, x_3$  och  $x_4$ :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \left( -\sqrt{j_1} + \sqrt{j_2} - \sqrt{j_3} \right) - \frac{a}{4} = \frac{1}{2} \left( -\sqrt{-5 + 12i} + \sqrt{-5 - 12i} - \sqrt{4} \right) - \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{2} \left( -(2 + 3i) + (2 - 3i) - 2 \right) - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \left( -2 - 3i + 2 - 3i - 2 \right) - \frac{3}{4} = -3i - 1 - \frac{3}{4} = -3i - \frac{7}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{1}{2} \left( -\sqrt{j_1} - \sqrt{j_2} + \sqrt{j_3} \right) - \frac{a}{4} = \frac{1}{2} \left( -\sqrt{-5 + 12i} - \sqrt{-5 - 12i} + \sqrt{4} \right) - \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{2} \left( -(2 + 3i) - (2 - 3i) + 2 \right) - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} \left( -2 - 3i - 2 + 3i + 2 \right) - \frac{3}{4} = -1 - \frac{3}{4} = -\frac{7}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{j_1} + \sqrt{j_2} + \sqrt{j_3} \right) - \frac{a}{4} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{-5 + 12i} + \sqrt{-5 - 12i} + \sqrt{4} \right) - \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{2} \left( (2 + 3i) + (2 - 3i) + 2 \right) - \frac{3}{4} = \frac{1}{2} (2 + 2 + 2) - \frac{3}{4} = 3 - \frac{3}{4} = \frac{9}{4}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{j_1} - \sqrt{j_2} - \sqrt{j_3} \right) - \frac{a}{4} = \frac{1}{2} \left( \sqrt{-5 + 12i} - \sqrt{-5 - 12i} - \sqrt{4} \right) - \frac{3}{4} \\ &= \frac{1}{2} \left( (2 + 3i) - (2 - 3i) - 2 \right) - \frac{3}{4} = 3i - 1 - \frac{3}{4} = 3i - \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Det vill säga, rötterna till ekvationen  $x^4 + 3x^3 + \frac{51}{8}x^2 - \frac{317}{16}x - \frac{12159}{256} = 0$  är:

$$x_1 = -\frac{7}{4} - 3i, \quad x_2 = -\frac{7}{4} + 3i, \quad x_3 = \frac{9}{4}, \quad x_4 = -\frac{7}{4}.$$

## 5 Rationella rotsatsen

Rationella rotsatsen identifierar möjliga rationella lösningar till en polynomekvation med heltalskoefficienter av formen  $p(x) = 0$  [2]. Satsen är särskilt användbar när man söker efter lösningar till polynom med högre grad eller när man vill faktorisera polynom.

Rationella rotsatsen saknar en tydlig ursprungshistoria. Flera matematiker har använt metoden, men ingen har fullständigt formulerat satsen, och ingen har heller hävdats att ha uppfunnit metoden.

Vi kan dock spåra metoden tillbaka till René Descartes, som använder metoden i sitt verk *La Géométrie* 1637 [6]. Descartes varken definierar eller förklarar satsen, istället använder han det i sina lösningar. Till exempel analyserar Descartes ekvationen  $y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64 = 0$ . Han noterar att den konstanta termen, 64, är delbar med 1, 2, 4, 8, 16, 32 och 64. Utifrån detta föreslår matematikern att man testar om polynomet  $y^6 - 8y^4 - 124y^2 - 64$  är delbar med någon/några av faktorerna  $y^2 - 1$ ,  $y^2 + 1$ ,  $y^2 - 2$ ,  $y^2 + 2$ ,  $y^2 - 4$  och så vidare [6].

En mer formell och tydlig förklaring av satsen dyker upp senare, år 1748, i Maria Gaetana Agnesis tvåbandsbok *Instituzioni analitiche ad uso della gioventù italiana*. Agnesis mål var att göra avancerad matematik mer tillgänglig. I sin bok förklarar hon faktorisering av polynom med hjälp av rationella rotsatsen. Hon ger en detaljerad förklaring som liknar det som finns i moderna läroböcker [16].

### 5.1 Sats

Låt  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$  vara ett polynom med heltalskoefficienter,  $a_i \in \mathbb{Z}$ , och  $a_0, a_n \neq 0$ . Om  $\frac{s}{t}$  är en av polynomets rationella rötter på slutförkortad form, det vill säga  $\text{SGD}(s, t) = 1$ , gäller att

$$s \mid a_0 \quad \text{och} \quad t \mid a_n.$$

Polynomet  $p(x)$  har endast heltalsrötter om polynomet är ett moniskt polynom, det vill säga  $a_n = 1$ .

### 5.2 Bevis

Sats och bevis kommer från Bøgvad et al. [2].

Om  $r = \frac{s}{t}$  är en rot till  $p(x) = 0$  är

$$p\left(\frac{s}{t}\right) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow a_n \left(\frac{s}{t}\right)^n + a_{n-1} \left(\frac{s}{t}\right)^{n-1} + \cdots + a_1 \left(\frac{s}{t}\right) + a_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{a_n s^n}{t^n} + \frac{a_{n-1} s^{n-1}}{t^{n-1}} + \cdots + \frac{a_1 s}{t} + a_0 = 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{t^n} (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} t + \cdots + a_1 s t^{n-1} + a_0 t^n) = 0 \\
&\Leftrightarrow a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} t + \cdots + a_1 s t^{n-1} + a_0 t^n = 0 \\
&\Leftrightarrow a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} t + \cdots + a_1 s t^{n-1} = -a_0 t^n.
\end{aligned}$$

Då vänsterledet,  $a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} t + \cdots + a_1 s t^{n-1}$ , är delbart med  $s$  är högerledet även delbart med  $s$ , det vill säga  $s \mid -a_0 t$ . Eftersom  $s$  och  $t$  är relativt prima,  $\text{SGD}(s, t) = 1$ , har de inga gemensamma primfaktorer. Därför delar  $s$  endast den konstanta termen  $a_0$ . Så  $s \mid a_0$ .

Ekvationen  $p\left(\frac{s}{t}\right) = 0 \Leftrightarrow a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} t + \cdots + a_1 s t^{n-1} + a_0 t^n = 0$  kan även skrivas om till följande ekvation:

$$a_{n-1} s^{n-1} t + \cdots + a_1 s t^{n-1} + a_0 t^n = -a_n s^n.$$

Då vänsterledet,  $a_{n-1} s^{n-1} t + \cdots + a_1 s t^{n-1} + a_0 t^n$ , är delbart med  $t$  är högerledet även delbart med  $t$ , det vill säga  $t \mid -a_n s^n$ . Eftersom  $s$  och  $t$  är relativt prima,  $\text{SGD}(s, t) = 1$ , har de inga gemensamma primfaktorer. Därför delar  $t$  endast den konstanta termen  $a_n$ . Så  $t \mid a_n$ .

Slutligen, om  $p(x)$  är moniskt, innebär  $t \mid a_n = 1$  att  $t = \pm 1$ , och därför är  $\frac{s}{t} = \pm s$  ett heltal. □

## 5.3 Exempel

**1. Vilka rationella rötter har ekvationen  $9x^3 + 6x^2 + 15x + 10 = 0$ ?**

**Lösning:**

Då  $s \mid 10$  är  $s = \pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10$  och då  $t \mid 9$  är  $t = \pm 1, \pm 3, \pm 9$ . Detta leder till att  $\frac{s}{t}$  är

$$\pm 1, \pm 2, \pm 5, \pm 10, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{5}{3}, \pm \frac{10}{3}, \pm \frac{1}{9}, \pm \frac{2}{9}, \pm \frac{5}{9}, \pm \frac{10}{9}.$$

Ekvationen  $9x^3 + 6x^2 + 15x + 10 = 0$  kan inte anta positiva reella rötter, då vänsterledet endast har positiva termer kommer det inte leda till noll. Därför kan vi hoppa över de möjliga positiva rötterna och endast räkna de negativa. Nu testar vi dem:

Rot	Beräkning	Resultat
$p(-1)$	$9(-1)^3 + 6(-1)^2 + 15(-1) + 10 = -8$	Nej
$p(-2)$	$9(-2)^3 + 6(-2)^2 + 15(-2) + 10 = -68$	Nej
$p(-5)$	$9(-5)^3 + 6(-5)^2 + 15(-5) + 10 = -1040$	Nej
$p(-10)$	$9(-10)^3 + 6(-10)^2 + 15(-10) + 10 = -8540$	Nej
$p\left(-\frac{1}{3}\right)$	$9\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + 6\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 15\left(-\frac{1}{3}\right) + 10 = \frac{16}{3}$	Nej
$p\left(-\frac{2}{3}\right)$	$9\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + 6\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + 15\left(-\frac{2}{3}\right) + 10 = 0$	Ja
$p\left(-\frac{5}{3}\right)$	$9\left(-\frac{5}{3}\right)^3 + 6\left(-\frac{5}{3}\right)^2 + 15\left(-\frac{5}{3}\right) + 10 = -40$	Nej
$p\left(-\frac{10}{3}\right)$	$9\left(-\frac{10}{3}\right)^3 + 6\left(-\frac{10}{3}\right)^2 + 15\left(-\frac{10}{3}\right) + 10 = \frac{920}{3}$	Nej
$p\left(-\frac{1}{9}\right)$	$9\left(-\frac{1}{9}\right)^3 + 6\left(-\frac{1}{9}\right)^2 + 15\left(-\frac{1}{9}\right) + 10 = \frac{680}{81}$	Nej
$p\left(-\frac{2}{9}\right)$	$9\left(-\frac{2}{9}\right)^3 + 6\left(-\frac{2}{9}\right)^2 + 15\left(-\frac{2}{9}\right) + 10 = \frac{556}{81}$	Nej
$p\left(-\frac{5}{9}\right)$	$9\left(-\frac{5}{9}\right)^3 + 6\left(-\frac{5}{9}\right)^2 + 15\left(-\frac{5}{9}\right) + 10 = \frac{160}{81}$	Nej
$p\left(-\frac{10}{9}\right)$	$9\left(-\frac{10}{9}\right)^3 + 6\left(-\frac{10}{9}\right)^2 + 15\left(-\frac{10}{9}\right) + 10 = -\frac{940}{81}$	Nej

Ekvationen  $9x^3 + 6x^2 + 15x + 10 = 0$  har den rationella roten

$$x = -\frac{2}{3}.$$

## 6 Hantering av multipelrötter

Det finns många metoder som räknar ut rötterna till ett polynom och endast hanterar enkla rötter där multipliciteten är 1. Några exempel på sådana metoder är Sturms sats för att räkna antal reella rötter på ett intervall och numeriska metoder såsom Newton-Raphson metoden och Bisektor-metoden. Sådana metoder kan missa rötter eller få felaktiga resultat då de har svårt att konvergera eller producera exakta lösningar när rötterna har högre multiplicitet än 1 [22, 10]. För att undvika fel kan man ta hjälp av en metod som hanterar multipelrötter för att reducera polynomet.

Man får enkla rötter när polynomet  $f(x)$  delas med den största gemensamma delaren (SGD) mellan polynomet  $f(x)$  och dess derivata  $f'(x)$ .

James Joseph Sylvester har en viktig roll, i mitten av 1800-talet gjorde han stora märkvärdiga framsteg inom teorin om gemensamma rötter och deras multiplicitet mellan två polynom. Sylvester tydliggjorde hur SGD mellan ett polynom och dess derivata består av de gemensamma faktorerna där multipliciteten är förminskad med 1, se satsen för förtydligande [23].

Vidare förslog Sylvester en generalisering av processen genom att beräkna största gemensamma delaren mellan  $f^{(k)}(x)$  (den  $k$ -te derivatan av  $f(x)$ ) och  $f^{(k+1)}(x)$ , för  $k \in \mathbb{N}$ , tills man når  $\text{SGD}(f^{(k)}(x), f^{(k+1)}(x)) = 1$ . I  $\text{SGD}(f^{(k)}(x), f^{(k+1)}(x)) = 1$  har  $f^{(k)}(x)$  endast enkla rötter, de rötter som hade multiplicitet  $k+1$  i  $f(x)$ . Följaktligen, utvecklades metoden att dela  $f(x)$  med  $\text{SGD}(f(x), f'(x))$  [23].

## 6.1 Sats

För funktionen

$$f(x) = \varphi(x) \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i},$$

där  $\varphi(x)$  är en funktion med endast enkla rötter, gäller att den största gemensamma delen av  $f(x)$  och dess derivata  $f'(x)$  är

$$\text{SGD}(f(x), f'(x)) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i - 1},$$

och att kvoten mellan funktionen  $f(x)$  och största gemensamma delaren är ett polynom med endast enkla rötter. Med andra ord

$$\frac{f(x)}{\text{SGD}(f(x), f'(x))} = \varphi(x) \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i).$$

## 6.2 Bevis

Sats och bevis bygger på fakta från Yan [26]. Beviset består av följande delar:

1. Bestämning av derivatan
2. Bevis av  $\text{SGD}(f(x), f'(x))$
3. Bevis av kvoten  $\frac{f(x)}{\text{SGD}(f(x), f'(x))}$

### (1) Bestämning av derivatan

Låt  $f(x) = \varphi(x) \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}$ . Enligt produktregeln, om  $y = f(x) \cdot g(x)$ , är dess derivata

$$y' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

Därför kommer funktionen  $f(x) = \varphi(x) \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}$  att ha derivatan:

$$f'(x) = \varphi'(x) \cdot \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} + \varphi(x) \cdot \frac{d}{dx} \left( \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \right).$$

Låt oss räkna  $\frac{d}{dx} \left( \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \right)$ . Produktregeln för flera faktorer säger att:

$$\frac{d}{dx} \left( \prod_{i=1}^k g_i(x) \right) = \sum_{j=1}^k \left( g_j'(x) \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k g_i(x) \right).$$

I vårt fall är

$$g_i(x) = (x - \lambda_i)^{m_i} \quad \text{och} \quad g_j'(x) = \frac{d}{dx} ((x - \lambda_j)^{m_j}) = m_j (x - \lambda_j)^{m_j-1} \cdot 1 = m_j (x - \lambda_j)^{m_j-1},$$

enligt kedjeregeln (om  $y = f(g(x))$  är derivatan  $y' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$ ). Detta resulterar i att derivatan

$$\frac{d}{dx} \left( \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \right) = \sum_{j=1}^k \left( m_j (x - \lambda_j)^{m_j-1} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \right).$$

Sammanställer vi informationen får vi följande:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \varphi'(x) \cdot \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} + \varphi(x) \cdot \frac{d}{dx} \left( \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \right) \\ \iff f'(x) &= \varphi'(x) \cdot \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i} + \varphi(x) \cdot \sum_{j=1}^k \left( m_j (x - \lambda_j)^{m_j-1} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \right). \end{aligned}$$

Exempelvis när  $i = 1$ , observerar vi att i första termen  $\varphi'(x) \cdot \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}$  förekommer  $(x - \lambda_1)$  med multipliciteten  $m_1$ . I den andra termen

$\varphi(x) \cdot \sum_{j=1}^k \left( m_j (x - \lambda_j)^{m_j-1} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \right)$ , kommer  $(x - \lambda_1)$  att förekomma i två delar. Först förekommer  $(x - \lambda_1)$  med multipliciteten  $m_1 - 1$  i delen  $(x - \lambda_j)^{m_j-1}$  där  $j = 1$ . Medan när  $i = 1$  och  $j \neq 1$  förekommer  $(x - \lambda_1)$  med multipliciteten  $m_1$  i den andra delen  $\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (x - \lambda_i)^{m_i}$ . Därför kan vi notera att den lägsta förekommande



multipliciteten för  $(x - \lambda_1)$  är  $m_1 - 1$ . Vilket innebär att  $(x - \lambda_1)^{m_1-1}$  är en gemensam faktor som vi kan bryta ut. Genom att använda samma resonemang för varje faktor  $(x - \lambda_i)$ , där  $i = 1, 2, \dots, k$ , kan vi se att varje term i derivatan innehåller  $(x - \lambda_i)^{m_i-1}$  som en gemensam faktor. Detta gäller eftersom i den första termen  $\varphi'(x) \cdot \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}$ , förekommer  $(x - \lambda_i)$  med multipliciteten  $m_i$ . Medan i den andra termen  $\varphi(x) \cdot \sum_{j=1}^k \left( m_j (x - \lambda_j)^{m_j-1} \cdot \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (x - \lambda_i)^{m_i} \right)$ , förekommer  $(x - \lambda_i)$  med multipliciteten  $m_i - 1$  när  $j = i$  och med multipliciteten  $m_i$  när  $i \neq j$ . Vilket innebär att den minsta multipliciteten är  $m_i - 1$ , som leder till att vi kan bryta ut  $(x - \lambda_i)^{m_i-1}$  för varje  $i = 1, 2, \dots, k$ . Eftersom vi bryter ut faktorer kan vi alltså bryta ut  $\prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i-1}$ . Detta resulterar i följande:

$$f'(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i-1} \left( \varphi'(x) \cdot \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i) + \varphi(x) \cdot \sum_{j=1}^k \left( m_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (x - \lambda_i) \right) \right).$$

## (2) Bevis av SGD( $f(x), f'(x)$ )

Nu har vi funktionen

$$f(x) = \varphi(x) \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i},$$

där  $\varphi(x)$  är ett polynom med endast enkla rötter, och dess derivata

$$f'(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i-1} \left( \varphi'(x) \cdot \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i) + \varphi(x) \cdot \sum_{j=1}^k \left( m_j \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^k (x - \lambda_i) \right) \right).$$

Eftersom  $\varphi(x)$  är ett polynom med endast enkla rötter, har  $\varphi(x)$  och  $\varphi'(x)$  inga gemensamma faktorer. Därför kan inga ytterligare faktorer brytas ut från derivatan. Vidare är SGD av två polynom det största polynomet som exakt delar båda polynomerna utan att lämna någon rest. Med andra ord, om vi har polynomerna  $P(x)$  och  $Q(x)$  och SGD( $P(x), Q(x)$ ) =  $D(x)$  är

$$D(x) \mid P(x) \quad \text{och} \quad D(x) \mid Q(x).$$

Detta innebär att  $D(x)$  är största faktorn som finns i både  $P(x)$  och  $Q(x)$ .

Låt oss kolla på den största faktorn som finns i både vår  $f(x)$  och dess derivata  $f'(x)$ :

Som vi ser har  $f(x)$  faktorn

$$\prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}$$

medan  $f'(x)$  har faktorn

$$\prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i-1},$$

som är samma som faktorn i  $f(x)$  fast en grad mindre. Det innebär att den största gemensamma delen för både  $f(x)$  och  $f'(x)$  är

$$\text{SGD}(f(x), f'(x)) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i - 1}.$$

□

**(3) Bevis av kvoten**  $\frac{f(x)}{\text{SGD}(f(x), f'(x))}$

Nu för att bevisa

$$\frac{f(x)}{\text{SGD}(f(x), f'(x))} = \varphi(x) \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i).$$

Vi vet att

$$f(x) = \varphi(x) \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}$$

och att

$$\text{SGD}(f(x), f'(x)) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i - 1}.$$

Detta ger:

$$\frac{f(x)}{\text{SGD}(f(x), f'(x))} = \frac{\varphi(x) \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i}}{\prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i - 1}} = \frac{\varphi(x) \cdot \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i - 1} \cdot \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)}{\prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{m_i - 1}}.$$

Genom att förenkla får vi:

$$\frac{f(x)}{\text{SGD}(f(x), f'(x))} = \varphi(x) \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i).$$

□

## 6.3 Exempel

### 1. Förtydligande exempel på hur metoden fungerar.

Låt funktionen

$$f(x) = x^{12} - 4x^{11} + 13x^{10} - 32x^9 + 52x^8 - 64x^7 + 34x^6 + 72x^5 - 207x^4 + 324x^3 - 351x^2 + 216x - 54$$

och dess derivata

$$f'(x) = 12x^{11} - 44x^{10} + 130x^9 - 288x^8 + 416x^7 - 448x^6 + 204x^5 + 360x^4 - 828x^3 + 972x^2 - 702x + 216.$$

Detta ger

$$\text{SGD}(f(x), f'(x)) = x^7 - 3x^6 + 9x^5 - 19x^4 + 27x^3 - 33x^2 + 27x - 9.$$

Från detta vet vi att

$$\frac{f(x)}{\text{SGD}(f(x), f'(x))} = x^5 - x^4 + x^3 - x^2 - 6x + 6.$$

Låt oss ta en titt på hur faktoriseringen i de olika delarna ser ut:

$$f(x) = (x^2 + 3)^3(x - 1)^4(x^2 - 2),$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3(x^2 + 3)^2 \cdot 2x \cdot (x - 1)^4(x^2 - 2) + (x^2 + 3)^3 \cdot 4(x - 1)^3(x^2 - 2) + (x^2 + 3)^3(x - 1)^4 \cdot 2x \\ &= 2(x^2 + 3)^2(x - 1)^3 \left( 3x(x - 1)(x^2 - 2) + 2(x^2 + 3)(x^2 - 2) + x(x^2 + 3)(x - 1) \right), \end{aligned}$$

$$\text{SGD}(f(x), f'(x)) = (x^2 + 3)^2(x - 1)^3,$$

$$\frac{f(x)}{\text{SGD}(f(x), f'(x))} = \frac{(x^2 + 3)^3(x - 1)^4(x^2 - 2)}{(x^2 + 3)^2(x - 1)^3} = (x^2 + 3)(x - 1)(x^2 - 2).$$

**2. Om funktionen  $f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3$  har multipelrötter, skriv om funktionen så att den endast har enkla rötter.**

**Lösning:**

Först undersöker vi om  $f(x)$  och  $f'(x)$  har gemensamma faktorer, genom att räkna  $\text{SGD}(f(x), f'(x))$ . Från

$$f(x) = x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3$$

får vi

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 8x - 6.$$

Nu beräknar vi  $\text{SGD}(f(x), f'(x))$ :

$$\text{SGD}(f(x), f'(x)) = \text{SGD}(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3, 4x^3 - 6x^2 + 8x - 6).$$

Genom att använda polynomdivision får vi:

$$x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3 = 2(2x^3 - 3x^2 + 4x - 3) \left( \frac{1}{4}x - \frac{1}{8} \right) + \frac{1}{4}(5x^2 - 14x + 9),$$

$$2x^3 - 3x^2 + 4x - 3 = (5x^2 - 14x + 9) \left( \frac{2}{5}x + \frac{13}{25} \right) + \frac{192}{25}(x - 1),$$

$$5x^2 - 14x + 9 = (x - 1)(5x - 9) + 0.$$

Detta ger att

$$\text{SGD}(f(x), f'(x)) = \text{SGD}(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3, 4x^3 - 6x^2 + 8x - 6) = (x - 1),$$

det vill säga  $f(x)$  har roten  $(x - 1)^2$ . För att få funktionen med endast enkla rötter använder vi formeln

$$\frac{f(x)}{\text{SGD}(f(x), f'(x))}.$$

Låt oss beräkna det:

$$\frac{f(x)}{\text{SGD}(f(x), f'(x))} = \frac{x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 6x + 3}{(x - 1)} = x^3 - x^2 + 3x - 3.$$

**Svar:**  $x^3 - x^2 + 3x - 3$ .

## 7 Bisektor-metoden

Bisektor-metoden saknar en tydlig ursprungshistoria. Det vi vet är att metoden är en av de första och äldsta numeriska metoderna som används. Vid lösning av icke-linjära ekvationer är Bisektor-metoden den enklaste numeriska metoden. Vidare garanterar Bisektor-metoden konvergens till en enkel rot, om och endast om, funktionen är kontinuerlig i ett givet intervall [10].

Jämfört med andra numeriska metoder konvergerar Bisektor-metoden mycket långsamt, vilket leder till att det behövs betydligt många fler iterationer för att nå samma precision som en annan numerisk metod. Metoden är sällan använd vid handräkning på grund av det stora antalet iterationer som krävs för hög precision, men den implementeras ofta i datorprogram [10]. Se koden i Bilaga 1. Enligt det amerikanska universitet Brown University återuppfann matematikern Bernard Bolzano (1781–1848) metoden [7]. Hans verk publicerades inte förrän 1862. Hans verk uppmärksammades även inte och därför påverkade inte heller metodens utveckling.

### 7.1 Sats

Låt  $f(x)$  vara ett polynom som är kontinuerligt och  $[a, b]$  vara ett intervall där  $f(a) < 0$  och  $f(b) > 0$ . Då har polynomet  $f(x)$  minst en rot i intervallet  $[a, b]$ . Undersök intervallets mittpunkt och kolla om

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = c$$

är mindre, lika med eller större än noll. Om  $c < 0$  är roten i intervallet  $[c, b]$ . Om  $c > 0$  är roten i intervallet  $[a, c]$ . Om  $c = 0$  är det roten i sig. Notera att metoden inte fungerar på rötter med jämn multiplicitet [10]. Notera även att metoden fungerar för  $f(a) > 0$  och  $f(b) < 0$ , då om  $c < 0$  är roten i intervallet  $[a, c]$  och om  $c > 0$  är roten i intervallet  $[c, b]$ .

## 7.2 Förklaring

Denna metod tar inte hänsyn till rötter med jämn multiplicitet, det vill säga rötter där grafen för  $f(x)$  tangerar x-axeln men ej korsar den. Metoden funkar endast för att få fram rötter med udda multiplicitet men den kommer inte ge multipliciteten.

Rötter med udda multiplicitet kommer korsa x-axeln. Detta leder till att en rot måste finnas bland två punkter i grafen därav är ena värdet av intervallet positivt och det andra negativt. Tanken är att göra intervallet mindre genom att ersätta intervallets mittpunkt  $c$  med samma teckenvärde från  $a$  eller  $b$ . Genom att använda mittpunkten minskar vi intervallet och på så sätt kommer närmre rotens värde.

## 7.3 Exempel

**1. Hitta en rot till funktionen  $f(x) = 4x^2 + 3x - 3$ .**

**Lösning:**

$f(x)$	Större eller mindre	Intervall
$f(0) = -3$	$f(0) < 0$	$[0, \dots]$
$f(1) = 4$	$f(1) > 0$	$[0, 1]$
$f(0.5) = -0.5$	$f(0.5) < 0$	$[0.5, 1]$
$f(0.75) = 1.5$	$f(0.75) > 0$	$[0.5, 0.75]$
$f(0.625) = 0.4375$	$f(0.625) > 0$	$[0.5, 0.625]$
$f(0.5625) = -0.046875$	$f(0.5625) < 0$	$[0.5625, 0.625]$
$f(0.59375) = 0.191406$	$f(0.59375) > 0$	$[0.5625, 0.59375]$
$f(0.578125) = 0.071289$	$f(0.578125) > 0$	$[0.5625, 0.578125]$
$f(0.5703125) = 0.011962$	$f(0.5703125) > 0$	$[0.5625, 0.5703125]$
$f(0.56640625) = -0.017517$	$f(0.56640625) < 0$	$[0.56640625, 0.5703125]$
$f(0.568359375) = -0.002792$	$f(0.568359375) < 0$	$[0.568359375, 0.5703125]$
$f(0.5693359375) = 0.004581$	$f(0.5693359375) > 0$	$[0.568359375, 0.5693359375]$
$f(0.5688476562) = 0.000893$	$f(0.5688476562) > 0$	$[0.568359375, 0.5688476562]$
$f(0.5686035156) = -0.000949$	$f(0.5686035156) < 0$	$[0.5686035156, 0.5688476562]$
$f(0.5687255859) = -0.000028$	$f(0.5687255859) < 0$	$[0.5687255859, 0.5688476562]$
$f(0.5687866210) = 0.000432$	$f(0.5687866210) > 0$	$[0.5687255859, 0.5687866210]$
$f(0.5687561035) = 0.000202$	$f(0.5687561035) > 0$	$[0.5687255859, 0.5687561035]$
$f(0.5687408447) = 0.000087$	$f(0.5687408447) > 0$	$[0.5687255859, 0.5687408447]$
$f(0.5687332153) = 0.000029$	$f(0.5687332153) > 0$	$[0.5687255859, 0.5687332153]$
$f(0.5687294006) = 7.26 \times 10^{-7}$	$f(0.5687294006) > 0$	$[0.5687255859, 0.5687294006]$
$f(0.5687265396) = -0.000020$	$f(0.5687265396) < 0$	$[0.5687265396, 0.5687294006]$

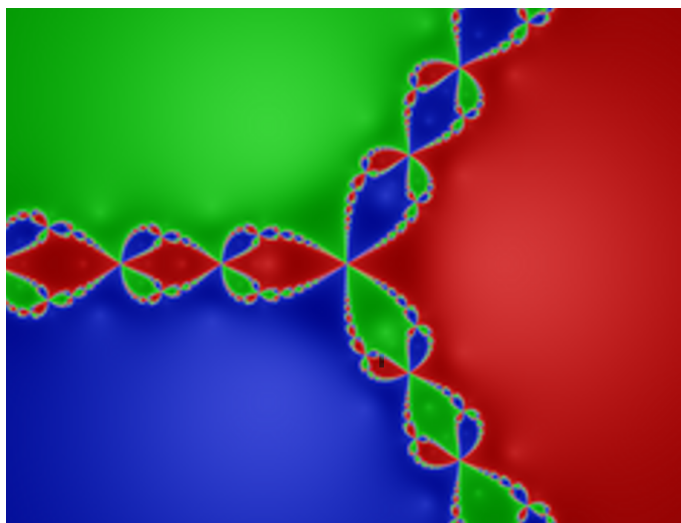
Från tabellen får vi följande:

$$[0.5687265396, 0.5687294006] \Rightarrow [0.56873, 0.58673] \Rightarrow x = 0.56873$$

$$\Rightarrow f(0.56872) = 0.0000052516 \approx 0,$$

vilket är en god approximation till en av polynomets rötter.

## 8 Newton-Raphson metoden



Figur 2: Illustrativ fraktalbild som visualiserar Newton-Raphson-metoden

Newton-Raphson-metoden är en av de mest använda numeriska metoderna för att lösa icke-linjära ekvationer och konvergerar effektivt till enkla rötter [10]. Den används inom bland annat ingenjörsk- och vetenskapsfält, exempelvis användes den inom elkraftsystem för att beräkna spänningar och strömmar i stora nätverk. Den används även i spelutveckling för att lösa matematiska problem snabbt. Ett känt exempel är algoritmen *Fast Inverse Square Root*, som utnyttjar Newton-Raphson för att effektivt beräkna  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ , där  $x \in \mathbb{R}$ , i realtid. Detta är avgörande för 3D-grafik i spel som Quake III Arena [15]. Det tar lång tid för en dator att räkna  $\sqrt{x}$  och i ett spel vill man att saker ska gå snabbt; därför använder sig algoritmen av Newton-Raphson för att beräkna  $\frac{1}{\sqrt{x}}$ .

Metoden är sällan använd vid handräkning eftersom iterationerna är tidskrävande och kräver hög precision, men genom algoritmer blir beräkningarna extremt snabba och exakta [10]. Se algoritmen i Bilaga 2. Metoden är även en av de snabbaste i att konvergera till en rot [10]. Newton-Raphson kan visualiseras med hjälp av fraktalbilder, där varje färg representerar en rot till en specifik funktion  $f(x)$  [10]. I Figur 2 ser vi att om startgissningen hamnar i den gröna färgen kommer metoden konvergera till den gröna roten. Gränserna mellan färgerna visar komplexa och oregelbundna mönster. Dessa indikerar punkter där små variationer i startgissningen kan leda konvergens till olika rötter eller ingen rot alls då metoden divergerar. Därför rekommenderar matematikern Darboux att man ska välja  $a$ ,  $b$  eller  $c$  så länge man vet att en rot finns nära värdet  $a$  eller ligger inom intervallet  $[b, c]$  och så länge  $f(x)$  och  $f''(x)$  har samma tecken vid den valde gränsen. Det vill säga om till exempel  $f(a) > 0$  och  $f''(a) > 0$  så ska  $a$  användas som startgissning, och metoden kommer då konvergera till den närliggande roten [8].

## 8.1 Historia

Newton introducerade sin metod för rot-approximation i *De analysi per aequationes numero terminorum infinitas*. Boken skrevs och metoden spreds bland närstående, boken publicerades dock först 1704 [5]. Senare publicerade Newton en detaljerad förklaring av sin metod i *Methodus fluxionum et serierum infinitarum*, skriven 1671 och publicerades 1736. Hans bok var dock inte den första som förklarade metoden. Första förklaringen för Newtons metod var skriven i Wallis *Algebra*, 1685, där han även gav ett konkret exempel om hur metoden löser ekvationen  $y^3 - 2y - 5 = 0$  [5].

Senare använde sig Joseph Raphson av Newtons metods underläggande teori för att skapa metoden som vi idag kallar för Newton-Raphson. Raphson publicerade sin metod 1690 i sitt verk *Analysis aequationum universalis*. Notera att Raphson inte skrev derivator  $f'(x)$  på vårt nutida sätt, utan han uttryckte  $f(x)$  och  $f'(x)$  helt algebraiskt [5]. Till skillnad från Newton, som skapade nya ekvationer vid varje steg, arbetade Raphson med en och samma grundekvation hela tiden [5]. Även fast metoderna inte använder samma tillvägagångssätt, har Raphsons metod accepterats som en förbättring av Newtons metod och därför kallas Newton-Raphson metod för Newtons metod [5].

## 8.2 Sats

Satsen kommer från Gander et al. [10].

Man kan numeriskt hitta en rot för ekvationen  $f(x) = 0$  med hjälp av följande formel:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

där man börjar med ett gissningsvärde  $x_0$ .

## 8.3 Bevis

Beviset består av tre delar:

1. Repetition
2. Skapandet av formeln
3. Att metoden konvergerar

### (1) Repetition

Taylorserie [18]:



$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2 f''(a)}{2!} - \frac{h^3 f^{(3)}(x)}{3!} + \dots + \frac{(-h)^n f^{(n)}(a)}{n!} + O(h^{n+1}),$$

$$f'(x-h) = f'(x) - hf''(x) + \frac{h^2 f^{(3)}(a)}{2!} - \frac{h^3 f^{(4)}(x)}{3!} + \dots + \frac{(-h)^n f^{(n+1)}(a)}{n!} + O(h^{n+1}),$$

$$(1-u)^{-1} = 1 + u + u^2 + u^3 + \dots + O(u^n).$$

## (2) Beviset för formeln

Idén bakom Newton-Raphson metoden är att man börjar med en gissning  $x_0$  och kollar funktions värde i den punkten  $f(x_0)$ . Sedan kollar man tangentens lutning i punkten  $(x_0, f(x_0))$ , det vill säga kollar på  $f'(x_0)$ . Efter detta kollar man när lutningen i den punkten skär x-axeln och den punkten blir  $x_1$ . Sedan upprepar man samma process tills  $x_i$  konvergerar och når en god approximation, se Figur 3 för förtydligande.

Låt oss se hur förklaringen leder till en formel, se Figur 4 för förtydligande:

Vi vill hitta värdet på  $x_1$ . Om vi kallar avståndet mellan  $x_0$  och  $x_1$  för  $\Delta x$ . Detta ger

$$x_1 = x_0 - \Delta x.$$

Vi vet även att lutningen i punkten  $x_0$  är  $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$  och om vi använder punkten  $(x_0, f(x_0))$  och punkten  $(x_1, 0)$  får vi  $k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0) - 0}{x_0 - x_1} = \frac{f(x_0)}{\Delta x}$ . Ett enklare sätt att uttrycka lutningen i punkten  $x_0$  är genom derivatan. Detta leder till:

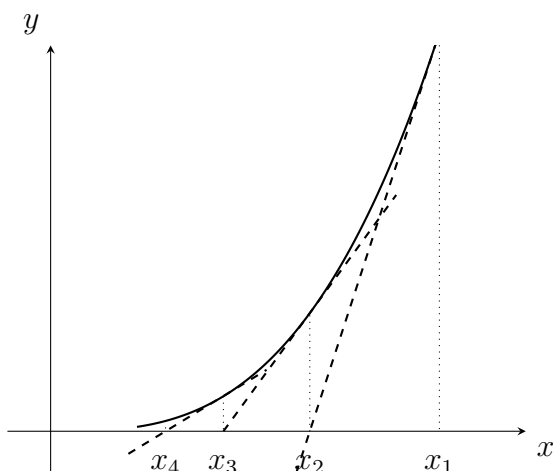
$$\begin{aligned} f'(x_0) = k = \frac{f(x_0)}{\Delta x} &\iff f'(x_0) = \frac{f(x_0)}{\Delta x} &\iff \Delta x \cdot f'(x_0) = f(x_0) \\ &\iff \Delta x = \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \end{aligned}$$

Om vi sätter in detta i vår tidigare ekvation  $x_1 = x_0 - \Delta x$  får vi:

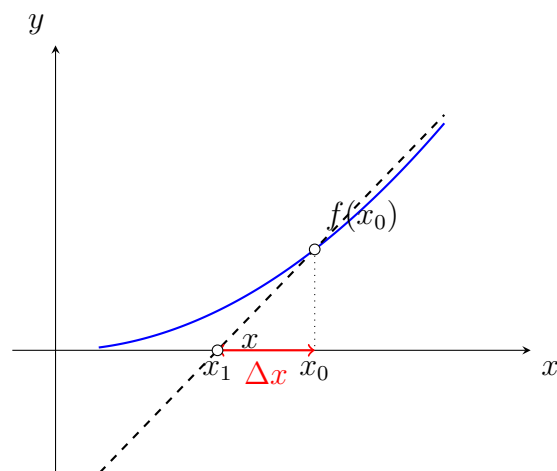
$$x_1 = x_0 - \Delta x \iff x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Eftersom samma resonemang användes, vet vi att:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$



Figur 3: Newton-Raphsons iterationer



Figur 4: Newton-Raphsons iteration

### (3) Bevisa formelns konvergens

Målet med Newton-Raphson metoden är att formeln ska konvergera mot roten. Det vill säga, om vi har felet  $\varepsilon$  som skillnaden mellan funktionens rot  $r$  och närmevärdet  $x_n$ ,  $\varepsilon = r - x_n$ , ju mer  $\varepsilon$  går mot noll, desto större  $n$  i  $x_n$ . Ett enklare sätt att visa att  $\varepsilon$  minskar är genom  $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ , alltså att resten  $\varepsilon_{n+1} = r - x_{n+1}$  är mindre än resten  $\varepsilon = r - x_n$ .

Vi vet att  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  och att felet  $\varepsilon_n = r - x_n$ . Vi vill visa att  $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ .

Vi börjar med att skriva om  $\varepsilon_{n+1}$ :

$$\varepsilon_{n+1} = r - x_{n+1} = r - \left( x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right) = r - x_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \varepsilon_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Eftersom  $\varepsilon_n = r - x_n \Leftrightarrow x_n = r - \varepsilon_n$  kan vi skriva uttrycket ytterligare till:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = \varepsilon_n + \frac{f(r - \varepsilon_n)}{f'(r - \varepsilon_n)}.$$

Nu använder vi Taylorserie [18] för att utveckla funktionerna:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{f(r - \varepsilon_n)}{f'(r - \varepsilon_n)}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{f(r) - \varepsilon_n f'(r) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(r) + O(\varepsilon_n^3)}{f'(r) - \varepsilon_n f''(r) + O(\varepsilon_n^2)} = \varepsilon_n + \frac{-\varepsilon_n f'(r) + \frac{\varepsilon_n^2}{2} f''(r) + O(\varepsilon_n^3)}{f'(r) - \varepsilon_n f''(r) + O(\varepsilon_n^2)}.$$

Notera att  $r$  är en rot för funktionen  $f(x)$  så  $f(r) = 0$ . Nu bryter vi ut  $f'(r)$  från både täljaren och nämnaren:

$$\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + \frac{f'(r) \left( -\varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2 f''(r)}{2f'(r)} + O(\varepsilon_n^3) \right)}{f'(r) \left( 1 - \frac{\varepsilon_n f''(r)}{2f'(r)} + O(\varepsilon_n^2) \right)} = \varepsilon_n + \frac{-\varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2 f''(r)}{2f'(r)} + O(\varepsilon_n^3)}{1 - \frac{\varepsilon_n f''(r)}{2f'(r)} + O(\varepsilon_n^2)}.$$

Nu använder vi taylorsserie för  $(1 - u)^{-1}$  på  $\frac{1}{1 - \frac{\varepsilon_n f''(r)}{2f'(r)} + O(\varepsilon_n^2)}$  delen av ekvationen:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} &= \varepsilon_n + \frac{-\varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2 f''(r)}{2f'(r)} + O(\varepsilon_n^3)}{1 - \frac{\varepsilon_n f''(r)}{2f'(r)} + O(\varepsilon_n^2)} \\ &= \varepsilon_n + \left( -\varepsilon_n + \frac{\varepsilon_n^2 f''(r)}{2f'(r)} + O(\varepsilon_n^3) \right) \left( 1 + \frac{\varepsilon_n f''(r)}{2f'(r)} + O(\varepsilon_n^2) \right) \\ &= \varepsilon_n + \left( -\varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n^2 f''(r)}{2f'(r)} + O(\varepsilon_n^3) + \frac{\varepsilon_n^2 f''(r)}{2f'(r)} + \frac{\varepsilon_n^3 (f''(r))^2}{2(f'(r))^2} + O(\varepsilon_n^4) + O(\varepsilon_n^5) \right) \\ &= \varepsilon_n + \left( -\varepsilon_n - \frac{\varepsilon_n^2 f''(r)}{2f'(r)} + O(\varepsilon_n^3) \right) \\ &= -\frac{\varepsilon_n^2 f''(r)}{2f'(r)} + O(\varepsilon_n^3). \end{aligned}$$

Detta betyder att

$$\varepsilon_{n+1} = -\frac{f''(r)}{2f'(r)} \varepsilon_n^2.$$

Eftersom felet mäts som ett absolutvärde kan vi strunta i tecknet framför konstanttermen  $\frac{f''(r)}{2f'(r)}$ . När  $\varepsilon_n$  är litet kommer  $\varepsilon_n^2$  att bli betydligt mycket mindre och därför är  $\varepsilon_{n+1} < \varepsilon_n$ , vilket i sin tur generellt tyder på att Newton-Raphson metoden kommer att konvergera.

Från detta bevis och formel ser vi att om en rot har en högre multiplicitet kommer  $f'(r) = 0$  och detta kommer skapa problem, metoden kan till exempel divergera.  $\square$

## 8.4 Exempel

**1. Hitta en rot för följande funktion:**

$$f(x) = x^2 + x.$$

**Lösning:**

Låt oss se hur Newton-Raphson löser det. Vi vill antingen få  $x \approx 0$  eller  $x \approx -1$ , då  $f(x) = x^2 + x = x(x + 1)$ . Från funktionen  $f(x) = x^2 + x$  vet vi att derivatan är  $f'(x) = 2x + 1$ . Vi börjar med gissningen  $x_0 = 1$ . Detta ger följande:

$x_k$	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$x_{k+1}$
1	$1^2 + 1 = 2$	$2 \cdot 1 + 1 = 3$	$1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \approx 0.33$
$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} = \frac{4}{9} \approx 0.444$	$2 \cdot \frac{1}{3} + 1 = \frac{5}{3}$	$\frac{1}{3} - \frac{4/9}{5/3} = \frac{1}{15} \approx 0.0667$
$\frac{1}{15}$	$\left(\frac{1}{15}\right)^2 + \frac{1}{15} = \frac{16}{225} \approx 0.0711$	$2 \cdot \frac{1}{15} + 1 = \frac{17}{15}$	$\frac{1}{15} - \frac{16/225}{17/15} = \frac{1}{225} \approx 0.0044$
$\frac{1}{225}$	$\left(\frac{1}{225}\right)^2 + \frac{1}{225} = \frac{226}{50625} \approx 0.00446$	$2 \cdot \frac{1}{225} + 1 = \frac{227}{225}$	$\frac{1}{225} - \frac{226/50625}{227/225} = \frac{1}{51075} \approx 0.00001958$

Som vi ser är  $f\left(\frac{1}{225}\right) = 0.00446 \dots \approx 0$  och  $x_{k+1}$  konvergerar mot 0. Därför är 0 en rot och  $x = \frac{1}{225}$  är en god approximation.

**Svar:** Då  $f\left(\frac{1}{225}\right) = 0.00446 \dots \approx 0$  är  $x = \frac{1}{225}$  en god rotapproximation.

## 9 Descartes teckenregel

Descartes teckenregel är ett kraftfullt verktyg inom matematiken som ger en uppskattning av antalet positiva och negativa reella rötter genom att analysera teckenväxlingar i  $f(x)$  och  $f(-x)$ . Även om metoden inte ger ett exakt antal rötter, beskriver den olika möjliga scenarion för möjliga antal rötter. Detta gör den särskilt användbar inom områden där preliminära analyser eller scenarier är viktigare än direkta lösningar. Metoden har använts i flera praktiska tillämpningar, såsom inom kontrollteori och signalbehandling. Ett konkret exempel är stabilitetsanalys i ingenjörsarbete, där Descartes regel snabbt kan uppskatta om ett system har positiva reella rötter, vilket skulle indikera instabilitet [3]. Detta gör metoden till ett värdefullt verktyg för att snabbt bedöma stabilitet innan man går vidare till mer detaljerade tekniker, som Sturms sats eller numeriska metoder.

### 9.1 Historia

Descartes teckenregel formulerades av den franske filosofen René Descartes i 1637 [6]. Descartes uttryckte, utan bevis, att man kan hitta antalet positiva och negativa

rötter för en polynomekvation. Detta då vi vet att en polynomekvation har roten  $a$  om och endast om den polynomen är dividerbar med  $x - a$ . Filosofen påpekade att antalet positiva rötter är maximalt lika med antalet teckenväxlingar, det vill säga hur många växlingar som sker mellan  $+$  och  $-$ , i polynomet. Vidare påpekade han att antalet negativa rötter maximalt kan motsvara antalet på varandra följande identiska tecken, det vill säga två efterföljande  $+$  eller  $-$  i polynomet. I boken, *La Géométrie*, beskrev han även metoden för att transformera en funktions positiva rötter till negativa och negativa rötter till positiva. Om vi har funktionen  $p(x)$  så byter man tecken på rötterna genom att räkna  $p(-x)$  [6].

Många matematiker under den tiden tyckte inte om Descartes påståenden [1]. Matematikerna argumenterade då, om hans påstående är korrekt för polynomet  $p(x) = x^2 - 1$  bör det bara finnas en positiv rot och ingen negativ rot, då det finns en två på varandra följande teckenväxlingar, men inte två på varandra följande identiska tecken. Detta är så klart inte sant då  $p(x) = x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ , det finns alltså en positiv rot och en negativ rot. Detta är dock inget motbevis då  $p(x) = x^2 - 1 = x^2 \pm 0 \cdot x - 1$ , så det finns en på varandra följande teckenväxlingar och en på varandra följande identiska tecken. Anmärkningen resulterade i att tilldela tecken till de saknade koefficienterna på ett sätt som minimerar antalet teckenförväxlingar för att optimera tillämpningen [1]. Ett förtydligande exempel,  $p(x) = x^3 + x^2 + 1 = x^3 + x^2 + 0 \cdot x + 1$  här satte vi  $+0 \cdot x$  då det resulterar i minimal teckenväxling, eftersom termen innan är  $+x^2$  och termen efter är  $+1$ . Detta resulterar i att  $p(x)$  inte har positiva rötter, ingen teckenväxling, och maximalt tre negativa rötter, tre stycken på varandra följande identiska tecken. Polynomet  $p(x) = x^3 + x^2 + 1$  har en negativ rot och inga positiva rötter.

År 1828 förklarade den tyska matematikern Carl Friedrich Gauss hur man räknar ett polynoms teckenväxlingar och förklarade att man kan strunta i de saknade koefficienterna (koefficienter som är 0) [1]. Enligt Gauss sker en teckenväxling mellan två på varandra följande koefficienter i polynomet [1]. För förtydligande, om talet framför och efter nollkoefficienterna har samma tecken kommer koefficienten att anta deras tecken. Om talet framför och efter är olika spelar det ingen roll vilket tecken koefficienten antar. Så det vi verkligen gör är att förskjuta teckenväxlingen och därför spelar nollkoefficienterna ingen roll. Istället för att räkna antalet på varandra följande identiska tecken använde Gauss sig av Descartes metod för ändring av negativa till positiva rötter och från positiva till negativa rötter, genom att räkna  $p(-x)$ , för att räkna det maximala antalet negativa rötter i ett polynom. I funktionen  $p(-x)$  är maximala antalet negativa rötter antalet på varandra följande teckenväxlingar. Gauss var den första matematikern som gav ett fullständigt och korrekt bevis för Descartes teckenregel [1]. Han modifierade även teckenregeln ytterligare genom att bevisa att antalet positiva och negativa rötter är antingen lika med det maximala antalet eller mindre än det med ett jämnt heltal, notera att reduceringen inte får göra antalet till mindre än 0. I det tidigare exemplet skulle det fungera som följande:

$p(x) = x^2 - 1$  har en teckenväxling och därför finns det en positiv rot, medan  $p(-x) = x^2 - 1$  har en teckenväxling och därför finns det en negativ rot. Eftersom både de negativa och positiva rötterna är maximalt ett, kan man inte reducera dem med ett jämnt heltal och därför har polynomet  $p(x) = x^2 - 1$  en negativ och en positiv rot.

I det andra exemplet skulle det fungera som följande:

$p(x) = x^3 + x^2 + 1$  har ingen teckenväxling och därför ingen positiv rot. Medan  $p(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 + 1 = -x^3 + x^2 + 1$  har en teckenväxling, så en negativ rot. Med detta följer att vi har två icke-reella rötter, vilket är sant.

## 9.2 Sats

Du har polynomekvationen  $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = 0$ , där  $a_i \in \mathbb{R}$ . Ekvationen har lika många nollställen som graden på polynomet. Man har maximalt lika många positiva reella rötter som på varandra följande teckenväxlingar i  $p(x)$ . Man har maximalt lika många negativa reella rötter som på varandra följande teckenväxlingar i  $p(-x)$ . Antalet positiva och negativa reella rötter kan minska med jämna heltal, det vill säga att antalet kan minska med 2, 4 eller andra jämna heltal.

## 9.3 Bevis

Sats, bevis och lemma kommer från Wang [24] och Levin [14].

Beviset består av tre huvuddelar:

1. Rolle's sats [19]
2. Lemma och dess bevis
  - 2.1. Lemma
  - 2.2. Bevis av lemma
3. Alternativ sats till Descartes teckenregel och dess bevis
  - 3.1. Sats
  - 3.2. Bevis av sats
    - 3.2.1. Beviset för Descartes teckenregel gällande  $p(x)$ 
      - 3.2.1.1. Basfall
      - 3.2.1.2. Induktion
        - 3.2.1.2.1. Fall 1  $a_0 a_1 > 0$

- 3.2.1.2.2. Fall 2  $a_0a_1 < 0$
- 3.2.1.3. Sammanfattning
- 3.2.2. Beviset för Descartes teckenregel gällande  $p(-x)$ 
  - 3.2.2.1. Basfall
  - 3.2.2.2. Induktion
    - 3.2.2.2.1. Fall 1  $a_0a_1 > 0$
    - 3.2.2.2.2. Fall 2  $a_0a_1 < 0$
    - 3.2.2.3. Sammanfattning
- 3.2.3. Avslutning

### (1) Rolle's sats

Rolle's sats säger att mellan varje par av rötter i  $p(x)$  måste det finnas en rot i  $p'(x)$ . Detta innebär att om  $p(x)$  har  $z(p)$  positiva rötter, då måste dess derivata  $p'(x)$  ha minst  $z(p) - 1$  positiva rötter, med andra ord  $z(p') \geq z(p) - 1$  [19].

### (2) Lemma och dess bevis

#### (2.1) Lemma

Låt  $p(x) = a_0x^{b_0} + a_1x^{b_1} + \dots + a_nx^{b_n}$  vara ett polynom där  $a_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  och  $0 \leq b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n$ . Låt även antalet positiva rötter för  $p$  betecknas med  $z(p)$ . Om  $a_0a_n > 0$  då är  $z(p)$  jämn. Om  $a_0a_n < 0$  då är  $z(p)$  udda.

#### (2.2) Bevis av lemma

Innan beviset vill vi påminna om att positiva nollställen innebär nollställen där  $x \geq 0$ .

Låt  $a_0 > 0$  och  $a_n > 0$ . För ett polynom  $p(x) = a_0x^{b_0} + a_1x^{b_1} + \dots + a_nx^{b_n}$  där  $0 \leq b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n$ , kommer för små  $x$ , nära 0,  $a_0x^{b_0}$  dominera funktionen och för stora  $x$  kommer  $a_nx^{b_n}$  att dominera. Detta leder till att

$$p(0) \geq 0 \quad \text{och att} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty.$$

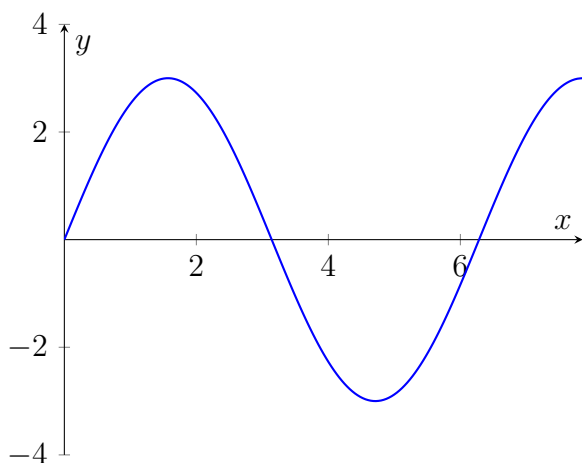
Vilket i och för sig betyder att funktionens graf börjar och slutar i koordinatsystemets första kvadrat, det vill säga positiva sidan av x- och y-axeln. Eftersom funktionen  $p(x)$  börjar och slutar på samma sida av y-axeln, kommer grafen korsa x-axeln ett jämnt antal gånger, utan hänsyn till rötter med jämn multiplicitet. Detta bygger på, om grafen börjar i den ena sidan av y-axeln och korsar x-axeln så går den över till den andra sidan av y-axeln för att komma tillbaka till den första sidan behöver man korsa x-axeln en gång till. Se Figur 5 för förtydligande. Alltså, för varje korsning behöver det göras ytterligare en korsning till för komma tillbaka till samma sida,

således ett jämnt antal korsningar [24, 14].

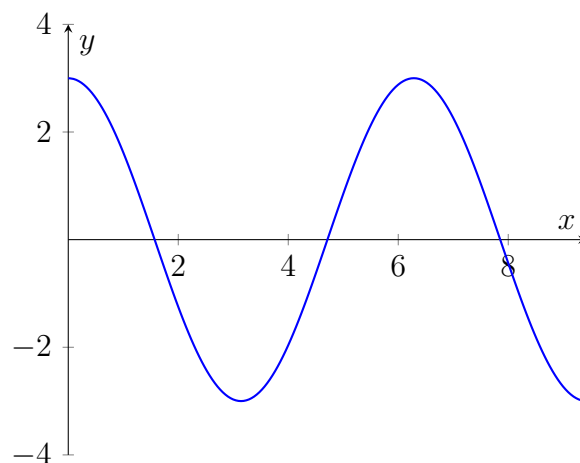
Om  $x = a$  är en rot med jämn multiplicitet, antal faktorer  $(x - a)$  som ingår i polynomet  $p(x)$ , tangerar grafen endast x-axeln utan att korsa den. Om  $x = a$  är en rot med udda multiplicitet, korsar grafen x-axeln. Som tidigare nämnt har vi jämnt antal korsningar, det vill säga jämnt antal rötter med udda multiplicitet, detta leder till att vi har jämnt antal rötter i  $z(p)$ . Vid tillägg av rötterna med jämn multiplicitet, läggs ytterligare ett jämnt antal rötter till  $z(p)$ . Därför är  $z(p)$  jämn när  $a_0, a_n > 0$ . Samma argument gäller för  $a_0 < 0$  och  $a_n < 0$ , där  $p(0) \leq 0$  och  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = -\infty$ , som börjar och slutar vid samma sida. Därför är  $z(p)$  jämn när  $a_0, a_n < 0$ . Eftersom  $z(p)$  är jämn för både  $a_0, a_n > 0$  och  $a_0, a_n < 0$ , är  $z(p)$  jämn när  $a_0 a_n > 0$ .

Låt  $a_0 > 0$  och  $a_n < 0$ , då är  $p(0) \geq 0$  och  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = -\infty$ . Eftersom den börjar vid positiva sidan av y-axeln och slutar vid negativa sidan, kommer grafen  $p(x)$  korsa x-axeln ett udda antal gånger, det vill säga ett udda antal rötter med udda multiplicitet. Vid tilläggnen av rötterna med jämn multiplicitet, läggs ytterligare ett jämnt antal korsningar i  $z(p)$ . Se Figur 6 för förtydligande. Då jämn + udda = udda leder det till att  $z(p)$  är udda. Samma argument gäller för  $a_0 < 0$  och  $a_n > 0$ , där  $p(0) \leq 0$  och  $\lim_{x \rightarrow \infty} p(x) = \infty$ . Eftersom  $z(p)$  är udda för  $a_0 > 0$  och  $a_n < 0$  samt  $a_0 < 0$  och  $a_n > 0$  gäller att  $z(p)$  är udda när  $a_0 a_n < 0$ .

□



Figur 5: Exempel på graf som börjar och slutar på samma sida av y-axeln



Figur 6: Exempel på graf som börja och slutar på olika sidor av y-axeln

### (3) Alternativ sats till Descartes teckenregel och dess bevis

#### (3.1) Sats



Låt  $p(x) = a_0x^{b_0} + a_1x^{b_1} + \dots + a_nx^{b_n}$  där  $a_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  och  $0 \leq b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n$ . Då är antal positiva reella rötter av  $p(x)$  antingen antalet teckenväxlingar i koefficientsekvensen  $a_0, \dots, a_n$  eller så är det färre än teckenväxlingarna med jämnt heltal. Antal negativa reella rötter av  $p(x)$  är antingen antalet teckenväxlingar i koefficientsekvensen för  $p(-x)$  eller är mindre än teckenväxlingarna med jämnt heltal [24, 14].

### (3.2) Bevis av sats

Genom induktion ska vi bevisa att denna sats gäller för alla polynomer, oavsett grad. Låt  $b_0 = 0$  och  $n$  vara graden på polynomet.

#### (3.2.1) Beviset för Descartes teckenregel gällande $p(x)$

Låt antalet teckenväxlingar för koefficientsekvensen av  $p(x)$  betecknas med  $v(p(x))$  och antalet positiva rötter för  $p(x)$  betecknas med  $z(p(x))$ .

##### (3.2.1.1) Basfall

När  $n = 1$  har vi polynomet  $p(x) = a_1x + a_0$ . Eftersom det endast finns två termer kan man maximalt ha en teckenväxling, och polynomet  $p(x)$  har endast en rot. Vi har fyra fall:

1. Där  $a_1, a_0 > 0$ :  $a_1x + a_0 = 0 \iff a_1x = -a_0 \iff x = -\frac{a_0}{a_1}$ , ingen teckenväxling, en negativ rot.
2. Där  $a_1 > 0$  och  $a_0 < 0$ :  $a_1x - a_0 = 0 \iff a_1x = a_0 \iff x = \frac{a_0}{a_1}$ , en teckenväxling, en positiv rot.
3. Där  $a_1 < 0$  och  $a_0 > 0$ :  $-a_1x + a_0 = 0 \iff a_1x = a_0 \iff x = \frac{a_0}{a_1}$ , en teckenväxling, en positiv rot.
4. Där  $a_1, a_0 < 0$ :  $-a_1x - a_0 = 0 \iff a_1x = -a_0 \iff x = -\frac{a_0}{a_1}$ , ingen teckenväxling, en negativ rot.

I fallen får vi en positiv rot när en teckenväxling sker, det vill säga  $v(p(x)) = z(p(x))$ . Eftersom  $v(p(x)) = z(p(x))$  kommer  $z(p(x)) \equiv v(p(x)) \pmod{2}$ , det vill säga båda  $z(p(x))$  och  $v(p(x))$  kommer ge samma rest vid division med 2.

##### (3.2.1.2) Induktion

Anta att satsen gäller för  $n = k - 1$  där  $k \in \mathbb{N}$ , det vill säga att för  $n = k - 1$  gäller att  $v(p(x)) \geq z(p(x))$  och  $z(p(x)) \equiv v(p(x)) \pmod{2}$ . Vi vill bevisa att  $v(p(x)) \geq z(p(x))$  och  $z(p(x)) \equiv v(p(x)) \pmod{2}$  gäller när  $n = k$ .

Låt  $p(x)$  vara ett polynom med grad  $n = k$ . När man deriverar  $p(x)$  kommer konstanten  $a_0$  att försvinna och polynomet kommer att ha grad  $n = k - 1$ . Eftersom  $0 = b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n$  kommer inte polynomets koefficienter att ändra tecknen vid deriveringen, det vill säga polynomet  $p'(x)$  kommer inte ha några förändringar i tecken. Vid borttagningen av konstanten  $a_0$  kan två fall uppstå:

**(3.2.1.2.1) Fall 1**  $a_0a_1 > 0$ 

När  $a_0a_1 > 0$  är teckenväxlingarna antingen  $++\pm\dots\pm$  eller  $--\pm\dots\pm$ . Som vi ser finns det ingen teckenväxling mellan första termen och andra termen. Vid borttagelsen av första termen påverkas inte antalet teckenändringar i  $p(x)$  och därför inte i dess derivata  $p'(x)$ . Detta leder till att  $v(p(x)) = v(p'(x))$ . Eftersom  $p(x)$  och  $p'(x)$  börjar och slutar med samma tecken, innebär det att  $z(p) \equiv z(p') \pmod{2}$ , enligt lemmat. Från vårt antagande vet vi att  $z(p'(x)) \equiv v(p'(x)) \pmod{2}$  och att  $z(p'(x)) \leq v(p'(x))$ , då  $p'(x)$  är av grad  $n = k - 1$ . Detta leder till:

$$z(p(x)) \equiv z(p'(x)) \equiv v(p'(x)) = v(p(x)) \pmod{2} \iff z(p(x)) \equiv v(p(x)) \pmod{2}.$$

Enligt Rolle's sats leder detta till:

$$v(p(x)) = v(p'(x)) \geq z(p'(x)) \geq z(p(x)) - 1 \Rightarrow z(p(x)) \leq v(p(x)),$$

$-1$  i  $v(p(x)) \geq z(p(x)) - 1$  måste tas bort för att  $z(p(x)) \equiv v(p(x)) \pmod{2}$  ska uppfyllas, då både  $z(p(x))$  och  $v(p(x))$  bör antingen vara jämna eller udda. Därför är  $z(p(x)) \equiv v(p(x)) \pmod{2}$  och  $z(p(x)) \leq v(p(x))$  för  $a_0a_1 > 0$ .

**(3.2.1.2.2) Fall 2**  $a_0a_1 < 0$ 

När  $a_0a_1 < 0$  är teckenväxlingarna antingen  $+-\pm\dots\pm$  eller  $-+\pm\dots\pm$ . Här ser vi att borttagningen av konstanten  $a_0$  leder till borttagningen av en teckenväxling. Det vill säga  $v(p(x)) = v(p'(x)) + 1$ . Eftersom  $p(x)$  och  $p'(x)$  börjar på olika tecken men slutar på samma tecken, kommer det att orsaka att den ena har ett jämnt  $z(p(x))$  medan den andra har ett udda  $z(p(x))$ , det vill säga  $z(p(x)) - z(p'(x)) \equiv 1 \pmod{2}$ , enligt lemmat. Enligt antagandet är  $z(p'(x)) \equiv v(p'(x)) \pmod{2}$  och att  $z(p'(x)) \leq v(p'(x))$ . Detta leder till:

$$z(p(x)) - z(p'(x)) \equiv 1 \pmod{2} \iff z(p(x)) - z(p'(x)) + z(p'(x)) \equiv 1 + z(p'(x)) \pmod{2}$$

$$\iff z(p(x)) \equiv z(p'(x)) + 1 \equiv v(p'(x)) + 1 = v(p(x)) \pmod{2}$$

$$\iff z(p(x)) \equiv v(p(x)) \pmod{2}.$$

Rolle's sats ger  $z(p'(x)) \geq z(p(x)) - 1 \iff z(p'(x)) + 1 \geq z(p(x))$ , vilket resulterar i:

$$v(p(x)) = v(p'(x)) + 1 \geq z(p'(x)) + 1 \geq z(p(x)) \iff v(p(x)) \geq z(p(x)).$$

Därför är  $z(p(x)) \equiv v(p(x)) \pmod{2}$  och  $z(p(x)) \leq v(p(x))$  för  $a_0a_1 < 0$ .

### (3.2.1.3) Sammanfattning

Då  $z(p(x)) \equiv v(p(x)) \pmod{2}$  och  $z(p(x)) \leq v(p(x))$  för basfallet och induktionen ( $a_0a_1 < 0$  och  $a_0a_1 > 0$ ), gäller  $z(p(x)) \equiv v(p(x)) \pmod{2}$  och  $z(p(x)) \leq v(p(x))$  för alla polynom. Det vill säga att antalet positiva rötter  $z(p(x))$  kan maximalt vara antalet teckenväxlingar  $v(p(x))$  eller mindre än den med jämnt heltal.

### (3.2.2) Beviset för Descartes teckenregel gällande $p(-x)$

Notera att de positiva rötterna i  $p(-x)$  är de negativa rötterna i  $p(x)$ . Denna del av beviset fokuserar på polynomet  $p(x)$  negativa reella nollställen, genom att räkna de positiva rötterna i  $p(-x)$ . Låt antalet teckenväxlingar för koefficientsekvensen av  $p(-x)$  betecknas med  $v(p(-x))$  och antalet positiva rötter för  $p(-x)$  betecknas med  $z(p(-x))$ .

#### (3.2.2.1) Basfall

När  $n = 1$  har vi polynomet  $p(x) = a_1x + a_0$ , vilket ger  $p(-x) = -a_1x + a_0$ . Eftersom det endast finns två termer kan man maximalt ha en teckenväxling, och polynomet  $p(-x)$  har endast en rot. Vi har fyra fall:

1. Där  $a_1, a_0 > 0$ :  $-a_1x + a_0 = 0 \iff a_1x = a_0 \iff x = \frac{a_0}{a_1}$ , en teckenväxling, en positiv rot.
2. Där  $a_1 > 0$  och  $a_0 < 0$ :  $-a_1x - a_0 = 0 \iff a_1x = -a_0 \iff x = -\frac{a_0}{a_1}$ , ingen teckenväxling, en negativ rot.
3. Där  $a_1 < 0$  och  $a_0 > 0$ :  $a_1x + a_0 = 0 \iff a_1x = -a_0 \iff x = -\frac{a_0}{a_1}$ , ingen teckenväxling, en negativ rot.
4. Där  $a_1, a_0 < 0$ :  $a_1x - a_0 = 0 \iff a_1x = a_0 \iff x = \frac{a_0}{a_1}$ , en teckenväxling, en positiv rot.

I fallen får vi en positiv rot när en teckenväxling sker, det vill säga  $v(p(-x)) = z(p(-x))$ . Eftersom  $v(p(-x)) = z(p(-x))$  kommer  $z(p(-x)) \equiv v(p(-x)) \pmod{2}$ , det vill säga båda  $z(p(-x))$  och  $v(p(-x))$  kommer ge samma rest vid division med 2.

#### (3.2.2.2) Induktion

Denna induktions bevis följer samma argument som induktions beviset för  $p(x)$  i sektion (3.2.1.2). Låt oss snabbt gå igenom argumenten:

Anta att satsen gäller för  $n = k - 1$  där  $k \in \mathbb{N}$ , det vill säga att för  $n = k - 1$  gäller att  $v(p(-x)) \geq z(p(-x))$  och  $z(p(-x)) \equiv v(p(-x)) \pmod{2}$ . Vi vill bevisa att  $v(p(-x)) \geq z(p(-x))$  och  $z(p(-x)) \equiv v(p(-x)) \pmod{2}$  gäller när  $n = k$ .

Låt  $p(-x)$  vara ett polynom med grad  $n = k$ . När man deriverar  $p(-x)$  kommer konstanten  $a_0$  att försvinna och polynomet kommer att ha grad  $n = k - 1$ . Eftersom

$0 = b_0 < b_1 < b_2 < \dots < b_n$  kommer inte polynomets koefficienter att ändra tecknen vid deriveringen, det vill säga polynomet  $p'(-x)$  kommer inte ha några förändringar i tecken. Vid borttagningen av konstanten  $a_0$  kan två fall uppstå:

**(3.2.2.2.1) Fall 1  $a_0a_1 > 0$**

När  $a_0a_1 > 0$  är teckenväxlingarna antingen  $++\pm\dots\pm$  eller  $--\dots\pm$ . Detta leder till att  $v(p(-x)) = v(p'(-x))$  och från lemmat får vi  $z(p(-x)) \equiv z(p'(-x)) \pmod{2}$ . Enligt vårt antagnade och Rolle's sats får vi  $z(p(-x)) \equiv v(p(-x)) \pmod{2}$  och  $z(p(-x)) \leq v(p(-x))$ . Därför gäller Descartes teckenregel för  $a_0a_1 > 0$ .

**(3.2.2.2.2) Fall 2  $a_0a_1 < 0$**

När  $a_0a_1 < 0$  är teckenväxlingarna antingen  $+-\pm\dots\pm$  eller  $-+\pm\dots\pm$ . Detta leder till  $v(p(-x)) = v(p'(-x)) + 1$  och från lemmat får vi  $z(p(-x)) - z(p'(-x)) \equiv 1 \pmod{2}$ . Enligt vårt antagande och Rolle's sats får vi  $z(p(-x)) \equiv v(p(-x)) \pmod{2}$  och  $z(p(-x)) \leq v(p(-x))$ . Därför gäller Descartes teckenregel för  $a_0a_1 < 0$ .

**(3.2.2.3) Sammanfattning**

Då  $z(p(-x)) \equiv v(p(-x)) \pmod{2}$  och  $z(p(-x)) \leq v(p(-x))$  för basfallet och induktionen ( $a_0a_1 < 0$  och  $a_0a_1 > 0$ ), gäller  $z(p(-x)) \equiv v(p(-x)) \pmod{2}$  och  $z(p(-x)) \leq v(p(-x))$  för alla polynom. Det vill säga att antalet positiva rötter  $z(p(-x))$  kan maximalt vara antalet teckenväxlingar  $v(p(-x))$  eller mindre än den med jämnt heltal.

**(3.2.3) Avslutning**

Från sektion (3.2.1) får vi att antalet positiva rötter  $z(p(x))$  kan maximalt vara antalet teckenväxlingar  $v(p(x))$  eller mindre än den med jämnt heltal, samt från sektion (3.2.2) får vi att antalet positiva rötter  $z(p(-x))$  kan maximalt vara antalet teckenväxlingar  $v(p(-x))$  eller mindre än den med jämnt heltal och återigen är de positiva rötterna i  $p(-x)$ , de negativa rötterna i  $p(x)$ .

□

## 9.4 Exempel

Vi har polynomet  $p(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$ . Vi börjar med att notera att detta polynom har 3 rötter, då polynomets grad är 3. Vi har totalt 2 teckenväxlingar, ena från  $+x^3$  till  $-2x^2$  och den andra från  $-x$  till  $+2$ . Medan för

$$p(-x) = (-x)^3 - 2(-x)^2 - (-x) + 2 = -x^3 - 2x^2 + x + 2$$

endast har en teckenväxling, från  $-2x^2$  till  $+x$ . Detta leder till följande tabell:

Positiva reella rötter	Negativa reella rötter	Icke-reella rötter	Total antal rötter
2	1	0	3
0	1	2	3

Vid faktorisering av ekvationen  $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 2)(x + 1)(x - 1)$  har vi två positiva rötter  $x_1 = 1$  och  $x_2 = 2$ , en negativ rot  $x_3 = -1$  och inga icke-reella rötter. Det vill säga scenario 1 är rätt.

## 10 Sturms sats för att räkna antal reella rötter på ett intervall

År 1829 publicerade den franske matematikern Jacques Charles François Sturm flera satser i sin memoar. En av Sturms satser bestämmer det exakta antalet reella rötter till ett polynom i ett givet intervall [22]. Till skillnad från Descartes teckenregel ger inte Sturms sats information om rötterna är positiva eller negativa, men den anger med säkerhet antalet rötter inom intervallet [22, 6]. Genom att konstruera en sekvens av polynom, kallad Sturm-sekvens, kan man använda satsen för att räkna rötter utan att beräkna de faktiska rötterna. Detta gör att Sturms sats, i motsats till Descartes teckenregel, är särskilt bra att tillämpa om man vill veta exakta antalet reella rötter i ett polynom. Exempelvis om man vill forska polynom som endast har reella rötter, kan man med Sturms sats snabbt och utan komplexa beräkningar, speciellt om räknat med hjälp av digitala hjälpmedel, kolla om ett polynom endast har reella rötter.

### 10.1 Sats

Sturms metod för att beräkna antal reella rötter i ett intervall för ett polynom med endast enkla rötter. Metoden bygger på två delar:

1. Sturms sekvens
2. Beräkning av antal rötter i ett intervall

#### (1) Sturm-sekvens

Låt  $p(x)$  vara ett polynom. När sekvensen är:

$$\begin{aligned}
 p_0(x) &= p(x), \\
 p_1(x) &= p'(x), \\
 p_2(x) &= -\text{resten} \left( \frac{p_0(x)}{p_1(x)} \right) = q_1(x)p_1(x) - p_0(x), \\
 p_3(x) &= -\text{resten} \left( \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \right) = q_2(x)p_2(x) - p_1(x), \\
 p_4(x) &= -\text{resten} \left( \frac{p_2(x)}{p_3(x)} \right) = q_3(x)p_3(x) - p_2(x), \\
 &\vdots \\
 p_{m+1}(x) &= -\text{resten} \left( \frac{p_{m-1}(x)}{p_m(x)} \right) = 0,
 \end{aligned}$$

blir Sturm-sekvensen  $p_0, p_1, \dots, p_m$ . Sturm-sekvensen uppfyller följande egenskaper:

- $p_m$  är en nollskild konstant.
- För  $0 < i < m - 1$  och  $a < \gamma < b$  gäller att om  $p_i(\gamma) = 0$  så är  $p_{i-1}(\gamma) = -p_{i+1}(\gamma)$ , där  $(a, b)$  är intervallet som undersöks.
- $p_0(a), p_0(b) \neq 0$
- Inga två på varandra följande  $p_i$  får vara noll samtidigt när  $x = \gamma$
- $p_0$  och  $p_1$  är aldrig noll när de befinner sig väldigt nära en rot.

## (2) Beräkning av antal rötter i ett intervall

Låt  $p_0(x), p_1(x), p_2(x), p_3(x), \dots, p_m(x)$  vara Sturm-sekvensen för  $p(x)$ . För vilket reellt tal  $t$ , eller  $t = \pm\infty$ , låt  $\sigma(t)$  vara antal teckenväxlingar i sekvensen, liksom Descartes ignorerar vi  $p_i(x) = 0$  vid beräkning av teckenväxling (notera att om  $p_0(x) = 0$  är  $x$  en rot). För  $a < b$ , där  $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$  och  $p_0(a), p_0(b) \neq 0$ , gäller att  $\sigma(a) - \sigma(b)$  anger antal reella rötter i intervallet  $(a, b)$ .

## 10.2 Bevis

Sats och bevis kommer från Sturm [22] och Raghavan [20]. Beviset betstår av fyra huvuddelar:

1. Förklaring
2. Antalet teckenväxlingar  $\sigma$  behålls samma i intervallet  $(a, b)$  vid passeringen av  $p_i(x) = 0$ , där  $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

3. Antalet teckenväxlingar minskar med 1 när  $p(x)$  passerar x-axeln

3.1 Fall 1 - Fallande graf

3.2 Fall 2 - Växande graf

4. Slutsats

### (1) Förklaring

Sturms-metod fungerar endast för enkla rötter, det betyder att rötterna som finns i polynomet endast är punkter där grafen korsar x-axeln. När en graf korsar x-axeln går den från positiva y-värden till negativa y-värden eller vice versa. Detta innebär att en funktion i Sturm-sekvensen endast byter tecken när den korsar x-axeln, det vill säga att  $\sigma$  endast ökar eller minskar när någon av funktionerna  $p_i(x)$  korsar x-axeln.

Låt  $\sigma(c)$  ange antalet teckenväxlingar i sturm-sekvensen  $p(c), p_1(c), p_2(c), p_3(c), \dots, p_n(c)$ . Vi vill bevisa att ekvationen  $p(x) = 0$  har  $\sigma(a) - \sigma(b)$  distinkta reella rötter i intervallet  $(a, b)$ . Vi ska göra det genom att bevisa att  $\sigma$  minskar med 1 för varje reell rot funktionen  $p(x)$  passerar och att  $\sigma$  hålls samma för varje reell rot funktionerna  $p_i(x)$  passerar, där  $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ .

### (2) Antalet teckenväxlingar $\sigma$ behålls samma i intervallet $(a, b)$ vid passeringen av $p_i(x) = 0$ , där $i \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

När  $p_i(x)$  korsar x-axeln kommer dess graf att gå från positiva y-värden till negativa y-värden eller från negativa y-värden till positiva y-värden, se Tabell 1 för förtydligande. Enligt Sturm-sekvensens definition måste  $p_{i-1}(\alpha)$  och  $p_{i+1}(\alpha)$  ha motsatta tecken när  $p_i(\alpha) = 0$ . Från definitionen vet vi även att  $p_{i-1}(\alpha)$  och  $p_{i+1}(\alpha)$  inte är lika med 0. Alla andra polynom längre bort i sekvensen, såsom  $p_{i-2}(\alpha), p_{i+2}(\alpha)$  osv, påverkas inte eftersom de är oberoende av  $p_i(\alpha)$  vid  $x = \alpha$ . Deras tecken är redan bestämda av tidigare divisioner och förblir oförändrade. Därför kommer endast  $p_i(\alpha) = 0$  att ändra tecken [22, 20].

	$p_i(x)$ går från positiv till negativ. Figur 8				$p_i(x)$ går från negativ till positiv. Figur 7			
	$x < \alpha$		$x > \alpha$		$x < \alpha$		$x > \alpha$	
	1	2	1	2	1	2	1	2
Möjliget	1	2	1	2	1	2	1	2
$p_{i-1}(x)$	+	-	+	-	+	-	+	-
$p_i(x)$	+	+	-	-	-	-	+	+
$p_{i+1}(x)$	-	+	-	+	-	+	-	+
Teckenväxlingar	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabell 1: Olika möjligheter

Som vi ser i tabellen spelar det ingen roll, då antal teckenväxlingar kommer hålla sig samma både innan och efter  $p_i(x)$  korsar x-axeln. Tabellen visar även de olika fallen som kan inträffa.

### (3) Antalet teckenväxlingar minskar med 1 när $p(x)$ passerar x-axeln

Låt oss nu bevisa att om  $p(\alpha) = 0$ , så minskar antal teckenväxlingar med 1 när den passerar  $x = \alpha$ . För detta finns det två fall. Det första fallet är när grafen i intervallet är fallande, går från positiva y-värden till negativa y-värden. Det andra fallet är när grafen i intervallet är växande, går från negativa y-värden till positiva y-värden.

#### (3.1) Fall 1 - Fallande graf

Låt grafen  $p(x)$  ändra tecken från positiva till negativa y-värden när den korsar  $x = \alpha$ . Se Figur 8 för förtydligande. Eftersom grafen är fallande kommer  $p'(x) = p_1(x)$  vara negativ. Detta resulterar i att vi går från tecknerna  $+$   $-$  till  $-$   $-$ . Som vi ser kommer teckenväxlingen att minska med 1 speciellt då inga andra sekvenser  $p_i(x) = 0$  kommer ändra tecken.

#### (3.2) Fall 2 - Växande graf

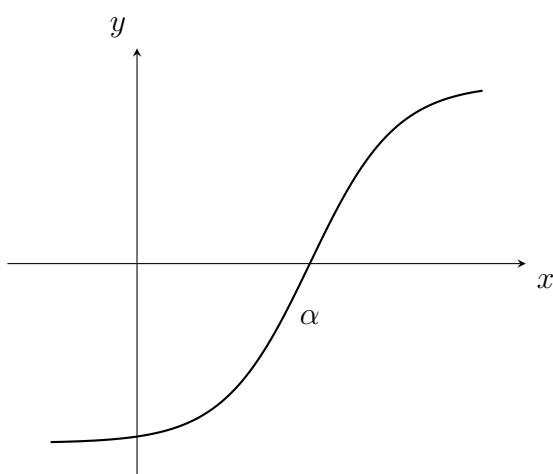
Låt grafen  $p(x)$  ändra tecken från negativa till positiva y-värden när den korsar  $x = \alpha$ . Se Figur 7 för förtydligande. Eftersom grafen är växande kommer  $p'(x) = p_1(x)$  vara positiv. Detta resulterar i att vi går från tecknerna  $-$   $+$  till  $+$   $+$  och på så sätt minskar antal teckenväxlingar med 1.

### (4) Slutsats

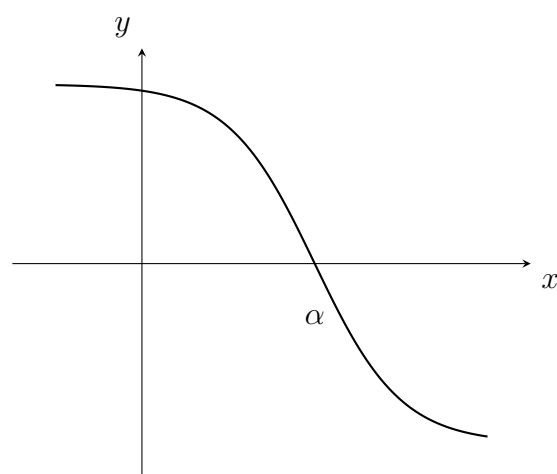
Eftersom  $\sigma(a)$  endast kommer att minska med antalet korsningar  $p(x)$  gör med x-axeln, det vill säga med det antal reella rötter  $p(x)$  passerar, kommer  $\sigma(a) - \sigma(b)$  att ge antalet reella rötter i intervallet  $(a, b)$ .

□





Figur 7



Figur 8

## 10.3 Exempel

### 1. Använd Sturms Sats på polynomet

$$f(x) = x^4 + x^3 - x - 1.$$

#### Lösning:

Först beräknar vi Sturm-sekvensen:

$$p_0(x) = f(x) = x^4 + x^3 - x - 1,$$

$$p_1(x) = f'(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1,$$

$$\begin{aligned} p_2(x) &= -\text{rest} \left( \frac{p_0(x)}{p_1(x)} \right) = -\text{rest} \left( \frac{x^4 + x^3 - x - 1}{4x^3 + 3x^2 - 1} \right) \\ &= \left( \frac{1}{4}x + \frac{1}{16} \right) (4x^3 + 3x^2 - 1) - (x^4 + x^3 - x - 1) = \frac{3}{16}(x^2 + 4x + 5). \end{aligned}$$

Eftersom den konstanta faktorn  $\frac{3}{16}$  inte spelar roll blir

$$p_2(x) = x^2 + 4x + 5.$$

Låt oss fortsätta beräkningen av Sturm-sekvensen:

$$\begin{aligned} p_3(x) &= -\text{rest} \left( \frac{p_1(x)}{p_2(x)} \right) = -\text{rest} \left( \frac{4x^3 + 3x^2 - 1}{x^2 + 4x + 5} \right) \\ &= (4x - 13)(x^2 + 4x + 5) - (4x^3 + 3x^2 - 1) = 32(-x - 2) \Rightarrow p_3(x) = -x - 2, \end{aligned}$$

$$p_4(x) = -\text{rest} \left( \frac{p_2(x)}{p_3(x)} \right) = -\text{rest} \left( \frac{x^2 + 4x + 5}{x + 2} \right) = (-x-2)(-x-2) - (x^2 + 4x + 5) = -1.$$

Sturm-sekvensen är:

$$p_0(x) = x^4 + x^3 - x - 1, \quad p_1(x) = 4x^3 + 3x^2 - 1,$$

$$p_2(x) = x^2 + 4x + 5, \quad p_3(x) = -x - 2, \quad p_4(x) = -1.$$

Nu gör vi Sturms metod:

$x$	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	$\sigma(x)$	$\sigma(a) - \sigma(b)$
$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-1$	3	
-4	195	-209	5	2	-1	3	$\sigma(-\infty) - \sigma(-4) = 3 - 3 = 0$
-2	9	-21	1	0	-1	3	$\sigma(-4) - \sigma(-2) = 3 - 3 = 0$
0	-1	-1	5	-2	-1	2	$\sigma(-2) - \sigma(0) = 3 - 2 = 1$
2	21	43	17	-4	-1	1	$\sigma(0) - \sigma(2) = 2 - 1 = 1$
4	315	303	37	-6	-1	1	$\sigma(2) - \sigma(4) = 1 - 1 = 0$
$\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-1$	1	$\sigma(4) - \sigma(\infty) = 1 - 1 = 0$

Sturm-metoden ger två reella rötter för ekvationen  $f(x) = x^4 + x^3 - x - 1$  och dessa två rötter ligger i intervallen  $(-2, 0)$  och  $(0, 2)$ . Vi kan använda Sturms metod för att minska intervallen ytterligare:

$x$	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$p_4(x)$	$\sigma(x)$	$\sigma(a) - \sigma(b)$
-1	0	-2	2	-1	-1	2	
0	-1	-1	5	-2	-1	2	$\sigma(-1) - \sigma(0) = 2 - 2 = 0$
1	0	6	10	-3	-1	1	$\sigma(0) - \sigma(1) = 2 - 1 = 1$

Som vi ser är de två reella rötterna  $x_1 = 1$  och  $x_2 = -1$ , då  $p_0(1) = p_0(-1) = 0$ . Som vi ser fungerar inte heller Sturms sats ordentligt när en av intervallernas punkter är en rot. Därför är  $p_0(a), p_0(b) \neq 0$  som en del av dess definition och dess sats.

# 11 Bilaga

## 11.1 Pythonkod till Bisektor-metoden

```
#En exempel funktion
def målfunktion(x):
    return (x**4-x**3+1)

#Python-program för att implementera bisektions-metoden
def bisektion_metod(a,b,tolerans=0.00001):

    # Kontrollera att a < b
    if a >= b:
        print("Fel: a måste vara mindre än b.")
        return None

    #Kontrollera att ena värdet i intervallet är negativt
    # och det andra positivt
    if målfunktion(a)*målfunktion(b)>0:
        print ("Du har inte valt rätt värden för a och b")
        return None

    c=a
    #Kontrollera precisionen (tolerans) 0.00001
    while (b-a)>=tolerans:

        #Hitta mittpunkten
        c=(a+b)/2

        # Kontrollera om mittpunkten är en rot
        if abs(målfunktion(c)) < tolerans:
            break

        #Bestäm vilken sida som ska upprepas.
        #Ska c ersätta a eller b?
        if målfunktion(c)*målfunktion(a)<0:
            b=c
        else:
            a=c

    # Returnera roten/värdet från den sista iterationen,
    # när precisionen (tolerans) har uppnåtts
    return(c)
```

## 11.2 Pythonkod till Newton-Raphson metoden

```
#En exempel funktion
def målfunktion(x):
    return (x**4-x**3+1)

#Funktionens derivata
def derivata_funktion(x):
    return(4*x**3-3*x**2)

# Python-program för att implementera Newton-Raphson-metoden
def newton_raphson_metod(startgissning, tolerans=0.00001, max_iterationer=100):
    x_n = startgissning

    for _ in range(max_iterationer):
        f_x = målfunktion(x_n)
        f_prime_x = derivata_funktion(x_n)

        # Undvik division med noll
        if f_prime_x==0:
            print("Newton-Raphson kan misslyckas.")
            return None

        # Kontrollera om det nuvarande värdet är tillräckligt nära roten
        if abs(f_x) < tolerans:
            return x_n

        # Uppdatera gissningen
        x_n = x_n - f_x / f_prime_x

    # Om konvergens inte uppnås efter max_iterationer
    print("Newton-Raphson konvergerade inte.")
    return None
```

## Referenser

- [1] Bensimhoun, M. (2013). Historical account and ultra-simple proofs of Descartes's rule of signs, De Gua, Fourier, and Budan's rule. *arXiv preprint arXiv:1309.6664*.
- [2] Bøgvad, R., Xantcha, Q., & Granath, H. (2018). *Algebra I* (10:e upplagan). Stockholm universitet.
- [3] Bouzidi, Y., Quadrat, A., & Rouillier, F. (2019). Certified non-conservative tests for the structural stability of discrete multidimensional systems. *Multidimensional Systems and Signal Processing*, 30, 1205-1235.
- [4] Brigham, E. F., & Ehrhardt, M. C. (2024). *Financial Management Theory and Practice* (12:e upplagan). Thomson South-Western.
- [5] Cajori, F. (1911). Historical note on the Newton-Raphson method of approximation. *The American Mathematical Monthly*, 18(2), 29-32.
- [6] Descartes, R., Smith, D. E., & Latham, M. L. (1925). *The Geometry of René Descartes*. The Open Court Publishing Company.
- [7] Dobrushkin, V. (2024). *MATHEMATICA TUTORIAL for the First Course. Part III: Bracketing Methods*. Brown University. Hämtad från <https://www.cfm.brown.edu/people/dobrush/am33/Mathematica/ch3/bracket.html>
- [8] Fouret, G. (1890). Sur la méthode d'approximation de Newton. *Nouvelles annales de mathématiques: journal des candidats aux écoles polytechnique et normale*, 9, 567-585.
- [9] Fujimura, M., Hariri, P., Mocanu, M., & Vuorinen, M. (2019). The Ptolemy–Alhazen problem and spherical mirror reflection. *Computational Methods and Function Theory*, 19, 135-155.
- [10] Gander, W., Gander, M. J., & Kwok, F. (2014). *Scientific Computing – An Introduction using Maple and MATLAB* (11:e upplagan). Springer.
- [11] Irving, R. S. (2013). *Beyond the quadratic formula* (Vol. 43). MAA.
- [12] Kataz, V. J. (2009). *A History of Mathematics: An Introduction* (3:e upplagan). Addison-Wesley.
- [13] Kornilowicz, A., & Pał, K. (2017). Vieta's Formula about the Sum of Roots of Polynomials. *Formalized Mathematics*, 25(2), 87-92.
- [14] Levin, S. A. (2002). Descartes rule of signs—how hard can it be? Hämtad från <http://sepwww.stanford.edu/oldsep/stew/descartes.pdf>.
- [15] Lomont, C. (2003). Fast inverse square root. *Technical Report*, 32.

- [16] Monks, K. M. (2023). *Three Hundred Years of Helping Others: Maria Gaetana Agnesi on the Rational Root Theorem*. Ursinus College.
- [17] Nickalls, R. W. (2009). The quartic equation: invariants and Euler's solution revealed. *The Mathematical Gazette*, 93(526), 66-75.
- [18] Persson, A., & Böiers, L. (2010). *Analys i en variabel* (3:e upplagan). Lund: Studentlitteratur.
- [19] Petersen, D., & Vorwerk, K. (2010). Polynom. KTH Matematiska Cirkel. Kompendium Final Elevversion.pdf.
- [20] Raghavan, K. N. (2016). Sturm's method for the number of real roots of a real polynomial. Hämtad 29, 2018.
- [21] Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2013). *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics* (9:e upplagan). Brooks/Cole.
- [22] Sturm, P. C. (2009). *Mémoire sur la résolution des équations numériques* (pp. 345-390). Birkhäuser Base.
- [23] Sylvester, J. J., & Baker, H. F. (1904). *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester* (1:a upplagan). Cambridge at the University Press.
- [24] Wang, X. (2004). A Simple Proof of Descartes's Rule of Signs. *The American Mathematical Monthly*, 111(6), 525–526. <https://doi.org/10.2307/4145072>.
- [25] White, F. M. (2015). *Fluid Mechanics*. McGraw-Hill Education – Europe.
- [26] Yan, C. D., & Chieng, W. H. (2006). Method for finding multiple roots of polynomials. *Computers & Mathematics with Applications*, 51(3-4), 605-620.