SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Klassiska resultat om permutationer

av

Peter Masso

2025 - No L7

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Klassiska resultat om permutationer

Peter Masso

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Per Alexandersson

2025

Abstract

This work primarily aims to describe and prove the equal distributional properties of the statistics major index and inversions for permutations—a classical result established by Percy A. MacMahon, a pivotal figure in the development of combinatorics during the late 19th and early 20th centuries. The study explores fundamental theories such as permutations, enumerative statistics on permutations, generating functions, and q-analogues. Key theorems and propositions are proved to establish equidistribution properties between the major index and inversions of permutations. Additionally, the work delves into further intriguing concepts, including Stirling numbers of the first kind, the statistic excedances, and their connections to descents.

Sammanfattning

Detta arbete avser i första hand att beskriva samt bevisa likheten utav distribtionsegenskaper för statistikerna major index och inversioner för permutationer, ett klassiskt resultat etablerat utav Percy A. MacMahon, en central person inom vidareutvecklingen av kombinatoriken mot slutet av 1800-talet och början på 1900-talet. Arbetet behandlar teorier som permutationer, räknande statistik på permutationer, genererande funktioner, q-analoger och relaterade ämnen. Det innehåller också bevis för viktiga satser och propositioner som ligger till grund för att etablera ekvidistributionsegenskaper mellan major index och inversioner för permutationer. Vidare presenteras ytterligare intressanta koncept, såsom Stirlingtal av första typen, statistiken excedances och samband mellan dessa och descents.

Innehållsförteckning

1 Introduktion

Det fundamentala problemet inom kombinatorik är att räkna objekt. I sin enklaste form, att räkna antalet element i en ändlig mängd. Ordet *räkna* har de flesta en intuitiv förståelse för, men vad räknandet betyder i olika kombinatoriska kontext kan bli abstrakt väldigt fort, beroende på problemet man studerar.

Syftet med detta arbete är att redogöra för teorin som behövs för att bevisa ett fundamentalt resultat inom kombinatoriken, nämligen att två grundläggande räknande funktioner $\mathrm{inv}(w)$ och $\mathrm{maj}(w)$, där w är en permutation och har liknande *distributionsegenskaper*. Vad en permutation är, vad funktionerna är samt vad distributionsegenskaper innebär kommer att formuleras på vägen genom kapitlen, för att sedan kulminera i beviset av påståendet i Kapitel 5.

Först kommer permutationer samt några fundamentala statistiker att introduceras, tillsammans med nödvändiga koncept för att förstå dem, såsom vad en inversion eller en descent är för något. Sedan introduceras genererande funktioner och deras tillämpning på räknande funktioner, med en motivering för vad som till synes är en ointuitiv form för en räknande funktion, men som ger oss en oerhört stark representativ förmåga att undersöka egenskaper hos räknande funktioner. Detta avslutas sedan med en beskrivning om distributionsegenskaper i kontextet av beviset samt introduktionen av den klassiska bijektionen av Foata som blir kärnan i beviset för ekvivalensen av distributionsegenskaperna.

2 Permutationer

Permutationer är bland de mest fundamentala matematiska objekten som studeras inom kombinatoriken. Vanligtvis arbetar man med mängderna $[n]$ och $\mathfrak{S}_n$, där $[n]$ är heltal från 1 till $n \in \mathbb{N}$ och $\mathfrak{S}_n$ är mängden av *alla permutationer av längd n av* $[n]$.

Kombinatorik-teoretiska matematiska objekt, mer specifikt permutationer, har existerat i många tusentals år, långt innan den moderna idéen och notationen kring dem. Redan I antika Grekland så studerade Xenocrates av Chalcedon antalet stavleser som var möjliga i det Grekiska språket[5]. I Kina fanns det studerade objekt kallade hexagram som var väldigt lika permutationer, både arabiska och indiska matematiker har studerat samt löst problem relaterade till permutationer I olika former.

I västvärlden så börjar kombinatorikens historia under 1600-talet i Frankrike med Blaise Pascal och Pierre de Fermat, som upptäckte och bevisade många klassiska kombinatoriska resultat i samband med utvecklandet av sannolikhetsteorin[2].

Området har utvecklats sedan dess via många välkända matematiker såsom Leibnitz, Euler, Boole, Poincaré och många andra giganter. Tidigt 1900-tal var en specifik tidpunkt där intresset för kombinatorik exploderade i samband med att moderna statistiska verktyg utvecklades, där kombinatoriska koncept var utav intresse[2]. Under 1900-talet så studerades kombinatorik också genom lensen av grafteori där grafer med sina kanter och hörn, kan betraktas som kombinatoriska objekt som agerar mellan mängder av element. Grafteori som är kopplat till områden såsom fysik och kemi, har visat sig vara brett applicerbart inom många vetenskaper.

I modern tid har kombinatoriken varit fundamental för att förstå konstruktionen och beteendet av många algoritmiska och informationsteoretiska problem inom programmering. Exempelvis att beräkna tids och rum komplexiteten av en bit datorkod, eller att korrigera signalfel vid elektronisk kommunikation genom att modellera övergång från input till output genom alla deras potentiella *kombinationer*. [3]

Kombinatorikens historia är lika uråldrig som den är rik och kan inte redogöras för tillräckligt i detta arbete. Vi börjar med att redogöra för vad den moderna uppfattningen är av en permutation.

2.1 Permutationer av mängder

Definition 2.1 (Permutation)**.** En *permutation* av mängden $[n] = \{1, 2, ..., n\}$ är en ordnad omarrangering av elementen i $[n]$. Formellt är en permutation $w \in \mathfrak{S}_n$ en bijektiv funktion $w : [n] \to [n]$, där $\mathfrak{S}_n$ är mängden av alla permutationer av $[n]$.[5]

Exempel 2.2. Om vi har mängden $S = \{1, 2, 3, 4\}$ så är $w = \{w(1), w(2), w(3), w(4)\} = \{2, 1, 4, 3\}$ en permutation av S. Notationen $w(i)$ innebär att permutationen w tar ett element $i \in [4]$ och skickar det till ett annat index i mängden. I detta fall så ser vi att $w(2) = 1$, det vill säga att vi förväntar oss se 2 vid index 1 efter att permutationen har applicerats på mängden. På samma sätt förväntas 3 ligga vid index 4, då $w(3) = 4$.

Enklare notation är att skriva permutationen som ett ord $w = w_1 w_2 \cdots w_n$. I detta fall blir permutationen $w = w_1 w_2 w_3 w_3 = 2143 \in \mathfrak{S}_4$, som agerar på mängden $[4] = \{1, 2, 3, 4\}$.

Sats 2.3. Antalet möjliga permutationer av en mängd med n element är $n!$.[5]

Bevis. Det finns endast en permutation av $[n]$ för $n = 1$. Antag att antalet permutationer av $[k]$ är $k!$. Vi beräknar antalet permutationer av $[k + 1]$. Börja med att enumerera alla permutationer av $[k]$. Från antagandet vet vi att antalet permutationer är $k!$. Ta nu det sista elementet $k+1$ ur $[k+1]$ och placera ut den på alla möjliga positioner för en godtycklig permutation från $[k]$. Detta kan göras på $k + 1$ antal sätt. Då det finns $k!$ antal permutationer av $[k]$ så erhålls totalt $(k + 1)k! = (k + 1)!$ permutationer av $[k + 1]$, vilket bevisar satsen via induktion. □

Exempel 2.4. Vi har mängden $[3] = \{1, 2, 3\}$. Vi kan enumerera alla permutationer av [3] och kollar huruvida antalet stämmer överrens med Sats 2.3. Vi kan använda oss av samma metod i beviset för att konstruera alla permutationer av [3] genom att börja från [2]. Permutationerna av [2] är $\{1, 2\}$ och $\{2, 1\}$, det vill säga att den första skickar elementen till sig själva medan den andra skickar elementen till varandra. Vi vill nu sätta in 3 i dessa permutationer. Med permutationen $\{1, 2\}$ får vi tre permutationer: $\{3, 1, 2\}$, $\{1, 3, 2\}$ och $\{1, 2, 3\}$. $\{2, 1\}$ ger oss ytterligare tre permutationer: $\{3, 2, 1\}$, $\{2, 3, 1\}$ och $\{2, 1, 3\}$ vilket totalt blir 6 permutationer:

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 1, 3\}, \{2, 3, 2\}\{3, 1, 2\}, \{3, 2, 1\},$$

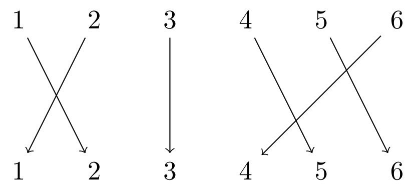
varvid antalet stämmer överrens med Sats 2.3, $3! = 6$. Antalet permutationer av en mängd $[k]$ varierar kraftigt för olika värden av k. Exempelvis så finns det $4! = 24$ permutationer om vi går från $\{1, 2, 3\}$ till $\{1, 2, 3, 4\}$.

Det finns många sätt att representera permutationer. Detta arbete kommer att begränsas till *ordrepresentationen* av en permutation, då den är vad som kommer att användas för att lägga grunden till all teori som krävs för senare delar av arbetet.

2.2 Permutationer som cykler

Om vi ser på en permutation w som en bijektion $w : [n] \to [n]$, så kan man fråga sig hur många repeterade appliceringar av w som resulterar i att ett element skickas tillbaka till sig självt. Mer formellt, om ett element $x \in [n]$ tas och vi betraktar $w^l(x)$, där $w^l(x)$ är den repeterade appliceringen av w på x, l antar gånger. För vilket värde på l får vi att $w^l(x) = x$? Vi kallar sekvensen $(x, w(x), w^2(x), ..., w^{l-1})$ en *cykel* av längd l. Vi beskriver och förtydligar cykel-notation genom ett exempel.

Exempel 2.5. Vi har en permutation $w : [6] \to [6]$ på mängden $[6] = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ där $w(1) = 2, w(2) = 1, w(3) = 3, w(4) = 5, w(5) = 6$ och $w(6) = 4$. Med $w(i) = j$, menas att permutationen w skickar $i \in [6]$ till $j \in [6]$. Vi kan visualisera w som nedan.



Vi ser att 1 skickas till 2 som sedan skickas till 1 igen. Detta är en egen cykel som skickar 1 till 1 igen efter två repeterade appliceringar. Samma sker för 4 som först går från 4 till 5, sedan från 5 till 6, och sedan slutgiltigen tillbaka till sin ursprungliga position 4. 3 skickas endast till sig själv. Om vi använder oss utav parenteser för att isolera alla dessa delcykler av w så kan vi skriva w som $w = (12)(3)(456) = (12)(456)$, där parentes efter en siffra innebär att siffran skickas till första elementet i cykeln. Vi behöver heller inte skriva ut (3) då avsaknaden av ett element i notationen för w betyder att elementet skickas till sig självt.

En fördel med denna notation är att många algebraiska egenskaper av permutationer blir tydliga, exempelvis att disjunkta cykler kommuterar:

$$w = (12)(456),\ w(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = \{2, 1, 3, 6, 4, 5\}$$
$$w = (456)(12),\ w(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}) = \{2, 1, 3, 6, 4, 5\},$$

eller att alla 2-cykler är sina egna inverser:

$$w = (12),\ w(w(1)) = w(2) = 1$$
$$w = (47),\ w(w(4)) = w(7) = 4,$$

Det vill säga att applicera en 2-cykel på sig själv en andra gång kancellerar den första appliceringen.

Som en sista punkt så nämns det att standardnotationen för en cykel är att skriva varje disjunkt cykel med sitt minsta element först. De första elementen i varje cykel skrivs i monotont ökande ordning i jämförelse med varandra. Exempelvis så blir standardnotationen för permutationen $w = (41)(2)(537)(6)$, $w = (14)(2)(375)(6)$, där $1 < 2 < 3 < 6$. Längre fram i detta arbete så kommer en modifierad version av denna notationspraxis att vara viktig, nämligen att börja varje cykel med det största elementet istället för den minsta. Modifikationen behövs för att etablera en fundamental korrespondens mellan cykler och ordrepresentationen av permutationer.

2.3 Permutationer som ord

Med permutationer som ord menas att om vi tar elementen i $[n]$ och behandlar dem som bokstäver i ett alfabet så kan vi representera en permutation som $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in \mathfrak{S}_n$[4, s.27]. Det är lätt att se att vi kan gå från cykelnotationen till ordnotationen och vice versa genom att använda oss av den modifierade standardnotationen för cykler, där varje cykel i permutationen startar med det största elementet istället för det minsta.

Från en cykel till ett ord är trivialt: eliminera alla parenteser i $w = (41)(6)(7532)$. Resultatet blir $w = 4167532$. För motsatsen så ger vi följande exempel.

Exempel 2.6. Låt $w = 4167532$ vara en permutation i ordnotation. Vi kan rekonstruera den unika permutationen i cykelnotation genom följande procedur: definiera ett *vänster-till-höger maxima* som ett element a_i sådan att $a_i > a_j$ för varje $j < i$, och lägg en vänster parentes framför varenda maxima i ordet. Detta ger oss en parentes framför bokstaven 4. Vi skippar 1 för att $4 > 1$. Sedan får vi nästa vänster parentes innan 6 då $4 < 6$. Vi får en vänsterparentes innan 7 då $6 < 7$ och där slutar processen. Vi har således hittils konstruerat

$$4167532 \to (41(6(7532.$$

Nu behöver vi bara sätta in en högerparentes innan alla vänsterparenteser utom den första samt en högerparentes i slutet av ordet

$$4167532 \to (41(6(7532 \to (41)(6)(7532 \to (41)(6)(7532),$$

och vi har nu den ursprungliga cykeln. Denna bijektiva funktion för att gå från den ena till den andra bevisar Proposition 2.7 nedan.

Sats 2.7. Låt avbildningen $\mathfrak{S}_n \xrightarrow{\wedge} \mathfrak{S}_n$ definierad ovan. Då gäller följande

a) *avbildningen är en bijektion.*

b) *Om $w \in \mathfrak{S}_n$ har k cykler, då har ordrepresentationen av w, k antal vänster-till-höger maxima.*

Bevis. Vi bevisar b) i Sats 2.7 genom att betrakta permutationerna med cykelnotation. Vi betraktar en godtycklig permutation $w \in \mathfrak{S}_n$ och benämner dess ordrepresentation med $\hat{w}$. Vi vill bevisa att varje delcykel i cykelrepresentationen av w bidrar med *exakt ett vänster-till-höger maxima* för $\hat{w}$. Vi antar att w har k cykler och är skriven i modifierad standardform där det första elementet i varje cykel är det största elementet snarare än det minsta. Vi kommer att skriva $\hat{w}$ samtidigt som vi går igenom elementen av w, i varje delcykel från vänster till höger. Om vi definierar $w = v_1 v_2 \cdots v_k$, där v_i, $1 \leq i \leq k$ är delcyklerna för w så får vi att den första delcykeln har elementen $v_1 = (w_{1,1}, ..., w_{1,l_1})$ där l_i är längden av v_i. Då $w_{1,1}$ är det största elementet i hela cykeln så vet vi att när vi börjar skriva $\hat{w}$ så får vi trivialt ett vänster till höger maxima, då det inte finns några element till vänster om $w_{1,1}$ och att när vi skriver ut elementen av v_1 så kommer alla nya efterförljande element att vara mindre än $w_{1,1}$, det vill säga att vi har endast ett enda maxima. Alltså korresponderar den första cykeln till det första maximat.

Vi ser också att varje ny cykel vi stöter på bidrar med ett nytt vänster-till-höger maximum i ordrepresentationen. Vi kan se ett exempel av detta genom att inspektera gränsen mellan de första två cyklerna när vi skriver ut dom i $\hat{w}$:

$$\hat{w} = w_{1,1} \cdots w_{1,l_1} w_{2,1} \cdots w_{k,l_k}.$$

Gränsen ligger mellan w_{1,l_1} och $w_{2,1}$ i uttrycket ovan. Den modifierade standardnotationen garanterar två saker:

- Det största elementet i varje cykel är det första elementet. Alltså är de resterande elementen i en cykel mindre än detta element.

- De första elementen i varje konsekutivt följande cykel är en monotont ökande sekvens av tal, det vill säga att $w_{1,1} < w_{2,1} < w_{3,1} < \cdots < w_{k,1}$.

Alltså ligger nästa vänster-till-höger maxima mellan w_{1,l_1} och $w_{2,1}$ då $w_{2,1} > w_{1,1}$, och inget annat element i första cykeln är större än $w_{1,1}$.

Det återstår nu att visa att varje cykel bidrar med endast ett maxima, vilket hade resulterat i exakt k maximan i $\hat{w}$. Ta ett godtyckligt $v_i = (w_{i,1}w_{i,2} \cdots w_{i,l_i})$ och antag att utöver $w_{i,1}$'s bidrag till $\hat{w}$ som ett maxima att det också fanns ett till element $w_{i,j}, 1 < j \leq l_i$ som bidrog med ytterligare ett maxima i $\hat{w}$. Detta hade ej varit möjligt då $w_{i,1} > w_{i,j}$ då v_i är skrivet i standard form, eftersom $w_{i,1}$ är det enda elementet i w som bidrar med ett maxima i $\hat{w}$. □

Varför vi besvärar oss med att kolla på permutationer på detta sätt istället för att se på dem som cykler kommer att bli tydligare när vi introducerar Foatas bijektion i Kapitel 5 och börjar manipulera bokstäverna i orden utifrån bijektionen som definieras där.

2.4 Räknande funktioner

Vanligtvis så arbetar man med en *räknande funktion* $f(i)$ som räknar storleken av en mängd S_i, som är en ändlig mängd i en samling av mängder $S_i, i \in \mathbb{I}$, där $\mathbb{I}$ är en *indexmängd*, såsom $\mathbb{N}$.[4, s.9] Med en mängd S_i bland andra mängder så menas det att vi ofta är intresserade av att hitta en formel $f(i)$ som räknar antalet objekt för alla $S_i,\ i \in \mathbb{I}$.

Ett enkelt exempel av detta är att räkna antalet delmängder som finns i mängden $\{1, 2, ..., n\}$. Vi kan intuitivt gissa vad formeln bör vara genom att kolla på ett enklare exempel.

Vi undersöker $\{1, 2, 3\}$. Vi tar första elementet och kollar hur många delmängder vi kan bilda. Den tomma mängden $\emptyset$ och 1 bildar de första delmängderna. Nu betraktar vi elementet 2. Det enda som kan hända är att vi lägger in 2 i alla tidigare delmängder eller bevarar alla våra delmängder vi redan har erhållit och håller 2 ensamt som $\{2\}$. Vi får då utan att lägga in 2, mängderna $\emptyset$ och $\{1\}$. Med att lägga in 2 i alla tidigare existerande delmängder: $\{2\}$ och $\{1, 2\}$. Med samma procedur för 3 erhålls ytterligare 4 delmängder. Det är intuitivt att anta nu att antalet delmängder kanske fördubblas varje gång den ursprungliga mängden ökar i längd med ett element.

Sats 2.8. Antalet delmängder av mängden $[n] = \{1, 2, ..., n\}$ ges av den räknande funktionen

$$f(n) = 2^n.$$

Bevis. Vi ser att $f(0) = 1$ och antar att $f(k) = 2^k$ för något $1 \leq k < n$. Vi betraktar nu $f(k+1)$, om vi tar alla de tidigare delmängderna 2^k så har vi kvar 2^k av dem som de är om vi inte lägger in $k+1$ någonstans. Om vi annars lägger in $k+1$ i dem så får vi ytterligare 2^k nya delmänder. Detta ger oss totalt $2^k + 2^k = 2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ delmängder, vilket bevisar Sats 2.8 via induktion.

□

I detta fall hade vi turen att kunna hitta en explicit, kort och effektiv formel för problemet. Men det är väldigt sällan kombinatoriska problem är lika välbetedda. Ett exempel på detta är att räkna antalet $n \times n$ matriser $\mathbb{M}$ med värden 0 eller 1 för alla dess element på så sätt att varje rad och kolumn av M har 3 ettor. Den mest explicita kända formeln utav detta problem är[4, s.10]

$$f(n) = 6^{-n} n!^2 \sum_{\alpha+\beta+\gamma=n} \frac{(-1)^\beta (\beta + 3\gamma)! 2^\alpha 3^\beta}{\alpha! \beta! \gamma!^2 6^\gamma}. \tag{1}$$

Formeln låter oss beräkna $f(n)$ mycket snabbare än om vi hade försökt hitta alla kombinationer själva. Formeln är svårtolkad kombinatoriskt och vid en brist på en tydligare formel så måste vi acceptera att 1 är en lösning till problemet, tills att vi hittar formel som är bättre beräkningsmässigt och lättare att tolka.

3 Inversioner & Major index av en permutation

I detta kapitel så redogörs för två centrala räknande funktioner för permutationer, nämligen $\mathrm{inv}(w)$ och $\mathrm{maj}(w)$. Inversioner och $\mathrm{inv}(w)$ definieras i samband med konceptet av en permutations inversionstabell och avslutas med ett bevis för Sats 3.4, det vill säga att varje permutation har en unik inversionstabell. Beviset kommer att vara ett viktigt resultat i processen att bevisa Sats 4.3 under sektionen för genererande funktioner, vilket utgör en central utgångspunkt för beviset om ekvivalensen av distributionsegenskaperna av $\mathrm{inv}(w)$ och $\mathrm{maj}(w)$.

Sedan definierar vi major index eller $\mathrm{maj}(w)$, uppkallat efter Major Percy Alexander MacMahon [1], genom att först beskriva begreppen descent och descent set, som likt inversioner hör till ordningsegenskaperna för bokstäverna i en permutation w.

3.1 Inversioner

Definition 3.1 (Inversion)**.** Ett par (w_i, w_j) kallas för en *inversion* av permutationen $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ om $i < j$ och $w_i > w_j$. [4, s.36]

En viktig statistik inom kombinatoriken är $\mathrm{inv}(w)$, vilket räknar antalet inversioner i w. Intuitivt så är $\mathrm{inv}(w)$ av en permutation ett mått på graden av "oordning" av w och vi ger följande exempel som demonstrerar hur man hittar inversioner samt beräknar $\mathrm{inv}(w)$.

Exempel 3.2. Låt $w = 3571624$ vara en permutation på $\{1,2,3,4,5,6,7\}$. Vi vill hitta $\mathrm{inv}(w)$, antalet inversioner i w. Vi ser att om vi börjar från 3 så är 3 större än 1 och 2. Dvs. vi har inversionerna $\underline{3}57\underline{1}624, \underline{3}5716\underline{2}4$. Efter 3 så kollar vi på 5 och får att 5 är större än 1, 2 och 4, dvs. 5 bidrar med 3 inversioner. Gör vi detta för alla bokstäver i w så får vi inversionerna

$$
\begin{aligned}
&3 : \underline{3}57\underline{1}624, \underline{3}5716\underline{2}4 \\
&5 : 3\underline{5}7\underline{1}624, 3\underline{5}716\underline{2}4, 3\underline{5}7162\underline{4} \\
&7 : 35\underline{71}624, 35\underline{7}1\underline{6}24, 35\underline{7}16\underline{2}4, 35\underline{7}162\underline{4} \\
&1 : \\
&6 : 3571\underline{62}4, 3571\underline{6}2\underline{4} \\
&2 : \\
&4 :
\end{aligned}
$$

Detta ger oss att $\mathrm{inv}(3571624) = 2 + 3 + 4 + 0 + 2 + 0 + 0 = 11$.

Det finns ett annat sätt att representera permutationer, som är kopplat till inversionerna av en permutation. Antag att vi skall konstruera en permutation $w \in \mathfrak{S}_n$ och vi börjar från en sekvens av tal $(a_1, a_2, ..., a_n)$. Vi vill bygga upp w som ett ord genom att börja från n och lägga in varje tal i en sekvens så att vid varje inläggning av $n - i$ så har det insatta elementet a_{n-i} antal bokstäver till vänster om sig samt att $0 \leq a_i \leq n-i$. För att göra algoritmen tydligare betraktar vi ett exempel.

Exempel 3.3. Låt $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (4, 0, 2, 1, 0)$ och $w \in \mathfrak{S}_5$ är en permutation vi skall konstruera från vektorn. Vi börjar med att sätta in 5 på ett sådant sätt att den har $a_5 = 0$ antal bokstäver till vänster om sig. Då vi inte har lagt in något så händer inget särskilt, så sekvensen börjar med 5. Nu vill vi sätta in bokstaven 4 i ordet på så sätt att det finns $a_{5-1} = a_4 = 1$ antal bokstäver till vänster om 4. Då 5 finns sedan innan, och 4 ska ha en bokstav till vänster så får vi ordet 54 i nästa steg av algoritmen. På samma sätt lägger vi in 3 så att den har $a_3 = 2$ tal till vänster om sig så att vi får 543. Gör vi detta för de sista två stegen i algoritmen får vi följande sekvens av ord:

$$\begin{aligned}&5\\&54\\&543\\&2543\\&25431.\end{aligned}$$

Detta ger oss permutationen $w = 25431$ och sekvensen ovan, benämnd $I(w) = (a_1, a_2, ..., a_n)$ kallas för permutationens *inversionstabell*.

Vi vill visa att två påståenden, först att denna inversionstabell är unik för varje permutation som genereras samt att summan av elementen i intersionstabellen är lika med antalet inversioner för den resulterande permutationen. Detta innebär att vi måste visa att $I(w)$ är en bijektion.

Sats 3.4. Funktionen $I : \mathfrak{S}_n \to \mathcal{T}_n$ som skickar varje permutation till sin korresponderande inversionstabell där

$$\mathcal{T}_n = \{(a_1, ..., a_n) \ : \ 0 \leq a_i \leq n - i\} = [0, n-1] \ \times \ [0, n-2] \ \times \ \cdots \ \times [0, 0],$$

är en bijektion.

Bevis. Om vi definierar kardinaliteten av en mängd S som $\#S$, så vet vi att $\#\mathfrak{S}_n = n!$, och ser att samma gäller för $\mathcal{T}_n$. Om vi kan visa att I är surjektiv så följer det att I måste vara bijektiv då $\#\mathfrak{S}_n = \#\mathcal{T}_n$. Vi vill alltså visa att för alla permutationer $w \in \mathfrak{S}_n$ så finns det ett $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathcal{T}_n$, sådan att $I(w) = a$.

Vi börjar med att lägga in n och får ett ord med längd 1. Vi lägger nu in bokstäverna $n-1, n-2, ..., n-i+1$ i specifikt denna ordning, och får då ett ord av längd $n-i$. I steg i lägger vi nu in $n-1$ så att det finns exakt a_{n-i} element till vänster om $n-i$. Detta innebär att i detta steg så finns det a_{n-i} element till vänster om $n-i$ som är större än $n-i$ och när vi sedan fortsätter att lägga in resten av bokstäverna, ner till 1 så erhåller vi en permutation där det fortfarande finns a_{n-i} element till vänster om $n-1$ som är större än $n-1$ då vi endast har lagt till mindre tal. I är således surjektiv för vi har konstruerat en inversiontabell för en godtycklig permutation w och injektivitet följer av surjektivitet och $\#\mathfrak{S}_n = \#\mathcal{T}_n$. Vi noterar också att $\text{inv}(w) = \sum_{I(w)} a_i$ då varje enskilt $n-i$ vid insättning kommer ha a_{n-i+1} inversioner i insättningssteget och under resterande steg därefter, då inga bokstäver större än $n-i$ kan läggas in vid stegen som följer. $\square$

3.2 Major index

Likt $\text{inv}(w)$ så fångar major index av en permutation en viktig bit av information gällande ordningen av bokstäverna $w_1, ..., w_n$ i en permutation $w \in \mathfrak{S}_n$. Men innan vi definierar vad major index är så börjar vi med följande definition

Definition 3.5 (Descent)**.** Låt $w = w_1 w_2 \cdots w_n \in \mathfrak{S}_n$ och $1 \leq i \leq n-1$. Vi benämner en position i som en *descent* av w om $w_i > w_{i+1}$.

Exempel 3.6. Låt $w = 123546798$ vara en permutation. Definitionen för en descent blir rent praktiskt att först hitta positionen av alla platser i w där ett tal följs av ett mindre tal, i detta fall så är $5 > 4$ och $9 > 8$. Det finns alltså totalt 2 descents i w.

Att samla alla indexeringar där en descent sker i w leder oss till nästa viktiga definition som krävs för att definiera major index

Definition 3.7 (Descent mängd)**.** Låt $w \in \mathfrak{S}_n$ vara en permutation på mängden $\{1, 2, ..., n\}$. Mängden

$$D(w) = \{i \ : \ w_i > w_{i+1}\} \subseteq [n-1],$$

kallas för *descent mängden* av w.

Exempel 3.8. Låt $w = 123546798$ vara permutationen från Exempel 3.6. Vi hade att $w_4 = 5, w_5 = 4$ samt att $w_8 = 9, w_9 = 8$. $D(w) = \{i \ : \ w_i > w_{i+1}\} = \{4, 8\}$, där vi lägger märke till att vi lägger in index för första positionen av descenten, och inte själva bokstavens värde.

Definition 3.9 (Major index)**.** För en permutation $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ med descent mängd $D(w)$ definierar vi statistiken *major index*, benämnd $\text{maj}(w)$, som summan av elementen i $D(w)$[1]

$$\text{maj}(w) = \sum_{i \in D(w)} i.$$

Konceptuellt så innehåller major index information om hur många nedgångar(descent) som finns i en permutation w genom att summera positionerna vid varje nedgång. Det explicita antalet nedgångar $\#D(w)$ benämns ofta som $\text{des}(w)$.

Exempel 3.10. Fortsatt på Exempel 3.8 från innan där vi hade att $w = 123546798$, så får vi att

$$\text{maj}(123546798) = \sum_{i \in D(123546798)} i = \sum_{i \in \{4,8\}} i = 4 + 8 = 12.$$

Vi påminner oss själva att syftet med arbetet är att bevisa att $\text{maj}(w)$ och $\text{inv}(w)$ har samma *distributionsegenskaper*. Med samma distributionsegenskaper menas det att det finns en exakt korrespondens mellan en samling object sett via en räknande funktion och en samling objekt, från samma mängd som innan, sett via en annan räknande funktion. För $\text{maj}(w)$ och $\text{inv}(w)$ betyder detta att

$$\#\{w \in \mathfrak{S}_n : \text{inv}(w) = k\} = \#\{w \in \mathfrak{S}_n : \text{maj}(w) = k\},$$

alltså att det finns lika många permutationer med k antal inversioner, i mängden av alla permutationer $w \in \mathfrak{S}_n$, som det finns permutationer i $\mathfrak{S}_n$ med egenskapen att $\text{maj}(w) = k$. Detta stämmer för alla värden av k så att om vi låtsas att det finns exakt 100 permutationer där $\text{inv}(w) = 4$ så finns det också exakt 100 permutationer där $\text{maj}(w) = 4$.

Som exempel kan vi undersöka alla permutationer av [4] och notera de permutationer där antingen $\text{inv}(w) = 4$ eller $\text{maj}(w) = 4$. Som referens visar vi också permutationerna och statistikerna efter vi tillämpar bijektionen i Kapitel 5. Vi benämner bijektionen med φ och får följande 8 permutationer:

w	$\text{inv}(w)$	$\text{maj}(w)$	$\varphi(w)$	$\text{inv}(\varphi(w))$	$\text{maj}(\varphi(w))$
2143	2	4	4213	4	3
2431	4	5	4231	5	4
3142	3	4	3412	4	2
3241	4	4	3241	4	4
3412	4	2	1342	2	3
4132	4	4	4132	4	4
4213	4	3	2413	3	2
4231	5	4	2431	4	5

Tabell 1: Permutationer $w \in \mathfrak{S}_4$, där $\text{maj}(w)$=4 eller $\text{inv}(w)$=4, med korresponderande permutation $\varphi(w)$ efter tillämpad bijektion.

Från Tabell 1 ser vi att permutationerna där $\text{inv}(w) = 4$ är 2431, 3241, 3412, 4132 samt 4213. Permutationerna där $\text{maj}(w) = 4$ är 2143, 3142, 3241, 4132 och 4231. Då det finns ett lika stort antal permutationer av [4] som har 4 inversioner eller major index lika med 4, så har $\text{inv}(w)$ och $\text{maj}(w)$, $w \in \mathfrak{S}_4$, samma distributionsegenskaper för permutationer av [4].

Vi ser också att kolumnerna för $\text{maj}(w)$ och $\text{inv}(\varphi(w))$ har samma värden, vilket innebär att bijektionen i Kapitel 5 skickar en permutation w med major index k till en permutation med k inversioner. Värt att nämna är att $\varphi(w)$ inte är en involution, vilket innebär att den inte är sin egen invers.

4 Genererande funktioner och q-analoger

Den mest användbara men också svåraste metoden att förstå för att evaluera $f(i)$ är att ge dess *genererande funktion*. Det finns två ofta förekommande genererande funktioner, den vanliga genererande funktionen och den exponentiella genererande funktionen. Då den vanliga varianten ligger i fokus för detta arbete så kommer den exponentiella formen inte att beskrivas.

Definition 4.1 (Genererande funktioner)**.** Den vanliga genererande funktionen för en räknande funktion $f(i), i \in I$ över index mängden $I = \mathbb{N}$, ges av den *formella* potensfunktionen

$$\sum_{n \geq 0} f(n)x^n.$$

Serien kallas formell då x inte betraktas som en variabel utan endast som en markering för vart $f(n)$ skrivs ut i serien. Anledningen för att betrakta kombinatoriskt intressanta objekt som genererande funktioner är för att välkända algebraiska operationer kan definieras för dem. Addition kan definieras som

$$\sum_{n \geq 0} a_n x^n + \sum_{n \geq 0} b_n x^n = \sum_{n \geq 0} a_n x^n + b_n x^n = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) x^n.$$

Multiplikation kan också definieras som

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n x^n\right)\left(\sum_{n \geq 0} b_n x^n\right) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots) =$$

$$(a_0 b_0 + a_0 b_1 x + a_1 b_0 x + a_0 b_2 x^2 + a_1 b_1 x^2 + b_1 a_1 x^2 + b_0 a_2 x^2 + \cdots) =$$

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + 2 a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + \cdots =$$

$$x^0 \sum_{n=0}^{0} a_n b_{0-n} + x^1 \sum_{n=0}^{1} a_n b_{1-n} + x^2 \sum_{n=0}^{2} a_n b_{2-n} + \cdots$$

$$\sum_{n \geq 0} x^n \sum_{i \in [0,n]} a_i b_{n-i} = \sum_{n \geq 0} c_n x^n,$$

där vi har definierat $c_n = \sum_{i \in [0,n]} a_i b_{n-i}$.

Då koefficienterna är intressanta ur ett kombinatoriskt perspektiv så får användaren ett starkt verktyg att undersöka deras egenskaper algebraiskt.

Exempel 4.2. Vi har den konstanta sekvensen av tal $\{1, 1, 1, 1, ...\}$, genererad av f_1, och en sekvens med de positiva heltalen utom 0, $\{1, 2, 3, 4, ...\}$, genererad av f_2. Vi vill göra följande

a) Hitta de genererande funktionerna för sekvenserna.

b) Summera de genererande funktionerna.

c) Multiplicera de genererande funktionerna.

Vi får att den genererande funktionen för den första sekvensen är en enkel geometrisk serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_1(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Den andra genererande funktionen blir:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} f_2(n)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$$

$$S - xS = (1 + 2x + 3x^2 + \cdots) - (x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots)$$

$$S(1-x) = 1 + (2x - x) + (3x^2 - 2x^2) + (4x^3 - 3x^3) + \cdots$$

$$S(1-x) = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$
$$S = \frac{1}{(1-x)^2},$$

där det enkelt kan visas att omarangeringen av termerna är tillåten utan att ändra summans värde då $S - xS$ är en absolut konvergent serie.

Om vi adderar de genererande funktionerna så får vi

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^n,$$

vilket visar att vi får den elementvisa summan av serierna $\{1+1, 1+2, 1+3, ...\} = \{2, 3, 4, ...\}$ när vi adderar genererande funktioner.

Multiplikation ger oss

$$\frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n,$$

$$c_n=\sum_{i\in[0,n]}1\cdot(n+1-i)=\sum_{i=0}^{n}n+1-i=(n+1)+n+\cdots+2+1$$

$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}=\frac{(n+2)!}{2n!}=\frac{(n+2)!}{2!(n+2-2)!}=\binom{n+2}{2},$$

vilket ger oss att

$$\sum_{n=0}^{\infty}f_1(n)x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}f_2(n)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+2}{2}x^n. \tag{2}$$

Detta har en kombinatorisk signifikans då vi påminner oss själva om att koefficienten i sista summan i Ekvation 2 ovan är mängden sätt att välja 2 element bland $n+2$ element.

De genererande funktionerna, pågrund av deras egenskaper att berika räknande funktioner med visa vanliga algebraiska operationer är centrala i många applikationer av kombinatorik men också för många klassiska kombinatoriska resultat. Satsen nedan kommer att spela en central roll i beviset för distributionsegenskaperna hos $\mathrm{maj}(w)$ och $\mathrm{inv}(w)$ samt är ett bra exempel på styrkan i att bevisa satser för räknande funktioner genom att uttrycka dem i deras genererande funktionsform.

Sats 4.3. Låt $\mathrm{inv}(w)$ vara mängden inversioner för permutationen $w\in\mathfrak{S}_n$. Då gäller

$$\sum_{w\in\mathfrak{S}_n}q^{\mathrm{inv}(w)}=(1)(1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+q^2+\cdots q^{n-1}).$$

Bevis. Om $I(w) = (a_1, ..., a_n)$ så vet vi att $\text{inv}(w) = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. Vi får alltså

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} q^{\text{inv}(w)} = \sum_{a_1=0}^{n-1} \sum_{a_2=0}^{n-2} \cdots \sum_{a_n=0}^{0} q^{a_1+a_2+\cdots+a_n} =$$

$$\sum_{a_1=0}^{n-1} \sum_{a_2=0}^{n-2} \cdots \sum_{a_n=0}^{0} q^{a_1} q^{a_2} \cdots q^{a_n} = \left(\sum_{a_1=0}^{n-1} q^{a_1} \right) \left(\sum_{a_2=0}^{n-2} q^{a_2} \right) \cdots \left(\sum_{a_{n-1}=0}^{1} q^{a_{n-1}} \right) \cdot (1) =$$

$$(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1})(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2}) \cdots (1 + q)(1) =$$

$$(1 + q)(1 + q + q^2) \cdots (1 + q + q^2 + \cdots q^{n-1}).$$

$\square$

Vi kan se att om vi i polynomet i Sats 4.3 sätter $q = 1$ så får vi $2 \cdot 3 \cdots n = n!$, vilket är varför polynomet benämns som *q-analogen av n!* och benämns **(n)!**. Om vi också benämner varje individuell komponent i polynomet som **(j)**, vid parentes $j - 1$ så får vi att $\mathbf{(n)!} = \mathbf{(1)(2)} \cdots \mathbf{(n)}$, där **(n)** kallas för *q-analogen av n*.

5 Bevis för ekvivalenta distributioner av major index och Inversioner

Vi har nu alla verktyg som behövs för att bevisa påståendet som vi reitererar här.

Sats 5.1. Betrakta alla permutationer $w \in \mathfrak{S}_n$. Följande ekvivalens gäller mellan distributionerna för $\mathrm{inv}(w)$ och $\mathrm{maj}(w)$

$$\#\{w \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{inv}(w) = k\} = \#\{w \in \mathfrak{S}_n : \mathrm{maj}(w) = k\}.$$

Bevis. Notera att Sats 5.1 uttryckt som genererande funktioner är

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} q^{\mathrm{inv}(w)} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} q^{\mathrm{maj}(w)}. \tag{3}$$

Då vi vet från Sats 4.3 att vänsterledet i 3 är lika med $\mathbf{(n)!}$ så återstår det att visa att

$$\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} q^{\mathrm{maj}(w)} = \mathbf{(n)!}. \tag{4}$$

För att bevisa 4 så vill vi hitta en 1-till-1 korrespondens mellan permutationer som har major index k och permutationer som har k antal inversioner. Målet är alltså att hitta en bijektion $\varphi : \mathfrak{S}_n \to \mathfrak{S}_n$ så att $\mathrm{maj}(w) = \mathrm{inv}(\varphi(w))$ där $w, \varphi(w) \in \mathfrak{S}_n$.

Vi kommer att definiera *Foatas bijektion*[4, s.42] rekursivt via orden $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n$, där γ_k agerar på $\{w_1, ..., w_k\}$. Hur γ_k definieras kan enklast ses i ett exempel, som vi sedan kan använda för att beskriva bijektionen mer generellt. Vi tar $w = 6315724$ som exempel:

6
6 | 3
6 | 3 | 1
63 | 1 | 5
3 | 6 | 1 | 5 | 7
3 | 6 | 15 | 7 | 2
3 | 651 | 72 | 4
3165274.

I första raden så börjar vi med att plocka ut första elementet ur w, $w_1 = 6$. Då vi nyss har börjat och endast har ett element så kan vi inte göra något, så $\gamma_1 = w_1$. På rad 2 så kollar vi på $w_2 = 3$ och jämför om 6 är större än eller mindre än 3. Då $6 > 3$ så läser vi raden från vänster till höger och lägger en deliniering *efter* varje element i raden som uppfyller samma kriterie, i detta fall att det är större än 3. Då 6 är det enda talet och 6 är större än 3 så får vi 1 deliniering som delar upp raden i två komponenter, där den första innehåller bokstaven 6 och den andra 3. Vi betraktar sedan orden i varje komponent som cykler och roterar dem var för sig ett steg till höger. Då orden i båda komponenterna i detta fall endast har längd 1 så ändrar detta ingenting. Efter rotationerna så tar vi bort delinieringen och sätter $\gamma_2 = 63$. I nästa rad utför vi samma procedur som i föregående rad och jämför 3 med $w_3 = 1$. Då $3 > 1$ så vill vi delienera komponenterna efter varje tal som är större än 1. I detta fall är alla tal större än 1 så vi får komponenter där inget speciellt händer och avslutar raden med att sätta $\gamma_3 = 631$. På rad fyra plockar vi nu ut $w_4 = 5$ och jämför den sista bokstaven i γ_3 med 5. Då $1 < 5$ så vill vi nu skapa komponenterna efter varje tal som är *mindre* än 5. Det första talet, 6, är inte mindre än 5 så vi skippar att skapa en deliniering och fortsätter till 3. Här stämmer kriteriet då $3 < 6$ så det skapas en komponent med ordet 63. Efteråt får vi att $1 < 5$ så vi skapar en ny deliniering efter 1. Detta ger oss tre komponenter där den första är den enda som är längre än 1. Vi cykliskt roterar denna ett steg åt höger och erhåller 36 medan de andra komponenterna förblir som de är. Vi får nu att $\gamma_4 = 3615$.

På detta sätt fortsätter algoritmen tills det inte finns några element kvar ur w att läsa av. Rad 7 är den sista raden och efter den cykliska rotationen så får vi den sista permutationen $\gamma_7 = 3165274 = \varphi(w)$, vilket är resultatet av bijektionen.

En generell beskrivning av algoritmen är således: Antag att γ_k har definierats för något $1 \leq k < n$, det vill säga vi är på rad $k+1$ i algoritmen. Om den sista bokstaven av γ_k, som är w_k, är större än w_{k+1} så klyver vi γ_k i komponenter vid positionen efter varje bokstav där de är större än w_{k+1}. När $w_k < w_{k+1}$ så klyver vi γ_k på positionen efter alla bokstäver som är mindre än w_{k+1}. För varenda komponent som bildas i denna process så roterar vi bokstäverna cykliskt inom komponenterna åt höger så att den sista bokstaven hamnar i början av komponenten och resterande hoppar från sin position i till $i + 1$. Vi sätter $\varphi(w) = \gamma_n$.

Funktionen må se inveklad ut men den är intuitiv. I definitionen för major index så ser vi att $\mathrm{maj}(w)$ ökar med i för alla $i \in D(w)$. Detta innebär att varenda tillskott till $\mathrm{maj}(w)$ måste under bijektionen lägga till samma antal inversioner till den resulterande permutationen. Exempelvis på rad 4 ser vi att major index av $w_1w_2w_3w_4 = 6315$ är 3. Efter den cykliska rotationen så får vi istället att $\mathrm{inv}(\gamma_4) = 3$.

Argumentationen ovan kan generaliseras till ord av godtycklig längd genom ett induktionsargument. Låt $\eta_k = w_1 \cdots w_k$ och visa att $\mathrm{inv}(\gamma_k) = \mathrm{maj}(\eta_k)$ via induktion på k.

Vi ser direkt att $\mathrm{inv}(\gamma_1) = \mathrm{maj}(\eta_1) = 0$. Vi antar att $\mathrm{inv}(\gamma_k) = \mathrm{maj}(\eta_k)$ för något $k < n$. Vi får två fall, $w_k < w_{k+1}$ och $w_k > w_{k+1}$. För första fallet, antag att vi får m antal komponenter. Sista bokstaven i varje komponent kommer att vara det minsta vilket innebär att varje komponent innehåller $\#C - 1$ antal inversioner innan den cyckliska rotationen, där $\#C$ är längden av komponenten. Efter rotation så elimineras de $\#C - 1$ inversionerna från varje komponent. Eftersom att varje bokstav i varje komponent förutom den första är större än w_{k+1} så får vi tillbaka $\#C - 1$ antal inversioner per komponent, vilket ger en skillnad på 0 inversioner för γ_{k+1}. Dvs $\mathrm{inv}(\gamma_{k+1}) = \mathrm{maj}(\eta_{k+1})$.

För det motsatta fallet, $w_k > w_{k+1}$, så får vi istället att den sista bokstaven inom varje komponent är störst inom komponenten. Detta innebär att när vi roterar dem ett steg så blir första talet i varje komponent nu det största värdet och således introducerar $m(\#C - 1)$ antal inversioner för γ_{k+1}. Vi erhåller också m antal nya inversioner eftersom att w_{k+1} är mindre än det första talet från varje komponent och vi har m komponenter. Vilket innebär att

$$\mathrm{inv}(\gamma_{k+1}) = \mathrm{inv}(\gamma_k) + \sum_C (\#C - 1) + m = \mathrm{inv}(\gamma_k) + k.$$

Eftersom $k \in D(\eta_{k+1})$, så får vi $\operatorname{maj}(\eta_{k+1}) = \operatorname{maj}(\eta_k) + k = \operatorname{inv}(\gamma_k) + k = \operatorname{inv}(\gamma_{k+1})$.

Vi vet alltså att vi nu alltid kan hitta par av permutationer $w_1, w_2 \in \mathfrak{S}_n$, där $\operatorname{inv}(w_1) = k = \operatorname{maj}(w_2)$. Nu återstår det att visa att φ är bijektiv, det vill säga att det finns lika många.

Vi bevisar detta genom att konstruera inversen av φ. Låt $v = v_1 v_2 ... v_n \in \mathfrak{S}_n$. Vi vill hitta en unik $w = w_1 w_2 ... w_n$ sådan att $\varphi^{-1}(v) = w$, det vill säga att v är slutprodukten av att applicera den ursprungliga bijektionen på w. Vi vet då att den sista bokstaven vi tillade på v, v_n måste vara lika med w_n. Vi definierar då om v till $v = \delta_{n-1} w_n$, där $\delta_{n-1} = v_1 v_2 ... v_{n-1}$. Antag nu att vi har fått $\delta_k, w_{k+1}, w_{k+2}, ..., w_n$ för något k, $1 \leq k < n$. Vi kan nu gå igenom proceduren fast i omvänd ordning. Om sista elementet i δ_k är större än w_{k+1} så delar vi ordet *innan* varje element där $v_k > w_{k+1}$. Sedan så roteras elementen i varje komponent åt *vänster*, istället för höger som vi gjorde när vi applicerade φ. Om sista elementet i δ_k är mindre så görs samma sak. Vi tar den sista bokstaven och låter den vara w_k i vårt nya ord och tar bort den från δ_k så att vi erhåller δ_{k-1}. Då φ är surjektiv och φ^{-1} är surjektiv och vi undersöker permutationer av *ändliga* mängder så vet vi att φ måste vara bijektiv, vilket avslutar beviset. $\square$

6 Stirlingtal, Eulerska tal och Excedances

Det finns en annan intressant statistik som kallas för *excedances*. Man kan visa att den har samma distributionsegenskaper som $\mathrm{des}(w)$. För detta bevis måste vi först definiera vad excedances är samt konceptet av ett Eulerskt tal som kommer vara centralt i att bevisa distributionsegenskaperna.

Vi introducerar också andra relevanta koncept inom kombinatoriken såsom Stirlingtal av första typen.

För detta kapitel så kommer vi ta för givet att två uttryck med samma rekursiva relation har *samma distributionsegenskaper*.

6.1 Stirlingtal av första typen

Definition 6.1 (Stirlingtal av första typen)**.** Permutationerna $w \in \mathfrak{S}_n$ betraktade som cykler är uppbyggda av olika antal delcykler. Talet $c(n,k)$ representerar antalet permutationer av $[n]$ som har k cykler och kallas för ett *teckenlöst Stirlingtal av första typen*, där $(-1)^{n-k}c(n,k)$ kallas för ett *Stirlingtal av första typen*[4].

Exempel 6.2. Vi beräknar $c(3,2)$, vilket är stirling talet av första typen för permutationer med 2 cykler och 3 element. Vi radar upp alla permutationer av längd 3 i cykelnotation, samt hur många cykler de har:

$$\begin{aligned}
&(1\,2\,3),\ 1\\
&(1\,3\,2),\ 1\\
&(1\,2)(3),\ 2\\
&(1\,3)(2),\ 2\\
&(2\,3)(1),\ 2\\
&(1)(2)(3),\ 3.
\end{aligned}$$

Vi ser att det finns totalt 3 permutationer som har längd 3 och 2 cykler och $c(3,2)$ blir således 3. Vi kan också se att $c(3,1) = 2$ och att $c(3,3) = 1$.

Man kan också visa att Stirlingtal räknar antal vänster-till-höger maxima. Vi kan göra detta genom att visa att Stirlingtal och antalet permutationer med k antal vänster-till-höger maximan uppfyller samma rekursion.

Vi benämner $s(n,k)$ som antalet permutationer på $[n]$ med k maxima. Vi kan skapa en permutation på $[n+1]$ med k maxima från en permutation på $[n]$ genom att först tillämpa avbildningen $w_i \mapsto w_i + 1$, och sedan undersöka vart vi kan lägga in elementet 1. Vi får ett tillskott av $s(n,k-1)$ genom att välja en permutation på $[n]$ med $k-1$ maximan och lägga in 1 i början av permutationerna, då detta lägger till ett maxima. Vi kan sedan undersöka hur vi kan lägga in 1 i permutationer av $[n]$

som redan har k maximan, utan att ändra antalet. Detta kan göras genom att sätta in 1 på alla andra positioner utom i början, vilket är n positioner. Alltså får vi ett tillskott av $ns(n,k)$. Detta ger oss rekursionen:

$$s(n+1,k) = s(n,k-1) + ns(n,k),$$

vilket är samma rekursion som för Stirlingtal[4, s.32] vilket avslutar beviset.

6.2 Excedances

Definition 6.3 (Excedances)**.** Låt $w = w_1w_2...w_n \in \mathfrak{S}_n$ vara en permutation på mängden $\{1,2,...,n\}$. Om $w_i > i$ så kallar vi w_i en *excedance* för w. Statistiken $\text{exc}(w)$ räknar antalet excedances i w. Om $w_i \geq i$ så kallar vi w_i för en *svag excedance.*

Exempel 6.4. Vi betraktar permutationen $w = 43125$. Vi ser att bokstaven 4 ligger på index 1. Då $w_1 = 4 > 1$ så har vi att 4 är en excedance. Vi ser på nästa bokstav att $3 > 2$ och får således att 3 också är en excedance. Inga utav de nästkommande bokstäverna i permutationen är excedances då $1 < 3$, $2 < 4$ och $5 = 5$. Alltså får vi att $\text{exc}(43125) = 1+1+0+0+0 = 2$.

6.3 Eulerska tal och polynom

Ett viktigt begrepp inom kombinatoriken går att beskriva genom att betrakta följande uttryck

$$A_d(x) = \sum_{w\in\mathfrak{S}_d} x^{1+des(w)} = \sum_{k=1}^{d} A(d,k)x^k,$$

där vi kallar $A_d(x)$ för ett *Eulerskt polynom* och $A(d,k)$ för ett *Eulerskt tal*[4]. Vi kan se att från den andra summan i uttrycket att $A(d,k)$ är koefficienten framför x^k, dvs summan av alla uttryck i summan med exponent k, vilket i detta fall blir alla permutationer där $\text{des}(w) = k-1$.

6.4 Distributionsegenskaper för descents och excedances

Vi kommer att hitta rekursioner för både descents och excedances och etablera att då båda uttryck är ekvivalenta med varandra så måste de ha samma distributionsegenskaper.

Till att börja med så påminner vi läsaren om descents och excedances:

$$\text{descent} : w_i > w_{i+1},\ i \in [d-1],\ w \in \mathfrak{S}_d,$$

$$\text{excedance} : w_i > i,\ i \in [d],\ w \in \mathfrak{S}_d,$$

samt att $\text{des}(w)$ och $\text{exc}(w)$ räknar antalet descents och excedances för en permutation $w \in \mathfrak{S}_d$.

Målet är att hitta en rekursion för $B(d,k)$, vilket är ett tal som representerar antalet permutationer av längd d som har k excedances och sedan jämföra detta uttryck med en rekursion för $A(d,k)$, antalet permutationer av längd d med k descents. Först och främst så ser vi att $A(1,0) = B(1,0) = 0$, då vi varken kan ha någon descent eller excedance om det inte finns några element som följer varandra.

Vi märker sedan, för en permutation $w = w_1 w_2 \cdots w_{d-1} \in \mathfrak{S}_{d-1}$, att om vi vill lägga in d någonstans i w så att vi får k excedances, så finns det endast två sätt att åstadkomma detta. Vi kan lägga in d i en position så att vi ökar antalet excedances med 1 för en permutation med $k-1$ excedances, eller hålla antalet konstant för en permutation med k excedances. Detta är rimligt då genom att lägga in d någonstans så kan vi totalt endast öka antalet excedances med 1. Alla excedances som låg mellan positionen för d och den sista positionen i permutationen antingen bevaras eller förstörs efter insättningen. Om alla bevaras så får vi en ny permutation med en extra excedance. Om inte alla excedances bevaras så kan vi behålla samma antal excedances genom att skapa en ny och sedan ta bort en i processen. Risken finns att eventuellt tappa mer än en excedance, vilket är irrelevant för vårt uttryck då vi vill räkna antalet permutationer där antal excedances är exakt lika med k, vilket innebär att vi endast bekymmrar oss med positioner där vi lägger till d så att vi antingen ökar excedances med 1 eller bevarar antalet som redan existerar.

Vi börjar med att betrakta permutationerna w i cykelform och inser att det finns total fyra sätt att sätta in d i en permutation $w \in \mathfrak{S}_{d-1}$:

1. I en cykel mellan $w_i,\ w_{i+1}$, där $w_i > w_{i+1}$
2. I en en-cykel, dvs. $\cdots (w_i\ d) \cdots$
3. I en cykel mellan $w_i,\ w_{i+1}$, där $w_i < w_{i+1}$
4. Sätt in d i w så att vi får en en-cykel $\cdots (d) \cdots$

De sista två ger inga nya excedances då i Fall 3 så sätter vi in d efter w_i, som redan var en excedance. Detta innebär att vi byter ut en excedance med en annan. I Fall 4 så sitter d ensam och kan därför inte var en excedance. Dessa två fall ger oss att vi kan sätta in d mellan varje par där $w_i < w_{i+1}$, vilket är k platser då vi har k antal excedances. Vi får också 1 sätt att sätta in d som en egen cykel vilket ger oss att $\beta = k + 1$.

De första två fallen är sätten vi kan öka antalet excedances med 1. För Fall 1 så ser vi att om $w_i > w_{i+1}$ så skapar vi en ny excedance genom att sätta in d så att $w_i < d > w_{i+1}$. Fall 2 ökar excedances med 1 då vi kan sätta in d och garanterat generera en excedance. Detta sker då $w(i) = i$ och genom att lägga in d så får vi istället att $w(i) = d > i$. Vi får således att $\alpha = d - k$ då det måste finnas d nya permutationer som genereras via insättning av d någonstans.

Rekursionen för excedances är således

$$B(d,k) = (d-k)B(d-1,k-1) + (k+1)B(d-1,k).$$

Liknande resonemang kan användas för att konstruera en rekursion för descents. Vi vill hitta ett uttryck för $A(d,k)$, antalet permutationer $w \in \mathfrak{S}_d$ med $\operatorname{des}(w) = k$. Det finns endast två sätt att gå från en permutation i $\mathfrak{S}_{d-1}$ till en permutation i $\mathfrak{S}_d$ så att $\operatorname{des}(w) = k$, vilket är att antingen börja med en permutation där $\operatorname{des}(w) = k$ och placera d på ett sätt så att antalet descents förblir densamma eller att ta en permutation där $\operatorname{des}(w) = k-1$ och via insättningen öka antalet descents till k.

Om vi har en permutation $w = w_1 w_2 \cdots w_{d-1}$ där $\operatorname{des}(w) = k-1$, så kan vi placera d direkt i början så att vi får $w = dw_1 w_2 \cdots w_{d-1}$, då detta garanterar att vi får en ny descent utan att överskrida en sedan innan existerande descent. Eller så kan vi hitta alla positioner i som inte är en descent, dvs. $w_i < w_{i+1}$ och placera in d så att $(\ \cdots \ w_i \ d \ w_{i+1} \ \cdots)$, vilket garanterar att $d > w_{i+1}$. Vi har totalt $(d-1-k)+1 = d-k$ positioner där vi kan öka $\operatorname{des}(w)$ med 1.

För en permutation där vi har k descents så måste antalet bevaras, det vill säga vi kan lägga d i slutet så att $w = w_1 w_2 \cdots w_{d-1} d$, eller hitta alla positioner där i är en descent. Om vi lägger in d sådan att $(\ \cdots \ w_i \ d \ w_{i+1} \ \cdots)$, så har vi att $w_i < d > w_{i+1}$. Positionen vid d blir en ny descent men positionen vid i slutar att vara en descent. Vi har alltså $k+1$ positioner där detta kan ske. Vår rekursion blir således:

$$A(d,k) = (d-k)A(d-1,k-1) + (k+1)A(d-1,k),$$

vilket slutför beviset för ekvidistributionen av $\operatorname{des}(w)$ och $\operatorname{exc}(w)$ då båda uppfyller samma rekursion.

Referenser

[1] Percy Alexander MacMahon. *Combinatory Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1915.

[2] Branko Grünbaum Raj C. Bosa. combinatorics. https://www.britannica.com/science/combinatorics, 2024. Hämtad: 2024-11-03.

[3] Atri Rudra. Lecture 8: Shannon's noise models. https://cse.buffalo.edu/faculty/atri/courses/coding-theory/lectures/lect8.pdf, 2024. Hämtad: 2024-11-03.

[4] Richard P. Stanley. *Enumerative Combinatorics, Volume 1*. Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 2011.

[5] Wikipedia. Permutation. https://en.wikipedia.org/wiki/Permutation, 2024. Hämtad: 2024-11-03.