



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Hilberts tredje problem

av

Anna Persson Nygårdh

2024 - No L8

Hilberts tredje problem

Anna Persson Nygårdh

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Dan Petersen

2024

Abstract

The German mathematician David Hilbert (1862-1943) presented a list with 23 unsolved problems in mathematics year 1900. This paper addresses Hilbert's third problem and the solution to the problem that was presented by Max Dehn, a student to David Hilbert, using the Dehn invariant.

Hilbert's third problem is a geometric question and concerns whether two tetrahedra with the same base and height can be divided into a finite number of pieces that form congruent tetrahedra, or if they can be combined with other tetrahedra to create new polyhedral that can, in turn, be divided in a similar way.

This paper discusses mathematical concepts such as rational numbers, irrational numbers, vector spaces, polyhedra and dihedral angles, and explains how these concepts are used to define and calculate the Dehn invariant.

A theorem presented in this paper shows how the Dehn invariant can be used to analyze whether two polyhedra are equicomplementary, which is crucial for understanding Hilbert's third problem. In the end, examples are provided where the Dehn invariant is calculated; these examples give a negative solution to Hilbert's third problem.

Keywords:

Hilbert's third problem, Dehn invariant, polyhedra, geometry

Sammanfattning

Den tyske matematikern David Hilbert (1862-1943) gjorde år 1900 en lista över 23 olösta problem inom matematiken. Denna uppsats behandlar Hilberts tredje problem och den lösning till problemet som Max Dehn, student till David Hilbert gav med användning av Dehn-invarianten.

Hilberts tredje problem är en geometrisk fråga och handlar om huruvida två tetraeder med samma bas och höjd kan delas upp i ändligt många delar som sedan bildar kongruenta tetraeder, eller om dessa kan sammanfogas med andra tetraeder för att bilda nya polyedrar som i sin tur kan delas upp på liknande sätt. Denna uppsats tar upp matematiska begrepp så som rationella tal, irrationella tal, vektorrum, polyedrar och dihedralsvinklar och förklarar hur dessa begrepp används för att definiera och beräkna Dehn-invarianten. En sats som presenteras i uppsatsen visar på hur Dehn-invarianten kan användas för att analysera om två polyedrar är ekvikomplimenterbara, vilket är avgörande för att förstå Hilberts tredje problem. Avslutningsvis ges exempel där Dehn-invarianten beräknas; dessa exempel ger en negativ lösning till Hilberts tredje problem.

Nyckelord:

Hilberts tredje problem, Dehn-invarianten, polyedrar, geometri

Förord

Jag vill tacka min handledare Dan Petersen för hans engagemang, de givande samtalen och den vägledning jag har fått under mitt uppsatsskrivande.

Innehållsförteckning

Inledning	6
Sektion 1.....	6
Rationella och irrationella tal	6
Definition 1.1.	6
Kommentar.....	6
Sats 1.1	7
Bevis.....	7
Vektorrum.	8
Definition 1.2.	8
Exempel 1.....	9
Kommentar.....	9
Lemma 1.1.....	9
Bevis.....	9
Sektion 2.....	11
Hilberts tredje problem	11
Definition 2.1	11
Sats 2.1	11
Lemma 2.1.....	11
Bevis.....	12
Lemma 2.2.....	12
Bevis.....	12
Lemma 2.3.....	13
Bevis.....	13
Max Dehn.....	15
Definition 2.2	15
Definition 2.3	15
Exempel.....	16
Definition 2.4	16
Definition 2.5	16
Dehn-invarianten.....	16
Definition 2.6	16
Definition 2.7	17
Sats 2.2	17
Bevis.....	18
Bevis med Dehn-invarianten.....	19

Exempel 1	19
Exempel 2	20
Exempel 3	21
Exempel 4	22
Referenser	23

Inledning

Hilberts tredje problem behandlar frågan om det är möjligt att dela upp två polyedrar med samma volym i ett ändligt antal kongruenta delar och omforma dessa för att bilda nya polyedrar. Problemet, som presenterades år 1900, ledde till en lösning av Max Dehn, en av David Hilberts studenter, genom introduktionen av Dehn-invarianten. Denna uppsats undersöker Dehn-invarianten och betydelsen av volymens egenskaper i relation till geometriska omvandlingar. Även centrala begrepp som är nödvändiga för att förstå Dehn-invarianten och dess tillämpningar undersöks.

Sektion 1.

Rationella och irrationella tal

Definition 1.1. Rationella tal, $\mathbb{Q}$ skrivs som $\frac{a}{b}$ där a och b är heltal och $b \neq 0$, alla andra reella tal är irrationella tal.

Kommentar. Ett rationellt tal har periodisk decimalutveckling, annars är det ett irrationellt tal. Exempel på irrationella tal är $\sqrt{2}$, e och π .

I allmänhet är det mycket svårt att avgöra om ett tal är irrationellt. År 1978 bevisade den franske matematikern Roger Apéry att

$$\zeta(3) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^3}$$

är ett irrationellt tal, vilket var ett banbrytande resultat inom talteorin vid den tiden.

Öppen förmodan att

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s}$$

är irrationellt för alla udda $s \geq 3$ men det är inte känt ens för $s \geq 5$ vilket visar på svårigheten att avgöra om ett tal är irrationellt.

I denna uppsats kommer vi behöva veta att följande tal, $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$ och $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ är irrationella tal.

Sats 1.1. För varje udda heltal där $n \geq 3$ är talet

$$A(n) := \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{\sqrt{n}}$$

irrationellt.

Bevis. Grundläggande trigonometri och additionssatsen ger oss

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right).$$

För $\alpha = (k + 1)\varphi$ och $\beta = (k - 1)\varphi$ får vi att

$$\cos(k + 1)\varphi = 2 \cos(k\varphi) \cos(\varphi) - \cos(k - 1)\varphi \quad (*)$$

För vinkeln $\varphi_n = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ får vi att $\cos(\varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$ och $0 \leq \varphi_n \leq \pi$. Vi kan nu skriva $\cos(k\varphi_n)$ på formen

$$\cos(k\varphi_n) = A_k \frac{1}{\sqrt{n}^k}$$

där A_k är ett heltal som inte är delbart med n , för alla $k \geq 0$. För de första värdena $k = 0$ och $k = 1$, har vi att $A_0 = A_1 = 1$.

Genom att använda formeln från ovan (*) och induktion kan vi nu visa att:

$$\cos((k + 1)\varphi_n) = 2 \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot A_k \frac{1}{\sqrt{n}^k} - A_{k-1} \frac{1}{\sqrt{n}^{k-1}} = (2A_k - nA_{k-1}) \frac{1}{\sqrt{n}^{k+1}}.$$

Detta ger oss en rekursiv formel för A_{k+1} :

$$A_{k+1} = 2A_k - nA_{k-1}.$$

Här ser vi att om A_k inte är delbart med n , så kommer inte A_{k+1} heller vara delbart med n .

Nu antar vi att $A(n) = \frac{1}{\pi} \varphi_n$ är ett rationellt tal, vilket innebär att $\varphi_n = \frac{k\pi}{m}$ där k och m är positiva heltal. Vi har $m > 1$ eftersom $0 \leq \varphi_n \leq \pi$. Detta innebär att:

$$m \cdot \varphi_n = k\pi.$$

Detta ger oss

$$\cos(k\pi) = \pm 1 = A_m \frac{1}{\sqrt{n}^m}.$$

Vi får att $A_m = \pm \sqrt{n}^m$, och $\sqrt{n}^m$ är ett heltal. Detta innebär att m är jämt, eller att n är en jämn kvadrat. Oavsett ser vi att A_m är delbart med n eftersom $\sqrt{n}^m$ är delbart med n , då $m \geq 2$. Därmed har vi visat att $A(n)$ inte kan vara ett rationellt tal när $n \geq 3$ är udda.

Rationalitet och irrationalitet kan tolkas i termer av vektorrum och dimension enligt Lemma 1.1 som följer på nästa sida. Detta perspektiv används också i lösningar till Hilberts tredje problem.

Vektorrum.

I ett vektorrum V över en kropp K ska vi kunna addera två vektorer $\mathbf{a}$ och $\mathbf{b}$ i V och få ut en ny vektor $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in V$. Vi ska även kunna multiplicera en vektor $\mathbf{a} \in V$ med en skalär $\lambda \in K$ och få en ny vektor $\lambda \mathbf{a} \in V$. Dessa operationer ska uppfylla vissa räkneregler för att vi ska kunna definiera ett vektorrum.

Definition 1.2. Ett vektorrum V , över K är en mängd med ett element $0 \in V$ som med addition och multiplikation operationer uppfyller vektorrumsaxiomen:

1. $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ (kommutativitet)
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ (associativitet)
3. $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$ för alla $\mathbf{a} \in V$ (nollvektorn)
4. För $\forall \mathbf{a} \in V, \exists \mathbf{c} \in V$ så att $\mathbf{c} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$ (additiv invers)
5. $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$ (multiplikativt enhetselement)
6. $(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$ (associativitet)
7. $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ (distributivitet)
8. $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$ (distributivitet)

Multiplikationen i vektorrummet beror på kroppen K .

Exempel 1. $\mathbb{R}$ är ett vektorrum över $\mathbb{Q}$. Dimensionen för $\mathbb{R}$ som $\mathbb{Q}$ -vektorrum är oändlig.

Kommentar. Låt $V \subseteq \mathbb{R}$, där V är ett delrum över $\mathbb{Q}$.

Alla linjärkombinationer av vektorer i V har rationella koefficienter. För att $\mathbb{R}$ ska kunna vara ett vektorrum över $\mathbb{Q}$ måste kraven för addition och skalärmultiplikation vara uppfyllda (**Def 1.2**) och dessa operationer måste vara definierade med rationella skalärer.

Notation: Om $M \subset \mathbb{R}$ är en delmängd, låter vi $V(M) := \text{span}_{\mathbb{Q}} M$.

Lemma 1.1. För $V(M)$ där $M = \{\alpha, \beta\}$ gäller det att $\dim V(M) = 2$ om $\beta \neq 0$ och $\frac{\alpha}{\beta}$ är irrationellt. Speciellt är $\dim V(\{1, x\}) = 2$ om x är irrationellt.

Bevis. Börja med att notera att vi kan anta att både $\alpha, \beta \neq 0$ för annars blir definitivt $\dim V(M) < 2$. Vi vill visa att α och β är linjärt oberoende över $\mathbb{Q}$ och att det spänner upp ett tvådimensionellt rum. Det vill säga att α och β är irrationella tal som inte är proportionella mot varandra vilket leder till att dom är linjärt oberoende.

Vi antar att α och β är linjärt beroende då skulle det finnas två rationella tal $q_1, q_2 \in \mathbb{Q}$ sådana att $\alpha \cdot q_1 + \beta \cdot q_2 = 0$. Om $\alpha, \beta \neq 0$ måste $q_1, q_2 \neq 0$. Vilket ger oss

$$\alpha \cdot q_1 + \beta \cdot q_2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha = -\frac{q_2}{q_1} \cdot \beta \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{q_2}{q_1}.$$

Detta visar att α och β är linjärt beroende då kvoten $\frac{\alpha}{\beta}$, med $\beta \neq 0$ är ett rationellt tal.

Vidare antar vi att $\frac{\alpha}{\beta}$ är ett rationellt tal q , då får vi

$$\frac{\alpha}{\beta} = q \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha = q \cdot \beta \quad \Leftrightarrow$$

$$\alpha - q \cdot \beta = 0$$

vilket visar att α och β är linjärt beroende.

Från ovan ser vi att α och β är linjärt oberoende över $\mathbb{Q}$ och spänner upp ett tvådimensionellt rum om och endast om $\beta \neq 0$ och $\frac{\alpha}{\beta}$ är irrationellt.

Sektion 2.

Hilberts tredje problem

I boken *Proofs from THE BOOK* (Aigner & Ziegler, 2004) formuleras Hilberts tredje problem genom frågan huruvida det existerar

"two tetrahedra of equal bases and equal altitudes which can in no way be split into congruent tetrahedra, and which cannot be combined with congruent tetrahedra to form two polyhedra which themselves could be split up into congruent tetrahedra." (s.45).

Hilbert ville visa på att två polyedrar med samma volym inte nödvändigtvis går att omforma till varandra och bevara samma volym på grund av den inre geometrin vilket Max Dehn skulle visa på. Speciellt gäller att två tetraedrar med samma basarea och samma höjd inte kan delas upp i mindre bitar för att sedan omformas och sättas ihop till varandra.

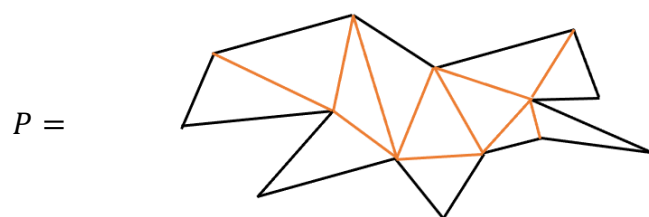
Definition 2.1 Två polyedrar P och Q är *ekvidekomponerbara*, eller *"klipp och klistra"-kongruenta*, om dom kan delas upp i ändligt många polyedrar $P_1, P_2, \dots, P_n$ och $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$ så att P_i och Q_i är kongruenta för alla i ($1 \leq i \leq n$).

Vi tittar även på det två-dimensionella rummet och Wallace-Bolyai–Gerwien sats (Andreescu & Gelca, 2009)

Sats 2.1 (Wallace-Bolyai–Gerwien) Två polygoner P och Q med samma area är ekvidekomponerbara. Med andra ord: det går att dela upp dessa polygoner i ändligt antal delar där varje del är en ny polygon. Delarna kan sedan translateras, roteras och sättas ihop och bilda den andra polygonen.

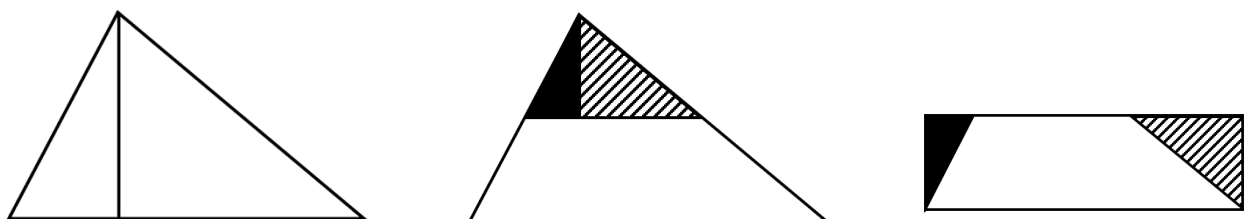
Lemma 2.1. Givet vilken polygon som helst kan den delas in i ändligt många trianglar.

Bevis: Låt P vara en polygon. Välj ett hörn v_1 i polygonen och rita linjer från det hörnet till dom närliggande hörnen, så att linjerna går innanför polygonen. Detta skapar en uppdelning av polygonen i trianglar och nya mindre polygoner. Välj sedan ett nytt hörn i en nybliven polygon, som ej är en triangel, och upprepa proceduren utan att några linjer skär varandra tills hela polygonen är indelad i trianglar likt bilden nedan. Eftersom varje polygon har ett ändligt antal hörn och sidor, krävs det ändligt antal steg för att skapa ändligt många trianglar.

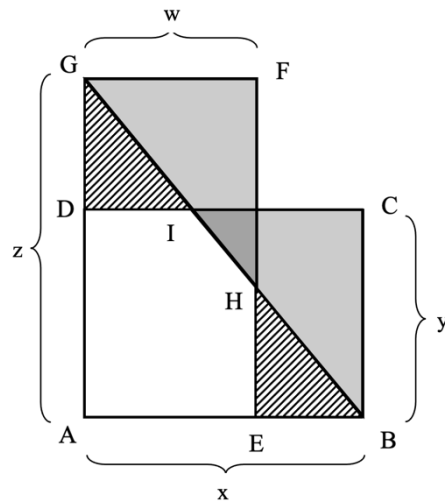


Lemma 2.2. Varje triangel är ”klipp och klistra”-kongruent med en rektangel med samma bas

Bevis: Givet en triangel, utgå från hörnet med den största vinkeln och konstruera höjden därifrån med en lodrät linje nedåt. Dela triangeln i två delar med en linje som är vinkelrät mot höjden och halverar den. Detta delar in triangeln i tre delar som kan sättas ihop till en rektangel.



Lemma 2.3. Två rektanglar med samma area är ”klipp och klistra”-kongruenta.



Bevis: Vi vet att arean av $AEFG = w \cdot z$ och arean av $ABCD = x \cdot y$ vilket ger oss att

$$xy = wz.$$

Vi antar först att triangeln ABG ligger innanför $AEFG \cup ABCD$, dvs att $w \leq x \leq 2w$ ekvivalent att $y \leq z \leq 2y$. Från bilden ser vi att triangeln $ABG = \alpha \cdot DIG$ och $ABG = \beta \cdot EBH$ för några $\alpha, \beta \in \mathbb{R} > 0$. För att DIG och EBH ska vara kongruenta vill vi visa att $\alpha = \beta$ dvs att $\overline{DG}$ är lika lång som $\overline{EH}$, och $\overline{DI}$ lika lång som $\overline{EB}$.

Vi vet att

$$\alpha = \frac{z}{z - y}$$

vilket ger oss inversen

$$\alpha^{-1} = \frac{z - y}{z} = 1 - \frac{y}{z}$$

likaså vet vi att

$$\beta = \frac{x}{x - w}$$

vilket ger oss inversen

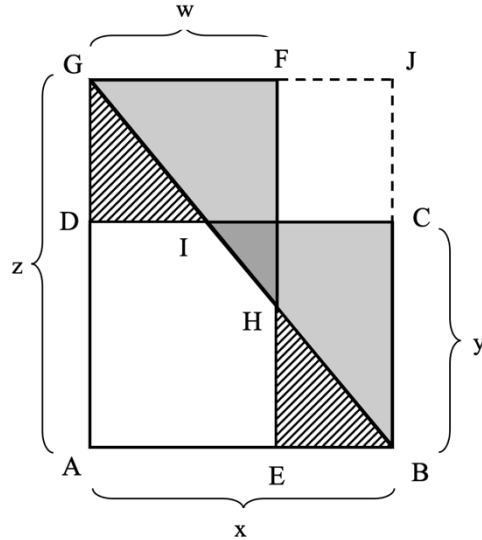
$$\beta^{-1} = \frac{x - w}{x} = 1 - \frac{w}{x}.$$

Detta leder till att

$$1 - \frac{y}{z} = 1 - \frac{w}{x} \Leftrightarrow -\frac{y}{z} = -\frac{w}{x} \Leftrightarrow xy = wz$$

och därmed har vi visat att $\alpha = \beta$ som leder till att DIG och EBH är kongruenta.

Vi lägger nu till en punkt J .



Från bilden ovan ser vi att triangeln $GBJ = \lambda \cdot GHF$ och $GBJ = \delta \cdot IBC$ för några $\lambda, \delta \in \mathbb{R} > 0$. För att GHF och IBC ska vara kongruenta vill vi visa att $\lambda = \delta$ dvs att $\overline{GF}$ är lika lång som $\overline{IC}$ och $\overline{HF}$ är lika lång som $\overline{BC}$.

Vi vet att

$$\lambda = \frac{x}{w}$$

och att

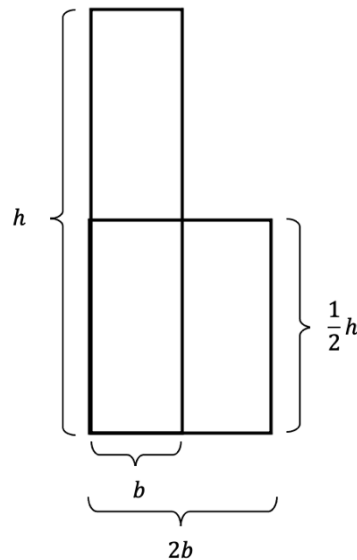
$$\delta = \frac{z}{y}$$

vilket leder till att

$$\frac{x}{w} = \frac{z}{y} \Leftrightarrow xy = wz.$$

Vi har därmed visat att $\lambda = \delta$ vilket leder till att GHF och IBC är kongruenta.

Om $w \leq x \leq 2w$ ekvivalent att $y \leq z \leq 2y$ inte råder vet vi att en rektangel R_1 med basen b och höjden h är ”klipp och klistra”-kongruent med en rektangel R_2 med basen $2b$ och höjden $\frac{1}{2}h$ vilket framgår ur bilden nedan. Om R och R' är två rektanglar med samma area, så är alltid R' ”klipp och klistra” – kongruent med R'' så att R och R'' uppfyller $w \leq x \leq 2w$ ekvivalent att $y \leq z \leq 2y$.



Lemma 2.1, 2.2 och 2.3 tillsammans bevisar sats 2.1.

Max Dehn

Max Dehn (1878-1952) var en tysk matematiker inom geometri, topologi och gruppteori. Han var student till David Hilbert och löste Hilberts tredje problem genom att introducera det som idag heter Dehn-invarianten.

Definition 2.2 Om $S \subset \mathbb{R}^n$ är en mängd, definierar vi konvexa höljet till S som den minsta konvexa mängd som innehåller S . Varje punkt P i konvexa höljet kan skrivas som en konvex kombination av punkter i S på formeln

$$P = \sum_{i=1}^n t_i P_i \quad \text{där} \quad \sum_{i=1}^n t_i = 1 \quad \text{och} \quad t_i \geq 0, \quad P_i \in S \quad \text{för alla } i.$$

Definition 2.3 En *polyeder* är konvexa höljet av en ändlig delmängd i $\mathbb{R}^3$.

Exempel. En *tetraeder* är konvexa höljet av fyra punkter som inte ligger i ett plan, P_1, P_2, P_3, P_4 där mängden av alla punkter P , på eller inom tetraedern kan skrivas som konvexa kombinationer av dessa punkter.

Vi kan även se en polyeder som en mängd punkter som begränsas av ett antal plan, även kallade fasetter.

Definition 2.4 En *fasett* är en plan yta som utgör en delmängd av den totala ytan som avgränsar en polyeder. En fasett är en polygon som till exempel en triangel eller fyrkant. En fasett begränsas av polyederns *kanter*.

Definition 2.5 *Dihedralvinkeln* är den vinkeln som skapas mellan två plan som skär varandra. Dihedralvinkeln ges av formeln:

$$\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 * \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \cdot \|\vec{n}_2\|}$$

där $\vec{n}_1$ och $\vec{n}_2$ är normalvektorer och $\|\vec{n}_1\|$ och $\|\vec{n}_2\|$ är deras normer, och $*$ är skalärprodukten. Vinkeln θ är den positiva vinkel mellan planens normalvektorer och antar ett värde mellan 0 och π .

Dehn-invarianten

När man räknar med Dehn-invarianten för en polyeder P , tittar man på olika geometriska egenskaper så som längden på kanterna och vinklarna mellan sidorna. Det gör man för att få fram mer detaljerade egenskaper för en polyeder än bara volymen.

Definition 2.6. Låt P vara en polyeder. Låt $M \subseteq \mathbb{R}$ vara någon mängd som innehåller alla dihedralvinklar i P samt π . Låt $f: V(M) \rightarrow \mathbb{R}$ vara en $\mathbb{Q}$ -linjär funktion. Vi definierar *Dehn-invarianten* av P med avseende på f som det reella talet

$$D_f(P) := \sum_{e \in P} l(e) \cdot f(\alpha(e))$$

där summan sträcker sig över alla kanter e av polyeden, $l(e)$ betecknar längden på e och $\alpha(e)$ är dihedralkvinkeln mellan de två fasetterna som möts i e . Dehn-invarianten beror alltså inte bara på P , utan även på valet av en mängd M samt en funktion $V(M) \rightarrow \mathbb{R}$.

Definition 2.7 Två polyedrar är *ekvikomplimenterbara* om det finns polyedrar $P_1, P_2, \dots, P_m$ och $Q_1, Q_2, \dots, Q_m$ så att det inre av P_i är disjunkt från varandra och från P , likaså gäller för Q_i och Q , och dessutom att P_i är kongruent med Q_i för alla i och att $\tilde{P} := P \cup P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_m$ och $\tilde{Q} := Q \cup Q_1 \cup Q_2 \cup \dots \cup Q_m$ är *ekvidekomponerbara*.

Vi kan konstatera att ekvidekomponerbara polyedrar är ekvikomplimenterbara men att det omvända förhållandet skulle gälla är långt ifrån klart. Följande sats ur boken *Proofs from THE BOOK* (Aigner & Ziegler, 2004, s. 47) kommer hjälpa oss att se att tetraeder med samma volym som inte är ekvikomplimenterbara inte heller är ekvidekomponerbara. Vilket var det Hilbert menade på när han sa att två tetraedrar med samma bas och samma höjd inte kan delas upp i kongruenta tetraeder trots att de har samma volym. Det går inte heller att kombinera de två tetraedrarna med andra kongruenta tetraeder så att dom tillsammans skapar två nya tetraedrar som skulle kunna delas upp i kongruenta tetraeder. Nedanstående bevis är en senare förenklad version av Dehns ursprungliga argument.

Sats 2.2 Låt P och Q vara polyedrar med dihedralkvinklarna $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ respektive $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ vid deras kanter, och låt M vara en ändlig uppsättning av reella tal sådan att $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p, \pi\} \subseteq M$. Om $f: V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$ är någon $\mathbb{Q}$ -linjärfunktion med $f(\pi) = 0$ så att

$$D_f(P) \neq D_f(Q),$$

så är P och Q inte ekvikomplimenterbara.

Bevis. Bevis i två delar.

Del 1. Vi påstår först att om en polyeder P , delas upp i ändligt många delar $P_1, P_2, \dots, P_n$ där alla dihedralkvinklar $P_1, P_2, \dots, P_n$ ligger inom mängden M så kommer Dehn-invarianten kunna summeras enligt nedan

$$D_f(P) = D_f(P_1) + D_f(P_2) + \dots + D_f(P_n)$$

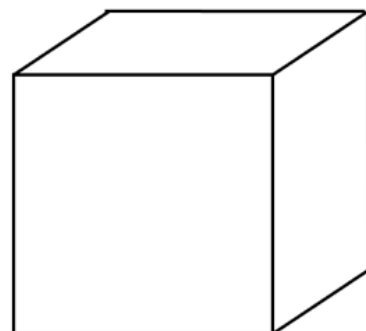
för varje $\mathbb{Q}$ -linjär funktion där $f: V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$ med $f(\pi) = 0$.

För varje delsegment $e' \subseteq e$ där e är en kant till polyedern P , kan vi tänka oss en massa som tilldelas e' enligt

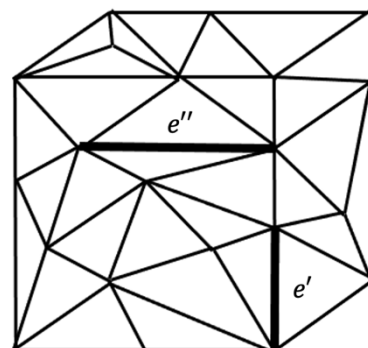
$$m_f(e') := l(e') \cdot f(\alpha(e')),$$

längden av segmentet e' multiplicerat med funktionsvärdet vid dihedralkvinkeln α .

Vi kan se att när polyedern P delas upp i ändligt antal polyeder $P_1, P_2, \dots, P_n$ kommer dihedralkvinklarna kunna summeras på ett sätt så att massorna kan göra detsamma. För varje gemensamt segment e' i $P_1, P_2, \dots, P_n$ kommer dihedralkvinklarna kunna summeras till den dihedralkvinkeln som utgörs av den gemensamma kanten i den ursprungliga polyedern P .



Tittar vi vidare på vilken annan kant e'' som helst som tillhör någon av polyederna $P_1, P_2, \dots, P_n$ och som finns i det inre av en fasett av P eller i det inre av P , kommer vinklarna att summeras till π respektive 2π . Det leder till att funktionsvärdet för vinklarna i dessa delar adderas på ett sådant vis så att förhållandet $f(\pi) = 0$ och $f(2\pi) = 0$ råder. Detta innebär att summan av massorna får samma värde som vi ursprungligen hade tilldelat dessa kanter i P , nämligen 0.



Del 2. Vi antar att polyedern P och Q är *ekvikomplimentära*. Vi inför en ny mängd M' som har den ursprungliga mängden M som delmängd, och innefattar alla dihedralsvinklar som finns i polyederna som vi delat upp från P och Q . Eftersom vi delat in P och Q i ändligt många delar kommer även M' vara en ändlig mängd. Vi tittar nu på funktionen $f: V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$ från ovan och utökar den godtyckligt till $f': V(M') \rightarrow \mathbb{Q}$ med $f'(\pi) = 0$ och ser att vi från argumentet i del 1 får att

$$D_{f'}(P_i) = D_{f'}(Q_i)$$

eftersom P och Q är ekvikomplimentära, vilket är en motsägelse till satsen och därmed kan inte P och Q vara ekvikomplimentära.

Bevis med Dehn-invarianten

Nedan följer olika beräkningar av Dehn-invarianten, dessa beräkningar tillsammans med Sats 2.2 utgör beviset för Hilberts tredje problem.

Notation: Om P är en polyeder i $\mathbb{R}^3$ låt M_P vara mängden av alla dihedralsvinklar mellan fasetterna tillsammans med talet π .

Exempel 1. Om C är en kub får vi att

$$M_C = \left\{ \frac{\pi}{2}, \pi \right\}.$$

Notera att vi vidare kommer att anta att för vilken ändlig mängd $M \subseteq \mathbb{R}$ som innehåller M_P , och oavsett vilken $\mathbb{Q}$ -linjär funktion $f: V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$ vi väljer, så kommer den uppfylla $f(\pi) = 0$. För att beräkna Dehn-invarianten $D_f(C)$ för en kub C använder vi oss av definition 2.6 som ger oss

$$D_f(C) = \sum_{e=1}^{12} l \cdot \frac{f(\pi)}{2} = 12l \cdot \frac{f(\pi)}{2} = 6lf(\pi).$$

Men eftersom $f(\pi) = 0$ får vi att

$$D_f(C) = 0.$$

så Dehn-invarianten för en kub är noll.

Exempel 2. Låt T vara en regelbunden tetraeder med kantlängden l , vi får att

$$M_T = \{\alpha, \pi\}.$$

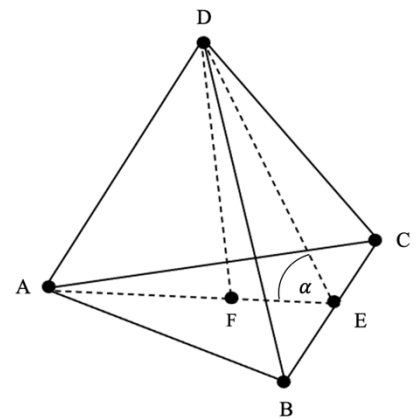
Vi kan utifrån bilden bredvid se att alla dihedralkvinklar kommer vara samma då mittpunkten F av bastriangeln delar AE med 1:2

och $|AE| = |DE|$ och vi får att $\cos \alpha = \frac{1}{3}$ vilket ger oss att

$$\alpha = \arccos \frac{1}{3}.$$

Vi noterar att för $M_T = \{\alpha, \pi\}$ är förhållandet

$$\frac{\alpha}{\pi} = \frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$$



irrationellt då $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$ är ett irrationellt tal. Vidare vet vi från Lemma 1.1 att $\mathbb{Q}$ -vektorrummet $V(M)$ är 2-dimensionellt med basen M , och det finns en $\mathbb{Q}$ -linjär funktion $f: V(M) \rightarrow \mathbb{Q}$ som ger att

$$f(\alpha) := 1, f(\pi) := 0.$$

För detta f får vi att Dehn-invarianten $D_f(T)$ för tetraedern T är

$$D_f(T) = 6lf(\alpha) = 6l.$$

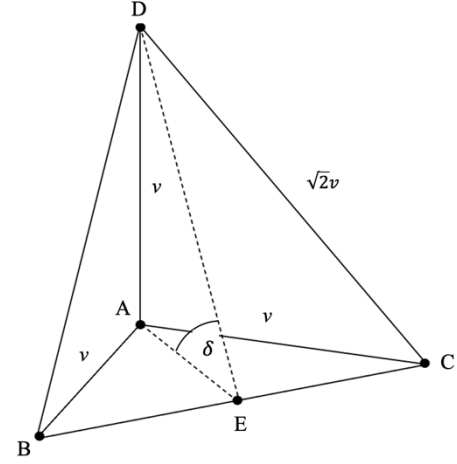
Detta visar att en regelbunden tetraeder T inte kan vara ekvidekomponerbara eller ekvikomplimenterbara med en kub då $6l \neq 0$ och Dehn-invarianten för en kub är 0 för alla linjära funktioner f .

Exempel 3. Låt T_1 vara en tetraeder som är uppspänd av tre ortogonala kanter AB, AC, AD med längden v . T_1 har tre dihedralkvinklar som är vinkelräta mot varandra och tre dihedralkvinklar av samma storlek δ som vi kan beräkna från bilden

$$\cos \delta = \frac{|AE|}{|DE|} = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}v}{\frac{1}{2}\sqrt{3}\sqrt{2}v} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

vilket ger oss att

$$\delta = \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$$



För mängden av alla dihedralkvinklar får vi att $M_{T_1} = \left\{ \frac{\pi}{2}, \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}, \pi \right\}$. Notera att π och $\frac{\pi}{2}$ är linjärt beroende. Noter även att det inte finns något rationellt samband mellan $\arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ och π då $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}$ är ett irrationellt tal så

$V(M_{T_1}) = V \left\{ \arccos \frac{1}{\sqrt{3}}, \pi \right\}$ är 2-dimensionellt enligt Lemma 1.1. Detta ger oss att det finns en $\mathbb{Q}$ -linjär funktion $f: V(M_{T_1}) \rightarrow \mathbb{Q}$ som kan definieras som

$$f(\delta) := 1, f(\pi) := 0.$$

Detta ger oss att

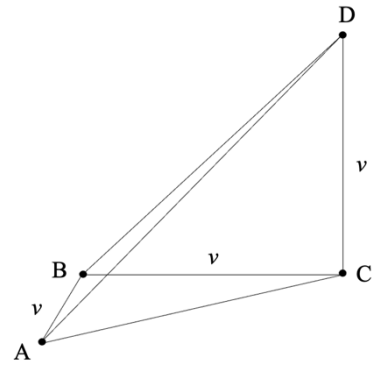
$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

Dehn-invarianten för T_1 med avseende på f blir således

$$D_f(T_1) = 3vf\left(\frac{\pi}{2}\right) + 3(\sqrt{2}v)f(\delta) = 3(\sqrt{2}v).$$

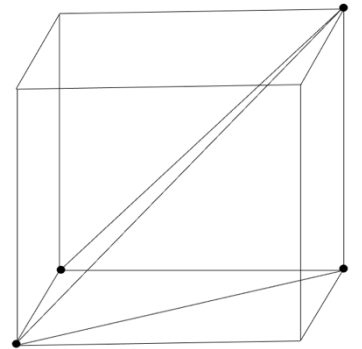
Då $3(\sqrt{2}v) \neq 0$ bevisar det att T_1 inte är ekvidekomponerbar eller ekvikomplimenterbar med en kub C av samma volym då $D_f(C) = 0$ för alla linjära funktioner f .

Exempel 4. Sist låter vi T_2 vara en tetraeder med tre på varandra följande kanter AB, BC, CD som är ortogonala mot varandra och alla av längden v , se bilden bredvid. Dihedralvinklarna för T_2 beräknas enligt definition 2.5 och är $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4})$, men kommer inte användas vidare.



Genom att i stället använda mittpunkterna av kanterna och fasetterna samt centrum kan en kub med kantlängderna v delas upp i sex stycken tetraedrar, likt T_2 , där tre är kongruenta kopior och tre är spegelbilder. Alla dessa sex tetraedrar har samma Dehn-invariant och vi får för varje funktion f med $f(\pi) = 0$ att Dehn-invarianten för T_2 är

$$D_f(T_2) = \frac{1}{6} D_f(C) = 0.$$



Detta bevisar Hilberts tredje problem med stöd från Sats 2.2. I tidigare exempel av tetraedern T_1 med samma bas och höjd som T_2 fick vi att $D_f(T_1) \neq 0$ vilket ger att $D_f(T_1) \neq D_f(T_2)$ och vi kan dra slutsatsen att dessa två tetraedrar inte är varken ekvidekomponerbara eller ekvikomplimenterbara.

Referenser

- [1] Aigner, M., & Ziegler, G. M. (2004). *Proofs from THE BOOK* (3rd ed). Springer.
- [2] Andreescu, T., & Gelca, R. (Red.). (2009). *Mathematical Olympiad Challenges*. Birkhäuser Boston.
- [3] Fraleigh, J. B. (2003). *A first course in abstract algebra* (7th ed). Addison-Wesley.
- [4] R. J. Gardner, A problem of Sallee on equidecomposable convex bodies, Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985)
- [5] Grünbaum, B. (2003). *Convex Polytopes* (2nd ed., G. M. Ziegler, Ed.). Springer.
- [6] Marsden, J. E., & Tromba, A. (2012). *Vector calculus* (6th ed., International ed). W. H. Freeman.