SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Oändliga mängder och kardinaltal

av

Sara Carlberg

2025 - No L9

Oändliga mängder och kardinaltal

Sara Carlberg

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Håkan Granath och Annemarie Luger

2025

Sammanfattning

Denna uppsats går igenom grunderna för oändliga mängder och deras kardinaltal. Den inleds av en historisk bakgrund för att sedan gå igenom ett par grunder i mängdläran. När grunden är lagd går vi vidare till en kort beskrivning av funktioner. Därefter följer ett bevis för representationer av reella tal. Huvuddelen av uppsatsen fokuserar på uppräkneligt oändliga och överuppräkneligt oändliga mängder och hur vi skiljer dem åt, bland annat genom Cantors diagonala argument. Sedan följer ett kapitel om oändliga mängders kardinaltal och hur vi räknar med och jämför dem, bland annat genom Schröder-Bernsteins sats. Till sist går vi igenom den icke-triviala Cantormängdens fascinerande egenskaper.

Abstract

This essay reviews the basics of infinite sets and their cardinal numbers. It begins with a historical background and then reviews a few basics of set theory. Once the foundation is laid, we move on to a brief description of functions. This is followed by a proof of representations of real numbers. The main part of the paper focuses on countably infinite and uncountably infinite sets and how we distinguish them, for example through Cantor's diagonal argument. This is followed by a chapter on the cardinal numbers of infinite sets and how we count and compare them, for example through Schröder-Bernstein's theorem. Finally, we review the fascinating properties of the non-trivial Cantor set.

Tack

Jag är oändligt tacksam för min handledare Håkan Granaths ovärderliga hjälp och tålamod under mitt arbete med uppsatsen. Därtill vill jag även tacka Annemarie Luger för ovärderlig hjälp att ro projektet i hamn. Stort tack till er bägge!

Innehåll

1 Introduktion

Syftet med denna uppsats är att ge en introduktion till oändliga mängders och kardinaltalens grundidéer. Bevisen i uppsatsen följer i huvudsak de från Irving Kaplanskys "Set Theory and Metric Spaces" [4]. Efter läst uppsats är det meningen att läsaren ska känna till grunderna för de olika oändliga mängderna samt hur man kan jämföra oändliga mängders mäktighet.

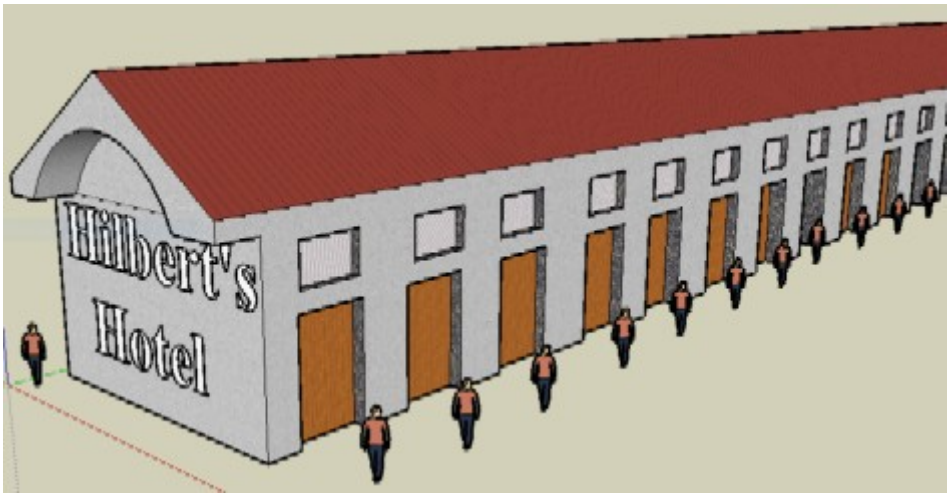
1.1 Hilberts Hotell

Tankeexperimentet om ett hotell som har oändligt antal rum sägs ha introducerats av den tyske matematikern David Hilbert när han år 1924 höll en föreläsning om oändligheter vid en matematikersammankommst i Münster [6, s. 4].

Vi tänker oss att vi har ett hotell med ett oändligt antal rum. Denna dag är dessutom vartenda rum uppbokat. Sent på kvällen kommer en gäst och frågar om det går att boka ett rum samma kväll. Trots att hotellet är fullbokat visar det sig att vi ändå kan boka in ytterligare en gäst. Vi gör det enkelt genom att flytta gäst i rum nummer 1 till rum nummer 2, gäst i rum nummer 2 till rum nummer 3 osv. Eftersom hotellet har ett oändligt antal rum kommer förflyttningen ske in i oändligheten. Vi kommer efter ett tag ha flyttat alla gäster från rum n till rum $n+1$. Helt plötsligt har vi gjort plats för en gäst till! Vi märker snart att det går att göra på samma sätt för att boka in två gäster till, vi flyttar bara de redan bokade gästerna i rum n till rum nummer $n+2$. Det går till och med att boka in 50 nya gäster. Ja, det går faktiskt att boka in 1000000 nya gäster. Faktum är att det kommer att gå att boka alla möjliga mängder av gäster så länge mängden är en ändlig mängd m, vi flyttar helt enkelt på de nuvarande gästerna i rum n till rum nr $n+m$.

Vi kan göra detta eftersom vår oändliga mängd hotellrum är en uppräkneligt oändlig mängd. Tack vare den uppräkneligt oändliga mängdens egenskaper visar det sig att vi faktiskt inte enbart kan boka in ett ändligt antal nya gäster utan vi kan till och med boka in ett oändligt antal nya gäster, så länge den nya mängden gäster även den är uppräkneligt oändlig. Om vi tänker oss att det kommer ett busslast med uppräkneligt oändligt många passagerare som alla vill ha ett rum på vårt till synes fullbokade hotell gör vi bara som vi gjort tidigare och flyttar de nuvarande gästerna. Om vi flyttar dem till alla rum med jämna rumsnummer så gästen i rum n flyttas till rum $2n$, för alla n, så innebär detta att alla rum med udda rumsnummer kommer att vara lediga för våra nya gäster.

Tankeexperimentet är menat att belysa de oväntade egenskaper en oändlig mängd erhåller då den är *uppräkneligt oändlig*.



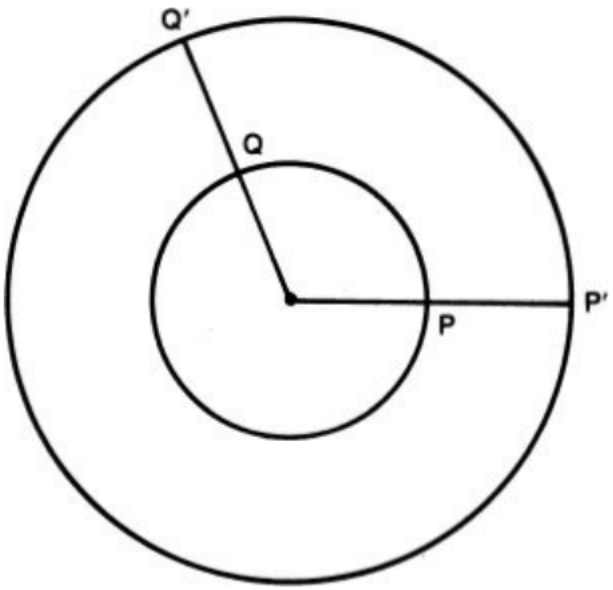
Figur 1: En illustration av ett det oändliga hotellet. Tagen från [11].

Vi kommer att se att de enda mängder gäster som inte går att ge rum åt är *överuppräkneliga* mängder, som vi går igenom i avsnitt 2.2. Detta beror på att de, till skillnad från *uppräkneliga* mängder, inte går att para ihop element för element med de naturliga talen och därmed inte går att ge varsitt rumsnummer. De uppräkneliga mängderna gås igenom i avsnitt 2.1.

1.2 Historisk bakgrund

> From time immemorial, the infinite has stirred men's emotions more than any other question. Hardly any other idea has stimulated the mind so fruitfully. Yet, no other concept needs clarification more than it does. - David Hilbert i sitt föredrag *On the infinite* år 1925 [1, s. 185]

Oändligheten har under historiens gång varit en kontroversiell och omdebatterad fråga inom såväl matematiken som filosofin samt bland religiösa tänkare. Dess blotta existens har varit svår att acceptera och om vi väl accepterar den, hur ska vi hantera den? De antika grekerna sägs vara bland de första som dokumenterat försöker förstå sig på oändligheten. Redan under antiken använder de sig av ordet apeiron som betyder ”gränslös” och ”oändlig” [9, sid. 2]. Oändligheten ansågs då vara något som inte hörde till matematiken och hotade ordningen i den verkliga världen. Aristoteles menade till exempel att det var omöjligt att erkänna oändligheten men samtidigt lika omöjligt att förneka den. Han la till en början fram flera argument till varför man ska acceptera den, där det främsta argumentet var att våra tankar är obegränsade och därmed måste en oändlighet finnas. Tillslut bestämde han sig trots allt för att oändlighetens existens inte är förenlig med verk-



Figur 2: En medeltida förståelse för oändliga mängder. Tagen ur R. Rucker [9].

ligheten [10, sid. 9]. Aristoteles löste problemet genom att dela in oändligheten i två; ”den potentiella oändligheten” och ”den faktiska oändligheten” [9, sid. 3]. Ett exempel på varför den faktiska oändligheten inte existerar i vår fysiska värld menade han var eftersom en kontinuerlig storlek kan delas hur många gånger som helst. Dessa delar kan sedan räknas, en för en, men den som räknar kommer aldrig att bli klar. Om man skulle bli klar med uppgiften innebär det att mängden delar som du delat inte är oändlig utan istället ändlig. På detta sätt skulle oändligheten förstås som enbart potentiell och inte faktisk [5, sid. 45]. Den tyske matematikern Georg Cantor påpekar långt senare att denna uppdelning av oändligheten inte är rimlig då den potentiella oändligheten vilar på grunden att den faktiska oändligheten existerar och därmed är uppdelningen överflödig [9, sid. 3].

Under medeltiden visste man att varje linje innehåller oändligt många punkter. Vidare var det etablerat att en cirkel är en ihopkopplad linje och därmed innehåller även den ett oändligt antal punkter. De medeltida tänkarna ställde sig då frågan om antalet punkter skiljer sig åt mellan två cirklar av olika storlek. Har en större cirkel ett större oändligt antal punkter? Som visat i figur 1 ritade de upp en cirkel med radie ett och en dubbelt så stor cirkel med radie två. Det visade sig att om man drar en radie från mitten, genom den inre cirkeln och ut till den yttre, kommer man snart att inse att varje punkt i den yttre cirkeln har en motsvarande punkt i den inre. Detta innebär att vi har två linjer (cirklar) som var för sig har oändligt

många punkter där den ena cirkeln är större än den andra men de innehåller ändå en lika stor mängd punkter [9, sid. 5].

Det dröjer ända till 1800-talets slut och Georg Cantor, som anses vara grundare till den mängdlära vi känner idag, innan den faktiska oändlighetens existens accepteras. Matematiker som Leibniz och Bolzano har förvisso vidrört ämnet tidigare, men inte utvecklat det fullt ut [3, s. 124]. Under sin matematiska karriär blir Cantor inte enbart den förste att matematiskt precisera oändligheten utan han blir dessutom den förste att bevisa att det finns olika storlekar av oändligheter [3, s. 47]. Cantor får stöd för sina teorier från flera håll men framförallt från den tyske matematikern samt vännen Richard Dedekind som han delar sina matematiska teorier med via frekvent brevväxling [7]. De finns även de som visar starkt motstånd mot Cantors idéer och det är bland annat Leopold Kronecker och Hermann Schwarz. I sin bok *Grundlagen*, som publiceras år 1883, presenterar han för första gången grunden av idéen till Cantormängden [3, s. 116]. Mängden är av särskillt intresse då det går att bevisa att man samtidigt som för varje iteration tar bort en tredjedel av alla kvarvarande punkter är den resterande Cantormängden lika stor och oändlig som den ursprungliga startmängden. I denna uppsats kommer jag att benämna den *ternära* Cantormängden som Cantormängden.

1.3 Mängder

För att börja förstå oändligheter och hur vi jämför dem måste vi först bekanta oss med mängder och dess egenskaper. Här följer ett avsnitt där vi går igenom grunderna i mängdläran samt ett par definitioner som vi kommer att behöva för att bygga vår förståelse.

En mängd är en samling av objekt. Objekten i sig kan bestå av vad som helst, allt vi är intresserade av att gruppera. Det kan till exempel vara siffror så som $\{89, 9, 26\}$ eller bokstäver som $\{s, f, c\}$. Objekten kan till och med själva vara mängder, vilket vi får om vi grupperar våra två tidigare exempel $\{\{s, f, c\}, \{89, 9, 26\}\}$. Vi kallar objekten i mängden för *element* och om vi låter A vara en mängd och x är ett element i den mängden säger vi att "x tillhör A", vilket skrivs $x \in A$, om elementet x däremot inte tillhör mängden A skriver vi istället $x \notin A$.

Ibland är det möjligt att lista alla element i en mängd. Om mängden A består av de tre första positiva heltalen skrivs den $A = \{1, 2, 3\}$. Är mängden däremot väldigt stor och har ett tydligt mönster för elementens uppräkning kan vi underlätta notationen genom att använda tre punkter. Mängden som består av de positiva heltalen från 1 till 20 skrivs $A = \{1, 2, 3, \ldots, 20\}$. Vi använder även notationen med de tre punkterna för att beskriva mängder som är oändliga, mängden som består av alla positiva heltal kan skrivas $\mathbb{Z}^+ = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Vi har alltså etablerat att en mängd kan innehålla olika typer av samt olika många element. En mängd behöver dock inte innehålla några element, den kan även vara tom.

Definition 1.1. Mängden A som inte innehåller några element kallas för den tomma mängden och betecknas $A = \emptyset$.

Två mängder kan innehålla samma element och de anses då vara lika. Om en mängd innehåller några av de element som utgör en annan mängd säger vi att det är en delmängd.

Definition 1.2. Låt A och B vara två mängder. Vi kallar A för en *delmängd* till B om varje element i A även finns i B. Vi betecknar det som $A \subset B$. Det gäller även att om $A \subset B$ och $B \subset A$ så måste $A = B$.

Exempel 1.3. Låt $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{1, 3\}$. Då är $B \subset A$.

Exempel 1.4. Låt A och B vara två mängder så att $A = \{1, 2\}$ och $B = \{2, 1\}$. Då är de två mängderna $A = B$.

Då vi har två eller fler mängder kan vi använda oss av olika mängdoperationer för att bilda nya mängder utifrån de ursprungliga. Mängdoperationerna anger vilka element ur respektive ursprungliga mängder som ska ingå i de nyskapade mängderna.

Definition 1.5. Låt A och B vara två mängder. Mängden av alla element som ligger i någon av mängderna kallas *unionen* och betecknas $A \cup B$.

Exempel 1.6. Låt $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Då är unionen av de två mängderna $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Definition 1.7. Låt A och B vara två mängder. Mängden av de element som ligger i bägge mängderna kallas *snittet* av A och B och betecknas $A \cap B$.

Exempel 1.8. Låt $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{2, 3, 4, 5\}$. Då är snittet av de två mängderna $A \cap B = \{2, 3\}$.

Vi vill nu ha ett sätt att beskriva hur många element en ändlig mängd innehåller eller hur stor mäktighet en oändlig mängd har. Vi kallar detta sätt för mängdens *kardinaltal*.

Definition 1.9. Låt A vara en ändlig mängd. Vi definierar $|A|$ som antalet element i A, även kallat kardinaltalet för A.

Exempel 1.10. Låt A vara en mängd så att $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ då är $|A| = 5$.

Här har vi enbart exemplifierat kardinalitet som ett mått på mäktighet för ändliga

mängder. I kapitel 3 kommer vi att se hur begreppet går att utveckla även för de oändliga mängderna.

Tidigare gick vi igenom vad det innebär att något är en delmängd till en annan mängd. Vi ställer oss då frågan, hur många delmängder kan en mängd maximalt innehålla?

Definition 1.11. Låt A vara en mängd. Mängden av alla delmängder till A kallar vi *potensmängden av* A. Den betecknas som $\mathcal{P}(A)$.

Exempel 1.12. Låt A vara mängden $\{1, 2, 3\}$. Då är dess potensmängd:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

Alltså innehåller potensmängden $\mathcal{P}(A)$ 8 stycken element.

Exempel 1.13. Låt A vara en ändlig mängd så att $|A| = n$, då är antalet element i dess potensmängd

$$|\mathcal{P}(A)| = 2^n.$$

Potensmängden består av alla delmängder till mängden själv. För att konstruera en delmängd har vi två val för varje element i A, antingen är det med i delmängden eller inte. Multiplikationsprincipen ger oss då att för en mängd som innehåller n antal element kommer dess potensmängd alltid att innehålla 2^n element.

Vad innebär det att ”multiplicera” två mängder? Inom mängdläran har man valt att kalla produkten av två mängder för produktmängd.

Definition 1.14. Låt A och B vara mängder. Vi kallar mängden av alla ordnade par $\{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ för *produktmängden* av A och B, och den betecknas $A \times B$.

Exempel 1.15. Låt $A = \{1, 2, 3\}$ och $B = \{4, 5\}$. Då gäller

$$A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (3, 5)\}.$$

Man inser ganska lätt att om A och B är två ändliga mängder gäller att $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

1.4 Funktioner

Avsnittet ger en kort genomgång av funktioner samt ett par definitioner som vi senare använder som verktyg för att förstå hur vi jämför mängder av olika storlekar.

Om A och B är mängder kallar vi $f : A \to B$ för en funktion om f är en regel som på ett entydigt sätt till varje element a från en mängd A ordnar ett element $b = f(a)$ i en mängd B. Om funktionen går från A till B kallar vi A för funktionens definitionsmängd som betecknas D_f och B för funktionens målmängd. Värdemängden som betecknas V_f är mängden av alla värden $f(a)$ som funktionen kan anta.

Definition 1.16. Låt A och B vara mängder. Vi säger att en funktion $f : A \to B$ är *injektiv* om det för alla $x_1, x_2 \in A$ gäller att om $f(x_1) = f(x_2)$ så är $x_1 = x_2$.

På samma sätt gäller att för alla $x_1, x_2 \in A$ så måste $x_1 \neq x_2$ om $f(x_1) \neq f(x_2)$, eftersom det enbart får existera ett element x i definitionsmängden för varje element y i värdemängden.

Exempel 1.17. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = 2x$ är injektiv eftersom om $f(x_1) = f(x_2)$ så är $2x_1 = 2x_2$ vilket betyder att $x_1 = x_2$. Alltså är funktionen injektiv enligt ovanstående definition.

Exempel 1.18. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = x^2$ är inte injektiv eftersom $f(-1) = 1$ samtidigt som $f(1) = 1$. Alltså finns det två element i definitionsmängden som går till samma element i målmängden.

Definition 1.19. Låt A och B vara mängder. Vi säger att en funktion $f : A \to B$ är *surjektiv* om det för alla $y \in B$ existerar ett $x \in A$ på så sätt att $f(x) = y$. Alltså är alla element som tillhör funktionens målmängd ett funktionsvärde.

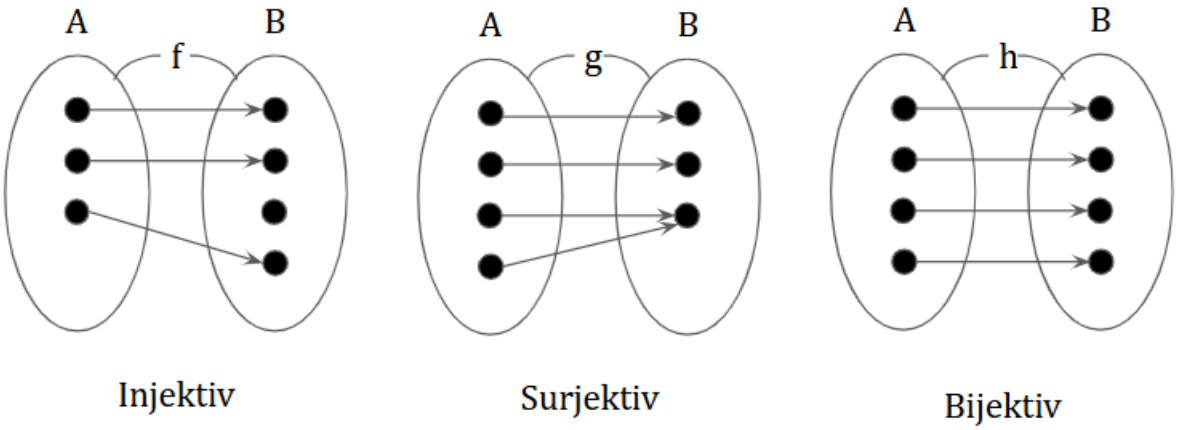
Exempel 1.20. Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = 2x + 1$ är surjektiv. Om vi tar något $y \in \mathbb{R}$ så får vi $y = 2x + 1$. Löser vi ut x får vi $x = \frac{y-1}{2}$ vilket ger att

$$f(x) = 2x + 1 = 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1 = y.$$

Eftersom $f(x) = y$ vet vi att funktionen är surjektiv.

Definition 1.21. Låt f vara en funktion $f : A \to B$. Vi säger att funktionen är en *bijektion* från A till B om funktionen är både injektiv och surjektiv. Alltså att det för varje $b \in B$ finns ett unikt element $a \in A$ sådant att $f(a) = b$.

Exempel 1.22. Vi visade i exempel 1.20 att funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som ges av $f(x) = 2x + 1$ är surjektiv. Funktionen är även injektiv då $f(x_1) = f(x_2)$ ger



Figur 3: Bilden visar till vänster en injektiv funktion $f : A \to B$, i mitten en surjektiv funktion $g : A \to B$ och till höger en bijektiv funktion $h : A \to B$.

$2x_1 + 1 = 2x_2 + 1$, vilket innebär att $x_1 = x_2$. Eftersom vi har visat att funktionen är både injektiv och surjektiv vet vi att det innebär att funktionen är bijektiv.

Definition 1.23. Då en funktion är bijektiv så finns det en invers till funktionen. Alltså om $f : A \to B$ så är inversen $f^{-1} : B \to A$. Alltså blir varje element $b \in B$ skickat till ett unikt element $a \in A$ på så sätt att $f(b) = a$. Alltså är funktionens invers bijektiv.

Definition 1.24. Låt funktionen $f : A \to B$ och $g : B \to C$. Vi kan då skapa en ny funktion $h = g \circ f$ på så sätt att $h(x) = g(f(x))$. Den nya funktionen $h(x)$ är alltså en sammansatt funktion där $h : A \to C$.

En sammansatt funktion av två eller flera injektiva funktioner är injektiv. Samma gäller för surjektiva och därmed även för bijektiva funktioner.

Definition 1.25. Låt A vara en mängd. Funktionen $f : A \to A$ kallas *identitetsfunktionen* om den är definierad på så sätt att $f(a) = a$ för varje $a \in A$. Alltså är både $V_f = A$ och $D_f = A$.

1.5 Bijektiva funktioner

Eftersom bijektioner spelar en avgörande roll i jämförandet av mängders storlek ska vi i detta avsnitt titta närmare på bijektioner mellan olika mängder.

Exempel 1.26. Låt A och B vara mängderna sådana att $A = [0, 1]$ och $B = [0, 3]$. En bijektiv funktion mellan intervallen $f : A \to B$ ges av funktionen $f(x) = 3x$. Vi vet att den är injektiv eftersom $f(x_1) = f(x_2)$ ger $3x_1 = 3x_2$ vilket medför att

$x_1 = x_2$. Vi ser vidare att funktionen är en surjektiv funktion eftersom om vi tar något $y \in B$ och löser ut x så är $x = \frac{y}{3}$. Därmed existerar det ett x för varje y, $f(x) = 3x = 3(\frac{y}{3}) = y$.

Vi generaliserar exemplet för att gälla mellan intervallet $A = [0, 1]$ och vilket annat slutet intervall som helst, $B = [a, b]$ där $a < b$.

Exempel 1.27. En bijektiv funktion $f : [0, 1] \to [a, b]$ ges av

$$f(x) = (b - a)x + a$$

Vi ser att funktionen är injektiv eftersom $f(x_1) = f(x_2)$ medför att $x_1 = x_2$.

Den är även surjektiv eftersom för något y i målmängden finns ett x i definitionsmängden så att $f(x) = y$. Vi får detta genom att välja något $y \in [a, b]$ samt löser ut $x = \frac{(y-a)}{(b-a)}$. Vi ser att $f(x) = (b - a)x + a = (b - a)\frac{(y-a)}{(b-a)} + a = y$. Alltså är funktionen både injektiv och surjektiv och därmed även bijektiv.

Eftersom funktionen är bijektiv vet vi att den har en invers. Alltså finns det även en funktion $f^{-1} : [a, b] \to [0, 1]$.

Nu vet vi hur vi skapar bijektioner mellan två slutna intervall. Vi går vidare för att titta på hur vi skapar bijektioner mellan öppna och slutna intervall genom att titta på bijektionen mellan det stängda intervallet $[0, 1]$ till det halvöppna intervallet $(0, 1]$.

Exempel 1.28. En bijektiv funktion $f : [0, 1] \to (0, 1]$ ges av

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{då } x = 0 \\ \frac{1}{n+1}, & \text{då } x = \frac{1}{n}, \text{ där } n \geq 2, n \in \mathbb{N} \\ x, & \text{annars} \end{cases}$$

Eftersom vi kan hitta en invers till $f(x)$ vet vi att funktionen är bijektiv.

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 0, & \text{då } x = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{n-1}, & \text{då } x = \frac{1}{n}, \text{ där } n \geq 3, n \in \mathbb{N} \\ x, & \text{annars} \end{cases}$$

Exemplet utgår helt och hållet från samma princip som vi såg i tankeexperimentet Hilberts Hotell. I detta fall utgörs våra hotellrum av mängden $H = \{x \mid x = \frac{1}{n} \text{ för något } n \in \mathbb{N}\}$ och vi ”flyttar gäster” enligt principen $f(x)$ för att göra plats åt vår ”nya gäst” som i detta fall representeras av 0.

1.6 Representationer av reella tal

I detta avsnitt presenteras en sats för att avgöra decimalutvecklingars entydighet, vilket vi kommer att använda senare i uppsatsen. Vi kommer att använda oss av den geometriska summan och dess egenskaper. Här följer därför först en kort definition av den geometriska summan.

Definition 1.29. En geometrisk summa är en summa där kvoten av två på varandra följande termer är konstant. En geometrisk summa med kvot x kan skrivas

$$\sum_{k=0}^{n} ax^k = a + ax + ax^2 + \cdots + ax^n$$

och det gäller att

$$a + ax + ax^2 + \cdots + ax^n = a\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

om $x \neq 1$. Vidare är formeln för en oändlig geometrisk serie [8, sid. 178]

$$\sum_{k=0}^{\infty} ax^k = a\frac{1}{1 - x} \quad \text{, där } |x| < 1. \tag{1}$$

Det vanligaste sättet att representera de reella talen på är genom decimalutveckling. En decimalutveckling av det positivt reella talet x kan uttryckas som en serie

$$x = \sum_{k=m}^{\infty} s_k 10^{-k}$$

där $m \in \mathbb{Z}$ och alla $s_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$.

När vi skriver ut decimalutvecklingarna kan vi använda olika sorters notation. Till exempel skriver vi det irrationella talet $\sqrt{2} = 1.414\ldots$, eftersom det i utvecklingen inte finns en sekvens av siffror som upprepar sig. De tre punkterna i slutet av högerledet innebär att decimalutvecklingen fortsätter i oändlighet. När decimalutvecklingen upprepar sig använder vi istället ett streck ovanför den eller de siffror som upprepas periodiskt, så som $0.\overline{1} = 0.111\ldots$ eller $0.\overline{123} = 0.123123123\ldots$. De rationella talen har i sin tur en decimalutveckling där någon sekvens av siffror upprepas, så som $\frac{1}{3} = 0.333\ldots = 0.\overline{3}$ eller $\frac{1}{5} = 0.2\overline{0}$.

Decimalutvecklingen $0.2\overline{0}$ representerar alltså det reella talet $\frac{1}{5}$. I många fall representeras ett reellt tal av enbart en decimalutveckling. Det finns dock reella tal som kan representeras av två olika decimalutvecklingar. Till exemepel har vi att

$$\begin{aligned}0.1\overline{9} =&0.1 + 0.0\overline{9} = 0.1 + \frac{1}{100} \cdot \left(\frac{9}{10^0} + \frac{9}{10^1} + \dots\right) = \\ =&0.1 + \frac{1}{100} \sum_{n=0}^{\infty} 9 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0.1 + \frac{1}{100} \cdot \left(\frac{9}{1 - \frac{1}{10}}\right) = \\ =&0.1 + \frac{1}{100} \cdot 10 = 0.1 + 0.1 = 0.2,\end{aligned}$$

alltså är

$$\frac{1}{5} = 0.1999\ldots = 0.2000\ldots.$$

Det visar sig, vilket vi ser i sats 1.30, att dessa två dock är de enda existerande decimalutvecklingarna som representerar $\frac{1}{5}$.

Sats 1.30. *För alla reella tal x finns en unik decimalutveckling, förutom för de tal som är på formen $x = \frac{a}{10^b}$ där $a, b \in \mathbb{Z}$. För dessa tal finns precis två decimalutvecklingar.*

Bevis. Vi antar att det finns två olika decimalutvecklingar s, d vars summa båda konvergerar till det reella talet x, alltså har vi att

$$x = \sum_{k=m}^{\infty} s_k 10^{-k} = \sum_{k=m}^{\infty} d_k 10^{-k}. \tag{2}$$

Om den första decimalen som skiljer dem åt är på position n, så kan vi anta att $s_n < d_n$. Vilken av dem vi antar som störst har ingen betydelse, om s_n istället är större än d_n ändrar vi namnen på decimalutvecklingarna. Vi kan dela upp serierna i en del där k går från m till $n-1$ och en del där k går från n, där utvecklingarna börjar skilja sig åt, till oändligheten:

$$\sum_{k=m}^{n-1} s_k 10^{-k} + \sum_{k=n}^{\infty} s_k 10^{-k} = \sum_{k=m}^{n-1} d_k 10^{-k} + \sum_{k=n}^{\infty} d_k 10^{-k}.$$

När vi subtraherar de identiska summorna från bägge sidor får vi att

$$\sum_{k=n}^{\infty} s_k 10^{-k} = \sum_{k=n}^{\infty} d_k 10^{-k}. \tag{3}$$

Om vi nu använder oss av att alla $d_k \geq 0$, alla $s_k \leq 9$ samt av formeln för en oändlig geometrisk serie (1) får vi att

$$d_n 10^{-n} \leq \sum_{k=n}^{\infty} d_k 10^{-k} = \sum_{k=n}^{\infty} s_k 10^{-k} \leq s_n 10^{-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} =$$

$$= s_n 10^{-n} + 10^{-n} 9 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k} = s_n 10^{-n} + 10^{-n} \left(\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} \right) =$$

$$= s_n 10^{-n} + 10^{-n} \cdot 1 = 10^{-n}(s_n + 1).$$

Vi får alltså att $d_n 10^{-n} \leq 10^{-n}(s_n + 1)$. Kombinerar vi detta med vår tidigare antagna olikhet att $s_n < d_n$ får vi att $s_n < d_n \leq s_n + 1$. Eftersom $s_n, d_n \in \mathbb{N}$ och s_n är strikt mindre än d_n blir olikheten $\leq$ istället en likhet och vi får att $d_n = s_n + 1$.

Vi har nu visat att (2) enbart gäller för när den första decimalen som skiljer de två representationerna åt är precis ett heltalssteg ifrån varandra. Vi vill nu visa att detta också enbart gäller då $d_k = 0$ och $s_k = 9$ för alla $k \geq n + 1$. Vi vet från (3) att likhet gäller mellan de båda summorna. Alltså måste det även gälla likhet då vi adderar den första position som skiljer dem åt med resterande decimaler i utvecklingen.

$$10^{-n} s_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} s_n 10^{-k} = 10^{-n} d_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} d_n 10^{-k}.$$

Vi använder oss nu av att $d_n = s_n + 1$ och får då

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} s_n 10^{-k} = 10^{-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} d_n 10^{-k}.$$

Eftersom $d_k, s_k \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ vet vi att den lägsta siffra s_k och d_k kan anta är 0 och den högsta är 9. Därmed gäller olikheterna

$$10^{-n} \leq 10^{-n} + \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k 10^{-k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} s_k 10^{-k} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 10^{-n}.$$

Eftersom vi börjar med 10^{-n} och slutar med 10^{-n} innebär det att alla olikheter emellan dem är likheter. Därmed har vi att

$$\begin{cases} \sum_{k=n+1}^{\infty} d_k 10^{-k} = 0 & (1) \\ \sum_{k=n+1}^{\infty} s_k 10^{-k} = \sum_{k=n+1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} & (2). \end{cases} \tag{1}$$

(1) ger direkt att alla $d_k = 0$ eftersom alla $d_k \geq 0$ och därmed är positiva. Vi skriver nu om (2) genom att subtrahera utvecklingen med s_k från bägge led, vilket gör att högerledet blir lika med noll, så

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} (9 - s_k) \cdot 10^{-k} = 0. \tag{3}$$

Då vi vet att summan av serien i (3) är 0 samt att alla dess termer är ickenegativa måste detta innebära att alla termer är 0. Alltså måste $s_k = 9$ för alla $k \geq n + 1$.

$s_k \leq 9$ och vi vet att $(3) \geq 0$ så ger $(9 - s_k) = 0$ att $s_k = 9$ för alla $k \geq n + 1$.

□

Därmed är det visat att de reella tal som är på formen $\frac{a}{10^b}$ och kan representeras av fler än en decimalutveckling har högst två utvecklingar. Dessa två decimalutvecklingar som skiljer sig på plats n kommer enbart att skilja sig med det hela talet 1 så att $d_n = s_n + 1$ och de bägge måste vara en oändlig utveckling där d_n följs av enbart $\overline{0}$ och s_n följs av enbart $\overline{9}$. Vi ser alltså att för att två decimalutvecklingar ska vara lika betyder det antingen att alla decimaler är lika eller så är de ”grannar”. Att vara ”grannar” innebär att decimalerna som skiljer sig måste skilja sig med ett heltalssteg från varandra. Heltalssteget gäller även för siffrorna 0 och 9 eftersom vi kan se dessa som just grannar om vi föreställer oss att siffrorna ligger i en cirkel, där 0 startar cirkeln och 9 avslutar den, därmed är även de ”grannar”.

Sats 1.30 gäller inte enbart för utvecklingar i bas 10 utan samma bevis går att göra för utvecklingar i andra baser, såsom den binära och ternära.

Definition 1.31. En ternär utveckling av det reella talet x kan skrivas som

$$x = \sum_{k=m}^{\infty} s_k 3^{-k}$$

där $s_k \in \{0, 1, 2\}$ och $m \in \mathbb{Z}$.

Exempel 1.32. $0.021021021_3 \cdots = 0.\overline{021}_3$ är den ternära utvecklingen av talet $\frac{7}{26}$ då

$$
\begin{aligned}
0.\overline{021}_3 =& \frac{0}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{0}{3^4} + \frac{2}{3^5} + \frac{1}{3^6} + \frac{0}{3^7} + \frac{2}{3^8} + \frac{1}{3^9} + \dots \\
=& \frac{2}{3^2}\left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \dots\right) + \frac{1}{3^3}\left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \dots\right) \\
=& \frac{2}{3^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3^3)^n} + \frac{1}{3^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(3^3)^n} \\
=& \left(\frac{2}{9} + \frac{1}{27}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3^3}}\right) = \frac{7}{26}.
\end{aligned}
$$

Precis som i de decimala utvecklingarna kan två ternära utvecklingar representera samma tal, så som

Exempel 1.33.

$$\frac{1}{3} = 0.0\overline{2}_3 = 0.1\overline{0}_3.$$

Sats 1.34. *För alla reella tal x finns en unik ternärutveckling, förutom för de tal som är på formen $x = \frac{a}{3^b}$ där $a, b \in \mathbb{Z}$. För dessa tal finns precis två ternärutvecklingar.*

Bevis. Beviset är analogt med beviset för sats 1.30. □

Definition 1.35. Alla reella tal kan även representeras med en binärutveckling av en serie.

$$x = \sum_{k=m}^{\infty} s_k 2^{-k}$$

där $s_k \in \{0, 1\}$ och $m \in \mathbb{Z}$. Även i den binära representationen kan två utvecklingar representera samma reella tal. Så som

Exempel 1.36.

$$\frac{1}{8} = 0.001_2 = 0.001\overline{0}_2 = 0.000\overline{1}_2$$

Sats 1.37. *För alla reella tal x finns en unik binärutveckling, förutom för de tal som är på formen $x = \frac{a}{2^b}$ där $a, b \in \mathbb{Z}$. För dessa tal finns precis två binärutvecklingar.*

Bevis. Beviset är analogt med beviset för sats 1.30. □

Vi kommer att ha nytta av sats 1.30 på flera ställen i den här uppsatsen. Den gör det tydligare att avgöra vilka tal som ska ingå i vilka mängder, till exempel då vi går igenom beviset för att de reella talen är överuppräkneliga.

2 Oändliga mängder

För att kunna jämföra två mängders storlek måste vi först veta hur vi avgör deras storlek. Vi säger att två mängder A, B har samma kardinalitet (är lika stora) om det finns en bijektiv funktion $f : A \to B$. Om mängden A är ändlig måste även mängd B vara ändlig samt ha lika många element, så att $|A| = |B|$. Hur ser det då ut för oändliga mängder? Det ska vi ta reda på i detta kapitel.

2.1 Uppräkneliga mängder

Den ”enklaste” oändliga mängden är de naturliga talen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. De mängder som har samma kardinalitet som $\mathbb{N}$, alltså då det finns en bijektiv funktion mellan mängden och $\mathbb{N}$, kallas uppräkneliga. De kallas uppräkneliga eftersom det just går att räkna upp elementen ett efter ett.

Definition 2.1. Vi kallar mängden A för uppräknelig om det finns en bijektiv funktion $f : \mathbb{N} \to A$.

Enligt definitionen är alla uppräkneliga mängder oändliga, men på flera ställen i uppsatsen förekommer uttrycket ”uppräkneligt oändlig” då det särskilt behövs understrykas.

Sats 2.2. *Mängden av alla heltal $\mathbb{Z}$ är uppräkneligt oändlig.*

Bevis. Vi börjar med att definiera en injektiv funktion $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

$$f(x) = \begin{cases} -2x & \text{om } x < 0 \\ 2x + 1 & \text{om } x \geq 0. \end{cases}$$

Vi ser att f har en invers som ges av funktionen $f^{-1} : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -\frac{x}{2} & \text{om } x \text{ jämn} \\ \frac{(x-1)}{2} & \text{om } x \text{ udda.} \end{cases}$$

Eftersom f har en invers betyder det att f är en bijektiv funktion. Bijektionen ger uppräkningen:

n	1	2	3	4	5	6	...
$s_n = f^{-1}(n)$	0	-1	1	-2	2	-3	...

Eftersom det alltså existerar en bijektiv funktion mellan de naturliga talen $\mathbb{N}$ och heltalen $\mathbb{Z}$ innebär det att mängden av alla heltal är uppräknelig. □

Sats 2.3. *Varje oändlig mängd innehåller en uppräkneligt oändlig delmängd.*

Bevis. Låt S vara en oändlig mängd. Vi väljer ett element $s_1 \in S$ och noterar att $S \setminus \{s_1\}$ fortfarande är oändligt. Vi väljer ett element $s_2 \in S \setminus \{s_1\}$ och noterar att även $S \setminus \{s_1, s_2\}$ är oändligt. Vi fortsätter att välja element på detta sätt att för varje $n \in \mathbb{N}$ så väljer vi $s_n \in S \setminus \{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$. Fortsätter vi att välja elementen oändligt många gånger kommer de att skapa delmängden $T = \{s_1, s_2, s_3, \ldots\}$. Delmängden T är därmed både oändlig och uppräknelig eftersom det finns en bijektiv funktion $\mathbb{N} \to T$. □

Sats 2.4. *Varje oändlig delmängd av en uppräknelig mängd är uppräknelig.*

Bevis. Låt T vara en uppräknelig oändlig mängd och $S \subseteq T$, där S är oändlig. Eftersom T är uppräkneligt oändlig vet vi att det finns en bijektiv funktion $f : \mathbb{N} \to T$. Låt sen funktionen $g : S \to T$ vara den injektiva funktionen som för varje $s \in S$ ger $g(s) = s$. Genom att använda oss av f^{-1} kan vi få en sammansatt injektiv funktion $f^{-1} \circ g : S \to \mathbb{N}$. Eftersom vi vet att S är oändlig och har skapat en injektiv funktion från S till $\mathbb{N}$ vet vi att S är som mest uppräknelig och eftersom det inte finns någon oändlig mängd som är mindre än de uppräkneliga mängderna så måste även S vara uppräknelig. □

Sats 2.5. *En uppräknelig union av uppräkneliga mängder är uppräknelig.*

Bevis. Vi definierar den uppräkneliga unionen av mängder för varje $n \in \mathbb{N}$ som

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Vi ska nu se att det finns en bijektiv funktion mellan $\mathbb{N}$ och elementen i S. Eftersom varje mängd S_n är uppräknelig börjar vi med att rada upp elementen i S_1 på följande vis

$$S_1 = \{s_{11}, s_{12}, s_{13}, \ldots\}.$$

Fortsätter vi att rada upp övriga element i $S_2, S_3, S_4, \ldots$ på samma vis får vi tillslut en lista av element i rader

$$
\begin{array}{lllll}
s_{11}, & s_{12}, & s_{13}, & s_{14}, & \cdots \\
s_{21}, & s_{22}, & s_{23}, & s_{24}, & \cdots \\
s_{31}, & s_{32}, & s_{33}, & s_{34}, & \cdots \\
s_{41}, & s_{42}, & s_{43}, & s_{44}, & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Genom att gå igenom listan diagonalt kan vi skapa en ny ordning i uppräkningen av alla element i de olika mängderna.

$$
\begin{array}{lllllll}
s_{11}, & \rightarrow & s_{12}, & & s_{13}, & \rightarrow & s_{14}, \quad \cdots \\
& \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
s_{21}, & & s_{22}, & & s_{23}, & & s_{24}, \quad \cdots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\
s_{31}, & & s_{32}, & & s_{33}, & & s_{34}, \quad \cdots \\
& \swarrow & & & & & \\
s_{41}, & & s_{42}, & & s_{43}, & & s_{44}, \quad \cdots \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \quad \ddots
\end{array}
$$

Vi får då en uppräkning av S:

$$S = \{s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{31}, s_{22}, s_{13}, s_{14}, s_{23}, s_{32}, s_{41}, \dots\}.$$

Stöter vi på ett element som redan är med i uppräkningen hoppar vi över det elementet. Vi vet från definitionen av uppräkneliga mängder att om S är oändlig innebär det att vi nu skapat en bijektiv funktion mellan $\mathbb{N}$ och S och därmed bevisat att en uppräknelig union av uppräkneliga mängder är uppräknelig. □

Sats 2.6. *Produktmängden av uppräkneliga mängder är uppräknelig.*

Bevis. Låt A och B vara två uppräkneliga mängder. Vi kan då skriva dem som $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ och $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots\}$. Elementen i produktmängden $A \times B$ kommer att kunna listas som tupler av (a_i, b_j) på följande vis

$$
\begin{array}{llll}
(a_1, b_1), & (a_1, b_2), & (a_1, b_3), & \cdots \\
(a_2, b_1), & (a_2, b_2), & (a_2, b_3), & \cdots \\
(a_3, b_1), & (a_3, b_2), & (a_3, b_3), & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots
\end{array}
$$

Precis som i sats 2.5 går vi nu igenom elementen diagonalt och skapar en ny uppräkning. På så sätt har vi även här skapat en bijektiv funktion mellan vår produktmäng och de naturliga talen. Alltså är produktmängden av uppräkneliga mängder uppräknelig.

□

Sats 2.7. *Mängden av alla rationella tal* $\mathbb{Q}$ *är uppräkneligt oändlig.*

Bevis. För varje $n \in \mathbb{N}$ låt $A_n = \{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}\}$. Vi får då

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Eftersom vi därmed har en uppräknelig union av uppräkneliga mängder följer det från sats 2.5 att även $\mathbb{Q}$ är uppräkneligt oändlig.

□

Definition 2.8. Ett reellt tal α är algebraiskt om det är ett nollställe $\mathcal{P}(\alpha) = 0$ till ett polynom med heltalskoefficienter, dvs polynomet $\mathcal{P}(x)$ har formen

$$\mathcal{P}(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

där alla $a_k \in \mathbb{Z}$,$n \in \mathbb{N}$ och $a_n \neq 0$.

Sats 2.9. *Mängden av alla algebraiska tal* $\mathbb{A}$ *är uppräkneligt oändlig.*

Bevis. Om $\mathcal{P}(x)$ är ett polynom med heltalskoefficienter där inte alla koefficienter är 0, låt $L_{\mathcal{P}(x)}$ vara mängden rötter till polynom $\mathcal{P}(x)$ med heltalskoefficienter så att

$$L_{\mathcal{P}(x)} = \{\alpha \in \mathbb{C} : \mathcal{P}(\alpha) = 0\}.$$

Vi vet från algebrans fundamentalsats att ett polynom av grad n kommer att ge maximalt n rötter till polynomet $\mathcal{P}(x)$. Alltså vet vi att

$$|L_{\mathcal{P}(x)}| \leq n,$$

vilket gör $L_{\mathcal{P}(x)}$ ändligt. Vidare har vi att för ett givet n kommer ett polynom av grad högst n att ha $n + 1$ heltalskoefficienter. Till exempel är $x^2 + 2 = 0$

ett polynom av grad 2 som har 3 stycken heltalskoefficienter: $1, 0, 2$. Låt P_n vara mängden av alla nollskilda polynom av grad högst n. Eftersom vi vet från sats 2.2 att $\mathbb{Z}$ är en uppräknelig mängd samt av sats 2.6 att produktmängden av uppräkneliga mängder är uppräknelig så vet vi att produktmängden $\mathbb{Z}^{n+1}$ också är uppräknelig. Vi definierar sedan den bijektiva funktionen $f : \mathbb{Z}^{n+1} \to P_n$ som ger $f(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Alltså är även P_n uppräknelig. Vidare definierar vi $\mathbb{A}_n = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \mathcal{P}(\alpha) = 0 \text{ för något } \mathcal{P}(x) \in P_n\}$. Vi får alltså

$$\mathbb{A}_n = \bigcup_{\mathcal{P}(x) \in P_n} L_{\mathcal{P}(x)}.$$

Eftersom $L_{\mathcal{P}(x)}$ ändligt och P_n uppräknelig innebär det att även mängden $\mathbb{A}_n$ är uppräknelig. Detta ger att vi får en uppräknelig mängd sådan att

$$\mathbb{A} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{A}_n \text{ ,där } n \in \mathbb{N}.$$

Alltså är de algebraiska talen en uppräknelig union av uppräkneliga mängder och vi vet från sats 2.5 att det innebär att de algebraiska talen är uppräkneliga. □

2.2 Överuppräkneliga mängder

Vad händer då om vi har en oändlig mängd där det inte existerar en bijektiv funktion med de naturliga talen? Vi säger då att mängden är *överuppräkneligt oändlig*, eller bara överuppräknelig.

Sats 2.10. *Mängden av alla reella tal $\mathbb{R}$ är överuppräkneligt oändlig.*

Bevis. Beviset som följer kallas Cantors diagonala argument vilket är Cantors andra bevis som publicerades i en artikel från år 1874 [4, s. 24]. Till skillnad från de föregående bevisen gjorde sig detta bevis bättre genom att motbevisa motsatsen, alltså att mängden av alla reella tal skulle vara uppräkneligt oändlig. Vi antar alltså att de reella talen $\mathbb{R}$ är en uppräknelig mängd. Eftersom vi från sats 2.4 vet att varje delmängd av en uppräknelig mängd är uppräknelig så måste även mängden $S = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ vara uppräknelig. Detta innebär att vi ska kunna rada upp elementen i S ett efter ett utan att missa ett element. En uppräkning av decimalutvecklingarna skulle då se ut som:

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 0, s_{11}s_{12}s_{13}s_{14}\ldots, \\
s_2 &= 0, s_{21}s_{22}s_{23}s_{24}\ldots, \\
s_3 &= 0, s_{31}s_{32}s_{33}s_{34}\ldots, \\
s_4 &= 0, s_{41}s_{42}s_{43}s_{44}\ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
s_n &= 0, s_{n1}s_{n2}s_{n3}s_{n4}\ldots, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Vi kommer nu alltid att kunna hitta ett element $a = 0, a_1a_2a_3\ldots$ som skiljer sig från de vi radat upp på första position i s_1, andra position i s_2 och n :te position i s_n. Detta genom att vi följer principen

$$
a_i = \begin{cases} s_{ii} + 1, & \text{då } s_{ii} \leq 7 \\ 1, & \text{då } s_{ii} \geq 8 \end{cases}
$$

Vi konstruerar a genom att diagonalt gå igenom vår uppradade lista av element i S och ändra deciamlerna enligt principen ovan

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 0, \boxed{s_{11}}s_{12}s_{13}s_{14}\ldots, \\
s_2 &= 0, s_{21}\boxed{s_{22}}s_{23}s_{24}\ldots, \\
s_3 &= 0, s_{31}s_{32}\boxed{s_{33}}s_{34}\ldots, \\
s_4 &= 0, s_{41}s_{42}s_{43}\boxed{s_{44}}\ldots,
\end{aligned}
$$

Eftersom vi konstruerat a på ett sätt där vi vet att vi inte kommer att få ett tal som slutar i en evig upprepning av 9:or eller 0:or vet vi från sats 1.30 att utvecklingen är unik. Därmed är detta tal garanterat inte med i vår lista för element i S. Vad händer då om vi helt enkelt lägger till a i S? Vi upprepar proceduren på samma sätt och kommer snart att inse att det alltid kommer att gå att hitta ett element som skiljer sig från de uppradade genom att använda Cantors diagonala argument. Alltså är intervallet $[0, 1]$ överuppräkneligt. Detta innebär att hela mängden för reella tal är överuppräknelig.

□

Vi kan dela upp de reella talen på flera sätt. Antingen i de två mängderna rationella och irrationella tal eller i de algebraiska och de trancendentala talen. De algebraiska talen är de tal som är rötter till polynom med heltalskoefficienter. Ett algebraiskt tal är till exempel $\sqrt{2}$ eftersom det är roten och lösningen till polynomet $x^2-2=0$, vi får att $x=\pm\sqrt{2}$. De trancendentala talen är de reella tal som inte är rötter till något polynom med heltalskoefficienter, som till exempel talet π. Cantor bevisade år 1874 att mängden algebraiska tal är uppräknelig och med det bevisade han även att mängden trancendenta tal är överuppräknelig [3, sid. 51]. Eftersom de reella talen är överuppräkneliga (vilket bevisas i sats 2.10) och vi vet från sats 2.9 att de algebraiska är uppräkneliga blir de trancendenta talen komplementet till de algebraiska talen utifrån mängden reella tal, alltså måste de trancendenta talen vara överuppräkneliga [4, sid. 25]. Upptäckten var relativt chockerande då man intuitivt tidigare trott att de algebraiska talen var fler än de trancendenta.

Sats 2.11. *De trancendenta talen $\mathbb{T}$ är överuppräkneliga.*

Bevis. Vi vet att de reella talen går att dela upp i två disjunkta mängder på så sätt att $\mathbb{R}=\mathbb{A}\cup\mathbb{T}$. Vidare vet vi från sats 2.9 att $\mathbb{A}$ är en uppräknelig mängd. Då följer det från sats 2.5 att om även $\mathbb{T}$ varit en uppräknelig mängd hade även $\mathbb{R}$ varit en uppräknelig mängd, och det vet vi från sats 2.10 att den inte är. Alltså måste $\mathbb{T}$ vara en överuppräknelig mängd. □

3 Kardinaltal

3.1 Kardinalitet

Vi vet från avsnitt 1.3 om mängder och från definitionen 1.9 hur vi avgör en mängds storlek eller mäktighet genom att använda oss av dess *kardinalitet* och *kardinaltal*. Däremot har vi hittills enbart sett hur kardinalitet beter sig för de ändliga mängderna. Till exempel vet vi att om A och B är ändliga mängder och det finns en injektiv funktion $f : A \to B$ så gäller det att $|A| \leq |B|$. Vidare vet vi att om funktionen mellan A och B är bijektiv så gäller det att bägge mängderna innehåller lika många element, $|A| = |B|$. Då vi per definition inte kan räkna antalet element i de oändliga mängderna måste vi istället börja tala om de oändliga mängdernas *mäktighet* och utifrån den bestämma deras kardinalitet och kardinaltal.

Definition 3.1. Låt A och B vara två oändliga mängder. Vi säger att de två mängderna har samma mäktighet (eller kardinalitet) om det finns en bijektiv avbildning $f : A \to B$. I så fall skriver vi $A \sim B$.

Definition 3.1 fungerar även för ändliga mängder.

Sats 3.2. *Relationen $A \sim B$ är en ekvivalensrelation.*

Bevis. Låt A, B, C vara mängder. Relationen $\sim$ (dvs. ”att ha samma kardinalitet”) är då

1. Reflexiv. Eftersom identitetsfunktionen $f : A \to A$ är bijektiv så gäller att $A \sim A$, alltså att A har samma kardinalitet som sig själv.
2. Transitiv. Om det finns en bijektiv funktion $f : A \to B$ och en bijektiv funktion $g : B \to C$ så blir den sammansatta funktionen en bijektiv funktion $g \circ f : A \to C$. Alltså gäller det att om A och B har samma kardinalitet $A \sim B$ och B och C har samma kardinalitet $B \sim C$ så har A och C samma kardinalitet $A \sim C$.
3. Symmetrisk. Om det finns en bijektiv funktion $f : A \to B$ så finns en invers funktion sådan att $f^{-1} : B \to A$ som även den är bijektiv. Alltså gäller att om A har samma kardinalitet som B, $A \sim B$, så har B samma kardinalitet som A, alltså $B \sim A$.

□

Vi ser här att relationen $\sim$ mellan mängder skapar ekvivalensklasser för mängder med lika stor mäktighet. Vi kallar varje sådan ekvivalensklass för *kardinaltal*.

Definition 3.3. Låt A vara en mängd. Vi säger att alla mängder som ingår i samma ekvivalensklass har samma kardinalitet och kallar ekvivalensklassen för deras kardinaltal. Vi skriver kardinaltalet som $|A|$.

Då två oändliga mängder A och B ingår i samma ekvivalensklass $A \sim B$ har de samma kardinaltal och därmed $|A| = |B|$.

Om vi kan hitta en bijektiv funktion mellan två oändliga mängder kan vi alltså veta att de är lika mäktiga och därmed har samma kardinalitet. Detta går att göra med flera mängder och vi kan se här att flera mängder kan tillhöra samma kardinalitet.

Definition 3.4. Kardinaltalet för mängden av de naturliga talen $\mathbb{N}$ betecknas $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ och uttalas *alef-noll*. Enligt definition 2.1 vet vi att alla mängder där vi kan skapa en bijektiv avbildning till de naturliga talen kallas för uppräkneliga mängder. Därmed vet vi att alla uppräkneliga mängder tillhör samma kardinalitet (ekvivalensklass) och betecknas med samma kardinaltal, $\aleph_0$.

Exempel 3.5. Vi har sett från sats 2.7 att det går att skapa en bijektiv funktion mellan de rationella talen $\mathbb{Q}$ och de naturliga talen $\mathbb{N}$. Alltså vet vi att de har samma kardinalitet och delar samma kardinaltal. Alltså är $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Exempel 3.6. Vi vet från sats 2.2 att det går att skapa en bijektiv funktion mellan heltalen och de naturliga talen. Alltså vet vi att de delar samma kardinalitet och därmed samma kardinaltal $|\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = \aleph_0$.

För de överuppräkneliga mängderna där det går att skapa en bijektiv avbildning till de reella talen $\mathbb{R}$ har vi ett speciellt kardinaltal.

Definition 3.7. Kardinaltalet för de reella talen $\mathbb{R}$ betecknas $|\mathbb{R}| = c$. Vi använder bokstaven c från det engelska ordet *continuum*. För alla mängder som det går att skapa en bijektiv avbildning till mängden för de reella talen $\mathbb{R}$ har samma kardinalitet och därmed samma kardinaltal, c.

Definition 3.8. Om det finns en injektiv funktion från en oändlig mängd A till en oändlig mängd B så säger vi att A är mindre mäktig än eller lika mäktig som B. Vi betecknar det som $A \precsim B$.

Sats 3.9. *Relationen $A \precsim B$ är en partiell ordning på klassen av mängder.*

Bevis. Låt A, B och C vara mängder, relationen $\precsim$ är då

1. Reflexiv. Då identitetsfunktionen är en bijektiv avbildning fyller den kravet på att det ska finnas en injektiv funktion $f : A \to A$. Alltså är $A \sim A$ och därmed även $A \precsim A$.

2. Transitiv. Om vi antar att $A \precsim B$ och $B \precsim C$ så kommer det att finnas en injektiv funktion som utgörs av de två funktionerna $f : A \to B$ och $g : B \to C$ som bildar den sammansatta injektiva funktionen $g \circ f : A \to C$. Vi får alltså $A \precsim C$.

3. Antisymetrisk. Att relationen är antisymetrisk är svårare att bevisa. Det innebär att om vi har två injektiva funktioner så att $A \precsim B$ och $B \precsim A$ så gäller det även att $A \sim B$. Detta kommer att bevisas i och med beviset för Schröder-Bernsteins sats som kommer här nedan som sats 3.10.

□

Att relationen $\precsim$ från sats 3.9 är antisymetrisk uttrycker något speciellt, så speciellt att den har bevisats med en egen sats som kallas Schröder-Bernsteins sats. Satsen bär Ernst Schröder och Felix Bernsteins namn eftersom de, på varsitt håll, var först med att bevisa satsen år 1898. Däremot var Cantor först med att formulera satsen år 1887, även om han aldrig lyckades bevisa den själv [3, s. 172]. Satsen säger att vi inte behöver hitta en bijektiv funktion mellan två oändliga mängder för att veta att de är lika mäktiga. Vi utnyttjar istället den partiella ordningens antisymmetri och kan därmed avgöra om två oändliga mängder är lika stora enbart utifrån injektiva funktioner. Vi följer beviset ur Birkhoff & MacLane [2, s. 387].

Sats 3.10. *Låt S och T vara mängder sådana att det existerar en injektiv funktion $S \to T$ samt en injektiv funktion $T \to S$. Då existerar det en bijektiv funktion mellan S och T.*

Bevis. Vi har två mängder S och T. Vi vet att det finns en injektiv funktion $f : S \to T$ och en injektiv funktion $g : T \to S$. Detta betyder att vi kommer kunna röra oss mellan mängderna baklänges genom funktionernas inverser, givet att punkten vi utgår från ligger i bilden av funktionen.

Vi delar in S i tre disjunkta mängder där S_a är mängden där alla element går att spåra bakåt med hjälp av funktionernas invers oändligt långt, det kommer alltid att gå att spåra ett extra steg bakåt. S_b är mängden av alla element som går att spåra tillbaka till S, m.a.o går vi tillräckligt långt tillbaka genom funktionernas inverser kommer vi tillslut att landa på ett $x \in S$. Tillsist har vi mängden S_c som är mängden där alla element har en urmoder i T. På samma sätt delar vi upp T i disjunkta mängder.

$$
\begin{aligned}
S_a &= \{x \in S \mid x \text{ går att spåra tillbaka oändligt många gånger}\} \\
S_b &= \{x \in S \mid x \text{ går att spåra tillbaka till sin urmoder i S}\} \\
S_c &= \{x \in S \mid x \text{ går att spåra tillbaka till sin urmoder i T}\} \\
T_a &= \{x \in T \mid x \text{ går att spåra tillbaka oändligt många gånger}\} \\
T_b &= \{x \in T \mid x \text{ går att spåra tillbaka till sin urmoder i S}\} \\
T_c &= \{x \in T \mid x \text{ går att spåra tillbaka till sin urmoder i T}\}
\end{aligned}
$$

På så vis har vi att

$$
\begin{aligned}
S &= S_a \cup S_b \cup S_c \\
T &= T_a \cup T_b \cup T_c.
\end{aligned}
$$

Om ett element förekommer i en av mängderna kommer även alla elementets föregångare och efterföljare finnas i samma mängd. Mängderna består alltså av kedjor av element som vi kan nå genom de bijektiva funktionerna. Vi kommer se att $f : S_a \to T_a$, $f : S_b \to T_b$ och $g^{-1} : S_c \to T_c$ är bijektiva funktioner. Detta innebär att vi kan konstruera en bijektiv funktion $h : S \to T$ genom

$$
h(x) = \begin{cases} f(x) \text{ då } x \in S_a \cup S_b \\ g^{-1}(x) \text{ då } x \in S_c \end{cases}
$$

Vi vet att h är en bijektiv funktion mellan $S_a \to T_a$ eftersom f är injektiv och därmed givet $x_{S1}, x_{S2} \in S_a$ så är $h(x_{S1}) = h(x_{S2})$ och därmed $f(x_{S1}) = f(x_{S2})$ eftersom f är injektiv så är $x_{S1} = x_{S2}$. Vidare vet vi att h är surjektiv mellan $S_a \to T_a$ eftersom elementen går att spåra tillbaka oändligt många gånger vet vi att om vi tar ett $x_T \in T_a$ kommer det att finnas ett x_S sådant att $h(x_S) = x_T$. Alltså är funktionen även surjektiv och därmed bijektiv.

På samma sätt vet vi att det finns en bijektiv funktion mellan $S_b \to T_b$ genom att börja med att konstatera att eftersom f är injektiv så kommer även h vara injektiv. Eftersom vi vet att det kommer att finnas en urmoder i S_b vet vi att om vi tar ett element $x_T \in T_b$ så kommer det att finnas ett x_S sådant att $h(x_S) = x_T$. Därmed är funktionen h surjektiv och alltså även bijektiv.

Till sist måste vi bevisa att h är en bijektiv funktion mellan $S_c \to T_c$. Eftersom vi vet att $g : T_c \to S_c$ är injektiv innebär det att det existerar precis ett element

$x_T \in T_c$ som går till x_S. Om vi då antar att $h(x_{S1}) = h(x_{S2})$ så måste det innebära att $x_{S1} = x_{S2}$. Alltså är funktionen injektiv. Om vi väljer ett element $x_T \in T_c$ vet vi att det kommer att finnas ett element $x_S \in S_c$ sådant att $g(x_T) = x_S$, vilket innebär att vi kan spåra tillbaka elementet genom h_c och får därmed $h(x_S) = x_T$. Det är då visat att h är surjektiv och därmed även bijektiv. Detta innebär även att hela $h : S \to T$ är bijektiv. □

Det räcker alltså med att hitta två injektiva funktioner mellan två mängder för att kunna säga att det existerar en bijektiv funktion mellan dem och därmed har de samma kardinalitet. I avsnitt 1.5 om bijektioner mellan mängder såg vi i exempel 1.28 hur vi konstruerade en bijektiv funktion mellan $f : [0, 1] \to (0, 1]$. Med hjälp av vår nyfunna sats 3.10 behöver vi enbart hitta två injektiva funktioner för att etablera att mängderna är lika mäktiga.

Exempel 3.11. Vi använder Schröder-Bernsteins sats för att visa att det existerar en bijektiv funktion mellan $f : [0, 1] \to (0, 1]$. Vi ser först att vi har en uppenbar injektiv funktion $f : (0, 1] \to [0, 1]$ som ges av $f(x) = x$. Vidare har vi en injektiv funktion $g : [0, 1] \to (0, 1]$ som ges av $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$. Eftersom vi har två injektiva funktioner åt bägge håll mellan mängderna kan vi tillämpa Schröder-Bernsteins sats och därmed veta att det existerar en bijektiv funktion mellan mängderna. Därmed är de lika mäktiga och har även samma kardinaltal.

3.2 Ordna kardinaltalen

Hitills har vi sett att det går att jämföra oändliga mängders mäktighet och därmed även jämföra deras kardinaltal. Nu ställer vi oss frågorna om det går att jämföra storleken på $\aleph_0$ och c och om det finns fler kardinaltal än dessa två?

För att besvara frågorna behöver vi först definiera vad det innebär att två mängders kardinaltal *inte* är lika. Vi återkopplar till förra kapitlet och beviset för sats 3.9 (relationen $\precsim$).

Eftersom vi tidigare etablerat att mängder kan tillhöra olika ekvivalensklasser och vi kallar dessa för kardinaltal kan vi nu definiera hur vi betecknar olikhet för kardinaltal.

Definition 3.12. Då det finns en injektiv funktion från en mängd A till en mängd B så att $A \precsim B$ skriver vi att mängdernas kardinaltal $|A| \leq |B|$.

Definition 3.13. Då det finns en injektiv funktion mellan mängderna A och B sådan att $A \precsim B$, men inte en bijektiv funktion $A \nsim B$ skriver vi att mängdernas kardinaltal $|A| < |B|$.

Exempel 3.14. Vi vet att det finns en injektiv funktion från de naturliga talen till de reella $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Därmed gäller det för mängderna att $\mathbb{N} \precsim \mathbb{R}$ och för deras respektive kardinaltal att $\aleph_0 \leq c$. Dessutom vet vi att det inte existerar en bijektiv funktion mellan mängderna $\mathbb{N} \nsim \mathbb{R}$, därmed vet vi att $\aleph_0 < c$.

Nu när vi har etablerat beteckningen för när två oändliga mängder inte har lika stor mäktighet kan vi börja bena i hur man ordnar kardinaltalen.

Sats 3.15. *En oändlig mängd A med kardinaltal $|A|$ har alltid strikt mindre mäktighet än kardinaltalet för sin potensmängd $|\mathcal{P}(A)|$, alltså $|A| < |P(A)|$.*

Bevis. Vi påminner oss om att för att det ska finnas en bijektiv funktion måste funktionen vara både injektiv och surjektiv. Vi ska nu visa att det inte finns någon surjektiv funktion $f : A \to \mathcal{P}(A)$.

Beviset är ett motsägelsebevis. Vi börjar alltså med att anta att det finns en surjektiv funktion $f : A \to \mathcal{P}(A)$. Vi definierar en delmängd $B = \{a \in A \mid a \notin f(a)\}$. Eftersom funktionen är surjektiv måste det finnas ett $b \in A$ sådant att $f(b) = B$. Då $b \in A$ och $B \subset A$ så innebär det att antingen $b \in B$ eller $b \notin B$. Detta ger oss två fall där

1. Om $b \in B$ så är $b \in f(b)$.
2. Om $b \notin B$ så är $b \notin f(b)$.

Bägge fallen strider mot vår definition av B. Alltså kan det inte finnas en surjektiv funktion mellan en mängd och dess potensmängd och det medför att det inte heller finns någon bijektiv funktion mellan mängderna.

□

I avsnitt 1.3 såg vi att antalet element i potensmängden för en ändlig mängd $B = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ kan skrivas som 2^n, där $n \in \mathbb{N}$. Frågan blir då om vi kan beteckna kardinaliteten för potensmängden av oändliga mängder på liknande sätt? Innan vi fortsätter med beviset måste vi först definiera potenser för kardinaltal.

Definition 3.16. Låt A och B vara oändliga mängder med kardinaltal $|A|$ respektive $|B|$. Vi definierar $|A|^{|B|}$ som kardinaltalet för mängden av alla funktioner $f : A \to B$.

Sats 3.17. *Kardinaltalet för en potensmängd av en mängd A med kardinaltal $|A|$ kan skrivas som $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.*

Bevis. Låt M vara mängden av alla funktioner sådan att $M = \{f : A \to \{0, 1\}\}$. Om vi kan skapa en bijektiv avbildning mellan M och potensmängden $\mathcal{P}(A)$ så

vet vi att de kommer att ha samma kardinalitet. Vi gör detta genom att definiera en bijektiv avbildning $f : \mathcal{P}(A) \to M$. Vi vet att om $Y \in \mathcal{P}(A)$ så innebär det att $Y \subset A$, alltså skapar vi vår bijektiv funktion genom att använda den karakteristiska funktionen för Y:

$$\chi_Y(x) = \begin{cases} 0 \text{ om } x \notin Y \\ 1 \text{ om } x \in Y. \end{cases}$$

Vi bildar alltså en binär sekvens med en följd av nollor och ettor som för varje element i A talar om om det tillhör Y eller inte. Eftersom de karakteristiska funktionerna för alla delmängder av A bildar mängden M och eftersom avbildningen mellan alla delmängder och dess karakteristiska funktioner utgör en bijektiv funktion mellan potensmängden $\mathcal{P}(A)$ och mängden M innebär det utifrån tidigare definition att de har samma kardinalitet $|\mathcal{P}(A)| = |M|$. Därmed är det bevisat att $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$. □

Vi har nu sett att det inte finns någon bijektiv funktion mellan en mängd och dess potensmängd, alltså är de inte lika stora. Vi använder oss av detta för att bevisa att det finns oändligt många kardinaltal. Satsen bevisades först av Cantor 1891 och kallas därmed Cantors Sats [3, s. 166][4, s. 32].

Sats 3.18. *Det finns oändligt många kardinaltal.*

Bevis. Låt A vara en oändlig mängd och vi betecknar dess kardinaltal som $|A|$. Vi vet från sats 3.15 att det inte finns någon bijektiv funktion mellan en mängd och dess potensmängd. Vi vet däremot att det finns en injektiv funktion $f : A \to \mathcal{P}(A)$ som ges av $f(x) = \{x\}$. Dessutom vet vi från sats 3.17 att $|\mathcal{P}(A)| = 2^{|A|}$.

Eftersom vi vet att det inte finns en bijektiv funktion men en injektiv funktion mellan en mängd och dess potensmängd gäller det att $|A| \leq 2^{|A|}$ och $|A| \neq 2^{|A|}$, alltså måste $|A| < 2^{|A|}$ gälla.

Det går därmed att ordna kardinaltalen $|A| < 2^{|A|}$. Vidare innebär detta att vi kan fortsätta skapa större och större kardinaltal med hjälp av potensmängden och därmed kan vi skapa en oändlig sekvens av kardinaltal

$$|A|, 2^{|A|}, 2^{2^{|A|}}, 2^{2^{2^{|A|}}}, \ldots$$

där kardinaltalet till höger alltid är större än det till vänster.

□

Eftersom vi vet att den minsta oändliga mängd som finns har kardinaltalet $\aleph_0$ fortsätter vi att indexera storleksordningen enligt följande definition.

Definition 3.19. Om $|\mathbb{N}| = \aleph_0$ så betecknar vi $2^{\aleph_0} = \aleph_1$ och $2^{2^{\aleph_1}} = \aleph_2$ och så vidare. Vi får då den oändliga sekvensen av kardinaltal:

$$\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \aleph_3, \ldots.$$

Cantor var år 1878 först med att formulera den så kallade *Kontinuumhypotesen*, som säger att det inte finns något kardinaltal mellan $\aleph_0$ och c, därmed är alltså $c = \aleph_1$. Det är även samma sak som att säga att varje delmängd av de reella talen är antingen:

1. Ändliga och har samma kardinaltal som det är element i mängden.
2. Uppräkneligt oändliga och har samma kardinalitet som de naturliga talen, $\aleph_0$.
3. Överuppräkneligt oändliga och har samma kardinalitet som de reella talen, c.

Hypotesen, eller även kallat problemet, har varit omtvistat och hittills inte kunnat bevisas fullt ut. År 1900 hade Hillbert med det som det första av sina 23 kända problem. Därefter har Kurt Gödel år 1938 visat att hypotesen inte går att motbevisa och år 1963 visar Paul Cohen att den inte går att bevisa. Det ger oss att problemet är oavgörbart utifrån de axiom vi har för mängdläran idag.

Därtill finns *Den generaliserade kontinuumhypotesen* som säger att för något oändligt kardinaltal $|A|$ finns inget kardinaltal mellan $|A|$ och $2^{|A|}$. Detta ger oss att $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$, för alla $n \in \mathbb{N}$. Även denna hypotes har visats både vara icke-bevisbar och icke-motbevisbar. [4, s. 64-66].

3.3 Räkneoperationer för kardinaltalen

Som vi sett tidigare i avsnittet för Hilberts hotell verkar räknereglerna för kardinaltalen skilja sig från de vanliga. Lägger vi till en hotellgäst till den redan oändliga mängden hotellgäster, kommer vi fortfarande att ha en oändlig mängd gäster. Alltså verkar det som att $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$. Vidare minns vi från Hilberts hotell att det inte heller var ett problem att få plats med ett uppräkneligt oändligt antal nya gäster till hotellet, detta ger i sådana fall att $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. Inget bevis kommer att förekomma i detta avsnitt. Bevisen finns att följa i [4, s.40-47].

3.3.1 Addition av kardinaltal

Det är lätt att se och går att visa att om vi adderar ett element till en oändlig mängd, oavsett uppräknelig eller överuppräknelig, kommer den fortfarande att vara oändlig och därmed kommer även kardinaliteten att förbli densamma.

Definition 3.20. Låt A och B vara två disjunkta mängder med kardinaltalen $|A|$ och $|B|$. Då är $|A| + |B| = |A \cup B|$.

Exempel 3.21. Det kan till exempel se ut som följande:

1. $\aleph_0 + n = \aleph_0$, där $n \in \mathbb{N}$
2. $c + n = c$, där $n \in \mathbb{N}$.

Det går att visa att om vi adderar två kardinaltal av samma kardinalitet förblir summan, precis som i tidigare fall, samma kardinalitet. Alltså att om vi har två oändliga mängder A och B sådana att $A = |A|$ och $B = |A|$ så gäller att $|A+B| = |A| + |A| = |A|$.

Exempel 3.22. Det är från detta vi får vårt exempel i Hilberts hotell att vi kan addera hur många oändliga mängder som helst, så länge de är uppräkneliga och alltså att $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$. Det är alltså tack vare denna räkneregel som vi kan addera i princip hur många uppräkneliga oändligheter som helst av gäster till hotellet och fortfarande kan garantera att alla får rum.

Det går även att visa att om vi har två kardinaltal $|A|$ och $|B|$ sådana att $|A| \leq |B|$ då vet vi att $|A| + |B| = |B|$.

Definition 3.23. Om någon eller bägge av A och B är en oändlig mängd med kardinaltalen $|A|$ och $|B|$ så är $|A| + |B| = max\{|A|, |B|\}$.

Exempel 3.24. Detta ger oss till exempel att

1. $\aleph_0 + c = c$
2. $\aleph_0 + \aleph_2 = \aleph_2$
3. $\aleph_m + \aleph_n = \aleph_n$, där $m < n$ och $m, n \in \mathbb{N}$.

3.3.2 Multiplikation av kardinaltalen

Precis som vi såg för addition av kardinaltal så skiljer sig multiplikation med kardinaltalen från till exempel multiplikation med de naturliga talen.

Det går att visa att om vi multiplicerar två kardinaltal av samma kardinalitet förblir produkten, precis som i additionen, samma kardinalitet. Alltså om vi har

två oändliga mängder A och B av samma kardinalitet med kardinaltalet $|A|$ så gäller det att $|AB| = |A||A| = |A|$.

Definition 3.25. Låt A och B vara mängder med kardinaltalen $|A|$ och $|B|$. Kardinaltalet för produkten av $|A|$ och $|B|$ är då produktmängden $|A||B| = |A \times B|$.

Exempel 3.26. Multiplikation mellan kardinaltal av samma kardinalitet ser ut som följande:

1. $\aleph_0 \aleph_0 = \aleph_0$
2. $cc = c$
3. $\aleph_n \aleph_n = \aleph_n$ där $n \in \mathbb{N}$.

Vidare går det att visa att om vi har två kardinaltal $|A|$ och $|B|$ sådana att $|A| \leq |B|$ då vet vi att $|A||B| = |B|$.

Definition 3.27. Låt antingen en eller bägge av mängderna A och B vara oändliga och icke-tomma med kardinaltalen $|A|$ och $|B|$. Då gäller att $|A||B| = max\{|A|, |B|\}$.

Exempel 3.28. Multiplikation mellan kardinaltal av olika kardinalitet ser ut som följande:

1. $\aleph_0 c = c$
2. $\aleph_m \aleph_n = \aleph_n$, där $m < n$ och $m, n \in \mathbb{N}$.

3.3.3 Potenser av kardinaltal

Vi återupprepar definition 3.16:

Låt A och B vara oändliga mängder med kardinaltal $|A|$ respektive $|B|$. Vi definierar $|A|^{|B|}$ som kardinaltalet för mängden av alla funktioner $f : A \to B$.

Exempel 3.29. Det går att visa att:

1. $\aleph_n^a = \aleph_n$, där $n, a \in \mathbb{N}$.
2. $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$.

4 Cantormängden

Vi har genom arbetet sett prov på flera kända oändliga mängder och deras egenskaper. I detta kapitel ska vi presentera och gå igenom egenskaperna hos en inte lika vanlig oändlig mängd, nämligen Cantormängden som presenterades år 1883 av Georg Cantor själv.

Vi konstruerar Cantormängden genom att börja med alla punkter i det slutna intervallet $C_0 = [0, 1]$.

Sedan delar vi upp mängden i tre lika stora delar och tar bort den mittersta delen, det öppna intervallet $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Vår mängd består nu av intervallen

$$C_1 = \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right].$$

Om vi upprepar föregående process genom att dela upp dessa två intervall i tre lika stora delar och tar bort de två mittersta öppna intervallen $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ och $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$ består vår mängd istället av

$$C_2 = \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right].$$

C_n med $n \in \mathbb{N}$ är alltså något steg i iterationen. Då vi fortsätter dessa steg in i oändligheten genom att låta n gå mot oändligheten för C_n kommer vi se att de kvarvarande mängderna hela tiden minskar samt är delmängder av sina tidigare mängder på så sätt att $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \ldots$. Vi definierar då slutligen att Cantormängden utgörs av snitten av alla samlade mängder

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n.$$

Vi tar alltså bort en tredjedel oändligt många gånger, alltså borde nästan inget finnas kvar av mängden? Ser man till mängdens ”längd” är detta påstående korrekt. När vi går mot oändligheten är Cantormängdens längd 0.

Vi konstruerar mängden genom att utgå från intervallet $C_0 = [0, 1]$ som har längden 1. Då vi summerar längderna av de delar som tas bort i varje steg oändligt många gånger får vi summan

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{8}{81} + \cdots = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots\right) =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots\right).$$

Detta går att skriva som den geometriska summan

$$S = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 1.$$

Eftersom $[0, 1]$ uppenbart har längd 1 och summan som tas bort då vi går mot oändligheten också har längd 1 får vi att Cantormängden har längd 0. Eftersom vi verkar ha tagit bort i princip allt, då vi går mot oändligheten, så borde Cantormängden alltså inte innehålla några punkter? Eller åtminstonde vara mycket mycket liten. Faktum är att vi ska se att Cantormängden innehåller oändligt många punkter och har samma mäktighet som mängden av alla reella tal, $\mathbb{R}$. För att bevisa detta behöver vi först etablera en bijektiv funktion mellan mängden och de reella talen.

Sats 4.1. *Alla element i Cantormängden går att representera med en ternär expansion av enbart talen* 0 *och* 2.

Bevis. Vi kan använda den ternära expansionen för att representera varje element i Cantormängden. Eftersom vi i varje steg delar upp alla intervall i tre lika stora delar för att sedan ta bort mittendelen går det att för varje steg ange vilket intervall som x ligger i

$$s_i = \begin{cases} 0, & \text{då x ligger i det vänstra intervallet.} \\ 1, & \text{då x ligger i intervallet i mitten.} \\ 2, & \text{då x ligger i det högra intervallet,} \end{cases}$$

där $i = 1, 2, 3\dots$ och står för vilken siffra i decimalutvecklingen vi är på som korresponderar med vilken iteration vi är i. Eftersom vi hela tiden slänger det mittersta intervallet vet vi att den ternära utvecklingen av element i Cantormängden aldrig kommer att innehålla siffran 1. Detta gör att vi kan använda den ternära utvecklingen för att representera alla element i Cantormängden genom

$$x = 0.s_0s_1s_2s_3\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} s_k 3^{-k} \qquad \text{, där } s_k \in \{0{,}2\}.$$

Tittar vi närmre på intervallens ändpunkter kommer vi snart att inse att vissa ändpunkter har två ternära utvecklingar. På samma sätt som att vi säger att $(0.\overline{9})_{10} = (1.\overline{0})_{10}$ gäller även att

$$\frac{1}{3} = (0.1)_3 = (0.0\overline{2})_3 \quad \text{samt} \quad 1 = (0.\overline{2})_3.$$

Vi vet från en modifierad version av sats 1.30 att de reella tal som inte har en unik ternär utveckling har precis två utvecklingar. Det är precis dessa tal vi får i ändpunkten av vissa intervall. För att komma runt detta problem och för att satsen fortfarande ska gälla bestämmer vi oss istället för att där vi får ändpunkter som kan representeras av två ternära utvecklingar väljer vi helt enkelt den som inte innehåller siffran 2. Eftersom vi vet att de båda utvecklingarna representerar samma reella tal kan vi därmed representera alla tal i Cantormängden som unika ternära utvecklingar.

□

Sats 4.2. *Cantormängden är överuppräknelig.*

Bevis. Först och främst använder vi den ternära representationen av Cantormängdens element från föregående sats. Vi då visade att alla element i mängden går att representera med enbart talen 0 och 2 i bas 3 så att

$$\sum_{k=0}^{\infty} s_k 3^{-k} \qquad \text{, där } s_k \in \{0,2\}.$$

Vi använder oss sedan av Cantors diagonala argument från sats 2.10 för att bevisa att Cantormängden är överuppräknelig. Vi gör detta genom att istället anta att den skulle vara uppräknelig. Vi hade då kunnat räkna upp elementen ett efter ett utan att missa något, det skulle alltså finnas en bijektiv funktion $f : I \to \mathbb{N}$. Vi använder den binära expansionen för att representera element i mängden där $x = 0.s_1 s_2 s_3 \ldots$ för s_i där $i = 1, 2, 3, \ldots$

Vi kommer nu alltid att kunna hitta ett unikt element $y = 0.b_1 b_2 b_3 b_4 \ldots$ som inte finns med i uppräkningen genom att gå igenom elementen diagonalt och ändra enligt principen

$$b_i = \begin{cases} 0, & \text{då } s_i = 2 \\ 2, & \text{då } s_i = 0 \end{cases}$$

På så sätt får vi det nya elementet y. Eftersom alla element i Cantormängden går att representera genom en binär utveckling av 0 och 2 vet vi att även y är ett element i mängden. Alltså är Cantormängden inte uppräknelig, utan överuppräknelig. □

5 Sammanfattning

Vi har i den här uppsatsen gått igenom de uppräkneliga och överuppräkneliga mängdernas egenskaper samt jämfört dem med varandra.

Arbetet har varit en lång men mycket givande resa. Att få gå från att vara intresserad av hur Cantors diagonala argument fungerade till att få bena i hur Cantormängden både kan ha längd 0 och samtidigt vara överuppräkneligt oändlig har varit väldigt spännande och givande för min egen matematiska förståelse.

I min lärarroll har jag upptäckt att oavsett vilken nivå elever ligger på kan de alltid samtala och fundera kring oändligheten(/-er). Det är ett koncept som alla har hört talas om men som de sällan har uppmuntrats att utforska mer. Det är alltid ett ämne som fascinerar och drar igång fantasin på ett sätt som i min mening många bokuppgifter inte gör. Därför är jag nöjd över att det här arbetet är gjort och att jag kan dela fascinationen för oändligheten med både mina nuvarande och framtida elever.

Referenser

[1] P. Benacerraf & H. Putnam *Philosophy of matematics: selected readings,* 2. ed., Cambridge U.P.: Cambridge , (1983)

[2] G. Birkhoff & S. Maclane *A brief survey of modern algebra,* Macmillan, New York , (1953)

[3] J. Dauben *Georg Cantor: His Mathematics and Philosophy of the Infinite,* Cambridge, Mass., Harvard U.P. , (1990)

[4] I. Kaplansky *Set Theory and Metric Spaces,* American Mathematical Society , 1–66 (1972)

[5] V. J. Katz *A history of mathematics: an introduction ,* 3rd. ed., Addison-Wesley, Boston , (2009)

[6] H. Kragh *The True (?) Story of Hilbert's Infinite Hotel,* Centre for Science Studies, Department of Physics and Astronomy, Aarhus University , (2014)

[7] J. J. O'Connor & E. F. Robertson `https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Beginnings_of_set_theory/` (2022-03-23)

[8] A. Persson & L-C. Böiers *Analys i en variabel ,* 3:7 uppl., Studentlitteratur AB, Lund , (2018)

[9] R. Rucker *Infinity And The Mind, the science and philosophy of the infinite,* Princeton, N.J.: Princeton University Press , (2019)

[10] N. Ya. Vilenkin *In search of infinity,* Birkhäuser Boston , (1995)

[11] `http://yourmathsolver.blogspot.com/2011/11/hilberts-paradox-of-grand-hotel.html`