



# SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

## Perfekta tal och Mersenne printal

av

**Hatice i Kübra Ayranci**

2026 - No K11



# Perfekta tal och Mersenne primtal

Hatice i Kübra Ayranci

---

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Gregory Arone

2026



## **Abstract**

Perfect numbers are positive integers that equal the sum of their proper divisors. The two smallest perfect numbers are 6 and 28. Mersenne primes are prime numbers of the form  $2^p - 1$ , where  $p$  is itself a prime number. The two smallest Mersenne primes are 3 and 7. In this work we show that there is a surprising bijection between Mersenne primes and even perfect numbers. It is not known if there exist any odd perfect numbers.

## Sammanfattning

Perfekta tal är positiva heltal som är lika med summan över dess äkta delare. De två minsta perfekta talen är 6 och 28. Mersenne primtal är primtal av formen  $2^p - 1$ , där  $p$  också utgörs av ett primtal. De minsta Mersenne primtalen är 3 och 7. I det här arbetet visar vi att det finns en överraskande bijektion mellan Mersenne primtal och jämna perfekta tal. Det är ännu inte känt ifall det existerar några udda perfekta tal.

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Introduktion</b>	<b>9</b>
1.1	Syfte . . . . .	9
<b>2</b>	<b>Mersenne primtal</b>	<b>11</b>
2.1	Historia . . . . .	11
2.2	Definition . . . . .	11
<b>3</b>	<b><math>\sigma</math> funktionen</b>	<b>13</b>
3.1	Definition och sats för primtalspotenser . . . . .	13
3.2	Exempel . . . . .	14
3.3	Bevis av det generella uttrycket för primtalspotenser . . . . .	15
3.4	Multiplikativ . . . . .	16
<b>4</b>	<b>Perfeka tal</b>	<b>18</b>
4.1	Definition och sats . . . . .	18
<b>5</b>	<b>Udda perfekta tal</b>	<b>21</b>
5.1	Två grundläggande påståenden . . . . .	22
	<b>Referenser</b>	<b>25</b>



# 1 Introduktion

Sedan antika tiden av matematiska studier har inte minst pythagoréerna fascinerats av olika tal relationer. Sambandet mellan *ett tal och dess delare* är en sådan. Det här sambandet visar sig vara mer än bara en ännu häftig relation mellan tal, utan har dessbättre öppnat upp vägen för utveckling av många nya teorier och koncept inom nummer teori så som *perfekta tal*.

Perfekta tal är tal vars summa av dess äkta delare återger talet i fråga. Ett annat sätt att beskriva det är att tillåta även talet vara en delare och summan blir då en dubbel av själva talet. Talet 6 är det minsta och första perfekta tal. Utvecklingen av den skulle bli  $6 = 1 + 2 + 3$  eller också  $6 = 1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2 \cdot 6$ .

I dagens definitionen av perfekta tal refererar man till Euklides notation som senare kompletterades av Euler. Med tanke på att det är cirka 2000 år mellan dessa vetenskapsmän kan man förstå att perfekta tal inte har varit en enkel bit att tugga på. De växer snabbt och förekommer med allt glesare avstånd, frågan om det har något slut är en oklar fråga.

Euklides metod för att hitta ett perfekt tal går via formeln

$$2^{p-1}(2^p - 1)$$

där  $p$  är ett primtal och  $(2^p - 1)$  ett *Mersenne primtal*.

Euklides menade att om kravet för Mersenne primtal var uppfyllt då gav formeln ett *jämmt* perfekt tal. Definitionen Euklides presenterade, var tillräcklig men Eulers bevis av Euklides formel klargjorde även dess nödvändighet. Eulers bevis fastställde det omvända, det vill säga, varje jämmt perfekt tal är av Euklides form, och då är också  $2^p - 1$  ett Mersenne primtal. I självaste verket kartlade Euler en *bijektion* mellan perfekta tal och Mersenne primtal.

Ty karaktären av Mersennes primtal genererar Euklides-Euler definition endast jämna perfekta tal. Kruxet om det finns några *udda* sådana är en annan oklar fråga man spekulerar över.

## 1.1 Syfte

Det här arbetet ämnar att redogöra för bijektionen mellan jämna perfekta tal och Mersennes primtal. I slutet av arbetet kommer även två grundläggande och förvän-

tade egenskaper om udda perfekta tal att presenteras.

## 2 Mersenne primtal

### 2.1 Historia

Marin Mersenne (1588-1648) var en fransk munk och matematiker som studerade primtals faktorn i Euklides definition av perfekta tal.

Han sammanställde de 11 första tal han förmodade var primtal av denna karaktär, vilka kom att kallas efter honom. Likt perfekta tal växer Mersenne primtal snabbt och att hitta dessa för hand är svårt, många gånger har det tagit år mellan varje upptäckt. Det största Mersenne primtal att upptäckas för hand var för  $p = 127$ , det gjordes år 1876 och hade hela 39 värdesiffror. Idag finns det 52 Mersenne primtal. [Res26] Tittad 22/10/2025

Utan att beskriva hur skrev Marin Mersenne i sin bok *Cogitata Physico-Mathematica* att primtalen  $p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$  var de enda  $p < 257$  som gav ett Mersennes primtal. Det visade sig dock inte stämma helt. Efter cirka 300 år fann man fem misstag i Mersennes lista.

### 2.2 Definition

**Definition 2.1.** Primtal av formen  $2^p - 1$  är ett Mersennes primtal.

Villkoret att exponenten  $p$  måste vara ett primtal implicerar *inte* det omvända. Det innebär alltså inte att varje godtyckligt primtal  $p$  garanterat genererar ett Mersennes primtal. Ingen vet ännu för vilka  $p$  (2.1) genererar ett Mersenne primtal. Ett exempel på  $p$  som inte fungerar dyker tidigt upp bland Mersennes primtal. Primtalen  $p = 11$  och  $p = 23$  ger

$$2^{11} - 1 = 2047 = 23 \cdot 89$$

$$2^{23} - 1 = 8388607 = 47 \cdot 178481$$

**Påstående 2.2.**  $a^n - 1$  är ett primtal endast om  $a = 2$  och  $n \geq 2$  är ett primtal.

En generell faktorisering av  $a^n - 1$  ger

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a^2 + a + 1) \quad (1)$$

Anta att  $a^n - 1$  är ett Mersenne primtal, då måste någon av faktorerna i högerledet i (1) vara lika med 1. För  $a = 0, 1$  är påståendet trivialt. Enda funktionella alternativ

är  $a > 1$ , vilket ger att andra termen i (1) alltid blir större än 1. Kvarstår  $(a-1) = 1$ , det sker då  $a = 2$ .

Måste potensen  $n$  av  $a = 2$  alltid vara ett primtal? Svaret är ja.

Anta motsatsen att  $n$  inte är ett primtal och istället ett sammansatt tal  $n = xy$  där  $x, y > 1$ . Det ger  $2^n = 2^{xy} = (2^x)^y$ . Det här skrivelsen insatt i (1) ger

$$2^n - 1 = (2^x - 1)((2^x)^{y-1} + (2^x)^{y-2} + \dots + (2^x)^2 + (2^x) + 1) \quad (2)$$

Två faktorer i högerledet i (2) är större än 1. Antagandet  $n = xy$  ger alltså att (2) alltid är ett sammansatt tal, vilket motsäger bestämmelsen att  $2^n - 1$  ska vara ett primtal.

[Sil97]

## 3 $\sigma$ funktionen

### 3.1 Definition och sats för printalspotenser

**Definition 3.1.** Låt  $\sigma(n)$  vara summan av alla  $d \in \mathbf{N}$ , som delar  $n$ , inklusive 1 och  $n$ , då gäller

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d. \quad (3)$$

För några tal  $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  skulle  $\sigma(n)$  ser ut enligt följande.

$$\sigma(3) = 1 + 3 = 4$$

$$\sigma(4) = 1 + 2 + 4 = 7$$

$$\sigma(5) = 1 + 5 = 6$$

$$\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$$

$$\sigma(7) = 1 + 7 = 8$$

$$\sigma(8) = 1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

Noter att för varje primtal består  $\sigma(p)$  endast utav två termer. (3) uttryckt för primtal blir  $\sigma(p) = 1 + p$  då 1 och  $p$  är de enda delarna till  $p$ . Mer generellt, för primtals potensen  $p^k$  som är  $1, p, p^2, \dots, p^k$  blir det

$$\sigma(p^k) = 1 + p + p^2 + \dots + p^k \quad (4)$$

Låt en multiplicera (4) med  $p$  för att sedan subtrahera original serien ur det.

$$\begin{aligned} p \cdot \sigma(p^k) &= p + p^2 + p^3 + \dots + p^{k+1} \\ p \cdot \sigma(p^k) - \sigma(p^k) &= p^{k+1} - 1 \\ \sigma(p^k)(p - 1) &= p^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

Då erhålls

$$\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1} \quad (5)$$

**Sats 3.2.** Låt  $n > 1$  vara ett heltal. Om  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k} = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$  där  $p_1, p_2, \dots, p_k$  är distinkta primtal, och  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbf{N}$ . Då gäller

$$\sigma(n) = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1} = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} \quad (6)$$

(6) är ett generellt uttryck av  $\sigma$  för sammansatta tal. Faktum att varje sammansatt tal kan uttryckas som en unik primtalsfaktorisering kommer varje komponent följdvis att vara relativt prima.

[Yan96]

## 3.2 Exempel

*Exempel 3.3.* Ta talet 12 som exempel. Den kan skrivas som en produkt av  $2^1$  och  $6 = 2^1 3^1$ , vilka inte är relativt prima.

**Den korrekta summan av delar till 12**

$$\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$$

**Felaktig trippelsumma av primtalsfaktoriseringen**

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^1 2^i 2^j 3^k &= 2^0 2^0 3^0 + 2^0 2^0 3^1 + 2^0 2^1 3^0 + 2^0 2^1 3^1 + 2^1 2^0 3^0 + \\ &\quad + 2^1 2^1 3^0 + 2^1 2^0 3^1 + 2^1 2^1 3^1 \\ &= (2^0 + 2^1) \cdot (2^0 + 2^1) \cdot (3^0 + 3^1) \\ &= 1 + 3 + 2 + 6 + 2 + 4 + 6 + 12 = 36 \end{aligned}$$

Trippelsumman ovan är felaktig då delarna 2 och 6 förekommer mer än en gång. En korrekt dubbelsumma skulle uppnås av en primtalsfaktorisering av formen  $12 = 4 \cdot 3 = 2^2 \cdot 3^1$ . Det på grund av att 4 och 3 är relativt prima.

**Korrekt dubbelsumma av primtalsfaktoriseringen**

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^1 2^i 3^j &= 2^0 3^0 + 2^1 3^0 + 2^2 3^0 + 2^0 3^1 + 2^1 3^1 + 2^2 3^1 \\ &= (2^0 + 2^1 + 2^2) \cdot (3^0 + 3^1) \\ &= 1 + 2 + 4 + 3 + 6 + 12 = 28 \end{aligned}$$

### 3.3 Bevis av det generella uttrycket för primtalspotenser

*Bevis av Sats 3.2.* Låt  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$  och låt  $m$  vara ett positivt tal så att  $m|n$  om och endast om  $m = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_i^{\beta_i}$  där  $0 \leq \beta_i \leq \alpha_i$  För alla  $i = 1, 2, \dots, k$ . Följaktligen kommer den totala summan över  $m$ , utgöra alla unika kombinationer av alla delare till  $n$ .

$$\sigma(n) = \sum_{1 \leq m|n} m = \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} \quad (7)$$

Ovanstående ekvivalens är essentiell och möjlig ty termerna i  $n$  är relativt prima. Annars skulle dessa ha gemensamma delare och multi-summan skulle generera kopior utav en och samma delare, som i exempel 3.3.

Med hjälp av induktion kan en arbeta ned högerledet i (7) till den önskade formen av separata summor. Vilket är vad som vill bevisas.

Låt en påminna om (5) i summanotation

$$\frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1} = \sum_{\beta=0}^{\alpha} p^{\beta}. \quad (8)$$

För  $k = 1$  är (7) trivial och (8) blir

$$\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} p_1^{\beta_1} = \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1}. \quad (9)$$

Vidare i induktionssteget delas  $n$  upp i två delar, där man i tur och ordning bryter ut en faktor i taget, och gör induktionsantagande för resterande produkt.

För  $k - 1$  gäller alltså

$$n = (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_{k-1}^{\alpha_{k-1}}) \cdot (p_k^{\alpha_k})$$

och induktionsantagandet nedan gäller för de första  $k - 1$  termerna i  $n$ .

$$\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_{k-1}=0}^{\alpha_{k-1}} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_{k-1}^{\beta_{k-1}} = \prod_{i=1}^{k-1} \left( \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} \right) \quad (10)$$

Enligt distributiva lagen kan summanotationerna i (7) omorganiseras. För den inre summan  $p_k^{\alpha_k}$  gäller alltså

$$\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} = \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} \left( \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_{k-1}=0}^{\alpha_{k-1}} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_{k-1}^{\beta_{k-1}} \cdot p_k^{\beta_k} \right)$$

Ty  $\beta_k$  är oberoende av indexen  $\beta_1, \dots, \beta_{k-1}$  kan  $p_k^{\beta_k}$  brytas ut från resterande multisumma.

$$\sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} \left( \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_{k-1}=0}^{\alpha_{k-1}} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_{k-1}^{\beta_{k-1}} \cdot p_k^{\beta_k} \right) = \left( \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_k^{\beta_k} \right) \left( \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_{k-1}=0}^{\alpha_{k-1}} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_{k-1}^{\beta_{k-1}} \right) \quad (11)$$

Substituera nu in (10) i högerledet. (11) kan nu skrivas som

$$\left( \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_k^{\beta_k} \right) \cdot \prod_{i=1}^{k-1} \left( \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} \right) \quad (12)$$

Det följer från induktion på  $k$  att den sammansatta multisumman (7) kan skrivas som en produkt av distinkta summor och följande formell är uppfylld.

$$\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} = \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} p_1^{\beta_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} p_2^{\beta_2} \dots \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_k^{\beta_k} \quad (13)$$

Ty respektive summa term kan skrivas som (8), tillåts (13) formuleras som

$$\frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_2^{\alpha_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_k^{\alpha_k+1} - 1}{p_k - 1} = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} \quad (14)$$

vilket är i enlighet med sats 3.2. □

Med det sagt, ser man att  $\sigma$  beter sig unikt då ingående faktorer är distinkta tal. Det leder en till den andra viktiga egenskapen av  $\sigma$ .

### 3.4 Multiplikativ

**Definition 3.4.** En aritmetisk funktion  $f$  är en multiplikativ funktion om

$$f(nm) = f(n)f(m) \quad (15)$$

närsom  $(n, m) \in \mathbf{N}$  är *relativt prima*,  $\gcd(n, m) = 1$ .

[Yan96]

**Påstående 3.5.**  $\sigma$  är en multiplikativ funktion över relativt prima tal.

*Bevis.* Antag att  $n$  och  $m$  är relativt prima. Låt en skriva ut deras primtalsfaktori-  
sering som  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$  och  $m = q_1^{\beta_1} q_2^{\beta_2} \dots q_j^{\beta_j}$ . Då  $n$  och  $m$  är relativt prima, är  
 $p_1 \dots p_i, q_1 \dots q_j$  alla distinkta primtal. Därför kan primtalsfaktoriseringen av  $nm$  for-  
muleras som  $nm = p_1^{\alpha_1} \dots p_i^{\alpha_i} \cdot q_1^{\beta_1} \dots q_j^{\beta_j}$ .

Därför har vi att

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \dots \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} \\ \sigma(m) &= \frac{q_1^{\beta_1+1} - 1}{q_1 - 1} \dots \frac{q_j^{\beta_j+1} - 1}{q_j - 1} \\ \sigma(nm) &= \left( \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \dots \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} \right) \left( \frac{q_1^{\beta_1+1} - 1}{q_1 - 1} \dots \frac{q_j^{\beta_j+1} - 1}{q_j - 1} \right)\end{aligned}$$

Det är självklart att  $\sigma(nm) = \sigma(n)\sigma(m)$ . □

## 4 Perfeka tal

Historien om perfekta tal sträcker sig, liksom Mersenne primtal mycket långt bak i tiden. Deras historia tros gå parallellt. Tills idag det har det endast funnits 52 perfekta tal. På grund av bijektionen mellan perfekta tal och Mersenne primtal lyder det en direkt relation mellan sökandet av det ena och det andra. Det innebär att om  $2^p - 1$  är ett Mersenne primtal, så är  $2^{p-1}(2^p - 1)$  ett jämnt perfekt tal och när som det existerar ett jämnt perfekt tal på formen  $2^{p-1}(2^p - 1)$  så måste  $2^p - 1$  motsvara ett Mersenne primtal.

### 4.1 Definition och sats

**Definition 4.1.** För ett perfekt tal  $n \in \mathbf{N}$ , gäller

$$\sigma(n) = 2n \quad (16)$$

**Sats 4.2.** (*Euklides-Euler*)  $n$  är ett jämnt perfekt tal om och endast om

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1) \quad (17)$$

där  $2^p - 1$  är ett Mersenne primtal.

Härledningen av perfekta tal ligger i att bevisa *bijektionen* mellan perfekta tal och Mersenne primtal.

[Yan96]

*Bevis av sats 4.2.* Vi börjar med att bevisa nödvändigheten av att  $n$  är ett jämnt perfekt tal.

Antag Mersenne primtal  $2^p - 1$ . Låt  $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ . Eftersom  $\sigma$  är multiplikativ, gäller

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \sigma(2^{p-1})\sigma(2^p - 1) \\ &= \left[ \frac{2^{(p-1)+1} - 1}{2 - 1} \right] [1 + (2^p - 1)] \quad (2^p - 1 \text{ Mersenne primtal}) \\ &= (2^p - 1)(2^p) \\ &= 2 \cdot 2^{p-1}(2^p - 1) \\ &= 2n \end{aligned}$$

Andra delen i beviset ligger i att bevisa det omvända. Anta nu att  $n$  är ett jämnt perfekt tal och låt

$$n = 2^{p-1}q$$

$q$  är udda då  $2^{p-1}$  är högsta möjliga tvåpotens som delar  $n$  (annars vore faktoriseringen ej komplett och  $q$  skulle innehålla 2 : or.

Givet  $\gcd(2^{p-1}, q) = 1$ , gäller

$$\sigma(n) = \sigma(2^{p-1})\sigma(q) = (2^p - 1)\sigma(q)$$

Ty (16) gäller,

$$\sigma(n) = 2n = 2(2^{p-1}q) = 2^p q$$

Kombinationen av de två ovanstående ekvationer leder till ekvivalensen

$$2^p q = (2^p - 1)\sigma(q) \tag{18}$$

Låt  $1, d_1, d_2, \dots, d_i$  vara äkta delare till  $q$ . Vi inför notationen  $s(q)$  som följande,

$$s(q) = 1 + d_1 + d_2 + \dots + d_i.$$

Det vill säga att  $s(q)$  är summan över alla delare till  $q$ . Då blir  $\sigma(q) = s(q) + q$ . Det möjliggör en omskrivning av ekvation (18).

$$2^p q = (2^p - 1)(s(q) + q).$$

$$q = s(q)(2^p - 1). \tag{19}$$

Notera att  $q$  är en multipel av  $s(q)$ , så  $s(q)$  delar  $q$ . Dessutom är  $2^p - 1 > 1$ , så  $s(q)$  är en äkta delare av  $q$ . Å andra sidan är  $s(q)$  summan av alla äkta delare till  $q$ . Det innebär att  $s(q) \in \{1, d_1, d_2, \dots, d_i\}$  samtidigt som  $s(q) = 1 + d_1 + d_2 + \dots + d_i$ . Det följer att  $s(q)$  är den enda äkta delare av  $q$ . Enda möjlighet för att det ska vara uppfyllt är då  $s(q) = 1$ . Det gör  $q$  till ett primtal.

Ekvation (19) lyder nu enligt följande,

$$q = 2^p - 1.$$

Men primtal av formen  $2^p - 1$  är Mersenne primtal. Det innebär att, för ett jämnt perfekt tal  $2^{p-1}q$ , måste  $q$  vara  $2^p - 1$  samt ett Mersenne primtal. Så bijektion gäller.

□

## 5 Udda perfekta tal

En av de äldsta olösta matematiska problemen är hurvida udda perfekta tal existerar eller inte och om perfekta tal har något slut.

Vetenskapens kännedom om jämna perfekta tal visar att dessa växer otroligt snabbt och likaså också avståndet från ett perfekt tal till det andra. Bara första och tionde jämna perfekta tal skiljer sig med 53 värdesiffor.

No.	Perfekt tal
1	6
2	28
3	496
4	8128
5	33550336
6	8589869056
7	137438691328
8	2305843008139953128
9	2658455991569831744654692615953842176
10	191561942608236107294793378084303638130997321548169216

Genom tiderna har många välkända matematiker funderat och ägnat sig över denna ändlösa fråga om udda perfekta tal. En av de är ingen mindre än L. Euler som säger att, om udda perfekta tal existerar så är de ytterst svåra att spåra.

Studier kring den existentiella frågan om udda perfekta tal, har bidragit till att forma kriterium för dessa. Varje kriterium har byggt och utvecklat nästkommande även om det ibland har varit orimliga förslag. Tidigt förstod man att udda perfekta tal inte kan vara en produkt av två distinkta primtal. 1863 bevisade matematikern Nocco att det måste bestå av minst 3 distinkta primtal. År 1888 visade Catalan att om ett udda perfekt tal inte är delbar med 3, 5 och 7 måste det bestå av minst 27 distinkta primtal.

På senare år, år 2012 visade två forskare, Pascal Ochem och Michaël Rao, att om ett udda perfekt tal existerar så är det större än  $10^{1500}$ . I samma artikel skriver de även att det bör bestå av minst 101 primtals faktorer och 10 distinkta primtal (utan restriktioner).

Catalans, Ochem och Rao's bidrag är bland de senaste kriteriumen för möjliga udda perfekta tal. [Mat26]

## 5.1 Två grundläggande påståenden

I det här avsnittet kommer Noccas tidiga bidrag om minst tre distinkta primtal och Catalans påstående om icke delbarhet att bevisas. Valet av bevis för 3 distinkta primtal tal istället för senaste uppdateringen om minst 10, beror på att Noccas bevis klargör de grundläggande stegen i den generella beskrivningen av udda perfekt tal. Beviset av 10 distinkta primtal är mer komplext och kräver mer arbete.

**Påstående 5.1.** *Ett udda perfekt tal innehåller minst 3 distinkta primtal.*

*Bevis av påstående 5.1.* Låt  $n$  vara ett perfekt tal bestående av en primtals faktor  $p^\alpha$ . Förhållandet nedan gäller.

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= 2p^\alpha \\ \sigma(n) &= \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}\end{aligned}$$

För ett perfekt tal gäller relationen

$$\frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} = 2.$$

En övreuppskattning av den här relationen ger

$$\frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p^\alpha(p - 1)} < \frac{p^{\alpha+1}}{p^\alpha(p - 1)} = \frac{p}{p - 1}$$

Vi får alltså förhållandet

$$\frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} < \frac{p}{p - 1}. \tag{20}$$

Högerledet i olikheten (20) är en kvot som minskar för ett ökat  $p$ . Största möjliga kvot ges av minsta möjliga  $p$ , vilket är 3.

$$\frac{3}{3 - 1} = 1.5 < 2$$

Alla primtal större än 3 kommer att ge en mindre kvot. Exempel är  $p = 5$  och  $p = 7$  där man får  $5/4 = 1.25$  respektive  $7/6 \approx 1.17$ .

För ett godtyckligt  $p \geq 3$  gäller därmed

$$\frac{p}{p-1} < 2. \quad (21)$$

Så  $p^\alpha$  kan inte vara ett perfekt tal. Således kan ett udda perfekt tal inte bestå av endast en primtals faktor.

Anta nu att  $n = p^\alpha q^\beta$  är ett perfekt tal med två distinkta primtals faktorer där  $p < q$ . Ty multiplikativa egenskapen hos  $\sigma(n)$  gäller

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} \cdot \frac{\sigma(q^\beta)}{q^\beta}.$$

Tidigare uppskattning i (20) ger att

$$\frac{\sigma(p^\alpha)}{p^\alpha} < \frac{p}{p-1} \quad \frac{\sigma(q^\beta)}{q^\beta} < \frac{q}{q-1}.$$

Således gäller

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \frac{p}{p-1} \cdot \frac{q}{q-1}. \quad (22)$$

Likt tidigare är (22) en funktion som minskar för varje gång  $p$  ökar. De två minsta möjliga  $p$  är 3 och 5.

$$\frac{3}{3-1} \cdot \frac{5}{5-1} = \frac{15}{8} = 1.875 < 2$$

För nästa godtyckliga  $p$  kommer (22) att vara mindre än 2. Som när  $\sigma(n) < 2n$  gäller, kan inte  $n$  vara ett perfekt tal.

Ett udda perfekt tal måste alltså bestå av minst tre distinkta primtalsfaktorer.  $\square$

**Påstående 5.2.** *3, 5 och 7 är alla samtidigt, inga delare till ett udda perfekt tal.*

*Bevis av påstående 5.2.* Anta att  $n$  är delbar med  $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$ . Primtals faktorisering av  $n$  följer enligt

$$n = 3^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2} \cdot 7^{\alpha_3} \cdot p_4^{\alpha_4} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}$$

där  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \geq 1$  och  $p_4, \dots, p_k$  är distinkta primtal större än 7.

Om  $n$  är perfekt gäller att  $\sigma$  är multiplikativ och  $\sigma(n) = 2n$ , så att  $\sigma(n)$  är delbar med 2 men inte med 4. Vi påstår att  $\alpha_1, \alpha_3 \geq 2$ .

Anta att  $\alpha_1 = 1$ . Då är

$$\sigma(n) = \sigma(3) \cdot \sigma(5^{\alpha_2} \cdot 7^{\alpha_3} \cdot p_4^{\alpha_4} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}) = 4 \cdot \sigma(5^{\alpha_2} \cdot 7^{\alpha_3} \cdot p_4^{\alpha_4} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}).$$

Så  $\sigma(n)$  är delbar med 4, vilket motsäger faktumet om perfekta tal.

Anta att  $\alpha_3 = 1$ . Då är

$$\sigma(n) = \sigma(7) \cdot \sigma(3^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2} \cdot p_4^{\alpha_4} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}) = 8 \cdot \sigma(3^{\alpha_1} \cdot 5^{\alpha_2} \cdot p_4^{\alpha_4} \cdot \dots \cdot p_k^{\alpha_k}).$$

Motsägelse igen, ty delbarhet med 4. Så,  $\alpha_1, \alpha_3 \geq 2$ .

En omskrivning av  $\sigma(n) = 2n$  ger att

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(n)}{n} &= \frac{(1 + 3 + \dots + 3^{\alpha_1})}{3^{\alpha_1}} \cdot \frac{(1 + 5 + \dots + 5^{\alpha_2})}{5^{\alpha_2}} \cdot \frac{(1 + 7 + \dots + 7^{\alpha_3})}{7^{\alpha_3}} \cdot \dots \cdot \frac{(1 + \dots + p_k^{\alpha_k})}{p_k^{\alpha_k}} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{\alpha_1}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{5^{\alpha_2}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{7^{\alpha_3}}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \dots + \frac{1}{p_k^{\alpha_k}}\right) = \\ &\geq \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}\right) \left(1 + \frac{1}{5}\right) \left(1 + \frac{1}{7} + \frac{1}{7^2}\right) = \\ &= \left(\frac{13}{9}\right) \left(\frac{6}{5}\right) \left(\frac{57}{49}\right) = \frac{4446}{2205} > 2 \end{aligned}$$

Motsägelse. För ett perfekt tal krävs att förhållandet  $\sigma(n)/n = 2$  gäller.

□

## Referenser

- [Cri07] A. J. Crilly. *50 mathematical ideas you really need to know*. Quercus, 2007.
- [Ifd26] Ifdahl. Prove that  $n$  is not divisible by 105. *PhysicsForums*, 2026.
- [Kni07] Oliver Knill. The oldest open problem in mathematics. *Harvard, NEU Math Circle*, 2 December 2007.
- [Mat26] Wolfram MathWorld. Odd perfect number. *Wolfram Research*, 1999-2026.
- [Res26] Mersenne Research. List of known mersenne prime numbers. *GIMPS*, 1996-2026.
- [Sil97] Joseph H. Silverman. *A Friendly Introduction to Number Theory*. Prentice-Hall, 1997.
- [Yan96] Song Y. Yan. *PERFECT, AMICABLE AND SOCIAL NUMBERS*. World Scientific, 1996.

# fel hittade i efterhand

Hatice i Kubra Ayranci

May 2026

## 1 Kapitel 3 $\sigma(n)$ funktionen

**Sidan 15:** Finns ett indexfel. Det står  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_i^{\alpha_i}$ . Men det korrekta är  $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ .

**Sidan 16:** Jag har missat att ändra på indexet från  $\sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k}$  till  $\sum_{\beta_{k-1}=0}^{\alpha_{k-1}}$  i högerledet. Det skulle innebära att man summerade över  $\beta_k$  två gånger och det är inte det man vill göra. Jag har skrivit:

$$\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} = \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} \left( \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_{k-1}^{\beta_{k-1}} \cdot p_k^{\beta_k} \right)$$

men det ska istället stå:

$$\sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_k^{\beta_k} = \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} \left( \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_{k-1}=0}^{\alpha_{k-1}} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_{k-1}^{\beta_{k-1}} \cdot p_k^{\beta_k} \right)$$

Även i nästa rad dyker detta indexfel upp.

$$\sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} \left( \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_{k-1}^{\beta_{k-1}} \cdot p_k^{\beta_k} \right) = \left( \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_k^{\beta_k} \right) \left( \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_{k-1}^{\beta_{k-1}} \right)$$

Istället ska det stå

$$\sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} \left( \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_{k-1}=0}^{\alpha_{k-1}} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_{k-1}^{\beta_{k-1}} \cdot p_k^{\beta_k} \right) = \left( \sum_{\beta_k=0}^{\alpha_k} p_k^{\beta_k} \right) \left( \sum_{\beta_1=0}^{\alpha_1} \sum_{\beta_2=0}^{\alpha_2} \dots \sum_{\beta_{k-1}=0}^{\alpha_{k-1}} p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_{k-1}^{\beta_{k-1}} \right)$$

**Sida 17:** Index fel och matematiskt fel. Jag har skrivit

$$\sigma(nm) = \left( \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \dots \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} \right) \left( \frac{q_1^{\beta_1+1} - 1}{q_1 - 1} \dots \frac{q_j^{\beta_j+1} - 1}{q_j - 1} \right)$$

men det jag menade var

$$\sigma(nm) = \left( \frac{p_1^{\alpha_1+1} - 1}{p_1 - 1} \dots \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1} \right) \left( \frac{q_1^{\beta_1+1} - 1}{q_1 - 1} \dots \frac{q_j^{\beta_j+1} - 1}{q_j - 1} \right)$$

På **sidan 19** har jag upprepat liknande information två gånger. Meningen nedan bör tas bort.

*Det följer att  $s(q)$  är den enda äkta delare av  $q$ .*

## 2 Kapitel 5.1 Två grundläggande påståenden

**Sidan 23:** Jag skriver i sista stycket att

”Om  $n$  är perfekt gäller att  $\sigma$  är multiplikativ och  $\sigma(n) = 2n$ , så att  $\sigma(n)$  är delbar med 2 men inte med 4.”

Korrekt men att  $\sigma$  är multiplikativ är inte relevant här.