



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

**En beviskadja i konvex geometri: från Radons lemma till
en svag version av Center Transversal Theorem**

av

Xingyi Chen

2026 - No K14

En beviskedja i konvex geometri: från Radons lemma till en
svag version av Center Transversal Theorem

Xingyi Chen

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Olof Sisask

2026

Sammanfattning

Huvudtemat i denna uppsats är hur lokala villkor på punktmängder och konvexa mängder i \mathbb{R}^d kan ge globala slutsatser. Vi behandlar fyra resultat: Radons lemma, Hellys sats, Centerpoint theorem och en svag version av Center Transversal Theorem, och presenterar dem som en sammanhängande beviskedja:

Radons lemma \implies Hellys sats \implies Centerpoint theorem \implies svag Center Transversal Theorem.

Den svaga versionen av Center Transversal Theorem bevisas inom ramen av den affina och konvexa geometri som byggs upp i uppsatsen, medan den fulla versionen kräver mer avancerade topologiska metoder och ligger därför utanför uppsatsens ram. Uppsatsens bidrag är att visa en sammanhängande kedja av bevis och idéer som binder ihop de fyra resultaten. Var och en av de tre första resultaten används i beviset av nästa, och den svaga versionen av Center Transversal Theorem är kedjans slutpunkt. Uppsatsen är i huvudsak skriven i affint och konvext språk och använder endast elementär linjär algebra, så läsaren behöver inte djupa förkunskaper i linjär algebra för att följa argumenten.

Abstract

The main theme of this thesis is how local conditions on point sets and convex sets in \mathbb{R}^d can give global geometric conclusions. We treat four results: Radon's lemma, Helly's theorem, the Centerpoint theorem and a weak version of the Center Transversal Theorem, and present them as a single coherent proof chain:

Radon's lemma \implies Helly's theorem \implies Centerpoint theorem \implies weak Center Transversal Theorem.

The weak version of the Center Transversal Theorem is proved within the framework of the affine and convex geometry developed in the thesis, while the full version requires more advanced topological methods and therefore falls outside the scope of the thesis. The contribution of the thesis is to show a coherent chain of proofs and ideas that ties the four results together. Each of the first three results is used in the proof of the next, and the weak version of the Center Transversal Theorem forms the endpoint of the chain. The thesis is mainly written in affine and convex language and uses only elementary linear algebra, so the reader does not need a deep background in linear algebra to follow the arguments.

Tack

Jag vill först och främst tacka min handledare Olof för hans hjälp, vägledning och tålamod under arbetet med denna uppsats. Hans kommentarer och synpunkter har betytt mycket för uppsatsens innehåll och struktur.

Jag vill också tacka Annemarie för hjälpen med administrativa frågor, särskilt kring anmälan, deadlines och inlämning av uppsatsen.

Slutligen vill jag tacka min familj och mina vänner för deras stöd och uppmuntran under denna period.

Innehåll

1	Introduktion	9
1.1	Bakgrund och motivation	9
2	Affina och konvexa begrepp	11
2.1	Affina och konvexa kombinationer	11
2.2	Affina och konvexa mängder	12
2.3	Affint och konvext hölje	12
2.4	Affint beroende och oberoende	14
3	Radons lemma	17
3.1	Exempel i \mathbb{R}^2	17
3.2	Bevis av Radons lemma	18
4	Hellys sats	21
4.1	Hellys sats	22
4.1.1	Exempel i \mathbb{R}^2	23
4.2	Bevis av Hellys sats	24
5	Centerpoint theorem	31
5.1	Centerpunkt	31
5.1.1	Hyperplan och halvrum	31
5.1.2	Centerpunkt och en ekvivalent formulering	33
5.1.3	Exempel i \mathbb{R}^2	35
5.2	Centerpoint theorem	35
5.3	Bevis av centerpoint theorem	35
6	En svag version av Center Transversal Theorem	43
6.1	Förberedelse	43
6.2	Svag Center Transversal Theorem	44
6.2.1	Exempel i \mathbb{R}^3	44
6.3	Bevis av sats 6.2	45
7	Slutsats	51
	Referenser	53

Introduktion

1.1 Bakgrund och motivation

Denna uppsats behandlar några klassiska resultat inom konvex geometri. Med konvex geometri menas geometri där konvexitet är den viktigaste egenskapen, och de grundläggande objekten är punktmängder, konvexa mängder, konvexa höljen och snitt i det euklidiska rummet \mathbb{R}^d . Resultaten i området är grundläggande för att förstå de geometriska sambanden mellan dessa objekt, och de utgör samtidigt ett viktigt verktyg inom andra delar av matematiken samt inom tillämpningar som optimering och datavetenskap.

I uppsatsen är vi inte främst intresserade av formen eller storleken hos en enskild konvex mängd. I stället vill vi förstå vad som måste hända när flera punkter eller konvexa mängder betraktas tillsammans. Frågorna har också en tydlig kombinatorisk sida, eftersom vi ofta arbetar med ändliga punktmängder, delfamiljer och villkor som gäller för ett visst antal punkter eller mängder. Man studerar alltså inte bara ett objekt i taget, utan också hur flera objekt påverkar varandra. Till exempel kan en familj av konvexa mängder uppfylla lokala snittvillkor, där små delfamiljer har gemensamt snitt, och under vissa antaganden ger detta en slutsats om hela familjen. Ett viktigt tema i uppsatsen är därför hur lokala villkor kan ge globala slutsatser.

I denna uppsats behandlas fyra resultat: Radons lemma, Hellys sats, Centerpoint theorem och en svag version av Center Transversal Theorem. De hänger ihop genom en sammanhängande bevisedja:

Radons lemma \implies Hellys sats \implies Centerpoint theorem \implies svag Center Transversal Theorem.

Varje pil betyder att det föregående används i beviset av det följande. Radons lemma använder Lemma 2.10 för att visa att en punktmängd med minst $d + 2$ punkter innehåller två icke tomma och disjunkta delmängder vars konvexa höljen skär varandra. Hellys sats använder Radons lemma för att gå från en punktmängd till en familj av konvexa mängder, och visar att lokala snittvillkor för små delfamiljer räcker för en global slutsats. Centerpoint theorem använder i sin tur Hellys sats för att hitta en centerpunkt för varje ändlig punktmängd. Till sist använder vi Centerpoint theorem för att bevisa en svag version av Center Transversal Theorem, där vi går från en punktmängd till flera och söker ett gemensamt affint delrum i stället för en enda centerpunkt.

Den sista satsen behandlas endast i en svag version, som bevisas med hjälp av den affina och konvexa geometri som byggs upp i uppsatsen. Den fulla versionen kräver mer avancerade topologiska metoder och ligger därför utanför uppsatsens ram. På så sätt används de tre första resultaten i beviset av nästa, medan den svaga versionen av Center Transversal Theorem är kedjans slutpunkt. Tillsammans följer de temat från lokala villkor till globala slutsatser.

Genom hela uppsatsen skriver vi argumenten i huvudsak i affint och konvext språk. Linjär algebra används endast i elementär form, till exempel i dimensionsargumentet i Lemma 2.10 och i den vanliga beskrivningen av hyperplan med skalärprodukt. Vi översätter alltså inte resonemangen till linjära delrum, vilket annars är vanligt i läroböcker. Läsaren behöver därför inte djupa förkunskaper i linjär algebra för att följa bevisen.

Affina och konvexa begrepp

I detta kapitel införs de affina och konvexa begrepp som behövs i resten av uppsatsen. Dessa begrepp används för att beskriva hur punkter kan kombineras, vilka mängder som är slutna under sådana kombinationer, och hur man bildar den minsta affina eller konvexa mängd som innehåller en given punktmängd.

Kapitlet fungerar som en förberedelse för de senare resultaten. I Radons lemma behöver vi förstå vad det betyder att en punktmängd är affint beroende. I Hellys sats och Centerpoint theorem behöver vi använda konvexa mängder och konvexa höljen. Därför samlas dessa grundbegrepp här innan vi börjar med huvudsatserna.

2.1 Affina och konvexa kombinationer

Definition 2.1 (Affin kombination).

Låt $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^d$ vara punkter. En punkt z av formen

$$z = \sum_{i=1}^m t_i x_i$$

kallas en affin kombination av x_1, \dots, x_m om koefficienterna $t_i \in \mathbb{R}$ uppfyller

$$\sum_{i=1}^m t_i = 1.$$

Definition 2.2 (Konvex kombination).

Låt $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{R}^d$ vara punkter. En punkt z av formen

$$z = \sum_{i=1}^m t_i x_i$$

kallas en konvex kombination av x_1, \dots, x_m om $t_i \geq 0$ för alla i och

$$\sum_{i=1}^m t_i = 1.$$

Notera att varje konvex kombination är en affin kombination där dessutom $t_i \geq 0$ för alla i .

2.2 Affina och konvexa mängder

Definition 2.3 (Affin mängd).

En mängd $A \subseteq \mathbb{R}^d$ kallas en affin mängd om den är sluten under affina kombinationer.

Dvs om för alla heltal $m \geq 1$, alla punkter $x_1, \dots, x_m \in A$ och alla tal $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$ med

$$\sum_{i=1}^m t_i = 1$$

gäller att

$$\sum_{i=1}^m t_i x_i \in A.$$

Definition 2.4 (Konvex mängd).

En mängd $C \subseteq \mathbb{R}^d$ kallas en konvex mängd om den är sluten under konvexa kombinationer.

Dvs om för alla heltal $m \geq 1$, alla punkter $x_1, \dots, x_m \in C$ och alla tal $t_1, \dots, t_m \in \mathbb{R}$ med $t_i \geq 0$ för alla i och

$$\sum_{i=1}^m t_i = 1$$

gäller att

$$\sum_{i=1}^m t_i x_i \in C.$$

Definition 2.5 (Affint delrum). En icke tom affin mängd i \mathbb{R}^d kallas ett affint delrum.

2.3 Affint och konvext hölje

Definition 2.6 (Affint hölje).

Låt $X \subseteq \mathbb{R}^d$ vara en godtycklig mängd.

Det affina höljet $\text{aff}(X)$ är mängden av alla affina kombinationer av punkter i X :

$$\text{aff}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^m t_i x_i \mid m \geq 1, x_i \in X, t_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^m t_i = 1 \right\}.$$

För tom mängd sätter vi $\text{aff}(\emptyset) = \emptyset$.

Låt $X \subseteq \mathbb{R}^d$.

Då gäller att $X \subseteq \text{aff}(X)$, att $\text{aff}(X)$ är affin, och att $\text{aff}(X)$ är den minsta affina mängd som innehåller X . Dvs om $A \subseteq \mathbb{R}^d$ är affin och $X \subseteq A$, så är $\text{aff}(X) \subseteq A$.

Definition 2.7 (Konvext hölje).

Låt $X \subseteq \mathbb{R}^d$ vara en godtycklig mängd.

Det konvexa höljet $\text{conv}(X)$ är mängden av alla konvexa kombinationer av punkter i X :

$$\text{conv}(X) = \left\{ \sum_{i=1}^m t_i x_i \mid m \geq 1, x_i \in X, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^m t_i = 1 \right\}.$$

För tom mängd sätter vi $\text{conv}(\emptyset) = \emptyset$.

Låt $X \subseteq \mathbb{R}^d$.

Då gäller att $X \subseteq \text{conv}(X)$, att $\text{conv}(X)$ är konvex, och att $\text{conv}(X)$ är den minsta konvexa mängd som innehåller X . Dvs om $C \subseteq \mathbb{R}^d$ är konvex och $X \subseteq C$, så är $\text{conv}(X) \subseteq C$ (se Lemma 2.8 nedan).

Notera också att $\text{conv}(X) \subseteq \text{aff}(X)$, eftersom varje konvex kombination är en affin kombination.

Lemma 2.8 (Minimalitet och monotonicitet).

Låt $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$.

1. *Minimalitet:* Om $C \subseteq \mathbb{R}^d$ är konvex och $X \subseteq C$, så gäller

$$\text{conv}(X) \subseteq C.$$

2. *Monotonicitet:* Om $X \subseteq Y$, så gäller

$$\text{conv}(X) \subseteq \text{conv}(Y).$$

Bevis:

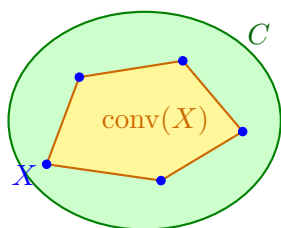
Minimalitet: Antag att $C \subseteq \mathbb{R}^d$ är konvex och att $X \subseteq C$. Låt $z \in \text{conv}(X)$ vara godtycklig. Enligt definitionen av konvexa höljet är z en konvex kombination av ändligt många punkter i X . Alltså finns punkter $x_1, \dots, x_m \in X$ och tal $t_1, \dots, t_m \geq 0$ med $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ sådana att

$$z = \sum_{i=1}^m t_i x_i.$$

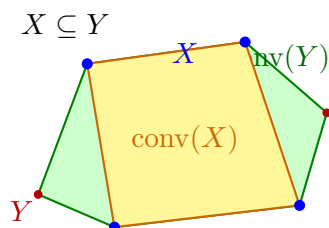
Eftersom $X \subseteq C$, ligger alla punkter x_1, \dots, x_m i C . Därför är z en konvex kombination av punkter i C , och eftersom C är konvex följer $z \in C$. Alltså är $\text{conv}(X) \subseteq C$.

Monotonicitet: Om $X \subseteq Y$ och $z \in \text{conv}(X)$, så kan z skrivas som en konvex kombination av punkter i X . Dessa punkter ligger också i Y , alltså gäller $z \in \text{conv}(Y)$. Därför är $\text{conv}(X) \subseteq \text{conv}(Y)$. \square

Figur 1 illustrerar geometriskt de två egenskaperna. Till vänster visas minimalitet. Varje konvex mängd C som innehåller X måste också innehålla $\text{conv}(X)$. Till höger visas monotonicitet. När $X \subseteq Y$ så kan det konvexa höljet bara växa, vilket ger $\text{conv}(X) \subseteq \text{conv}(Y)$.



Minimalitet. Om $X \subseteq C$ och C är konvex, så gäller $\text{conv}(X) \subseteq C$.



Monotonicitet. Om $X \subseteq Y$, så gäller $\text{conv}(X) \subseteq \text{conv}(Y)$.

Figur 1: Geometriska illustrationer av minimalitet och monotonicitet för det konvexa höljet.

2.4 Affint beroende och oberoende

I linjär algebra betyder linjärt oberoende att ingen vektor i en vektormängd kan skrivas som en linjär kombination av de övriga vektorerna. För punktmängder i affin geometri behöver vi en liknande idé, men där använder vi affina kombinationer i stället för vanliga linjära kombinationer. Det leder till begreppen affint beroende och affint oberoende.

Geometriskt innebär detta att en affint oberoende punktmängd inte innehåller någon punkt som kan skrivas som en affin kombination av de övriga punkterna.

Definition 2.9 (Affint beroende/oberoende).

Låt $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^d$. Vi säger att X är affint beroende om det finns koefficienter t_1, \dots, t_m , inte alla noll, sådana att

$$\sum_{i=1}^m t_i = 0 \quad \text{och} \quad \sum_{i=1}^m t_i x_i = 0.$$

Annars är X affint oberoende. (Jfr. Babai & Frankl [BF22, Definition 2.19, s. 64–65].)

När antalet punkter är maximalt, alltså $d + 1$ (se Lemma 2.10 nedan), motsvarar en affint oberoende punktmängd hörnen i ett d -dimensionellt simplex.

I \mathbb{R}^1 är det två ändpunkter av ett linjesegment.

I \mathbb{R}^2 är det tre hörn i en triangel.

I \mathbb{R}^3 är det fyra hörn i en tetraeder.

Samma idé gäller i högre dimensioner.

Exempelvis kan vi i \mathbb{R}^2 ta tre affint oberoende punkter x_1, x_2, x_3 , deras affina hölje är då hela \mathbb{R}^2 . Sen lägger vi till en fjärde punkt x_4 . Då ligger x_4 i deras affina hölje och kan skrivas som en affin kombination av x_1, x_2, x_3 , så mängden blir affint beroende. Samma resonemang gäller i \mathbb{R}^d , där en affint oberoende punktmängd kan ha högst $d + 1$ punkter. Detta formaliseras i lemmat nedan och blir viktigt senare när vi arbetar med punktmängder som har minst $d + 2$ punkter.

Lemma 2.10 (Högst $d + 1$ affint oberoende punkter i \mathbb{R}^d).

Om $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^d$ är affint oberoende så gäller $m \leq d + 1$.

Bevis:

Antag att X är affint oberoende. Vi väljer x_1 som referenspunkt och betraktar differenserna

$$v_i = x_i - x_1, \quad i = 2, \dots, m.$$

Idén är att översätta påståendet om affint oberoende punkter till ett påstående om linjärt oberoende vektorer i \mathbb{R}^d . Det finns $m - 1$ sådana vektorer, nämligen v_2, \dots, v_m , och vi visar att de är linjärt oberoende.

Antag motsatsen, alltså att v_2, \dots, v_m är linjärt beroende. Enligt definitionen av linjärt beroende finns det då koefficienter t_2, \dots, t_m , inte alla noll, sådana att

$$\sum_{i=2}^m t_i v_i = 0.$$

Eftersom $v_i = x_i - x_1$ kan detta skrivas som

$$0 = \sum_{i=2}^m t_i (x_i - x_1) = \sum_{i=2}^m t_i x_i - \left(\sum_{i=2}^m t_i \right) x_1.$$

Vi sätter nu

$$t_1 = - \sum_{i=2}^m t_i.$$

Detta val görs så att koefficienterna t_1, t_2, \dots, t_m summerar till 0, vilket är ett av villkoren för en affin relation. Då får vi

$$\sum_{i=1}^m t_i = t_1 + \sum_{i=2}^m t_i = - \sum_{i=2}^m t_i + \sum_{i=2}^m t_i = 0,$$

och samtidigt, från uttrycket ovan och definitionen av t_1 ,

$$0 = \sum_{i=2}^m t_i x_i - \left(\sum_{i=2}^m t_i \right) x_1 = t_1 x_1 + \sum_{i=2}^m t_i x_i = \sum_{i=1}^m t_i x_i.$$

Vi har alltså

$$\sum_{i=1}^m t_i = 0 \quad \text{och} \quad \sum_{i=1}^m t_i x_i = 0.$$

Eftersom inte alla t_2, \dots, t_m är noll, är inte heller alla t_1, t_2, \dots, t_m noll. Detta ger en icke trivial affin relation mellan x_1, \dots, x_m , i strid med antagandet att X är affint oberoende.

Alltså är v_2, \dots, v_m linjärt oberoende. Dessa är $m - 1$ vektorer i \mathbb{R}^d , och eftersom \mathbb{R}^d är ett d -dimensionellt vektorrum kan högst d vektorer vara linjärt oberoende. Därför gäller $m - 1 \leq d$, alltså $m \leq d + 1$. \square

Med begreppen affint beroende, konvexa mängder och konvexa höljen på plats är vi redo att gå vidare till uppsatsens huvudsatser. Lemma 2.10 visar att om en punktmängd i \mathbb{R}^d har minst $d + 2$ punkter måste den vara affint beroende. Detta blir utgångspunkten för Radons lemma i nästa kapitel, där vi visar att en sådan punktmängd kan delas upp i två delar vars konvexa höljen skär varandra.

Radons lemma

Vi går nu vidare till uppsatsens första huvudresultat.

Radons lemma beskriver vad en affin beroende relation innebär geometriskt. Frågan är då inte bara att punkterna är affint beroende, utan vad detta säger om deras konvexa höljen. Lemmat visar att en punktmängd i \mathbb{R}^d med tillräckligt många punkter (minst $d + 2$) kan delas upp i två icke tomma och disjunkta delar X_1 och X_2 vars konvexa höljen har en gemensam punkt w . Denna punkt kan skrivas som en konvex kombination av punkterna i X_1 , och samtidigt som en konvex kombination av punkterna i X_2 , alltså samma punkt uttryckt på två olika sätt.

På detta sätt blir Radons lemma en bro mellan de affina begreppen från föregående kapitel och de konvexa snittproblem som kommer senare.

Lemma 3.1 (Radon).

Låt $X = \{x_1, \dots, x_m\} \subseteq \mathbb{R}^d$ vara en mängd med $|X| = m \geq d + 2$.

Då finns icke tomma, disjunkta delmängder $X_1, X_2 \subseteq X$ med $X_1 \cap X_2 = \emptyset$ sådana att

$$\text{conv}(X_1) \cap \text{conv}(X_2) \neq \emptyset.$$

Detta är den klassiska formuleringen av Radons lemma, jfr. Babai & Frankl [BF22, Lemma 3.21, s. 89–90].

Definition 3.2 (Radonpunkt).

Låt $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^d$ vara icke tomma och disjunkta delmängder. En punkt

$$w \in \text{conv}(X_1) \cap \text{conv}(X_2)$$

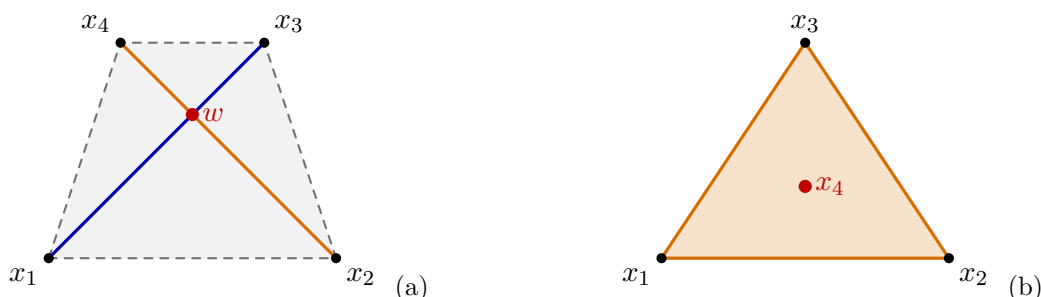
kallas en Radonpunkt för paret X_1, X_2 .

3.1 Exempel i \mathbb{R}^2

För att ge en geometrisk intuition kan vi betrakta fallet $d = 2$. Då säger Radons lemma att varje mängd $X \subseteq \mathbb{R}^2$ med minst $d + 2 = 4$ punkter kan delas upp i två icke tomma och disjunkta delmängder vars konvexa höljen skär varandra.

Figur 2 visar två olika fall med fyra punkter i planet. I panel (a) ligger ingen av punkterna

i det konvexa höljet av de andra, så punkterna bildar ett konvext fyrhörn. Då tar vi $X_1 = \{x_1, x_3\}$ och $X_2 = \{x_2, x_4\}$, punkterna på fyrhörnets två diagonaler, och diagonalerna skär varandra i en Radonpunkt w . I panel (b) ligger en av punkterna, x_4 , inuti triangeln av de tre andra. Då tar vi $X_1 = \{x_4\}$ och $X_2 = \{x_1, x_2, x_3\}$, och x_4 själv är en Radonpunkt.



Figur 2: Geometrisk intuition för Radons lemma i \mathbb{R}^2 med $|X| = 4$.

3.2 Bevis av Radons lemma

Idén är att utgå från en affin beroenderelation för X och dela upp dess koefficienter efter tecken, så att de positiva ger en delmängd X_1 och de negativa en delmängd X_2 . Efter en normalisering får vi en punkt w som kan skrivas både som en konvex kombination av punkter i X_1 och som en konvex kombination av punkter i X_2 . Då gäller

$$w \in \text{conv}(X_1) \cap \text{conv}(X_2),$$

och därmed är snittet icke tomt.

Steg 1: affin beroende

Eftersom $m \geq d + 2$ innehåller mängden X minst $d + 2$ punkter i \mathbb{R}^d .

Enligt Lemma 2.10 (Högst $d + 1$ affint oberoende punkter i \mathbb{R}^d) kan då X inte vara affint oberoende, alltså måste X vara affint beroende.

Då finns alltså koefficient t_1, \dots, t_m , inte alla noll, sådana att

$$\sum_{i=1}^m t_i = 0 \quad \text{och} \quad \sum_{i=1}^m t_i x_i = 0, \quad (1)$$

vilket är en affin beroende relation enligt Definition 2.9.

Steg 2: uppdelning efter tecken

Vi delar upp koefficienterna i (1) efter tecken och definierar

$$T_1 = \{i \mid t_i > 0\}, \quad T_2 = \{i \mid t_i < 0\},$$

där index med $t_i = 0$ ignoreras. Eftersom $\sum_{i=1}^m t_i = 0$ och inte alla t_i är noll, kan det varken gälla att alla $t_i \geq 0$ eller att alla $t_i \leq 0$. Alltså är både T_1 och T_2 icke tomma och dessutom disjunkta.

Sätt

$$X_1 = \{x_i \mid i \in T_1\}, \quad X_2 = \{x_j \mid j \in T_2\}.$$

Genom att gruppera termer i (1) efter tecken och flytta över den negativa summan får vi

$$\sum_{i \in T_1} t_i x_i = \sum_{j \in T_2} (-t_j) x_j, \quad (2)$$

där alla koefficienter är strikt positiva i båda leden.

Steg 3: normalisering

För att båda leden i (2) ska bli konvexa kombinationer återstår bara att koefficienterna i varje led summerar till 1, eftersom alla koefficienter redan är strikt positiva. Sätt därför

$$M_1 = \sum_{i \in T_1} t_i, \quad M_2 = \sum_{j \in T_2} (-t_j).$$

Eftersom $\sum_{i=1}^m t_i = 0$ enligt (1), gäller

$$M_1 - M_2 = \sum_{i \in T_1} t_i + \sum_{j \in T_2} t_j = \sum_{i=1}^m t_i = 0,$$

och därmed $M_1 = M_2 = M$, där $M > 0$ eftersom T_1 är icke tomt med $t_i > 0$ för $i \in T_1$.

Dividerar vi båda leden i (2) med M , får vi

$$\sum_{i \in T_1} \frac{t_i}{M} x_i = \sum_{j \in T_2} \frac{-t_j}{M} x_j.$$

I varje led är koefficienterna icke negativa, och de summerar till 1 eftersom

$$\sum_{i \in T_1} \frac{t_i}{M} = \frac{M_1}{M} = 1, \quad \sum_{j \in T_2} \frac{-t_j}{M} = \frac{M_2}{M} = 1.$$

Båda leden är alltså konvexa kombinationer, det första av punkter i X_1 , det andra av punkter i X_2 . Sätt

$$w = \sum_{i \in T_1} \frac{t_i}{M} x_i = \sum_{j \in T_2} \frac{-t_j}{M} x_j.$$

Då gäller $w \in \text{conv}(X_1)$ och $w \in \text{conv}(X_2)$, alltså

$$w \in \text{conv}(X_1) \cap \text{conv}(X_2).$$

Därmed är Radons lemma bevisat. \square

Radons lemma ger alltså ett första exempel på hur antalet punkter och dimensionen tillsammans kan ge en geometrisk slutsats om en enda punktmängd. I nästa kapitel går vi vidare till familjer av konvexa mängder, där vi studerar hur lokala snittvillkor kan ge ett globalt gemensamt snitt. Detta leder till Hellys sats.

Hellys sats

I föregående kapitel studerade vi Radons lemma, som visar att en punktmängd i \mathbb{R}^d kan delas upp i två delar vars konvexa höljen skär varandra.

Frågan blir nu en annan. Om många konvexa mängder ligger tillsammans, räcker det att kontrollera snittet för små delfamiljer för att få en slutsats om hela familjen?

Hellys sats svarar ja på denna fråga under rätt villkor. Innan vi formulerar satsen behöver vi först införa begreppen familj och delfamilj av mängder.

Definition 4.1 (Familj och delfamilj av mängder).

Låt $m \geq 1$ och låt $C_1, \dots, C_m \subseteq \mathbb{R}^d$ vara mängder. När vi vill betrakta dessa mängder tillsammans skriver vi

$$\{C_j\}_{j=1}^m = \{C_1, \dots, C_m\}.$$

Vi kallar detta en familj av mängder.

Som hos Babai & Frankl antar vi, när denna notation används, att mängderna C_1, \dots, C_m är parvis olika om inget annat uttryckligen sägs. Jfr. [BF22, Beteckningar och terminologi, s. xiii].

En delfamilj av $\{C_j\}_{j=1}^m$ betyder att vi väljer några av mängderna i familjen. Den kan skrivas som

$$\{C_{i_1}, \dots, C_{i_k}\},$$

där $\{i_1, \dots, i_k\} \subseteq \{1, \dots, m\}$. Vi kallar $\{i_1, \dots, i_k\}$ en indexmängd.

I beviset av Hellys sats bildar vi nya mängder genom att ta snitt av konvexa mängder, så vi behöver först veta att sådana snitt är konvexa.

Lemma 4.2 (Snitt av konvexa mängder).

Låt

$$\mathcal{F} = \{C_1, \dots, C_m\}$$

vara en familj av konvexa mängder i \mathbb{R}^d . Då är snittet

$$\bigcap_{i=1}^m C_i$$

en konvex mängd.

Bevis:

Enligt definitionen av konvex mängd behöver vi visa att $\bigcap_{i=1}^m C_i$ är sluten under konvexa kombinationer.

Låt $k \geq 1$, låt $x_1, \dots, x_k \in \bigcap_{i=1}^m C_i$ och låt $t_1, \dots, t_k \geq 0$ med $\sum_{j=1}^k t_j = 1$.

Vi bildar den konvexa kombinationen

$$z = \sum_{j=1}^k t_j x_j$$

och vill visa att $z \in \bigcap_{i=1}^m C_i$, alltså att $z \in C_i$ för varje $i = 1, \dots, m$.

Eftersom $x_1, \dots, x_k \in \bigcap_{i=1}^m C_i$ så för varje $i = 1, \dots, m$ gäller också att

$$x_1, \dots, x_k \in C_i.$$

Eftersom C_i är konvex och z är en konvex kombination av punkter i C_i , följer att

$$z = \sum_{j=1}^k t_j x_j \in C_i.$$

Alltså gäller detta för alla $i = 1, \dots, m$, och därför

$$z \in \bigcap_{i=1}^m C_i.$$

Snittet är slutet under konvexa kombinationer och därmed konvext. □

4.1 Hellys sats

Nu kan vi formulera Hellys sats. För att veta att en familj C_1, \dots, C_m av konvexa mängder har en gemensam punkt behöver vi inte kontrollera hela snittet direkt. Det räcker att kontrollera alla delfamiljer med $d + 1$ mängder, och om alla dessa små delfamiljer har en gemensam punkt så har hela familjen det också. Detta är den tydligaste formen av temat från lokala villkor till en global slutsats i denna uppsats.

Sats 4.3 (Helly).

Låt $C_1, \dots, C_m \subseteq \mathbb{R}^d$ vara en ändlig familj av konvexa mängder med $m \geq d + 1$. Antag att för varje indexmängd $\{i_1, \dots, i_{d+1}\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ gäller

$$\bigcap_{k=1}^{d+1} C_{i_k} \neq \emptyset.$$

Då följer

$$\bigcap_{j=1}^m C_j \neq \emptyset.$$

Se t.ex. Babai & Frankl [BF22, Avsnitt 3.2.2, s. 89–90].

Det viktiga är att antalet mängder som måste kontrolleras beror på dimensionen d , men inte på hur stor hela familjen är.

I \mathbb{R}^2 betyder detta att det räcker att kontrollera alla delfamiljer med tre konvexa mängder.

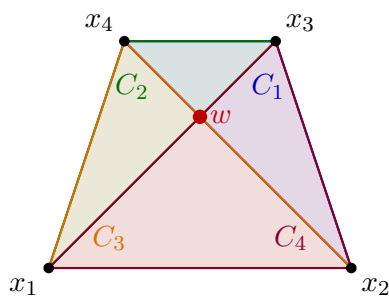
I \mathbb{R}^3 räcker det att kontrollera alla delfamiljer med fyra konvexa mängder.

Samma idé gäller i högre dimensioner.

4.1.1 Exempel i \mathbb{R}^2

För att ge en geometrisk intuition kan vi betrakta fallet $d = 2$. Då säger Hellys sats att om varje trippel av konvexa mängder har en gemensam punkt så har hela familjen en gemensam punkt.

Figur 3 visar fyra trianglar C_1, C_2, C_3, C_4 i planet. Varje trippel av trianglar har en gemensam punkt, vilket syns i figuren som de överlappande färgade områdena, och Hellys sats ger då att alla fyra trianglarna har en gemensam punkt w , markerad i mitten av figuren.



Figur 3: Geometrisk intuition för Hellys sats i \mathbb{R}^2 med fyra trianglar.

4.2 Bevis av Hellys sats

För induktion på m inför vi följande egenskap för varje heltal $m \geq d + 2$:

P(m): Om varje delfamilj med $d + 1$ index (jfr. Definition 4.1), $\{i_1, \dots, i_{d+1}\} \subseteq \{1, \dots, m\}$, uppfyller

$$C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_{d+1}} \neq \emptyset,$$

så gäller

$$\bigcap_{j=1}^m C_j \neq \emptyset.$$

Vi visar med induktion att **P**(m) gäller för alla $m \geq d + 2$, där basfallet **P**($d + 2$) ges av Lemma 4.4 och induktionssteget av Lemma 4.5. Fallet $m = d + 1$ är tautologiskt och behandlas separat i slutet av detta avsnitt.

Lemma 4.4 (Basfall för Hellys sats).

*Egenskapen **P**($d + 2$) gäller. Det vill säga, om $C_1, \dots, C_{d+2} \subseteq \mathbb{R}^d$ är konvexa mängder och varje delfamilj med $d + 1$ index har icke tom skärning,*

$$C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_{d+1}} \neq \emptyset \quad \text{för alla } \{i_1, \dots, i_{d+1}\} \subseteq \{1, \dots, d + 2\},$$

så gäller

$$\bigcap_{j=1}^{d+2} C_j \neq \emptyset.$$

Bevis:

Steg 1: val av punkter x_j

För varje index $j \in \{1, \dots, d + 2\}$ utelämnar vi mängden C_j ur familjen och bildar delfamiljen

$$\{C_i : i \neq j\},$$

som består av exakt $d + 1$ konvexa mängder, vilket är just det antal som antagandet handlar om. Antagandet ger då

$$\bigcap_{i \neq j} C_i \neq \emptyset,$$

så vi kan välja en punkt

$$x_j \in \bigcap_{i \neq j} C_i.$$

Detta gör vi för varje $j \in \{1, \dots, d+2\}$ och får punkter

$$x_1, \dots, x_{d+2} \in \mathbb{R}^d.$$

Sätt

$$X = \{x_1, \dots, x_{d+2}\} \subseteq \mathbb{R}^d.$$

Varje punkt x_j är alltså en gemensam punkt för den delfamilj där just C_j har utelämnats. Relationen mellan de valda punkterna och mängderna kan sammanfattas i följande schematiska tabell:

	x_1	x_2	x_3	\dots	x_{d+1}	x_{d+2}
C_1	?	✓	✓	\dots	✓	✓
C_2	✓	?	✓	\dots	✓	✓
C_3	✓	✓	?	\dots	✓	✓
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\vdots
C_{d+1}	✓	✓	✓	\dots	?	✓
C_{d+2}	✓	✓	✓	\dots	✓	?

Här betyder ✓ att konstruktionen garanterar att punkten ligger i mängden, och ? betyder bara att konstruktionen inte garanterar det (punkten kan ändå ligga där).

Låt nu $p \in \{1, \dots, d+2\}$ vara ett godtyckligt index. Tabellen (T) visar att varje rad C_p har precis ett ?, i kolumnen x_p . Anledningen är att om $j \neq p$, så ingår C_p själv i delfamiljen $\{C_i : i \neq j\}$ som x_j är vald ur, och därför ligger x_j automatiskt i C_p . Vi sammanfattar detta som egenskapen

$$(*) \quad \text{för varje } C_p \text{ är } x_p \text{ den enda möjliga undantagspunkten.}$$

Denna observation kan läsas på två sätt beroende på hur man tittar i tabellen (T).

Om vi fixerar en mängd C_p och läser tabellen radvis, säger (*) att alla valda punkter x_j med $j \neq p$ ligger i C_p . Det betyder att

$$x_j \in C_p \quad \text{för alla } j \neq p.$$

Om vi i stället fixerar en punkt x_p och läser tabellen kolumnvis, säger samma observation att x_p ligger i alla mängder C_j med $j \neq p$. Det betyder att

$$x_p \in C_j \quad \text{för alla } j \neq p.$$

Det enda möjliga undantaget är då mängden C_p .

De två formuleringarna är alltså samma tabellinformation sedd från två olika håll.

Notera att i resten av detta bevis står C_i för de ursprungliga konvexa mängderna och $\{C_i : i \neq j\}$ för delfamiljen där just C_j utelämnas. Varje C_i , C_p eller C_j är alltså en enda mängd ur familjen $\{C_j\}_{j=1}^{d+2}$.

Steg 2: använda Radon

Om två av de valda punkterna sammanfaller, säg $x_r = x_s$ med $r \neq s$, sätter vi

$$x := x_r = x_s.$$

Vi visar att x ligger i varje mängd C_p .

Vi använder tabellen (T). Det räcker att titta på kolumnerna för x_r och x_s . I varje rad C_p finns högst ett ?, nämligen i kolumnen för x_p , medan alla andra positioner är markerade med \checkmark enligt villkoret (*).

Om $p = r$, kan positionen för x_r vara ett ?, men positionen för x_s är markerad med \checkmark . Alltså gäller $x_s \in C_r$. Om $p = s$, kan positionen för x_s vara ett ?, men positionen för x_r är markerad med \checkmark . Alltså gäller $x_r \in C_s$. Om $p \neq r, s$, är båda positionerna markerade med \checkmark , så både x_r och x_s ligger i C_p .

I varje fall innehåller alltså C_p minst en av punkterna x_r och x_s . Eftersom $x_r = x_s = x$, följer det att samma punkt x ligger i varje C_p . Därför

$$x \in C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_{d+2}.$$

Alltså har alla mängderna en gemensam punkt, och beviset är klart i detta fall.

Därför kan vi i fortsättningen anta att punkterna x_1, \dots, x_{d+2} är parvis olika.

Med mängden $X = \{x_1, \dots, x_{d+2}\}$ som vi fick på Steg 1 kan vi nu tillämpa Radons lemma (Lemma 3.1). Då finns icke tomma, disjunkta delmängder $X_1, X_2 \subseteq X$ med

$$X_1 \cap X_2 = \emptyset \quad \text{och} \quad \text{conv}(X_1) \cap \text{conv}(X_2) \neq \emptyset.$$

Som vi såg i kapitlet om Radons lemma kan en punkt i detta snitt kallas en Radonpunkt (Definition 3.2).

Vi väljer och fixerar en sådan punkt w :

$$w \in \text{conv}(X_1) \cap \text{conv}(X_2).$$

Notera att X_1 och X_2 inte behöver täcka hela X .

Steg 3: visa $w \in C_p$

Fixera ett godtyckligt index $p \in \{1, \dots, d+2\}$. Man kan tänka på detta som att vi tittar på rad C_p i tabellen (T) från Steg 1. Enligt (*) är x_p den enda av de valda punkterna som möjligen inte ligger i C_p , så för att få $w \in C_p$ vill vi hitta en av delmängderna X_1 eller X_2 som inte innehåller x_p .

Eftersom X_1 och X_2 är disjunkta kan x_p ligga i högst en av dem, så minst en av utsagorna

$$x_p \notin X_1 \quad \text{eller} \quad x_p \notin X_2$$

gäller. Antag t.ex. att $x_p \notin X_1$ (fallet $x_p \notin X_2$ behandlas helt analogt).

Då består X_1 enbart av valda punkter x_j som inte är x_p , och enligt (*) ligger varje sådan punkt x_j i C_p . Alltså

$$X_1 \subseteq C_p.$$

Eftersom C_p är konvex ger minimalitet i Lemma 2.8(1) att

$$\text{conv}(X_1) \subseteq C_p.$$

Från Steg 2 vet vi att $w \in \text{conv}(X_1)$, så

$$w \in \text{conv}(X_1) \subseteq C_p,$$

dvs. $w \in C_p$.

Sammanfattningsvis:

$$x_p \notin X_1 \implies X_1 \subseteq C_p \implies \text{conv}(X_1) \subseteq C_p \implies w \in C_p.$$

Eftersom minst en av utsagorna $x_p \notin X_1$ eller $x_p \notin X_2$ alltid gäller, ger något av alternativen att $w \in C_p$.

Eftersom p var godtyckligt får vi

$$w \in C_p \quad \text{för alla } p = 1, \dots, d+2,$$

och därmed

$$w \in C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_{d+2},$$

så skärningen av alla $d+2$ mängder är icke tom. □

Lemma 4.5 (Induktionssteg för Hellys sats).

Låt $m \geq d+2$ vara fixerat. Om egenskapen $\mathbf{P}(m)$ gäller, så gäller även $\mathbf{P}(m+1)$.

Bevis:

Låt $C_1, \dots, C_{m+1} \subseteq \mathbb{R}^d$ vara konvexa mängder med $m + 1 \geq d + 2$, och anta att varje delfamilj med $d + 1$ index har icke tom skärning, dvs.

$$C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_{d+1}} \neq \emptyset \quad \text{för alla } \{i_1, \dots, i_{d+1}\} \subseteq \{1, \dots, m+1\}.$$

Vi vill visa att

$$C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_{m+1} \neq \emptyset.$$

Steg 1: skapa $\{D_i\}_{i=1}^m$

Idén i induktionssteget är att utnyttja hypotesen $\mathbf{P}(m)$, som gäller för familjer med m mängder. Vi ersätter därför familjen $\{C_j\}_{j=1}^{m+1}$ med en ny familj $\{D_i\}_{i=1}^m$ med bara m mängder.

Vi definierar den nya familjen $\{D_i\}_{i=1}^m$ genom

$$D_i = C_i \quad \text{för } i = 1, \dots, m-1, \quad D_m = C_m \cap C_{m+1}.$$

Genom att slå ihop C_m och C_{m+1} till sitt snitt D_m får vi en familj med m mängder, samtidigt som varje punkt i D_m automatiskt ligger i båda.

Detta kan illustreras som:

Transformation (1):

$$\begin{array}{ccccccc} C_1 & , & C_2 & , & \dots & , & C_{m-1} & , & (C_m \cap C_{m+1}) \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow \\ D_1 & , & D_2 & , & \dots & , & D_{m-1} & , & D_m \end{array}$$

Vi vill nu visa att familjen $\{D_1, \dots, D_m\}$ uppfyller villkoren i $\mathbf{P}(m)$:

(i) $D_1, \dots, D_m \subseteq \mathbb{R}^d$ är konvexa och $m \geq d + 2$,

(ii) varje delfamilj med $d + 1$ index har icke tom skärning:

$$D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_{d+1}} \neq \emptyset \quad \text{för alla } \{i_1, \dots, i_{d+1}\} \subseteq \{1, \dots, m\}.$$

Notera att $D_m = C_m \cap C_{m+1}$ möjligen sammanfaller med någon D_i med $i < m$. Vi tillåter detta uttryckligen, eftersom villkoren i $\mathbf{P}(m)$ formuleras med indexmängder och upprepningar inte ändrar snitten.

När (i) och (ii) är verifierade kan vi tillämpa antagandet $\mathbf{P}(m)$ på familjen $\{D_i\}_{i=1}^m$.

Steg 2: krav (i)

Familjen $\{D_i\}_{i=1}^m$ ska bestå av konvexa mängder i \mathbb{R}^d , och vi ska ha $m \geq d + 2$.

Vänster sidan av transformation (1) ger $D_i = C_i$ för $i < m$, så dessa D_i är konvexa eftersom C_i är det. Höger sidan ger $D_m = C_m \cap C_{m+1}$, vilket är konvext enligt Lemma 4.2 (snitt av konvexa mängder är konvext). Att $D_i \subseteq \mathbb{R}^d$ följer direkt av att alla $C_j \subseteq \mathbb{R}^d$, och $m \geq d + 2$ gäller eftersom induktionen startar vid $\mathbf{P}(d + 2)$, så när vi når detta steg är m redan minst $d + 2$.

Därmed är krav (i) uppfyllt för familjen $\{D_1, \dots, D_m\}$.

Steg 3: krav (ii)

Låt $\{i_1, \dots, i_{d+1}\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ vara godtycklig, vilket betyder att vi plockar $d+1$ mängder ur familjen $\{D_i\}_{i=1}^m$. Vi skiljer på 2 fall beroende på om mängden D_m är bland dessa eller inte.

Fall 1: inget index är m

I detta fall är D_m inte bland de plockade. Enligt transformation (1) är de plockade mängderna D_{i_j} helt enkelt C_{i_j} för alla j , så

$$D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_{d+1}} = C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_{d+1}}.$$

Eftersom $\{i_1, \dots, i_{d+1}\} \subseteq \{1, \dots, m+1\}$ är detta icke tomt enligt antagandet för $\{C_j\}_{j=1}^{m+1}$.

Fall 2: något index är m

I detta fall är D_m bland de plockade. Vi kan då ordna indexen så att $i_{d+1} = m$ och $i_1, \dots, i_d \in \{1, \dots, m-1\}$.

Enligt transformation (1) gäller $D_{i_j} = C_{i_j}$ för $j = 1, \dots, d$ och $D_m = C_m \cap C_{m+1}$, så

$$\begin{aligned} D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_d} \cap D_m &= C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_d} \cap (C_m \cap C_{m+1}) \\ &= (C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_d}) \cap C_m \cap C_{m+1}. \end{aligned}$$

Betrakta familjen

$$\mathcal{F} = \{C_{i_1}, \dots, C_{i_d}, C_m, C_{m+1}\}$$

av $d + 2$ konvexa mängder. Detta är precis det antal som basfallet hanterar, så vi kan tillämpa basfallet inom induktionssteget. Varje $(d + 1)$ delfamilj av \mathcal{F} är också en $(d + 1)$ delfamilj av $\{C_j\}_{j=1}^{m+1}$, och har därför icke tom skärning enligt antagandet. Lemma 4.4 ger då att hela skärningen av \mathcal{F} är icke tom, dvs. $D_{i_1} \cap \dots \cap D_{i_{d+1}} \neq \emptyset$.

Därmed är krav (ii) uppfyllt för familjen $\{D_1, \dots, D_m\}$.

Avslutning av induktionssteget.

Vi har nu sett att den transformerade familjen $\{D_1, \dots, D_m\}$ uppfyller båda villkoren (i) och (ii) i egenskapen $\mathbf{P}(m)$. Antagandet att $\mathbf{P}(m)$ gäller ger då

$$D_1 \cap D_2 \cap \dots \cap D_m \neq \emptyset.$$

Vi går nu tillbaka från familjen $\{D_i\}_{i=1}^m$ till familjen $\{C_j\}_{j=1}^{m+1}$. Välj en punkt x i denna skärning. Från definitionen av D_i och transformation (1) får vi

$$x \in D_i = C_i \quad \text{för } i = 1, \dots, m-1,$$

samt

$$x \in D_m = C_m \cap C_{m+1}.$$

Alltså ligger x i alla mängder C_1, \dots, C_{m+1} , och därmed

$$C_1 \cap C_2 \cap \dots \cap C_{m+1} \neq \emptyset,$$

dvs. $\mathbf{P}(m+1)$ gäller. □

Sammanställning.

Vi har nu bevisat båda lemmarna och kan kombinera dem till ett fullständigt bevis av Hellys sats. Basfallet $\mathbf{P}(d+2)$ följer av Lemma 4.4, och induktionssteget $\mathbf{P}(m) \implies \mathbf{P}(m+1)$ för $m \geq d+2$ följer av Lemma 4.5. Enligt induktionsprincipen gäller alltså $\mathbf{P}(m)$ för alla $m \geq d+2$.

Fallet $m = d+1$ är tautologiskt, eftersom det då finns bara en delfamilj av storlek $d+1$, vilket är hela familjen. Sammantaget gäller Hellys sats för alla $m \geq d+1$. □

Beviset visar också varför Radons lemma är ett naturligt verktyg här. I basfallet skapar vi $d+2$ punkter från de lokala snittvillkoren, och Radons lemma ger sedan en punkt som ligger i alla mängder. Induktionen utvidgar sedan slutsatsen till en godtycklig ändlig familj av konvexa mängder.

I nästa kapitel använder vi Hellys sats på ett nytt sätt. Vi går tillbaka till ändliga punktmängder och visar att varje sådan punktmängd har en centerpunkt, och Hellys sats blir därmed ett viktigt steg vidare mot Centerpoint theorem.

Centerpoint theorem

5.1 Centerpunkt

I föregående kapitel bevisade vi Hellys sats, som visar hur lokala snittvillkor för en familj av konvexa mängder kan ge ett globalt gemensamt snitt.

Här söker vi en punkt som ligger centralt i förhållande till en ändlig punktmängd $X \subseteq \mathbb{R}^d$. Med centralt menar vi inte att punkten måste ligga mitt i bilden, utan att varje slutet halvrum som innehåller punkten också måste innehålla många punkter från X .

En sådan punkt kallas en centerpunkt. Innan vi kan formulera detta behöver vi först gå igenom hyperplan och halvrum.

5.1.1 Hyperplan och halvrum

För att beskriva en centerpunkt behöver vi kunna dela rummet i två delar. Det görs med hjälp av ett hyperplan, vars två sidor kallas halvrum.

I definitionen av centerpunkt kommer vi att använda slutna halvrum, men i beviset kommer vi också att använda öppna halvrum. Därför samlas båda begreppen här.

Notera att vi i detta kapitel antar $d \geq 1$.

Definition 5.1 (Hyperplan i \mathbb{R}^d).

Låt $a \in \mathbb{R}^d$ vara en icke nollvektor och låt $b \in \mathbb{R}$. Ett hyperplan med normalvektor a definieras som:

$$H(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \cdot x = b\}.$$

där $a \cdot x$ betecknar den vanliga skalärprodukten i \mathbb{R}^d .

Notera att skalärprodukten $a \cdot x$ är summan $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_dx_d$ och ger ett reellt tal. Ekvationen $a \cdot x = b$ beskriver alltså alla punkter x vars skalärprodukt med den fixerade vektorn a är lika med det fixerade talet b .

I \mathbb{R}^2 är ett hyperplan en rät linje och i \mathbb{R}^3 ett vanligt plan.

Definition 5.2 (Halvrum i \mathbb{R}^d).

Detta hyperplan $H(a, b)$ delar \mathbb{R}^d i två **slutna halvrum**

$$H_{cl}^-(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \cdot x \leq b\}, \quad H_{cl}^+(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \cdot x \geq b\},$$

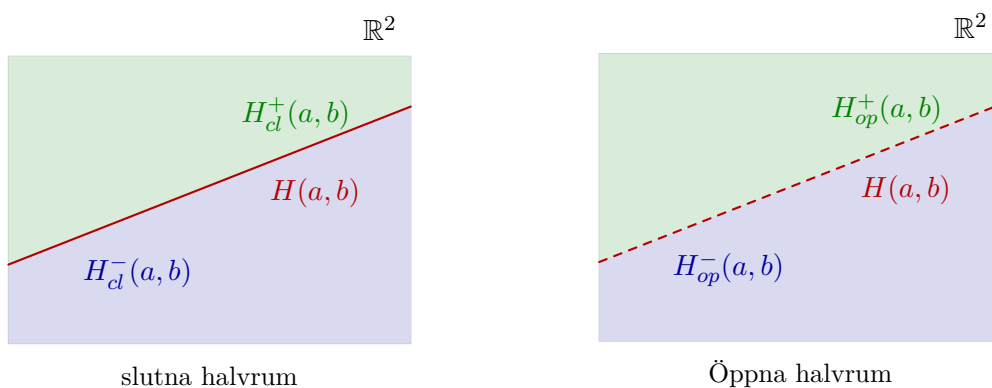
och i två motsvarande **öppna halvrum**

$$H_{op}^-(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \cdot x < b\}, \quad H_{op}^+(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \cdot x > b\}.$$

Vi använder i fortsättningen notation H_{cl} respektive H_{op} för ett godtyckligt slutet respektive öppet halvrum.

Komplementet av ett slutet halvrum är ett öppet halvrum och tvärtom. Till exempel gäller

$$\mathbb{R}^d \setminus H_{cl}^-(a, b) = H_{op}^+(a, b), \quad \mathbb{R}^d \setminus H_{op}^+(a, b) = H_{cl}^-(a, b).$$



Figur 4: Illustration i \mathbb{R}^2 av de två slutna och de två öppna halvrummen som bestäms av hyperplanet $H(a, b)$. Hyperplanet $H(a, b)$ markeras i rött.

Lemma 5.3 (Halvrum är konvexa).

Varje öppet och varje slutet halvrum i \mathbb{R}^d är konvext.

Bevis:

Vi visar att det slutna halvrummet $H_{cl}^-(a, b) = \{x \in \mathbb{R}^d \mid a \cdot x \leq b\}$ är konvext.

Övriga fall visas på samma sätt.

Enligt definitionen av konvex mängd (se avsnitt 2.2) behöver vi visa att det slutna halvrummet $H_{cl}^-(a, b)$ uppfyller definition av konvex mängd, dvs. att den är slutet under konvexa kombinationer så att varje konvex kombination av punkter i halvrummet fortfarande tillhör halvrummet.

Låt $m \geq 1$, låt $x_1, \dots, x_m \in H_{cl}^-(a, b)$ och låt $t_1, \dots, t_m \geq 0$ med $\sum_{i=1}^m t_i = 1$.

Vi bildar den konvexa kombinationen $z = \sum_{i=1}^m t_i x_i$, och vill visa att $z \in H_{cl}^-(a, b)$, alltså att $a \cdot z \leq b$.

Eftersom varje $x_i \in H_{cl}^-(a, b)$ gäller per definition att $a \cdot x_i \leq b$ för varje i .

Vi börjar med:

$$a \cdot z = a \cdot \left(\sum_{i=1}^m t_i x_i \right) = \sum_{i=1}^m t_i (a \cdot x_i)$$

Eftersom $a \cdot x_i \leq b$ för varje i och alla koefficienter $t_i \geq 0$ så får vi att

$$\sum_{i=1}^m t_i (a \cdot x_i) \leq \sum_{i=1}^m t_i \cdot b.$$

Vi kan flytta ut b och genom $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ så får vi att $\sum_{i=1}^m t_i \cdot b = b \sum_{i=1}^m t_i = b$.

Om vi kopplar ihop allt får vi alltså

$$a \cdot z = a \cdot \left(\sum_{i=1}^m t_i x_i \right) = \sum_{i=1}^m t_i (a \cdot x_i) \leq \sum_{i=1}^m t_i \cdot b = b \sum_{i=1}^m t_i = b.$$

Alltså $a \cdot z \leq b$, det vill säga $z \in H_{cl}^-(a, b)$.

Halvrummet är slutet under konvexa kombinationer så det uppfyller villkor för konvex mängd och därmed är konvext. \square

5.1.2 Centerpunkt och en ekvivalent formulering

Definition 5.4 (Centerpunkt).

Låt $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ vara en ändlig punktmängd med $|X| = n$. En punkt $c \in \mathbb{R}^d$ kallas en centerpunkt för X om följande villkor gäller:

(D1) För varje slutet halvrum H_{cl} med $c \in H_{cl}$ gäller

$$|X \cap H_{cl}| \geq \frac{n}{d+1}.$$

Notera att en centerpunkt inte behöver vara en punkt i den ursprungliga punktmängden X . Det viktiga är att c ligger i \mathbb{R}^d och uppfyller villkoret ovan, dvs. varje slutet halvrum som innehåller c innehåller också tillräckligt många punkter från X .

Definitionen ovan använder slutna halvrum, men i beviset av Centerpoint theorem är det mer praktiskt att arbeta med öppna halvrum. Vi visar därför att definitionen ovan är ekvivalent med följande villkor.

Lemma 5.5 (Ekvivalent formulering av centerpunkt).

Låt $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ vara en ändlig punktmängd med $|X| = n$ och låt $c \in \mathbb{R}^d$. Då är c en centerpunkt för X om och endast om följande villkor gäller:

(D2) För varje öppet halvrum H_{op} med $|X \cap H_{op}| > \frac{d}{d+1}n$ gäller att $c \in H_{op}$.

Bevis:

Enligt Definition 5.4 är c en centerpunkt precis när villkor (D1) gäller. Vi visar därför att

(D1) och (D2) är ekvivalenta.

(D1 \implies D2).

Antag att (D1) gäller.

Låt H_{op} vara ett öppet halvrum med $|X \cap H_{op}| > \frac{d}{d+1}n$ och vi vill visa att $c \in H_{op}$.

Antag motsägelsevis att $c \notin H_{op}$ och sätt $H_{cl} := \mathbb{R}^d \setminus H_{op}$, då är H_{cl} ett slutet halvrum och $c \in H_{cl}$.

Nu kan vi använda (D1) på H_{cl} och får $|X \cap H_{cl}| \geq \frac{n}{d+1}$ eftersom vi uppfyller krav H_{cl} är ett slutet halvrum samt att $c \notin H_{op}$ för (D1).

Eftersom $|X| = |X \cap H_{op}| + |X \cap H_{cl}|$ där $|X| = n$, får vi $|X \cap H_{op}| = n - |X \cap H_{cl}|$.

Med $|X \cap H_{cl}| \geq \frac{n}{d+1}$ får vi därför

$$|X \cap H_{op}| \leq n - \frac{n}{d+1} = \frac{d}{d+1}n.$$

Detta motsäger antagandet $|X \cap H_{op}| > \frac{d}{d+1}n$, alltså måste $c \in H_{op}$.

Eftersom H_{op} var godtyckligt gäller (D2).

(D2 \implies D1).

Antag nu att (D2) gäller.

Låt H_{cl} vara ett slutet halvrum med $c \in H_{cl}$ och vi vill visa att $|X \cap H_{cl}| \geq \frac{n}{d+1}$.

Antag motsägelsevis att $|X \cap H_{cl}| < \frac{n}{d+1}$ och sätt $H_{op} := \mathbb{R}^d \setminus H_{cl}$, då är H_{op} ett öppet halvrum och $c \notin H_{op}$.

Eftersom $|X| = |X \cap H_{op}| + |X \cap H_{cl}|$ och $|X| = n$, får vi $|X \cap H_{op}| = n - |X \cap H_{cl}|$.

Med $|X \cap H_{cl}| < \frac{n}{d+1}$ får vi därför

$$|X \cap H_{op}| > n - \frac{n}{d+1} = \frac{d}{d+1}n.$$

Alltså är H_{op} ett öppet halvrum med $|X \cap H_{op}| > \frac{d}{d+1}n$.

Därför kan vi använda (D2) på H_{op} och får $c \in H_{op}$.

Detta motsäger att $c \notin H_{op}$.

Alltså kan antagandet $|X \cap H_{cl}| < \frac{n}{d+1}$ inte vara sant.

Därför måste $|X \cap H_{cl}| \geq \frac{n}{d+1}$.

Eftersom H_{cl} var godtyckligt gäller (D1).

Vi har visat båda riktningarna, så (D1) och (D2) är ekvivalenta. □

Vi kommer sen att använda formuleringen (D2) i beviset av Centerpoint theorem.

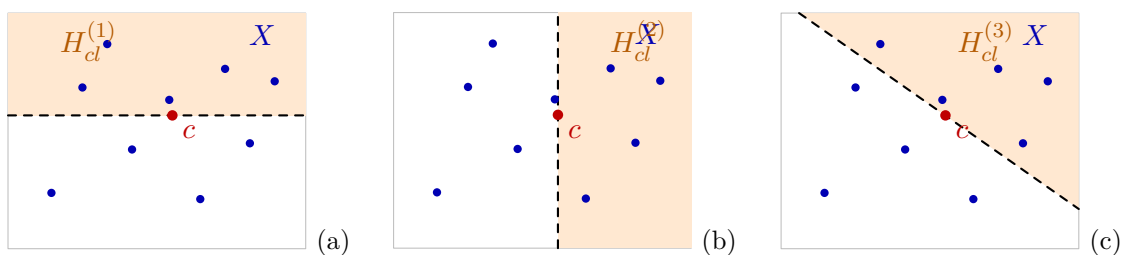
5.1.3 Exempel i \mathbb{R}^2

För att ge en geometrisk intuition kan vi betrakta fallet $d = 2$. Då säger Definition 5.4 att en punkt $c \in \mathbb{R}^2$ är en centerpunkt för en ändlig punktmängd $X \subseteq \mathbb{R}^2$ om varje slutet halvrum som innehåller c också innehåller minst

$$\frac{|X|}{3}$$

punkter av X .

Figur 5 visar ett exempel där X består av nio blå punkter och den röda punkten c är en centerpunkt för X . De tre panelerna visar tre representativa slutna halvrum vars randlinjer går genom c , markerade som de skuggade orange områdena. I varje panel innehåller halvrummet minst tre av de nio punkterna, vilket motsvarar $|X|/3$ i definitionen. Figuren är dock endast avsedd som intuition; i definitionen måste villkoret gälla för varje slutet halvrum som innehåller c , inte bara för dessa tre.



Figur 5: Geometrisk intuition för en centerpunkt c i \mathbb{R}^2 med $|X| = 9$.

5.2 Centerpoint theorem

Vi kan nu formulera kapitlets huvudresultat. Centerpoint theorem säger att en sådan centerpunkt alltid finns för varje ändlig punktmängd i \mathbb{R}^d . Det är inte självklart, eftersom punktmängden kan ligga mycket ojämnt i rummet, men satsen garanterar ändå att det alltid finns en punkt som fungerar som ett centrum i den mening som Definition 5.4 beskriver.

Sats 5.6 (Centerpoint theorem).

Låt $X = \{x_1, \dots, x_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ vara en ändlig punktmängd med $|X| = n$. Då finns en punkt $c \in \mathbb{R}^d$ som är en centerpunkt för X .

Formuleringen och bevisiden följer Matoušek [Mat02, Theorem 1.4.2, s. 14–15].

5.3 Bevis av centerpoint theorem

Vi använder den ekvivalenta formuleringen (D2) från Lemma 5.5, och eftersom satsen är trivial när $n = 0$ antar vi i beviset att $n \geq 1$. Bevisiden är att först samla alla öppna

halvrum som innehåller många punkter från X , och sedan byta ut varje sådant halvrum mot ett konvext hölje av punkter från X . På så sätt får vi en familj av konvexa mängder, och målet blir då att använda Hellys sats för att hitta en gemensam punkt.

Steg 1: omformulera till ett skärningsproblem

Vi vill hitta en punkt c som uppfyller (D2), dvs. en punkt som ligger i varje öppet halvrum som innehåller mer än $\frac{d}{d+1}n$ punkter av X .

Först samlar vi alla sådana halvrum i en familj. Sätt

$$\mathcal{H} = \left\{ H_{op} \subseteq \mathbb{R}^d \mid H_{op} \text{ är ett öppet halvrum och } |X \cap H_{op}| > \frac{d}{d+1}n \right\}.$$

Alltså är \mathcal{H} en familj av öppna halvrum, där varje $H_{op} \in \mathcal{H}$ är en delmängd av \mathbb{R}^d .

Att hitta en punkt c som uppfyller (D2) betyder att c ska ligga i varje $H_{op} \in \mathcal{H}$. Det är samma sak som att säga c ligger i skärning av alla dessa halvrum, dvs.

$$c \in \bigcap_{H_{op} \in \mathcal{H}} H_{op}.$$

Därför räcker det att visa att

$$\bigcap_{H_{op} \in \mathcal{H}} H_{op} \neq \emptyset.$$

Steg 2: byta H_{op} till konvexa höljen

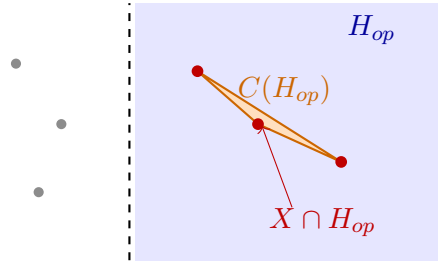
För varje sådan $H_{op} \in \mathcal{H}$ definierar vi det konvexa höljet

$$C(H_{op}) := \text{conv}(X \cap H_{op}).$$

Eftersom halvrummet H_{op} är konvext enligt Lemma 5.3 och $(X \cap H_{op}) \subseteq H_{op}$ ger minimaliteten i Lemma 2.8(1) att

$$\text{conv}(X \cap H_{op}) \subseteq H_{op}, \quad \text{dvs.} \quad C(H_{op}) \subseteq H_{op}.$$

Figuren nedan illustrerar situationen för ett öppet halvrum H_{op} . Punkterna i X är markerade i grått och rött, där de röda utgör $X \cap H_{op}$, och den orange triangeln är $C(H_{op})$.



Figur 6: Illustration av $C(H_{op}) \subseteq H_{op}$ för ett öppet halvrum H_{op} i \mathbb{R}^2 .

Eftersom $C(H_{op}) \subseteq H_{op}$ för varje $H_{op} \in \mathcal{H}$, gäller också att

$$\bigcap_{H_{op} \in \mathcal{H}} C(H_{op}) \subseteq \bigcap_{H_{op} \in \mathcal{H}} H_{op}.$$

Dvs. om den mindre skärningen (vänsterledet) är icke tom, så är även den större skärningen (högerledet) icke tom. Det räcker därför att bara visa

$$\bigcap_{H_{op} \in \mathcal{H}} C(H_{op}) \neq \emptyset.$$

Så målet byts alltså från att visa att skärningen av halvrummen är icke tom till att visa att skärningen av de konvexa mängderna $C(H_{op})$ är icke tom.

Steg 3: ändlig familj

Även om det finns oändligt många öppna halvrum H_{op} när vi varierar parametrarna, så gäller att mängden $X \cap H_{op}$ alltid är en delmängd av X .

Eftersom varje punkt $x_i \in X$ antingen tillhör H_{op} eller inte, och eftersom en mängd med n element har högst 2^n delmängder, kan $X \cap H_{op}$ anta högst 2^n olika värden.

Dvs. det kan fortfarande finnas oändligt många olika öppna halvrum H_{op} , men eftersom $X \cap H_{op}$ alltid är en delmängd av den ändliga mängden X , kan uttrycket $X \cap H_{op}$ bara anta ändligt många olika värden.

Notera att även om $X \cap H_{op}$ är en ändlig mängd, så är det konvexa höljet $C(H_{op}) = \text{conv}(X \cap H_{op})$ i allmänhet inte ändligt (det är ett konvext område med oändligt många punkter). Men eftersom $X \cap H_{op}$ bara tar ändligt många olika värden, finns det också bara ändligt många olika $C(H_{op})$.

Därför finns det bara ändligt många olika mängder av formen

$$C(H_{op}) = \text{conv}(X \cap H_{op}).$$

Låt

$$\{C_1, \dots, C_m\}$$

vara familjen av alla distinkta mängder som uppstår på detta sätt. Då är varje C_i konvex, och eftersom upprepade mängder inte påverkar en skärning får vi

$$\bigcap_{H_{op} \in \mathcal{H}} C(H_{op}) = \bigcap_{i=1}^m C_i.$$

Det återstår alltså att visa att

$$\bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset.$$

Dvs. vi skriver om målet från Steg 2, $\bigcap_{H_{op} \in \mathcal{H}} C(H_{op}) \neq \emptyset$, som handlar om en möjligen oändlig familj av mängder, till ett garanterat ändligt skärningsproblem $\bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset$.

Steg 4: Hellys lokala villkor.

Efter Steg 3 har vi en ändlig familj $\{C_1, \dots, C_m\}$ av konvexa mängder. För att tillämpa Hellys sats behöver vi visa att varje delfamilj av storlek $d + 1$ har icke tom skärning, dvs. att för varje val av indexmängd $\{i_1, \dots, i_{d+1}\} \subseteq \{1, \dots, m\}$ gäller

$$C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_{d+1}} \neq \emptyset.$$

Vi antar i detta steg att $m \geq d + 1$. Annars kan vi inte välja $d + 1$ mängder ur familjen $\{C_1, \dots, C_m\}$ för att bilda en delfamilj, så det finns inga delfamiljer av storlek $d + 1$ att kontrollera och villkoret är trivialt uppfyllt.

Antag motsägelsevis att $C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_{d+1}} = \emptyset$ för någon sådan indexmängd. Eftersom skärningen är tom finns det ingen punkt i X som ligger i alla $C_{i_1}, \dots, C_{i_{d+1}}$ samtidigt. Alltså måste varje punkt i X saknas i minst en av dessa mängder, det vill säga

$$X = (X \setminus C_{i_1}) \cup \dots \cup (X \setminus C_{i_{d+1}}),$$

och tar vi kardinalitet på båda sidor tillsammans med $|A \cup B| \leq |A| + |B|$ samt $|X| = n$ ger detta

$$n \leq |X \setminus C_{i_1}| + \dots + |X \setminus C_{i_{d+1}}|. \quad (3)$$

För att uppskatta varje term $|X \setminus C_{i_k}|$ i högerledet fixerar vi ett $k \in \{1, \dots, d+1\}$. Eftersom C_{i_k} tillhör familjen $\{C_1, \dots, C_m\}$, finns det ett öppet halvrum i \mathcal{H} som representerar just denna mängd. Vi betecknar ett sådant halvrum med $H_{op}^{(k)}$, vilket betyder att

$$C_{i_k} = C(H_{op}^{(k)}) = \text{conv}(X \cap H_{op}^{(k)}).$$

Av definitionen av konvext hölje följer

$$X \cap H_{op}^{(k)} \subseteq \text{conv}(X \cap H_{op}^{(k)}) = C_{i_k}.$$

Låt nu $x \in X \cap H_{op}^{(k)}$. Från inklusionen ovan gäller då $x \in C_{i_k}$, och eftersom $x \in X$ så ligger x både i X och i C_{i_k} , dvs. $x \in X \cap C_{i_k}$. Eftersom detta gäller för varje sådant x får vi $X \cap H_{op}^{(k)} \subseteq X \cap C_{i_k}$ och därmed $|X \cap C_{i_k}| \geq |X \cap H_{op}^{(k)}|$. Per definition av $H_{op}^{(k)} \in \mathcal{H}$ gäller dessutom $|X \cap H_{op}^{(k)}| > \frac{d}{d+1}n$, så

$$|X \cap C_{i_k}| \geq |X \cap H_{op}^{(k)}| > \frac{d}{d+1}n.$$

För varje $x \in X$ gäller antingen $x \in C_{i_k}$ eller $x \notin C_{i_k}$, så X delas disjunkt i $X = (X \cap C_{i_k}) \cup (X \setminus C_{i_k})$. Eftersom X är ändlig ger detta $|X| = |X \cap C_{i_k}| + |X \setminus C_{i_k}| = n$, så $|X \setminus C_{i_k}| = n - |X \cap C_{i_k}|$, vilket tillsammans med $|X \cap C_{i_k}| > \frac{d}{d+1}n$ ovan ger

$$\begin{aligned} |X \setminus C_{i_k}| &= n - |X \cap C_{i_k}| \\ |X \setminus C_{i_k}| &< n - \frac{d}{d+1}n \\ |X \setminus C_{i_k}| &< \frac{n}{d+1}. \end{aligned}$$

Summerar vi denna uppskattning över alla $k = 1, \dots, d+1$ får vi

$$\begin{aligned} |X \setminus C_{i_1}| + \dots + |X \setminus C_{i_{d+1}}| &< (d+1) \cdot \frac{n}{d+1} \\ |X \setminus C_{i_1}| + \dots + |X \setminus C_{i_{d+1}}| &< n, \end{aligned}$$

vilket motsäger (3). Antagandet $C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_{d+1}} = \emptyset$ kan alltså inte hålla, så

$$C_{i_1} \cap \dots \cap C_{i_{d+1}} \neq \emptyset.$$

Steg 5: från Hellys lokala villkor till global skärning.

I Steg 4 visade vi att varje delfamilj av storlek $d+1$ har icke tom skärning. Vi ska nu visa att hela familjen har icke tom skärning, dvs.

$$\bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset.$$

Nu har vi 2 fall:

1. Om $m \leq d+1$, kan vi köra samma motsägelse som i Steg 4 direkt på hela familjen.
2. Om $m \geq d+2$, tillämpar vi Hellys sats.

Vi börjar med fall 1 där $m \leq d + 1$.

Antag motsägelsevis att $\bigcap_{i=1}^m C_i = \emptyset$. Med samma argument som i Steg 4, fast på hela familjen C_1, \dots, C_m i stället för en delfamilj med $d + 1$ mängder, efter vi repeterar samma processen som steg 4 får vi

$$n \leq |X \setminus C_1| + \dots + |X \setminus C_m| < m \cdot \frac{n}{d+1}.$$

Från $m \leq d + 1$ kan vi dividera båda sidor med $(d + 1)$ och få $\frac{m}{d+1} \leq 1$, sen multiplicerar vi sedan båda sidor med n får vi

$$m \cdot \frac{n}{d+1} \leq n.$$

Kedjan blir alltså

$$n \leq |X \setminus C_1| + \dots + |X \setminus C_m| < m \cdot \frac{n}{d+1} \leq n,$$

vilket är en motsägelse. Därmed måste $\bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset$.

Nu återstår fallet 2 där $m \geq d + 2$.

Steg 3 ger att $\{C_1, \dots, C_m\}$ är en ändlig familj av konvexa mängder, och Steg 4 ger att varje delfamilj av storlek $d + 1$ har icke tom skärning. Båda villkoren i Hellys sats (Sats 4.3) är alltså uppfyllda, så

$$\bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset.$$

I båda fallen gäller alltså $\bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset$.

Steg 6: punkten uppfyller (D2)

Från Steg 5 vet vi att oberoende av antalet mängder m i familjen $\{C_i\}_{i=1}^m$ kommer vi att få

$$\bigcap_{i=1}^m C_i \neq \emptyset.$$

Men detta är fortfarande inte den slutliga form som satsen kräver.

Det man till slut vill ha är en punkt c som uppfyller (D2), det vill säga att för varje relevant öppet halvrum H_{op} gäller

$$c \in H_{op}.$$

Så vi behöver ta den gemensamma punkten som vi just fick och visa att den uppfyller (D2). Det betyder att vi nu ska gå tillbaka från mängderna C_i till de öppna halvrummen H_{op} som vi började med.

Om punkten ligger i varje sådant relevant H_{op} , då är den en centerpunkt.

Nu väljer vi en punkt

$$c \in \bigcap_{i=1}^m C_i.$$

Enligt Steg 3 gäller

$$\bigcap_{i=1}^m C_i = \bigcap_{H_{op} \in \mathcal{H}} C(H_{op}),$$

så

$$c \in C(H_{op}) \quad \text{för varje } H_{op} \in \mathcal{H}.$$

Eftersom vi i Steg 2 visade att

$$C(H_{op}) = \text{conv}(X \cap H_{op}) \subseteq H_{op}.$$

Alltså följer att

$$c \in H_{op}$$

för varje öppet halvrum H_{op} som uppfyller

$$|X \cap H_{op}| > \frac{d}{d+1}n.$$

Detta är precis villkoret (D2) i Lemma 5.5, alltså är c en centerpunkt för X . \square

Beviset visar hur Hellys sats används för att hitta en centerpunkt: vi gör om problemet till ett skärningsproblem för konvexa mängder, tillämpar Hellys sats för att få en gemensam punkt, och visar slutligen att denna punkt uppfyller villkoret för att vara en centerpunkt.

Centerpoint theorem handlar alltså om en enda ändlig punktmängd. I nästa kapitel går vi ett steg vidare och betraktar flera ändliga punktmängder samtidigt. Då är det naturligt att fråga om det finns ett gemensamt geometriskt objekt som spelar en liknande roll för alla punktmängderna, och i den svaga versionen av Center Transversal Theorem är detta objekt ett affint delrum.

En svag version av Center Transversal Theorem

I föregående kapitel bevisade vi Centerpoint theorem, som visar att varje ändlig punktmängd i \mathbb{R}^d har en centerpunkt. En centerpunkt fungerar som ett centrum för en punktmängd, i den mening att varje slutet halvrum som innehåller punkten också innehåller tillräckligt många punkter från mängden.

Vi söker inte längre bara en centerpunkt för en enda punktmängd, utan ett affint delrum S som spelar en liknande roll för flera punktmängder samtidigt. Det betyder att varje hyperplan som innehåller S ska dela rummet så att båda de slutna halvrummen innehåller tillräckligt många punkter från varje punktmängd X_i . I den svaga versionen betyder detta minst $\frac{|X_i|}{d+1}$ punkter från varje X_i .

Den fulla versionen av Center Transversal Theorem finns i Matoušek [Mat02, Theorem 1.4.4, s. 15]. För $k > 1$ är den starkare än den sats vi bevisar här, eftersom den ger en nedre gräns med nämnaren $d - k + 2$, och då gäller $d - k + 2 < d + 1$. När $k = 1$ sammanfaller gränsen med Centerpoint theorem. Beviset använder dock mer avancerade topologiska metoder som ligger utanför uppsatsens ram.

I stället bevisar vi en svag version av satsen, som motsvarar Exercise 2 i samma avsnitt i Matoušek [Mat02, Exercise 2, s. 16]. I den svaga versionen ersätts nämnaren $d - k + 2$ med $d + 1$, så vi får samma typ av affint delrum som i den fulla satsen men garanterar färre punkter i varje halvrum för $k > 1$. Fördelen är att den svaga versionen kan bevisas med hjälp av Centerpoint theorem och affina höljen, alltså med verktyg som redan har använts tidigare i uppsatsen.

6.1 Förberedelse

I satsen söker vi ett $(k - 1)$ -dimensionellt affint delrum S , alltså en icke tom affin mängd $S \subseteq \mathbb{R}^d$ med $\dim(S) = k - 1$. Vi börjar därför med att definiera vad vi menar med dimensionen av ett affint delrum.

Definition 6.1 (Dimension av ett affint delrum).

Låt $A \subseteq \mathbb{R}^d$ vara ett icke tomt affint delrum. Vi säger att A är n -dimensionellt, där $n \geq 0$ är ett heltal, om det finns $n + 1$ affint oberoende punkter x_1, \dots, x_{n+1} vars affina hölje är hela A . Då skriver vi $\dim(A) = n$.

För en icke tom mängd $X \subseteq \mathbb{R}^d$ är det affina höljet $\text{aff}(X)$ också ett affint delrum, så vi

kan tala om $\dim(\text{aff}(X))$. Eftersom \mathbb{R}^d inte kan innehålla fler än $d + 1$ affint oberoende punkter enligt Lemma 2.10, gäller alltid $\dim(A) \leq d$ för varje affint delrum $A \subseteq \mathbb{R}^d$.

Vi kommer också att använda villkor (D1) från Definition 5.4, som säger att om c är en centerpunkt för en ändlig punktmängd $X \subseteq \mathbb{R}^d$ så gäller följande:

(D1) För varje slutet halvrum H_{cl} med $c \in H_{cl}$ gäller

$$|X \cap H_{cl}| \geq \frac{|X|}{d+1}.$$

Detta villkor blir viktigt i beviset senare.

6.2 Svag Center Transversal Theorem

Sats 6.2 (Svag Center Transversal Theorem).

Låt $X_1, \dots, X_k \subseteq \mathbb{R}^d$ vara ändliga punktmängder, där $1 \leq k \leq d$.

Då finns ett $(k - 1)$ -dimensionellt affint delrum $S \subseteq \mathbb{R}^d$ sådant att följande gäller:

För varje hyperplan $H(a, b)$ med

$$S \subseteq H(a, b)$$

innehåller både $H_{cl}^-(a, b)$ och $H_{cl}^+(a, b)$ minst

$$\frac{|X_i|}{d+1}$$

punkter av X_i för varje $i = 1, \dots, k$.

Notera att fallet $k = 1$ ger $\dim(S) = 0$, alltså är S en enskild punkt. Då finns bara en punktmängd X_1 , och svag CTT reduceras till Centerpoint theorem.

6.2.1 Exempel i \mathbb{R}^3

För att ge en geometrisk intuition till satsen kan vi betrakta specialfallet $d = 3$ och $k = 2$. Då söker vi ett 1-dimensionellt affint delrum S , det vill säga en linje i \mathbb{R}^3 .

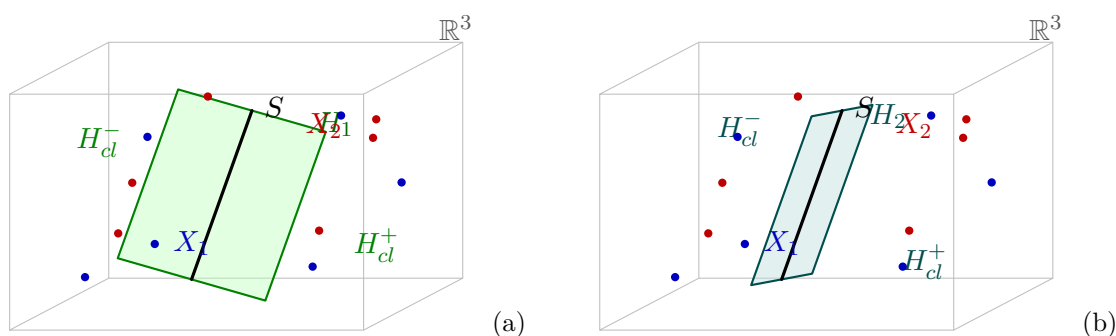
I detta fall säger den svaga versionen av Center Transversal Theorem att för två ändliga punktmängder $X_1, X_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ finns en linje $S \subseteq \mathbb{R}^3$ med följande egenskap: varje hyperplan som innehåller S delar rummet i två slutna halvrum, och vart och ett av dessa halvrum innehåller minst

$$\frac{|X_i|}{d+1} = \frac{|X_i|}{4}$$

punkter av X_i för $i = 1, 2$. I figuren har varje punktmängd sex punkter, så villkoret innebär minst $|X_i|/4 = 1,5$ punkter. Antalet punkter i en mängd är alltid ett heltal, alltså något av $0, 1, 2, 3, \dots$. Av dessa uppfyller 0 och 1 inte villkoret $\geq 1,5$, medan $2, 3, 4, \dots$ alla gör

det. Det minsta heltal som är $\geq 1,5$ är alltså 2, och därför betyder villkoret i praktiken minst två punkter i varje slutet halvrum.

Det viktiga är alltså att satsen inte bara handlar om ett enda hyperplan. I stället väljer man först ett affint delrum S , och sedan måste villkoret gälla för varje hyperplan som innehåller S . Figur 7 illustrerar detta: i båda panelerna är de blå punkterna X_1 och de röda X_2 , och den svarta linjen är samma S . Panel (a) visar ett hyperplan H_1 (grönt) som innehåller S , och panel (b) visar ett annat hyperplan H_2 (blå), också det innehållande S .



Figur 7: Schematisk illustration av den svaga versionen av Center Transversal Theorem i fallet $d = 3$, $k = 2$.

Figuren visar alltså att samma S kan användas för flera hyperplan, vilket är den viktigaste skillnaden mellan Centerpoint theorem och den svaga versionen av Center Transversal Theorem: i stället för att söka en enda punkt söker vi här ett affint delrum som fungerar samtidigt för flera punktmängder.

6.3 Bevis av sats 6.2

Bevisiden är enkel, för varje punktmängd X_i väljer vi först en centerpunkt c_i med hjälp av Centerpoint theorem, och samlar sedan dessa centerpunkter i en mängd

$$\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_k\}.$$

Det affina höljet av dessa punkter ger ett första affint delrum, och om dimensionen är mindre än $k - 1$ utvidgar vi det till ett $(k - 1)$ -dimensionellt affint delrum S .

Till slut visar vi att detta S har den egenskap som satsen kräver. Om ett hyperplan innehåller S , så innehåller det också alla centerpunkter c_i , och därför innehåller båda de slutna halvrummen tillräckligt många punkter från varje X_i .

Steg 1: välj centerpunkter

Vi betraktar familjen $\{X_i\}_{i=1}^k$, där varje punktmängd $X_i \subseteq \mathbb{R}^d$ är ändlig och $1 \leq k \leq d$

enligt satsens antagande. Enligt Centerpoint theorem (Sats 5.6) finns det därför för varje punktmängd X_i i familjen $\{X_i\}_{i=1}^k$ en punkt

$$c_i \in \mathbb{R}^d$$

sådan att c_i är en centerpunkt för X_i .

Alltså:

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \cdots & X_k \\ \downarrow & & \downarrow \\ c_1 & \cdots & c_k \end{array}$$

där c_i är en centerpunkt för X_i .

Enligt villkor (D1) i Definition 5.4 gäller att

$$\forall H_{cl} \ni c_i \implies |X_i \cap H_{cl}| \geq \frac{|X_i|}{d+1}$$

för varje punktmängd X_i i familjen $\{X_i\}_{i=1}^k$.

Detta betyder att om ett slutet halvrum H_{cl} innehåller c_i , då innehåller det minst

$$\frac{|X_i|}{d+1}$$

punkter av X_i .

Steg 2: \mathcal{C} och $\text{aff}(\mathcal{C})$

Nu samlar vi ihop alla centerpunkterna c_i i en punktmängd och definierar

$$\mathcal{C} = \{c_1, \dots, c_k\}.$$

Sedan betraktar vi deras affina hölje $\text{aff}(\mathcal{C})$.

Eftersom \mathcal{C} innehåller högst k punkter, gäller

$$\dim(\text{aff}(\mathcal{C})) \leq k - 1.$$

Eftersom \mathcal{C} innehåller högst k punkter kan dess affina hölje ha dimension högst $k - 1$. En punkt ger affint hölje av dimension 0, två distinkta punkter spänner upp en linje som har dimension 1, och tre affint oberoende punkter spänner upp ett plan som har dimension 2. I allmänhet kan k punkter därför spänna upp högst ett $(k - 1)$ -dimensionellt affint delrum.

Steg 3: konstruera S

Från Steg 2 vet vi att $\dim(\text{aff}(\mathcal{C})) \leq k - 1$, men satsen kräver ett affint delrum S med dimension exakt $k - 1$. Vi behöver därför konstruera ett $(k - 1)$ -dimensionellt affint delrum

$S \subseteq \mathbb{R}^d$ sådant att

$$\mathcal{C} \subseteq \text{aff}(\mathcal{C}) \subseteq S.$$

Vi delar upp i två fall beroende på dimensionen av $\text{aff}(\mathcal{C})$.

Fall 1: $\dim(\text{aff}(\mathcal{C})) = k - 1$.

I detta fall är $\text{aff}(\mathcal{C})$ redan ett $(k - 1)$ -dimensionellt affint delrum.

Det är exakt den typ av objekt som satsen kräver, så kan vi helt enkelt definiera

$$S := \text{aff}(\mathcal{C}).$$

Då gäller direkt att $\text{aff}(\mathcal{C}) \subseteq S$, och eftersom $\mathcal{C} \subseteq \text{aff}(\mathcal{C})$ så får vi

$$\mathcal{C} \subseteq \text{aff}(\mathcal{C}) \subseteq S.$$

Alltså kan vi i detta fall helt enkelt använda $\text{aff}(\mathcal{C})$ själv som vårt sökta delrum S .

Fall 2: $\dim(\text{aff}(\mathcal{C})) < k - 1$.

I detta fall innehåller $\text{aff}(\mathcal{C})$ redan alla centerpunkterna, men det går inte att använda $\text{aff}(\mathcal{C})$ direkt som S , eftersom satsen kräver ett affint delrum med dimension exakt $k - 1$.

Vi behöver därför utvidga $\text{aff}(\mathcal{C})$ till ett affint delrum S med

$$\dim(S) = k - 1 \quad \text{och} \quad \text{aff}(\mathcal{C}) \subseteq S.$$

I Fall 2 har vi $\dim(\text{aff}(\mathcal{C})) < k - 1$, och från satsens antagande $1 \leq k \leq d$ följer $k - 1 \leq d - 1$. Tillsammans med $d - 1 < d$ får vi

$$\dim(\text{aff}(\mathcal{C})) < k - 1 \leq d - 1 < d,$$

så $\text{aff}(\mathcal{C})$ är inte hela \mathbb{R}^d . Vi kan därför välja en ny punkt utanför det nuvarande affina delrummet. När vi lägger till en sådan punkt ökar dimensionen med 1. Om dimensionen fortfarande är mindre än $k - 1$, upprepar vi steget.

Eftersom $k - 1 \leq d - 1$ kan processen fortsätta tills vi når dimension $k - 1$. Efter ändligt många steg får vi alltså ett affint delrum $S \subseteq \mathbb{R}^d$ med $\dim(S) = k - 1$ och $\mathcal{C} \subseteq \text{aff}(\mathcal{C}) \subseteq S$.

Steg 4: visa att S fungerar

Sats 6.2 kräver att det finns ett $(k - 1)$ -dimensionellt affint delrum $S \subseteq \mathbb{R}^d$ sådant att för varje hyperplan $H(a, b)$ med $S \subseteq H(a, b)$ innehåller båda de slutna halvrummen $H_{\mathcal{C}}^-(a, b)$ och $H_{\mathcal{C}}^+(a, b)$ minst

$$\frac{|X_i|}{d + 1}$$

punkter av X_i för varje $i = 1, \dots, k$.

I Steg 3 konstruerade vi redan ett $(k - 1)$ -dimensionellt affint delrum S och visade att

$$\mathcal{C} \subseteq \text{aff}(\mathcal{C}) \subseteq S.$$

Det som återstår är bara att visa att detta konstruerade delrum S uppfyller satsens återstående villkor. Vi kan formulera dessa krav som ett påstående.

Påstående.

Det valda $(k - 1)$ -dimensionella affina delrummet S är det objekt vi söker, det vill säga: för varje hyperplan $H(a, b)$ med

$$S \subseteq H(a, b)$$

gäller

$$|X_i \cap H_{cd}^-(a, b)| \geq \frac{|X_i|}{d+1} \quad \text{och} \quad |X_i \cap H_{cd}^+(a, b)| \geq \frac{|X_i|}{d+1}$$

för varje $i = 1, \dots, k$.

Bevis av påståendet.

Låt $H(a, b)$ vara ett godtyckligt hyperplan sådant att $S \subseteq H(a, b)$.

Vi ska visa att båda de slutna halvrummen som bestäms av $H(a, b)$ innehåller minst

$$\frac{|X_i|}{d+1}$$

punkter av varje X_i .

Så först behöver vi visa att hyperplanet $H(a, b)$ innehåller alla centerpunkterna, eftersom vi i Steg 3 valde S så att

$$\mathcal{C} \subseteq \text{aff}(\mathcal{C}) \subseteq S,$$

och eftersom vi nu antar att $S \subseteq H(a, b)$ får vi kedjan

$$\mathcal{C} \subseteq \text{aff}(\mathcal{C}) \subseteq S \subseteq H(a, b).$$

Därmed följer nu att $\mathcal{C} \subseteq H(a, b)$ och alltså $c_i \in H(a, b)$ för varje $i = 1, \dots, k$.

Nu finns det 2 slutna halvrum som bestäms av hyperplanet $H(a, b)$, enligt Definition 5.1 och Definition 5.2 gäller

$$H(a, b) \subseteq H_{cd}^-(a, b) \quad \text{och} \quad H(a, b) \subseteq H_{cd}^+(a, b).$$

Eftersom varje c_i ligger i hyperplanet $H(a, b)$, följer därför att

$$c_i \in H_{cl}^-(a, b) \quad \text{och} \quad c_i \in H_{cl}^+(a, b)$$

för varje $i = 1, \dots, k$.

Nu använder vi egenskapen att c_i är en centerpunkt för X_i . Villkor (D1) i Definition 5.4 säger att varje slutet halvrum som innehåller c_i måste innehålla minst

$$\frac{|X_i|}{d+1}$$

punkter av X_i .

Eftersom både $H_{cl}^-(a, b)$ och $H_{cl}^+(a, b)$ innehåller c_i , följer att

$$|X_i \cap H_{cl}^-(a, b)| \geq \frac{|X_i|}{d+1} \quad \text{och} \quad |X_i \cap H_{cl}^+(a, b)| \geq \frac{|X_i|}{d+1}$$

för varje $i = 1, \dots, k$.

Detta är precis det villkor som satsen kräver och båda de slutna halvrummen som bestäms av $H(a, b)$ innehåller minst

$$\frac{|X_i|}{d+1}$$

punkter av X_i för varje $i = 1, \dots, k$.

Eftersom $H(a, b)$ valdes godtyckligt bland alla hyperplan med $S \subseteq H(a, b)$ har vi därmed visat att det valda delrummet S uppfyller satsens villkor.

Detta bevisar påståendet, och eftersom påståendet är visat, följer att det konstruerade $(k-1)$ -dimensionella affina delrummet S verkligen är ett sådant delrum som satsen påstår existerar.

Därmed är satsen också bevisad. \square

Beviset av den svaga versionen av Center Transversal Theorem avslutar den beviskedja som uppsatsen har följt och blir därmed ett sista steg i huvudtemat om hur lokala villkor kan ge globala slutsatser. I detta kapitel använde vi Centerpoint theorem för att gå från en centerpunkt för en punktmängd till ett gemensamt affint delrum för flera punktmängder.

I nästa avsnitt sammanfattar vi hela kedjan från Radons lemma till denna sats.

Slutsats

I denna uppsats har vi studerat fyra resultat inom konvex geometri: Radons lemma, Hellys sats, Centerpoint theorem och en svag version av Center Transversal Theorem. Målet har varit att visa hur dessa resultat hänger ihop, inte bara att presentera dem som separata satser.

Uppsatsen började med affina och konvexa begrepp som gav det språk vi behövde i resten av texten, till exempel affin kombination, konvex kombination, affint hölje, konvext hölje och affint beroende. Efter detta bevisades Radons lemma, som visar att om en punktmängd i \mathbb{R}^d innehåller tillräckligt många punkter, så kan den delas upp i två delar vars konvexa höljen skär varandra.

Radons lemma användes sedan som ett verktyg i beviset av Hellys sats, där fokus flyttades från en punktmängd till en familj av konvexa mängder. Satsen visar att lokala snittvillkor för små delfamiljer kan räcka för att hela familjen ska ha ett gemensamt snitt, vilket blev ett tydligt exempel på uppsatsens huvudtema om hur lokala villkor kan ge globala slutsatser.

Därefter användes Hellys sats i beviset av Centerpoint theorem, där vi gick tillbaka till ändliga punktmängder och visade att varje sådan punktmängd har en centerpunkt. En centerpunkt är en punkt som ligger centralt i den meningen att varje slutet halvrum som innehåller punkten också innehåller tillräckligt många punkter från mängden.

Till sist behandlades en svag version av Center Transversal Theorem, där idén från Centerpoint theorem utvidgades till flera punktmängder samtidigt. I stället för att hitta en enda centerpunkt sökte vi ett gemensamt affint delrum, och beviset byggde på Centerpoint theorem och på det affina höljet av de valda centerpunkterna.

På detta sätt följer uppsatsen en beviskedja:

Radons lemma \implies Hellys sats \implies Centerpoint theorem \implies svag Center Transversal Theorem.

Var och en av de tre första resultaten används alltså i beviset av nästa, och den svaga versionen av Center Transversal Theorem är kedjans slutpunkt.

Bevisen i uppsatsen använder relativt enkla metoder, främst affina begrepp, konvexa mängder, snittvillkor och resonemang om ändliga mängder och antal punkter. Uppsatsen har

därmed i huvudsak hållit sig till det affina och konvexa språket och endast använt elementär linjär algebra.

Ett naturligt nästa steg vore att studera de fulla versionerna av Center Transversal Theorem och Ham Sandwich Theorem, vilket skulle kräva mer avancerade metoder från topologi och bli en fortsättning på samma kedja med nya verktyg. Enligt Matoušek [Mat02, Theorem 1.4.4, s. 15] motsvarar Ham Sandwich Theorem just fallet $k = d$ av Center Transversal Theorem.

Referenser

- [BF22] László Babai and Péter Frankl. Linear algebra methods in combinatorics, October 2022. Version 2.2 (slight update of Version 2, 1992). Lecture notes; no publisher listed. © 1988, 1992, 2020, 2022.
- [Mat02] Jiří Matoušek. *Lectures on Discrete Geometry*, volume 212 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, 2002. doi:[10.1007/978-1-4613-0039-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4613-0039-7).