

# SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

## Excentrisk och epicyklisk teori i Ptolemaios och Kopernikus

av

**Olle Dellblad**

2026 - No K16



# Excentrisk och epicyklisk teori i Ptolemaios och Kopernikus

Olle Dellblad

---

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Boris Shapiro

2026



## **Sammanfattning**

Västerländsk astronomi före Kepler antog att himlakropparna rörde sig enligt likformiga, cirkulära banor. För att beskriva avvikelserna från detta ideal i den observerade datan utvecklade forngrekiska astronomer matematiska 'hypoteser' som excentriska cirklar och epicykler. Detta arbete ger en introduktion till teorin om dessa hypoteser som den ursprungligen formulerades av Apollonios av Perga (c. 240-190 f.Kr.), och sedan visar deras omtolkning av Ptolemaios och Kopernikus för deras respektive sol- och planetmodeller. Denna teori slutligen jämförs med en Newtonsk formulering av Keplers planetlagar för att belysa dess styrkor och svagheter som en astronomisk modell.

## **Abstract**

Western astronomy before Kepler assumed that the celestial bodies moved in uniform, circular motion. In order to account for deviations from this ideal in the observed data, Ancient Greek astronomers developed mathematical 'hypotheses' such as eccentric circles and epicycles. This work provides an introduction to the theory of these hypotheses as originally formulated by Apollonius of Perga (c. 240-190 B.C.), then demonstrates their adaptation by Ptolemy and Copernicus for their respective solar and planetary models. This mathematical theory is then compared with the Newtonian formulation of Kepler's planetary laws in order to understand its strengths and weaknesses as an astronomical model.

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Introduktion</b>	<b>3</b>
1.1	Historisk bakgrund . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Excentriska cirklar och epicykler före Ptolemaios</b>	<b>4</b>
2.1	Beskrivning av den första anomalin . . . . .	4
2.2	Beskrivning av den andra anomalin . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Ptolemaios utvidgningar</b>	<b>16</b>
3.1	Ekvanten . . . . .	16
3.2	Excentriska epicykler . . . . .	17
3.3	Den fullständiga planetmodellen . . . . .	19
<b>4</b>	<b>Kopernikansk heliocentrism</b>	<b>19</b>
4.1	Heliocentrisk retrogradrörelse . . . . .	20
4.2	Astronomi utan ekvanter . . . . .	20
<b>5</b>	<b>Newtonsk heliocentrism</b>	<b>23</b>
5.1	Keplers första och andra lagar . . . . .	23
5.2	Ekvanten och Keplers andra lag . . . . .	28

# 1 Introduktion

I dag vet vi att jorden inte är universumets mittpunkt, utan rör sig i en bana runt solen. Nicolaus Kopernikus (1473-1543 e.Kr.) var den första att i modern tid framlägga en heliocentrisk världsbild, men det var Johannes Kepler (1571-1630) som lade grunden till den nutida uppfattningen om solsystemet genom upptäckten av de lagarna om planetrörelse som i dag bär hans namn [9].

**Definition 1.1** (Keplers lagar).

1. Planeternas banor beskriver en ellips, med solen i den ena brännpunkten.
2. En linje mellan en planet och solen sveper över en lika stor area på samma tid.
3. Kvadraten på perioden av en planet är proportionell mot kuben på planetens medelavstånd från solen.

Den observerade rörelsen av himlakropparna som uppstår från Keplers lagar ger upphov till två 'anomalier', som de grekiska astronomer kallade dem, som varje astronomisk teori måste ta hänsyn till [6].

**Definition 1.2** (De två anomalierna).

1. Himlakropparnas östliga rörelse längs ekliptikan är inte observerbart likformig, utan har en fortast och en saktast punkt. Detta kallades för den första anomalin eller zodiakens anomali.
2. Planeterna uppvisar också en retrogradrörelse där de tycks stanna, flytta i en västlig riktning och sedan stanna igen innan de fortsätter sin vanliga, östliga progradrörelse. Eftersom retrogradrörelse alltid sker när planeten är i konjunktion med (mercurius och venus) eller i opposition till (mars, jupiter och saturnus) solen kallades denna den andra anomalin eller solens anomali.

Keplers lagar förklarar både anomalierna på ett enkelt sätt. Den första anomalin beskriver den olikformiga rörelsen som uppstår från Keplers andra lag, medan den andra anomalin sker när jorden övertar saktare eller övertas av fortare planeter i dess omloppsbanan runt solen enligt Keplers första lag. Det är också därför retrogradrörelse är förknippad med solen. Tidigare astronomi var inte bara geocentrisk, utan utgick också från antagandet att himlakropparnas rörelser kunde beskrivas genom likformig cirkulär rörelse, med den stationära jorden som mittpunkt eller nära mittpunkten. Trots sin banbrytande kosmologiska omställning avvek Kopernikus inte heller från idealen av likformig cirkulär rörelse. Som vi kommer att se var Kopernikus faktiskt motiverad av försöket att återställa det grekiska idealet efter vissa avvikelser från Ptolemaios. Tilltron på likformig rörelse gav upphov till komplicerade modeller med excentriska cirklar, epicykler och ekvanter som kunde med imponerande precision beskriva planeternas rörelse.

Syftet med detta arbete är att presentera den grundläggande teorin bakom dessa matematiska redskap så som de utformades av de tidigaste astronomerna i den grekiska traditionen, samt att visa hur Ptolemaios och senare Kopernikus vidareutvecklade denna teori för deras respektive planetmodeller. Arbetet avslutas med en jämförelse med modern astronomi.

## 1.1 Historisk bakgrund

Möjligheten att jorden rörde sig var inte okänd under antiken, pythagoréerna hade framhävt att planeterna (och solen) kretsade kring en eld i universumets mittpunkt och Aristarchos från Samos (310-230 f.Kr.) utvecklade en heliocentrisk modell vars detaljer inte har bevarats, men av vetenskapliga och filosofiska skäl förblev den geocentriska världsbilden dominerande under antiken [5]. Förutom förklaringskraften i Aristoteles geocentriska fysik var det svårt att förena en rörlig jord med bristen på en observerbar stjärnparallax [3].

Geocentrismen var med andra ord oomstridd inom fysiken och kosmologin, men det var mindre klart hur den kunde formuleras matematiskt. Enligt Simplicios från Kilikien hade Platon framhävt att himlakropparnas bana torde följa en likformig, cirkulär rörelse [9]. Eftersom den superlunära världen antogs vara perfekt och oföränderlig hade man svårt att föreställa sig hur oregelbundenheter i himlakropparnas bana inte skulle ackumulera och leda till himlens förgörelse. Problemet var dock att inga av himlakropparna visade en likformig, cirkulär rörelse i den observerade datan. Varje himlakropp är oregelbunden i dess rörelse genom ekliptikan (den första anomalin). Planeterna har ytterligare en oregelbundenhet i och med att de undergår retrogradrörelse, där de tycks sakta ned, stanna och sedan flytta bakåt för en period (den andra anomalin).

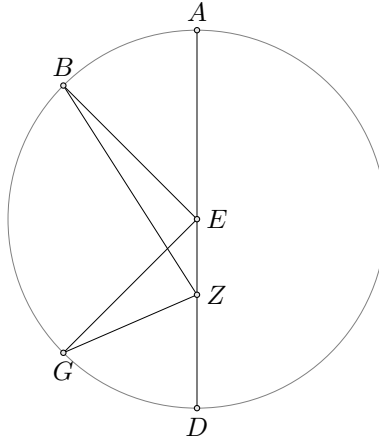
Det tidigaste kända försöket att utveckla en astronomisk teori utifrån Platons antaganden gjordes av Eudoxos från Knidos (408-355 f.Kr.) [9]. Genom att beskriva himlakropparnas bana enligt en serie koncentriska sfärer med jorden som mittpunkt, där varje sfär snurrar med en annorlunda hastighet och tillför denna rörelse till himlakroppen, kunde Eudoxos beskriva dess rörelse matematiskt. Detta kunde förklara även planeternas retrogradrörelse, men inte planeternas växlande närhet till jorden, vilket man observerade genom planeternas växlande ljusstyrka. Eudoxos torde ha varit medveten om detta problem och det finns skäl att tro att han tolkade sfärerna enbart som geometriska redskap utan fysisk existens. Däremot så tog Aristoteles Eudoxos idéer som verkliga och byggde sitt kosmologiska system på dem, vilket blev den dominerande kosmologiska modellen före heliocentrismens genombrott på 1600-talet [3].

## 2 Excentriska cirklar och epicykler före Ptolemaios

Den ursprungliga teorin om excentriska cirklar och epicykler utvecklades förmodligen först av Apollonios från Perga (c. 240 - 190 f.Kr.). Eftersom Apollonios astronomiska idéer huvudsakligen har bevarats i Ptolemaios *Almagest* utgår jag från Ptolemaios framställning [12].

### 2.1 Beskrivning av den första anomalin

Eftersom solen enbart påverkas av den första anomalin utgör den en naturlig utgångspunkt för en presentation av Apollonios grundläggande teori.



Figur 1: Den excentriska hypotesen.

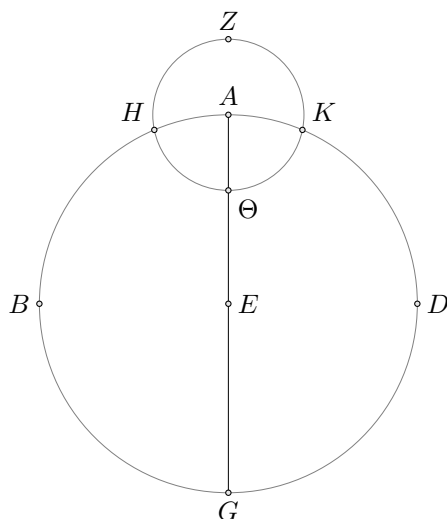
**Definition 2.1** (Den excentriska hypotesen). Låt  $C$  vara en cirkel med mittpunkten  $E$ , och låt  $A$  och  $D$  vara punkter på  $C$  sådan att  $\overline{AD}$  innehåller  $E$  (se figur 1). Vi inför nu en godtycklig punkt  $Z$  på linjen  $AD$ , och vi definierar **excentriciteten** av  $C$  som distansen mellan  $E$  och  $Z$ . Vidare definierar vi  $A$  som **perigeum** (alternativt **perihelium** om vi beskriver solens bana) och  $D$  som **apogeum** (eller **aphelium**). Tillsammans utgör dessa cirkelns **apsis** och  $\overline{AD}$  dess **apsidelinje**.

Välj nu två punkter på  $C$ ,  $B$  och  $G$ , sådan att cirkelbågarna  $\sphericalangle BA$  och  $\sphericalangle GD$  är lika. Antag att en kropp förflyttar sig moturs längs  $C$  med en likformig vinkelhastighet, sådan att den korsar cirkelbågarna  $\sphericalangle BA$  och  $\sphericalangle GD$  under samma tid. Som Ptolemaios argumenterar kommer en observatör vid  $Z$  att mäta en större vinkelhastighet när kroppen är nära perigeum och en mindre vinkelhastighet när kroppen är nära apogeum trots att kroppens egentliga vinkelhastighet är likformig, eftersom  $\angle BZA < \angle GZD$ , men  $\angle BEA = \angle GED$ .

Vi introducerar nu begreppen deferent och epicykel.

**Definition 2.2.** Låt  $E$  vara mittpunkten av en cirkel  $C_1$ , och låt en punkt  $A$  som ligger på  $C_1$  vara mittpunkten av en cirkel  $C_2$  (se figur 2). Låt  $H$  och  $K$  vara punkterna där  $C_2$  skär  $C_1$ , och  $Z$  och  $\theta$  vara punkterna där linjen  $\overline{EA}$  skär  $C_2$ . Vi kallar  $C_1$  för **deferenten** och  $C_2$  för dess **epicykel**.

Antag att en kropp förflyttar sig längs  $C_2$  med en likformig vinkelhastighet, och antag också att epicykelns centrum  $A$  förflyttar sig likformigt längs  $C_1$  i motsatt riktning. Om kroppen befinner sig vid punkterna  $\theta$  eller  $Z$  så överensstämmer den med  $A$ , annars inte. Notera att om, till exempel, kroppen befinner sig vid  $H$  när epicykeln rör sig från  $A$  till  $B$ , då kommer kroppens bana att vara större än den likformiga rörelsen av epicykeln med båglängd  $\sphericalangle AH$  och om den befinner sig vid  $K$  kommer den att vara mindre än epicykelns rörelse med båglängd  $\sphericalangle AK$ .



Figur 2: Den epicykliska hypotesen.

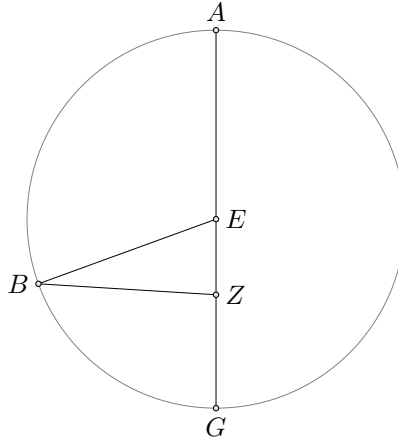
Båda hypoteserna kan användas för att beskriva den första anomalin, eftersom de är ekvivalenta med varandra givet två förutsättningar: deferenten måste rotera moturs med samma vinkelhastighet som epicykeln roterar medurs, och proportionen mellan den excentriska punkten och cirkelns mittpunkt till cirkelns radius måste vara lika med proportionen mellan epicykelns radius och deferentens radius. Ptolemaios bevisar flera ekvivalenser, men vi nöjer oss med att betrakta ekvivalens i den allmänna 'anomalins ekvation', som Ptolemaios kallar den, alltså differensen mellan medelrörelsen och kroppens egentliga position.

Låt oss börja med att precisera begreppen medelrörelse och anomalins ekvation.

**Definition 2.3** (Medelrörelse). *En kropps **medelrörelse** är den teoretiska likformiga hastigheten en kropp skulle behöva ha för att avklara en fullständig rotering kring en cirkulär omloppsbana under samma tid som dess observerade omloppsbana. Vinkeln som uppstår mellan en startpunkt vid en apsispunkt och planetens teoretisk position enligt medelrörelsen kallas för **medelanomalin**.*

Anomalins ekvation, med andra ord, är den vinkel som uppstår när vi jämför en kropps verkliga position med den position den skulle ha enligt sin medelrörelse. Notera att ordet ekvation här inte används i den moderna beteckningen, utan syftar på en vinkel som läggs till medelrörelsen för att uppnå den önskade avvikelser [12]. Låt oss betrakta en exakt matematisk beskrivning av anomalins ekvation enligt båda hypoteserna.

**Definition 2.4** (Anomalins ekvation i den excentriska hypotesen). *Rita en cirkel  $ABG$  med centrum  $E$  och excentriken  $Z$  sådan att  $\overline{AEZG}$  utgör cirkelns*



Figur 3: Anomalins ekvation i den excentriska hypotesen.

diameter (se figur 3). Antag att en kropp rör sig likformigt längs cirkeln så att den befinner sig vid punkten  $B$ . Kroppens position utifrån medelrörelsen ges av vinkeln  $\angle AEB$  och dess position utifrån excentriken ges av vinkeln  $\angle AZB$ . Differensen mellan dessa ges av  $\angle EBZ$ , vilket utgör anomalins ekvation.

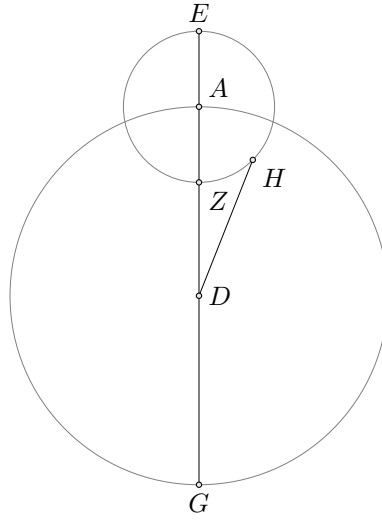
**Definition 2.5** (Anomalins ekvation i den epicykliska hypotesen). Rita en deferent  $ABG$  med mittpunkten  $D$ , med epicykeln  $EZH$  med  $A$  som centrum, med apsidelinjen  $ADB$  (se figur 4). Låt kroppen befinna sig vid  $H$ . Koppla  $DH$ . Då ges anomalins ekvation av  $\angle ADH$ .

Vi visar nu att anomalins ekvation är densamma i båda hypoteserna.

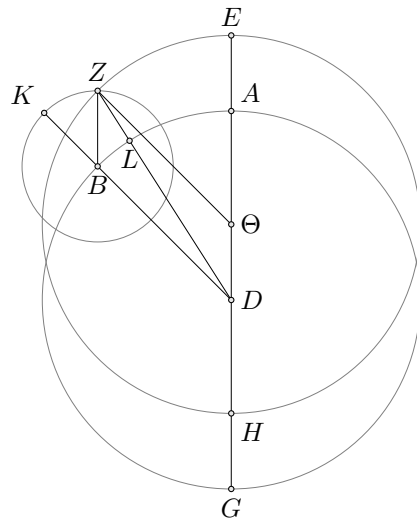
**Sats 1.** Rita en cirkel  $ABG$  med centrum  $D$ , alltså observatörens position, som är koncentrisk med ekliptikan, sådan att  $\overline{ADG}$  är apsidelinjen. Rita en cirkel  $EZH$  med mittpunkten  $\Theta$  som är excentrisk med och har samma storlek som  $ABG$ , sådan att apsidelinjen  $E\Theta H$  innehåller  $A$  och  $D$ , där  $E$  är apogeum. Låt  $AB$  vara en godtycklig båglängd på  $ABG$ , och låt  $B$  vara mittpunkten till epicykeln  $KZ$  med radius  $BZ$ , där  $Z$  är skärningspunkten mellan epicykeln och den excentriska cykeln. Företrä  $KBD$ .

Både excentriska och epicykliska hypoteserna kommer att föra en kropp till  $Z$  under samma tid. Med andra ord kommer båglängderna  $\sphericalangle EZ$ ,  $\sphericalangle AB$  och  $\sphericalangle KZ$  att vara likformiga samt vinklarna  $\angle DZ\Theta$  och  $\angle BDZ$  kommer att vara lika, givet att

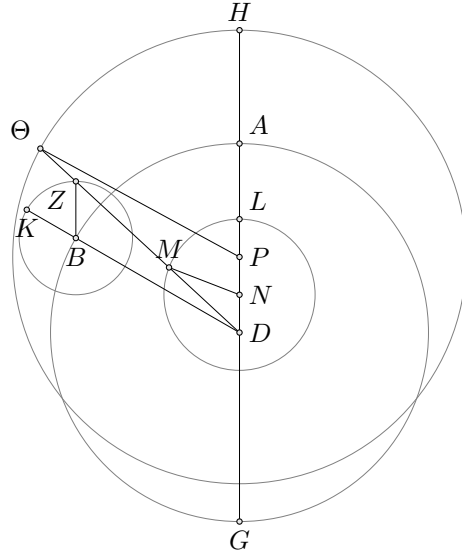
1. Deferenten roterar moturs samtidigt som epicykeln roterar medurs med samma vinkelhastighet.
2. Proportionen mellan distansen från observatörens position till excentriska cirkelns mittpunkt samt radius är lika med proportionen mellan epicykelns radius samt deferentens radius.



Figur 4: Anomalins ekvation i den epicykliska hypotesen.



Figur 5:  $\overline{D\Theta} = \overline{BZ}$ .



Figur 6:  $\overline{D\Theta} \neq \overline{BZ}$ .

*Bevis.* Ptolemaios bevis utgår ifrån en fallindelning, men först, koppla  $Z\Theta$ ,  $BZ$  och  $DZ$ .

Fall 1.  $\overline{D\Theta} = \overline{BZ}$  (se figur 5).

Eftersom  $\overline{D\Theta} = \overline{BZ}$  och  $\overline{BD} = \overline{\Theta Z}$  är  $BD\Theta Z$  ett parallelogram och  $\angle E\Theta Z = \angle ADB = \angle ZBK$ . Då dessa är vinklar i centrum av cirklar kommer bågarna de uppspannar vara likformiga, så båglängderna  $\sphericalangle EZ$ ,  $\sphericalangle AB$  och  $\sphericalangle KZ$  är likformiga.

Anomalins ekvation i detta fall motsvaras av  $\angle DZ\Theta$  i den excentriska hypotesen och  $\angle BDZ$  i den epicykliska hypotesen här. Eftersom  $\overline{Z\Theta}$  är lika med  $\overline{BD}$  följer det att  $\angle DZ\Theta$  och  $\angle BDZ$  är inre alternatvinklar och därmed lika.

Fall 2.  $\overline{D\Theta} \neq \overline{BZ}$  (se figur 6).

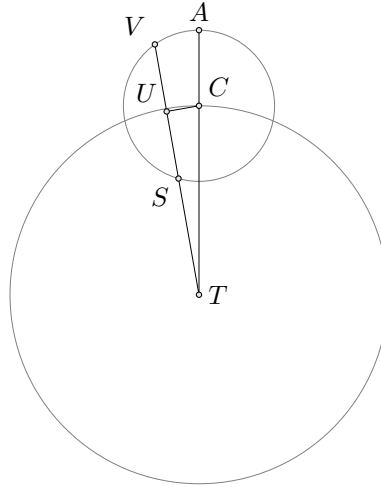
Ptolemaios förenklar beviset här genom att behandla fallen  $\overline{D\Theta} < \overline{BZ}$  och  $\overline{D\Theta} > \overline{BZ}$  samtidigt.

Rita en koncentrisk deferent  $ABG$  med mittpunkt  $D$  och med en epicykel  $KZB$  som ovan. Koppla  $AG$ . Rita en excentrisk cirkel  $ML$  med mittpunkt  $N$  på  $\overline{AG}$  sådan att cirkeln är mindre än  $ABG$  och rita en excentrisk cirkel  $H\Theta$  med mittpunkt  $P$  på  $\overline{AG}$  sådan att cirkeln är större än  $ABG$ . Koppla  $D\Theta$  sådan att  $\overline{\Theta Z M D}$  är en linje och koppla  $DH$  sådan att  $\overline{D L A H}$  är en linje. Koppla  $\Theta P$  och  $MN$ .

Enligt förutsättning 2 av satsen har vi att

$$\overline{DB} : \overline{BZ} = \overline{\Theta P} : \overline{PD} = \overline{MN} : \overline{ND},$$

och eftersom  $\overline{DA}$  och  $\overline{BZ}$  är parallella är  $\angle BZD = \angle MDN$ , så trianglarna



Figur 7: Apollonios sats.

$\triangle ZDB$ ,  $\triangle D\Theta K$  och  $\triangle DMN$  har samma proportioner mellan de sidorna ovan och samma vinkel mellan dessa sidor, vilket gör dem kongruenta enligt sida-vinka-sida satsen. Det följer från detta att  $\angle BDZ = \angle D\Theta P = \angle DMN$ .

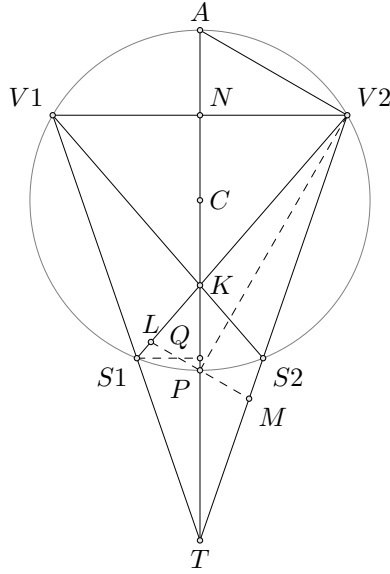
Från detta ser vi att  $\overline{DB}$ ,  $\overline{NM}$  och  $\overline{P\Theta}$  är parallella, eftersom de ger samma vinkel när de skär  $\overline{HG}$ . Om vi nu betraktar vinklarna  $\angle AP\Theta$ ,  $\angle ANM$  och  $\angle ADB$ , som representerar anomalins ekvation, är de lika, vilket var det som vi skulle bevisa. □

## 2.2 Beskrivning av den andra anomalin

Användningen av epicykler för att beskriva den andra anomalin är sannolikt den mest välkända idén inom den grekiska astronomin, men det är långt ifrån uppenbart hur eller om detta fungerar matematiskt. Om man återgår till modellen för den första anomalin noterar man att epicykeln där aldrig undergår retrogradrörelse under observation från punkten  $D$ . Frågan blir då under vilka förutsättningar retrogradrörelse uppstår och hur man identifierar stationerna där retrogradrörelsen börjar och sedan övergår tillbaka till progradrörelse. Apollonios bevisade en mycket viktig sats som svarar på dessa frågor.

**Sats 2.** *Låt  $TSV$  vara en linje från jorden ( $T$ ) som skär epicykeln vid punkterna  $S$  och  $V$  sådan att  $S$  är närmast  $T$  och låt  $U$  vara mittpunkten av  $\overline{SV}$  (se figur 7).  $S$  är då en stationär punkt om proportionen  $\overline{SU} : \overline{TS}$  är lika med proportionen mellan hastigheten (velocity) av epicykeln och hastigheten av planeten.*

Ptolemaios bevisar också satsen för en ekvivalent excentrisk modell, vilket vi också kommer att göra. Detaljerna ges i beviset nedan. Det bör dock noteras att detta skiljer sig från den excentriska modellen som gavs ovan. Istället för



Figur 8: Lemma 1 och 2.

en stationär mittpunkt har den excentriska cirkeln en rörlig mittpunkt som beskriver en liten cirkel med jorden som dess mittpunkt, och som rör sig moturs med solens hastighet, medan själva excentriska cirkeln rör sig medurs. Varför Ptolemaios presenterar den här modellen, som han aldrig använder, är oklart. Det är möjligt att den formulerades ursprungligen av Apollonios och Ptolemaios bevisar den för kompletthetens skull [11].

*Bevis.* Vi börjar med att bevisa tre lemmor.

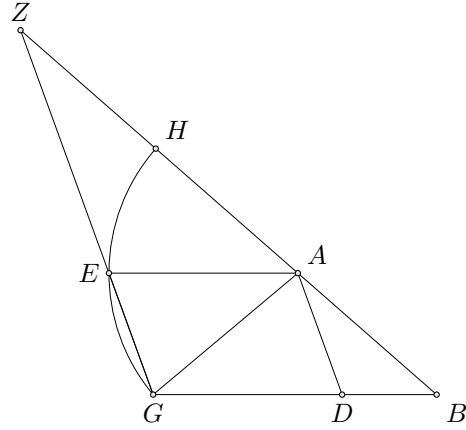
**Lemma 1.** *Betrakta epicykeln som rider på en deferent med mittpunkten  $T$ , och som har perigeum  $P$  och apogeum  $A$  (se figur 8). Rita lika båglängder  $PS_1$  och  $PS_2$  på var sin sida av perigeum. Rita sekanterna  $TS_1V_1$  och  $TS_2V_2$ . Koppla  $S_1V_2$  och  $S_2V_1$ . Linjerna skär varandra vid punkten  $K$  på diametern  $PA$ . Vi har då att*

$$\overline{TA} : \overline{TP} = \overline{KA} : \overline{KP}.$$

*Bevis.* Koppla  $AV_2$  och  $V_2P$ . Det följer att  $\angle AV_2P = 90^\circ$  enligt Thales sates. Rita punkter  $L$  och  $M$  så att  $\overline{LP} = \overline{PM}$ .  $\overline{LM}$  utgör basen till den likbenta triangeln  $\triangle LMV_2$ . Vi har då att

$$\overline{AV_2} : \overline{LP} = \overline{AV_2} : \overline{PM}.$$

De lika triangelarna  $\triangle AV_2T$  och  $\triangle PMT$  ger



Figur 9: Lemma 3.

$$\overline{AV_2} : \overline{PM} = \overline{TA} : \overline{TP}.$$

På liknande vis får vi från de lika triangelarna  $\triangle AV_2K$  och  $\triangle LPK$

$$\overline{AV_2} : \overline{PL} = \overline{KA} : \overline{KP}.$$

Om vi kombinerar dessa får vi

$$\overline{TA} : \overline{TP} = \overline{KA} : \overline{KP}.$$

□

**Lemma 2.** Enligt samma förutsättningar som i första lemmat är

$$\overline{TV_1} : \overline{TS_1} = \overline{KV_1} : \overline{KS_1} = \overline{KV_1} : \overline{KS_2}.$$

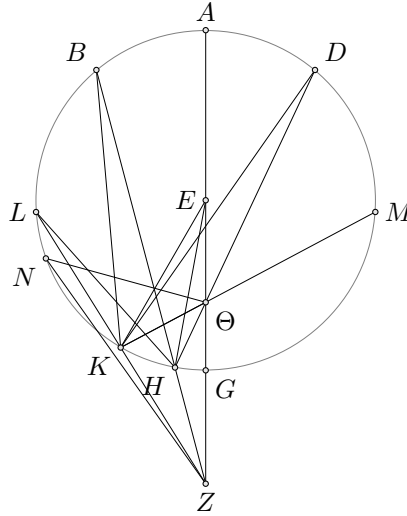
*Bevis.* Lemmat följer från figuren ovan. Triangelarna  $V_1TN$  och  $S_1QT$  är likformiga, där  $N$  och  $Q$  är de mötespunkterna mellan de ortogonala linjerna från  $V_1$  respektive  $S_1$  som skär diametern. Sista ekvivalensen följer från att  $KS_1 = KS_2$ .

□

**Lemma 3.** Rita en triangel  $ABG$  sådan att  $BG > AG$ , med punkten  $D$  på  $\overline{BG}$  sådan att  $GD \geq AG$  (se figur 9). Då gäller

$$\overline{GD} : \overline{DB} > \angle ABG : \angle BGA.$$

*Bevis.* Rita en punkt  $E$  på  $ABG$  sådan att  $ADGE$  är ett parallelogram. Låt  $Z$  vara skärningspunkten mellan  $\overline{GE}$  och  $\overline{BA}$ . Rita en cirkel med mittpunkt  $A$ , med radius  $AE = GD \geq AG$ . Antag att  $GD = AG$ . I så fall passerar cirkeln genom  $G$  och skär  $BZ$  på punkten  $H$ .



Figur 10: Epicykel eller excentrisk cirkel.

Eftersom  $\triangle AEZ > \nabla AEH$  och  $\triangle AEG < \nabla AEG$  följer det att

$$\triangle AEZ : \triangle AEG > \nabla AEH : \nabla AEG.$$

Notera att  $\nabla AEH : \nabla AEG = \angle EAZ : \angle EAG$  och  $\triangle AEZ : \triangle AEG = \overline{ZE} : \overline{EG}$ , enligt Euklides VI.I (trianglar av samma höjd står i proportion till deras baser). Vi har då att

$$\overline{ZE} : \overline{EG} > \angle ZAE : \angle EAG.$$

Eftersom  $\overline{EA}$  är parallell mot  $\overline{GB}$  följer det att

$$\overline{ZE} : \overline{EG} = \overline{ZA} : \overline{AB} = \overline{GD} : \overline{DB},$$

men också att

$$\angle ZAE = \angle ABG \text{ och } \angle EAG = \angle BGA.$$

Insättning ger oss då att

$$\overline{ZE} : \overline{EG} > \angle ZAE : \angle EAG \iff \overline{GD} : \overline{DB} > \angle ABG : \angle BGA$$

och lemman har därmed bevisats. □

Med dessa tre lemmor kan Apollonios sats bevisas.

Rita en epicykel  $ABGD$  med mittpunkten  $E$  och diametern  $AEG$ , som vi observerar från punkt  $Z$ , sådan att  $\overline{EG} : \overline{GZ} > \omega_e : \omega_p$ , där  $\omega_e$  är epicykelns

vinkelhastighet på deferenten och  $\omega_p$  planetens vinkelhastighet på epicykeln (se figur 10). Enligt Euklides III.8 följer det att vi kan rita en linje  $\overline{ZBH}$  som uppfyller

$$\frac{\overline{BH}}{2} : \overline{HZ} = \omega_e : \omega_p.$$

Vi vill bevisa att  $H$  uppfattas som en station från  $Z$ .

Skär en godtycklig cirkelbåge  $KH$  mot  $A$ . Rita  $\overline{ZKL}$  och  $\overline{K\Theta M}$ , där  $\Theta$  är skärningspunkten mellan  $\overline{AG}$  och  $\overline{HD}$ . Koppla  $BK$ ,  $DK$ ,  $EK$  och  $EH$ . Enligt Euklides III.15 följer det att för  $\triangle BKZ$  är  $\overline{BH} > \overline{BK}$ , vilket innebär att

$$\overline{BH} : \overline{HZ} > \angle HZK : \angle HBK$$

enligt lemma 3, så

$$\frac{\overline{BH}}{2} : \overline{HZ} > \angle HZK : 2\angle KBH = \angle HZK : \angle KEH, \quad (1)$$

och det följer att

$$\angle HZK : \angle KEH < \omega_e : \omega_p.$$

Från detta kan vi konstatera att givet en vinkel  $\angle HZN$  så att  $\angle HZN : \angle KEH = \omega_e : \omega_p$  måste  $\angle HZN > \angle HZK$ . Antag att planeten korsar bågen  $KH$ . I så fall har epicykelns mittpunkt på deferenten förflyttat sig enligt vinkelavståndet från  $\overline{ZH}$  till  $\overline{ZN}$ . Så planeten har rört sig från vår observation under en vinkel,  $\angle HZK$ , som är mindre än vinkeln av mittpunkten av epicykeln på deferenten,  $\angle HZN$ , vilket innebär att planeten har gjort en progradrörelse, vilket ges av  $\angle KZN$ .

Ptolemaios bevisar också satsen för en modell där  $ABGD$  är en excentrisk cirkel med observatören vid  $\Theta$ . Låt båglängderna  $AD$  och  $AB$  vara lika och koppla  $D\Theta H$ . Satsen säger då att

$$\frac{\overline{DH}}{2} : \overline{\Theta H} = \omega_t : \omega_s,$$

där  $\omega_t$  är den excentriska cirkelns hastighet och  $\omega_s$  planetens.

Enligt ovan har vi att

$$\overline{BH} : \overline{HZ} > \angle HZK : \angle HBK,$$

enligt lemma 3. Enligt *componendo* har vi att

$$[(\overline{BH} + \overline{ZH}) : \overline{BZ}] : \overline{ZH} > [(\angle HZK + \angle HBK) = \angle BKL] : \angle HBK.$$

Vänsterledet av olikheten följer från att kanten  $\overline{BK}$  på triangeln  $\triangle BKZ$  skär linjen  $\overline{LZ}$ , så  $\angle BKL + \angle BKZ = \angle HZK + \angle HBK + \angle BKZ$ . Enligt lemma 2 har vi att

$$\overline{BZ} : \overline{ZH} = \overline{D\Theta} : \overline{\Theta H}.$$

Det följer från lemma 1 att  $\Theta$  är en fixpunkt för någon  $Z$ , så  $\sphericalangle B\Theta L = \sphericalangle D\Theta M$  och enligt Euklides III.27 (vinklar som står på lika cirkelbågar är lika) har vi att  $\sphericalangle BKL = \sphericalangle DKM$  och  $\sphericalangle HBK = \sphericalangle HDK$ , så

$$\overline{D\Theta} : \overline{\Theta H} = \sphericalangle DKM : \sphericalangle HDK.$$

Genom att använda *componendo* igen får vi att

$$\overline{DH} : \overline{H\Theta} > \sphericalangle H\Theta K : \sphericalangle HDK,$$

och användning av *dividendo* ger oss

$$\frac{\overline{DH}}{2} : \overline{H\Theta} > \sphericalangle H\Theta K : 2\sphericalangle HDK = \sphericalangle H\Theta K : \sphericalangle HEK,$$

men

$$\frac{\overline{DH}}{2} : \overline{\Theta H} = \omega_t : \omega_s,$$

så

$$\sphericalangle H\Theta K : \sphericalangle HEK < \omega_t : \omega_s.$$

Likt beviset i den epicykliska modellen inför vi vinkeln  $\sphericalangle H\Theta N$  sådan att  $\sphericalangle H\Theta N : \sphericalangle HEK = \omega_t : \omega_s$ . Så planetens egen rörelse beskrivs av  $\sphericalangle KEH$  och rörelsen av själva cirkeln i motsatts riktning beskrivs av  $\sphericalangle H\Theta N$ , som är större än  $\sphericalangle K\Theta H$ , så planeten kommer att ha gjort en progradrörelse motsvarande  $\sphericalangle K\Theta N$  under samma period.

Vi skall nu bevisa att retrogradrörelse uppstår. Antag nu att  $\frac{\overline{LK}}{2} : \overline{KZ} = \omega_e : \omega_p$ . Koppla  $LH$ . Vi har då att  $\triangle LZH$ , med  $\overline{ZK} > \overline{ZH}$ , vilket innebär att

$$\overline{LK} : \overline{KZ} < \sphericalangle HZK : \sphericalangle HLK,$$

alltså att

$$\frac{\overline{LK}}{2} : \overline{KZ} < \sphericalangle HZK : 2\sphericalangle HLK = \sphericalangle HZK : \sphericalangle KEH.$$

Detta är motsatsen till det vi visade ovan (1). Utförande av samma steg som ovan ger oss olikheten

$$\sphericalangle KEH : \sphericalangle HZK < \omega_e : \omega_p,$$

så vinkeln som uppfyller likheten

$$\sphericalangle x : \sphericalangle HZK = \omega_e : \omega_p$$

kommer att vara större än  $\angle KEH$  och kommer därför att göra intrycket av retrogradrörelse till en observatör vid  $Z$ . I den excentriska modellen motsvaras detta av

$$\angle KEH : \angle H\Theta K = \omega_t : \omega_s.$$

□

### 3 Ptolemaios utvidgningar

Grekisk astronomi uppnådde sin höjdpunkt i Klaudios Ptolemaios (c. 100-170 e.Kr.) *Mathematike Syntaxis*, numera känd under dess arabiska namn *Almagest*. Hur mycket av verket är originalt till Ptolemaios och hur mycket kan tillskrivas tidigare astronomer, speciellt Hipparchos (190-120 f.Kr.), är omtvistat. Inte heller mycket om Ptolemaios liv kan fastställas, förutom att han var bosatt i Alexandria och var möjligtvis en romersk medborgare. Förutom *Almagest* författade Ptolemaios en bok om geografi och *Tetrabiblos*, en sammanfattning av astrologisk teori. Exakthet i astrologiska beräkningar var en av de viktigaste motiveringar till utvecklingen av grekisk astronomi.

Vi har sett hur Apollonios beskrev den första och den andra anomalin var för sig genom excentriska cirklar och epicykler. Någonting som Apollonios var mindre framgångsrik med var att beskriva hur andra anomalin påverkas av den första. De retrogradrörelserna som uppstår i den formuleringen av Apollonios sats som bevisades ovan kommer att ge upphov till retrogradbågar av samma längd och intervall i planetens omloppsbanan, men retrogradbågar har variabla längder och intervaller på grund av att planetens egentliga rörelse är olikformig enligt Keplers andra lag. Ptolemaios löste problemet genom att införa excentriska epicykler och ekvanten. Tanken var att använda den excentriska deferenten för att beskriva den första anomalin och epicykeln för den andra.

#### 3.1 Ekvanten

Om deferenten är excentrisk, hur definierar vi dess medelrörelse? Det vore naturligt att göra så utifrån deferentens centrum, men Ptolemaios insåg att anomalins ekvation var större vid apogeum och mindre vid perigeum på ett sätt som en excentrisk deferent inte kan beskriva [5].

**Definition 3.1** (Ekvanten). Rita en cirkel  $ABP$  där  $\overline{AP}$  är apsidelinjen, och låt  $T$  vara en excentrisk punkt på cirkeln som föreställer jordens position. Inför nu en annorlunda punkt  $E$  på  $\overline{AP}$ , **ekvanten**, sådan att  $\overline{CT} = \overline{CE}$ . Antag att en kropp  $K$  rör sig längs  $ABP$  sådan att en observatör vid  $E$  alltid mäter en likformig vinkelhastighet. Med andra ord, om kroppen rör sig mellan punkterna  $p_1$  och  $p_2$  i samma tid som den rör sig mellan punkterna  $p_3$  och  $p_4$  så är  $\angle p_1Ep_2 = \angle p_3Ep_4$  [3].

Ekvanten används för en epicyklisk modell av Ptolemaios, så  $K$  här motsvaras av mittpunkten av epicykeln på deferenten. Med andra ord motsvarar

ekvantens mittpunkten av en cirkel inuti deferenten. Eftersom  $\overline{CT} = \overline{CE}$  skrivs ekvantens excentricitet traditionellt som  $2e$ .

Ekvanten lät Ptolemaios med imponerande exakthet beskriva planeternas retrogradrörelse, men det fanns ett problem med idén. Som bekant utgick den grekiska astronomin från grundantagandet att astronomisk rörelse är cirkulär och likformig. Det var tillåtet att den observerade rörelsen från jorden var inte likformig, men varje rörelse antogs vara likformig med avseende på mittpunkten av cirkeln som bar rörelsen. Men ekvanten innebär att rörelsen av epicykelns mittpunkt på deferenten inte är likformig med avseende på dess mittpunkt utan är likformig med avseende på ekvanten, eftersom  $K$  måste sakta ned och accelerera för att observeras som likformig från ekvanten.

### 3.2 Excentriska epicykler

Eftersom Apollonios sats förutsätter en koncentrisk deferent kan den inte direkt appliceras på Ptolemaios excentriska modell. Det är långt ifrån klart om satsen fortfarande gäller för excentriska epicykler. Ptolemaios lyckades utvidga satsen genom att approximera den för någon given punkt längs en excentrisk cirkel. Metoden är numerisk, men den underliggande matematiken presenteras här i modern form enligt Pederssen [11].

Vi börjar med att introducera några termer.

**Definition 3.2.** (*Sanna centrum och medelvärdescentrum*) Rita en cirkel med mittpunkt  $T$ . Rita en ekvancirkel med centrum  $E$  med apogeum  $A$ , vars longitud ges av  $\lambda_a$ . Låt  $\lambda$  vara longituden och  $\lambda_m$  medellongituden av  $n$ . Vi säger att

$$c = \lambda - \lambda_a$$

är *det sanna centrumet* av planetens longitud, och att

$$c_m = \lambda_m - \lambda_a$$

är dess *medelvärdescentrum*. Om medelvärdeslongituden  $\lambda_m$  vid punkt  $t$  ges av ekvationen

$$\lambda_m(t) = \lambda_m(t_0) + \omega_t(t - t_0),$$

där  $\omega_t$  är vinkelhastigheten, följer det att

$$c_m(t) = \lambda_t(t_0) + \omega_t(t - t_0) - \lambda_a(t).$$

Med andra ord ger medelvärdescentrumet distansen från apogeum till medellongituden.

Medelanomalin av en planet kan beräknas, likt ovan, enligt

$$a_m(t) = a_m(t_0) + \omega_a(t - t_0).$$

**Definition 3.3** (Centrums ekvation). Låt  $T$  representera jordens position på en excentrisk deferent och  $E$  ekvanten. Låt  $C$  representera epicykelns mittpunkt på deferenten. Vinkeln som uppstår när en observatör vid  $C$  observerar linjen  $\overline{TE}$  ges av

$$\angle TCE = q,$$

och kallas för **centrums ekvation**.

Centrums ekvation kopplar sanna centrumet och medelsvärdescentrum enligt

$$c = c_m(t) + q(c_m).$$

Genom att tillägga  $\lambda_a$  till båda sidorna får vi

$$\lambda_c = \lambda_m(t) + q(c_m), \quad (2)$$

där  $\lambda_c$  är den sanna longitudin av epicykelns centrum.

**Definition 3.4** (Sanna argumentet). *Det sanna argumentet*  $a_v$  av en epicykel är vinkeldistansen från den sanna apogeum  $A_v$ , alltså punkten på epicykeln längst bort från jorden och ges av

$$a_v = a_m(t) - q(c_m),$$

där  $a_m(t)$  är vinkeldistansen av planeten från medelapogeum, alltså punkten på epicykeln längst bort från ekvanten.

Detta representerar egentligen planetens medelanomali på epicykeln, men Pederssen använder ordet argumentet för att undvika förvirring.

Antag att vi vill undersöka retrogradrörelsen av en planet runt en punkt med medelsvärdescentrum  $c_m$ . Vid denna punkt ersätter vi Ptolemaios excentrisk modell med en koncentrisk deferent med radius  $TC = \rho(c_m)$ , alltså distansen från jorden till epicykelns mittpunkt.

Differentiering av (2) med avseende på tid ger oss

$$\dot{\lambda}_c = \dot{\lambda}_m(t) + \dot{q} = \omega_t + \dot{q},$$

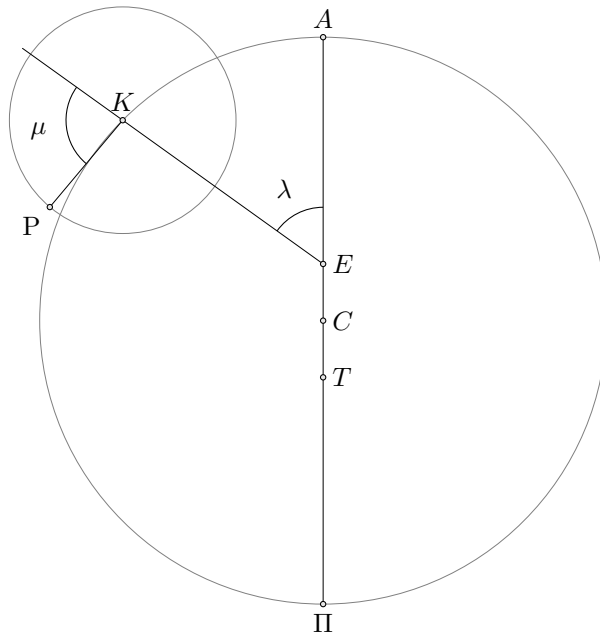
enligt ekvationen för medellongitudin vilket gavs ovan. Differentiering av det sanna argumentet ger oss

$$\dot{a}_v = \dot{a}_m(t) - \dot{q} = \omega_a - \dot{q}.$$

Vi kan då skriva om Apollonios sats på formen

$$\frac{SV}{2} : TS = (\omega_t + \dot{q}) : (\omega_a - \dot{q}),$$

vilket generaliserar satsen.



Figur 11: Den fullständiga planetmodellen.

### 3.3 Den fullständiga planetmodellen

Slutligen kan vi betrakta den fullständiga planetmodellen för alla planeterna förutom merkurius och som den beskrivs av Evans [7].

Låt  $AK\Pi$  vara en deferent med centrum  $C$  där  $\overline{A\Pi}$  utgör apsideslinjen med en epicykel med mittpunkten  $K$  som förflyttar sig moturs (se figur 11). Låt jorden,  $T$  vara en excentrisk punkt på cirkeln en kort distans från  $C$ , och sätt en punkt  $E$  på cirkeln motsatt  $T$ , alltså ekvanten.

Epicykelns vinkelhastighet  $\lambda$  längst deferenten är likformig utifrån ekvanten, men inte från  $T$ . Låt en planet  $P$  förflytta sig moturs längs epicykeln med den likformiga vinkelhastigheten  $\mu$ .

Merkurius modell är något mer komplicerad på grund av dess stora excentricitet och utelämnas här.

## 4 Kopernikansk heliocentrism

Nicolaus Kopernikus (1473-1543) var kanik, matematiker och läkare, och levde större delen av sitt liv i Frombork, Kungliga Preussen (i dagens Polen) i tjänst till Biskopen av Wurmia. Kopernikus verkar ha tidigt utvecklat ett rykte som en skicklig astronom, och hans astronomiska forskning stöddes av Giesemann Tiede, Biskopen av Chelmno. Det är oklart när och varför Kopernikus blev övertygad om att jorden rörde sig runt solen, men 1514 hade han författat ett kort ma-

nuskrift, *Commentariolus*, med en skiss av hans system som cirkulerades bland lärda i Europa. Den fullständiga presentationen av hans system fick dröja tills tryckningen av *De revolutionibus orbium et coelestium* (*Om himlakropparnas kretslopp*) år 1543, ungefär samtidigt som han avled till följd av ett slaganfall han fick under hösten 1542 [5].

## 4.1 Heliocentrisk retrogradrörelse

Genom att placera solen i mittpunkten av planeternas banor kunde Kopernikus på ett elegant sätt förklara den andra anomalin. Retrogradrörelse uppstår när de inre planeterna övertar jorden i deras bana runt solen, samt när jorden övertar de yttre planeterna. Modellen förklarade också varför retrogradrörelse skedde när planeterna stod i opposition till solen, och varför merkurius och venus hade bundna elongationer. Vid första anblick tycks den Kopernikanska modellen ha en intuitiv enkelhet som saknas i den traditionella grekiska bilden av koncentrisk sfärer och epicykler, men matematiskt sett är modellen egentligen inte mindre komplicerad och i fallet av retrogradrörelse identisk, då Kopernikus fortfarande utgår från Apollonios sats. I bok V, kapitel 35 bevisar Kopernikus en utvidgad formulering av Apollonios sats [10].

**Sats 3.** *Låt en planet  $P$  och en planet  $O$  förflytta sig med likformiga hastigheter längs två koncentriska cirklar med mittpunkten  $C$ , sådan att planeten på den inre banan,  $P$ , förflyttar sig fortare än  $O$  (se figur 12). Rita en linje  $\overline{OP} = \rho$ , och förläng den sådan att  $\overline{LP}$  är en sekant till den inre cirkeln. Låt  $K$  vara bisektionen av  $\overline{LP}$ , och låt  $\overline{PK} = \sigma$ . Låt hastigheten av  $P$  längs den inre banan betecknas med  $P_v$  och  $O$ s hastighet längs den yttre banan betecknas  $O_v$ . Satsen erhåller att om*

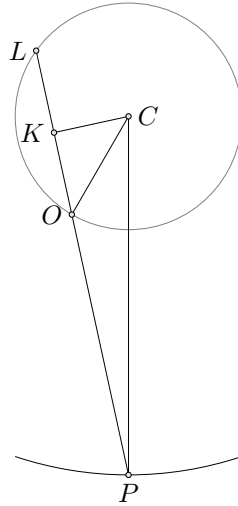
$$\frac{\sigma}{\rho} = \frac{O_v}{P_v}$$

*kommer planeten att betraktas som stationär vid  $O$ .*

Satsen gäller för både inre och yttre planeterna. Om vi vill beskriva retrogradrörelse av en inre planet låter vi jorden vara planeten i den yttre banan (vid punkt  $O$ ), alternativt byter vi plats sådan att jorden befinner sig vid  $P$  och den yttre planeten på  $O$ . Eftersom Kopernikus bevis baseras på Ptolemaios återges den inte här.

## 4.2 Astronomi utan ekvanter

Genom jordens rörelse kunde Kopernikus förklara planeternas andra anomali, men inte den första. Som vi såg tidigare hade Ptolemaios lyckats beskriva detta med rimlig exakthet enligt förteleskopisk data genom att introducera ekvanten, men med uppoffringen att epicykelns rörelse längst deferenten var inte likformig enligt deferentens mittpunkt. Under medeltiden försökte flera astronomer, huvudsakligen i den muslimska världen, föreslå alternativa modeller som förklarade den varierande excentriciteten utan att uppoffra likformig rörelse. Ibn al-Shatir



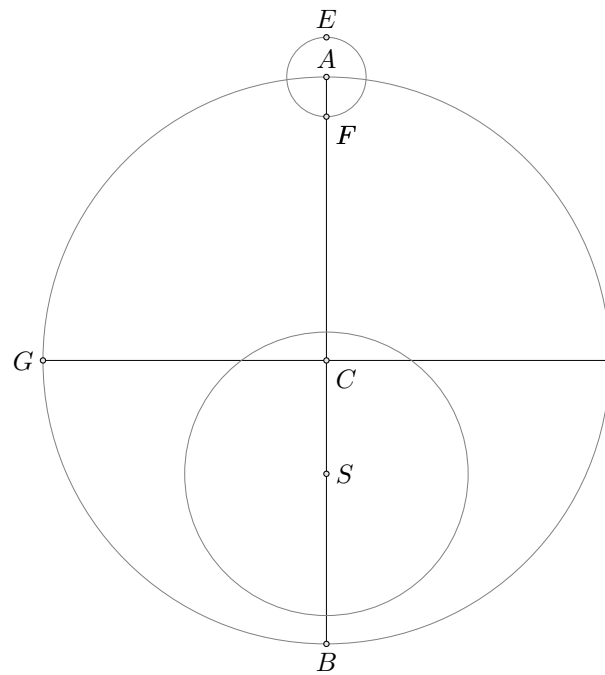
Figur 12: Apollonios sats för en inre planet.

(1304-1375) utvecklade en modell med små epicykler. Även Kopernikus verkade vara motiverad av missnöjet med ekvantpunkten och utvecklade en modell som är förvånansvärt nära Ibn al-Shatirs, men det finns inget bevis på en direkt överföring även om likheterna gör det troligt att Kopernikus hade kännedom om den muslimska traditionen [9].

Som tidigare nämntes definierade Ptolemaios ekvants excentricitet som  $2e$ , där  $e$  var distansen mellan deferentens centrum och excentriken (excentriciteten). Kopernikus lyckades återskapa detta för ett heliocentriskt system med en epicykel på en excentrisk deferent. För enkelhetens skull betraktar vi enbart Kopernikus lösning för de yttre planeterna.

Rita en excentrisk cirkel  $ABG$  med mittpunkt  $C$  (se figur 13). Låt linjen  $\overline{ACB}$  ge solens apsidelinje, med  $S$  som solens medelposition vilket utgör mittpunkten för cirkeln av jordens omloppsbana. Rita nu en "epicyklet", som Kopernikus kallar den,  $EF$  med centrum  $A$  på  $ABG$  sådan att radius  $EF = \frac{1}{3}\overline{CS}$ . Kopernikus bevisar egentligen inte detta matematiskt, men effekten av detta motsvarar Ptolemaios ekvant. Linton gör en demonstration varför, baserad på Neugebauer [9].

Rita, likt ovan, en cirkel  $AE$  med mittpunkt  $C$  excentrisk till  $S$ , där  $S$  är solens medelposition, med epicykel  $F$  med mittpunkt  $E$  (se figur 14). Låt  $\alpha$  beteckna vinkeln av förflyttningen av epicykelns mittpunkt till  $E$  under någon tid. Rita nu en cirkel  $A'E'$  med mittpunkt  $C'$  och excentrisk till  $T$ , som representerar jordens position i en geocentrisk modell med en epicykel  $F'$  med centrum  $E'$ , och låt på denna epicykel rida ytterligare en epicykel  $F_2$  med mittpunkt  $F'$  och som innehåller  $F$ . Om vi betraktar distansen mellan punkter som en vektor har vi att planetens position vid  $F$  ges av  $TS + SC + CE + EF$  i den heliocentriska modellen om vi använder jorden som startpunkt, och av  $TC' + C'E' + E'F' + F'F$  i den



Figur 13: Kopernikus modell för yttre planeterna.

geocentriska modellen, men  $TS = F'F$ ,  $TC' = SC$ ,  $EF = E'F'$  och  $CE = C'E'$ , så uttrycken är ekvivalenta. Alltså är Kopernikus heliocentriska planetmodell ekvivalent med en geocentrisk planetmodell med en excentrisk deferent och två epicykler.

Som bekant använde inte Ptolemaios dubbelepicykler under vanliga fall, utan snarare en ekvantpunkt. Trots detta finns det en förutsättning under vilket de är ekvivalenta. Inför en punkt  $Q$  sådan att  $\overline{F'Q}$  är parallell mot  $\overline{E'C'}$  och  $\|C'Q\| = \|E'F'\| = \|EF\|$ , vilket innebär att  $\angle F'QA = \angle ECA$ . Detta liknar ekvantpunkten, men epicykeln  $F$  ritas inte en perfekt cirkel, vilket den måste göra för  $Q$  att fungera som en egentlig ekvantpunkt enligt den här modellen. Det finns dock ett sätt att göra dessa modeller ekvivalenta.

Låt  $D$  vara mittpunkten av  $QT$ . Detta motsvarar mittpunkten av deferenten i Ptolemaios modell, vilken har samma storlek som  $ABG$ . Vi kan definiera deferentens radius i båda fallen som

$$R = \|DE'\|,$$

och

$$\|DE'\| = \frac{1}{2}\|TQ\| - \|C'Q\| + R - \|E'F'\| = \frac{1}{2}\|TQ\| - 2\|EF\| + R.$$

Notera att

$$\|TQ\| = \|TC'\| + \|C'Q\| = \|SC\| + \|EF\|,$$

och enda sättet att uppfylla båda ekvationerna är  $3\|EF\| = \|SC\|$ , men detta innebär att epicykelns radius är en tredje del av deferentens excentricitet, vilket motsvarar definitionen av Kopernikus epicyklet vilket gavs ovan. Alltså är Kopernikus epicyklet ekvivalent med ekvanten.

## 5 Newtonsk heliocentrism

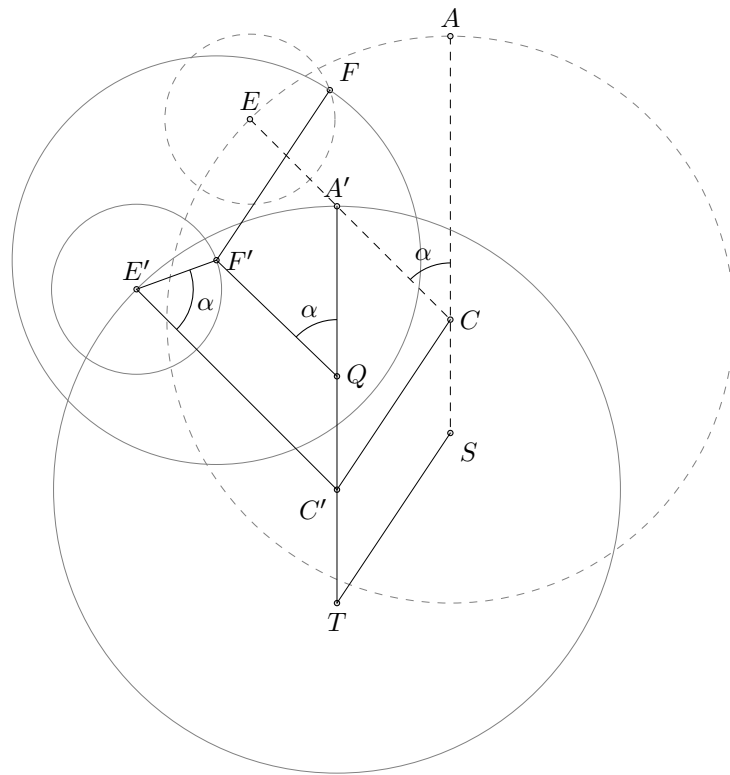
### 5.1 Keplers första och andra lagar

Som vi vet i dag kan planeternas rörelse beskrivas av Keplers lagar. Eftersom Kepler formulerade lagarna utifrån empirisk data följer vi Newtons framställning av dem. Vi börjar med att definiera Newtons lagar [2].

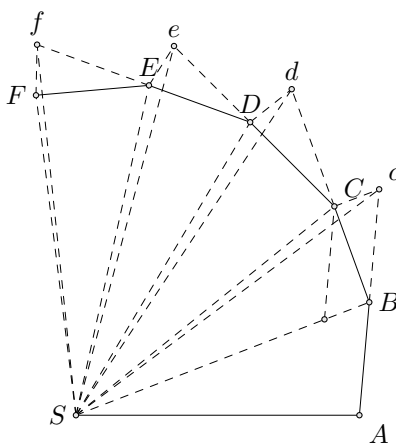
**Definition 5.1** (Newtons lagar).

1. En kropp förblir i vila eller rör sig likformigt i en rak linje om den inte påverkas av en annan kraft.
2. Kraftresultanten på en kropp är lika med kroppens acceleration multiplicerad med dess massa, eller ekvivalent uttryckt, hastigheten som kroppens momentum ändras med tiden. Detta kan skrivas som

$$\mathbf{f} = m\mathbf{a},$$



Figur 14: Ekvivalens mellan geocentriska och heliocentriska modeller.



Figur 15: Newtons bevis av Keplers andra lag.

där  $m$  är kroppens massa och  $a$  dess acceleration. Lagen kan också uttryckas på formen

$$\mathbf{f} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt}.$$

3. Om två kroppar påverkar varandra så har dessa krafter samma magnitud i motsatta riktningar.

Lagarna har en följsats som kommer att användas i beviset av Keplers andra lag.

**Lemma 4.** *En kropp som påverkas av två krafter i samband beskriver diagonalen av ett parallelogram i samma tid som om krafterna agerade separat.*

Vi bevisar nu Keplers första två lagar.

**Sats 4** (Keplers andra lag). *En linje mellan en planet och solen sveper ut över lika areor över lika tider.*

*Bevis.* Dela in tiden i likställda perioder och låt  $S$  vara en orörlig kraftcentrum. Antag att en kropp rör sig längs sträckan  $\overline{AB}$  genom sin inneboende kraft under en period (se figur 15). Enligt Newtons första lag skulle kroppen befinna sig vid  $c$  vid slutet av nästa period, där  $\overline{AB} = \overline{Bc}$ . Det följer att areorna av  $\triangle ABS$  och  $\triangle BSc$  är lika. Låt nu en stor kraft från  $S$  påverka kroppen vid punkt  $B$  sådan att kroppen nu ändrar riktning sådan att den rör sig längs sträckan  $\overline{BC}$ . Rita  $\overline{Cc}$  parallell mot  $\overline{BS}$ . Vid slutet av den andra perioden kommer kroppen att befinna sig vid  $C$  i samma plan som  $\triangle ASB$ , enligt lemma 4. Koppla  $\overline{SC}$ . Eftersom  $\overline{SB}$  och  $\overline{Cc}$  är parallella följer det att  $\triangle SBC = \triangle SAB$ .

Vi kan repetera proceduren till punkterna  $D, E$  och  $F$ , så sträckan  $\overline{CD}, \overline{DE}$  och  $\overline{EF}$  kommer att ligga i samma plan och  $\triangle SCD = \triangle SBC$ ,  $\triangle SDE = \triangle SCD$

samt  $\triangle SEF = \triangle SDE$ . Det följer att lika areor beskrivs av lika tider i samma plan. Öka nu antalet trianglar och minska deras bredd oändligt. Deras omkrets  $ADF$  kommer att beskriva en kurva, enligt en känd sats. □

Eftersom Newtons ursprungliga bevis av Keplers första lag är mer dunkel presenteras ett klassiskt analytiskt bevis enligt Fitzpatrick [8]. Vi börjar med att definiera Newtons formulering av gravitation.

**Definition 5.2** (Newtons gravitationslag). *Antag att  $m_1$  och  $m_2$  är kroppar vars position ges av riktningsvektorerna  $\mathbf{r}_1$  respektive  $\mathbf{r}_2$ . Kraften  $\mathbf{f}$  som  $m_1$  påverkar  $m_2$  med ges av*

$$\mathbf{f} = Gm_1m_2 \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{\|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1\|^3},$$

där  $G$  är gravitationskraften. Påverkan av  $m_2$  på  $m_1$  ges av  $-\mathbf{f}$ .

**Sats 5** (Keplers första lag.). *Planeternas omloppsbana beskriver en ellips med solen som en av brännpunkterna.*

*Bevis.* Antag att solen befinner sig vid origo och planetens position ges av riktningsvektorn  $\mathbf{r}$  i ett koordinatsystem. Enligt Newtons gravitationslag är kraften som solen påverkar en planet med lika med

$$\mathbf{f} = -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}, \tag{3}$$

där  $M$  representerar solens massa och  $m$  planetens. Genom att kombinera detta med Newtons med första lag får vi att

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}.$$

Planetens rörelsemängdsmoment är

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}.$$

Eftersom  $\mathbf{r}$  är ortogonal mot  $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ , följer det att

$$\mathbf{h} \cdot \mathbf{r} = 0,$$

vilket är ekvationen av en plan med en normalvektor parallell till  $\mathbf{h}$ . Från detta kan vi dra slutsatsen att planetens rörelse är tvådimensionell och vi kan likställa vårt koordinatsystem med  $xy$ -planet.

Vi definierar nu två enhetsvektorer,  $\mathbf{e}_r = \frac{\mathbf{r}}{r}$  och  $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_z + \mathbf{e}_r$ . Per definition är

$$\mathbf{r} = r\mathbf{e}_r.$$

Notera att  $\mathbf{e}_\theta$  är normal mot  $\mathbf{e}_r$ . Vektorerna har de kartesiska komponenterna

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r = (\cos \theta, \sin \theta), \\ \mathbf{e}_\theta = (-\sin \theta, \cos \theta), \end{cases} \quad (4)$$

med tidsderivatorna

$$\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{\theta}(-\sin \theta, \cos \theta) = \dot{\theta}\mathbf{e}_\theta,$$

samt

$$\dot{\mathbf{e}}_\theta = \dot{\theta}(-\cos \theta, -\sin \theta) = -\dot{\theta}\mathbf{e}_r.$$

Planetens hastighet ges av

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\mathbf{e}}_r = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta,$$

och dess acceleration av

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \ddot{r}\mathbf{e}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{e}}_r + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\mathbf{e}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{e}}_\theta.$$

Vi har då att

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{e}_\theta = -\frac{GM}{r^2}\mathbf{e}_r.$$

Eftersom  $\mathbf{e}_r$  och  $\mathbf{e}_\theta$  är ortogonala mot varandra kan vi separera koefficienterna från båda, vilket ger oss den radiala ekvationen av rörelse,

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{-GM}{r^2},$$

och den tangentiella ekvationen av rörelse,

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0.$$

Magnituden  $h$  av vektorn  $\mathbf{h}$  som definierades ovan ges av

$$h = r^2\dot{\theta}.$$

Vi ser detta om vi multiplicerar den tangentiella ekvationen med  $r$  får vi

$$r^2\ddot{\theta} + 2r\dot{r}\dot{\theta} = 0,$$

vilket kan omskrivas på formen

$$\frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = 0.$$

Om vi kombinerar detta med den radiala ekvationen får vi att

$$\ddot{r} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{GM}{r^2}. \quad (5)$$

Vi använder nu substitutionen  $r = u^{-1}$ , vilket har tidsderivatorna

$$\dot{r} = -\frac{\dot{u}}{u^2} = -r^2 \frac{du}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = -h \frac{du}{d\theta},$$

samt

$$\ddot{r} = -h \frac{d^2u}{d\theta^2} \dot{\theta} = -u^2 h^2 \frac{d^2u}{d\theta^2},$$

och substituerar den i (5), vilket ger oss den linjära differentialekvationen

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{h^2},$$

med den allmänna lösningen

$$u(\theta) = \frac{GM}{h^2} [1 - e \cos(\theta - \theta_0)],$$

där  $e$  och  $\theta_0$  är godtyckliga konstanter. Om vi låter  $\theta_0 = 0$  och roterar koordinatsystemet runt z-axeln får vi

$$r(\theta) = \frac{r_c}{1 - e \cos \theta},$$

där

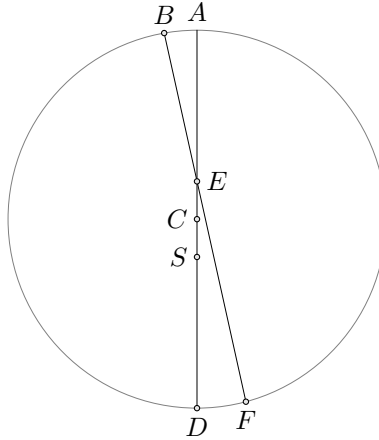
$$r_c = \frac{h^2}{GM},$$

men detta är ekvationen för elliptisk bana med solen som en av brännpunkterna. Alltså är planetens bana en ellips med solen som en av brännpunkterna.  $\square$

Vi kan nu med säkerhet konstatera att den klassiska grekiska synen på planeternas omloppsbanor är felaktig och att de beskriver en ellips snarare än en cirkel. Det är dock värt att poängtera att ellipserna av planeternas omloppsbanor i vårt solsystem har en väldigt låg excentricitet. Till exempel så är jordens excentricitet 0.016.

## 5.2 Ekvanten och Keplers andra lag

Tidigare såg vi att Kopernikus hade tagit bort ekvanten genom att införa epicykler för att bevara den aristoteliska idealen av likformig cirkulär rörelse. Kepler undrade om inte ekvanten representerade en verklig fysisk process kopplad till den gravitationskraft, vilket Kepler tolkade som en form av magnetism, solen måste utstråla för att styra planeternas rörelse i ett heliocentriskt system. I kapitel 32 av *Astronomia Nova* bevisar han att planetens distans från solen påverkas dess vinkelhastighet i en heliocentrisk ekvantmodell [4].



Figur 16: Keplers heliocentrisk ekvant.

**Sats 6.** Rita en cirkel med mittpunkt  $C$  med den excentriska punkten  $S$ , där solen befinner sig, och en ekvant punkt  $E$ , enligt den klassiska Ptolemaiska definitionen av en ekvant, där mittpunkten av  $\overline{SE}$  är lika med  $C$ . Vinkelhastigheten av en kropp som rör sig längs cirkeln är proportionell mot dess distans från  $S$ .

*Bevis.* Keplers bevis är långt och otympligt, så ett förenklat bevis återges här [4].

Rita apsideslinjen  $\overline{AD}$  från aphelion till perihelion (se figur 16). Rita nu en sträcka  $\overline{BEF}$  sådan att vinklarna  $\angle AEB$  och  $\angle AEF$  är lika, vilket innebär att en planet rör sig längs bågarne  $\sphericalangle AB$  och  $\sphericalangle DF$  under samma tid, enligt ekvants definition. Trianglarna  $\triangle AEB$  och  $\triangle DEF$  är nästan likbenta och kan betraktas som kongruenta. Det följer att

$$\sphericalangle AB : \overline{AE} = \sphericalangle DF : \overline{DE}.$$

□

Med andra ord är bågarne som korsas under lika tider vid aphelion och perihelion proportionell mot distanserna från mittpunkten. Här har Kepler antagit en cirkulär bana, men som har bevisats ovan följer planeterna en elliptisk bana. Trots detta verkar ekvanten ge en rimlig approximation av arealagen. Frågan återstår varför. Följande demonstration utgår ifrån Aaboe [1].

Vi börjar med att introducera några kända resultat om ellipser. Om en kurvas ekvation ges av  $r = r(\theta)$  följer det att arean av strålarna  $\theta = \theta_1$  och  $\theta = \theta_2$  med gemensam utgångspunkt under kurvan ges av integralen

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{1}{2} r^2 d\theta.$$

Om  $P$  är en punkt på en kurva och vinkeln  $u$  representerar vinkeln mellan punkten från origo som innehåller  $P$  och linjen som tangerar kurvan vid  $P$  följer det att

$$\tan u = r \cdot \frac{d\theta}{dr}.$$

Om  $P$  ligger på en ellips, med brännpunkterna  $F_1$  och  $F_2$  är vinkeln som uppstår när tangentlinjen skärs av strålen  $F_1P$  lika med vinkeln som uppstår när tangentlinjen skärs av strålen  $F_2P$ . Med andra ord reflekteras strålen av en brännpunkt genom den andra.

Rita en ellips med excentricitet  $e$ , brännpunkterna  $S$  (som representerar solens position) och  $H$ , samt aphelion  $A$ . Låt halva storaxeln vara lika med 1. Vi kan då skriva ellipsens ekvation på polär form som

$$r = \frac{1 - e^2}{1 - e \cos \theta} \text{ eller } \rho = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos \phi}. \quad (6)$$

Rita en tangentlinje vid punkt  $P$ , där planeten befinner sig, och låt  $u$  och  $v$  beteckna vinklarna mellan strålarna  $SP$  respektive  $HP$  och apsideslinjen. Det följer enligt satsen som nämndes tidigare att

$$\tan v = r \frac{d\theta}{dr} \text{ och } \tan u = \rho \frac{d\phi}{d\rho},$$

och eftersom en ellips reflekterar en stråle från en brännpunkt genom den andra är  $u + v = \pi$ , så  $\tan u = -\tan v$ , och

$$r \frac{d\theta}{dr} = -\rho \frac{d\phi}{d\rho}. \quad (7)$$

Eftersom  $r + \rho = 2$  följer det att

$$dr = -d\rho.$$

Insättning med detta i (7) innebär att

$$rd\theta = rd\phi. \quad (8)$$

Enligt Keplers andra lag får vi att

$$\text{area } ASP = \mu \cdot T = \int_0^\theta \frac{1}{2} r^2 d\theta,$$

där  $T$  är tiden sedan planeten passerade aphelion. Vi uttrycker nu integralen med transformationen  $r = 2 - \rho$  och (8), vilket ger oss

$$\text{area } ASP = \int_0^\phi \frac{1}{2} (2 - \rho) \cdot \rho d\phi.$$

Genom att uttrycka  $\rho$  i termer av  $\phi$  enligt (6) får vi att

$$\text{area } ASP = \frac{1}{2}(1 - e^2) \cdot \int_0^\phi \frac{1 + 2e \cos \phi + e^2}{(1 + e \cos \phi)^2} d\phi.$$

Eftersom

$$\text{area } ASP = \frac{1}{2}\sqrt{1 - e^2} \cdot M,$$

där  $M$  representerar medelanomalin, får vi

$$M = \sqrt{1 - e^2} \int_0^\phi \frac{1 + 2e \cos \phi + e^2}{(1 + e \cos \phi)^2} d\phi.$$

Integralen kan beräknas genom att utveckla koefficienten och integranden med oändliga serier och integrera med potenser av  $e$ , och vi får

$$M = \phi - \frac{1}{4}e^2 \sin 2\phi - \frac{2}{3}e^3 \sin^3 \phi + \dots,$$

vilket ger oss

$$\phi = M + \frac{1}{4}e^2 \sin 2M + \frac{2}{3}e^3 \sin^3 M + \dots$$

Med andra ord ger  $\phi$  en god approximation av medelanomalin för banor med en låg excentricitet, vilket innebär att en observatör från den tomma focin kommer att mäta planetens vinkelhastighet så att den sveper ut lika vinklar över lika perioder, med en felmarginal beroende av  $e$ . Ekvanten ger alltså en rimlig approximation av Keplers andra lag för planeter med en låg excentricitet. För den låga förstöringskraften av teleskop under Keplers livstid är felmarginalen inte observerbar, förutom i fallen Mars och Merkurius, på grund av deras stora excentricitet [1].

## Referenser

- [1] Asger Aaboe. *Episodes From the Early History of Astronomy*. Springer, 2001.
- [2] S. Chandrasekhar. *Newton's Principia for the Common Reader*. Clarendon Press, 2003.
- [3] Michael J. Crowe. *Theories of the World from Antiquity to the Copernican Revolution*. Dover Publications, 2001.
- [4] William H. Donahue. Kepler's invention of the second planetary law. *The British Journal for the History of Science*, 1994.
- [5] J.L.E. Dreyer. *A History of Astronomy from Thales to Kepler*. Dover Publications, Inc., 1953.
- [6] James Evans. On the function and the probable origin of ptolemy's equant. *American Journal of Physics*, 1984.
- [7] James Evans. *The History and Practice of Ancient Astronomy*. Oxford University Press, 1998.
- [8] Richard Fitzpatrick. *An Introduction to Celestial Mechanics*. Cambridge University Press, 2012.
- [9] Christopher Linton. *From Eudoxus to Einstein: A History of Mathematical Astronomy*. Cambridge University Press, 2004.
- [10] N.M. Swerdlow och O. Neugebauer. *Mathematical Astronomy in Copernicus's De Revolutionibus*. Springer, 1984.
- [11] Olaf Pedersen. *A Survey of the Almagest*. Springer, 2011.
- [12] G.J. Toomer. *Ptolemy's Almagest*. Duckworth, 1984.

## Errata

### s.10

Ändra 'sida-vinka-sida' till 'sida-vinkel-sida'.

### s. 14

Ändra 'vi kan rita en linje  $\overline{ZBH}$ ' till 'vi kan rita en linje  $\overline{ZHB}$ '.

### s. 14

Ändra 'som är mindre än vinkeln av mittpunkten av epicykeln på deferenten' till 'som är mindre än vinkeln av förflyttningen av epicykeln på deferenten'.

### s. 15

Ändra  $\angle KEH : \angle HZK < \omega_e : \omega_p$  till  $\angle KEH : \angle HZK < \omega_p : \omega_e$ .

### s. 15

Ändra  $\angle x : \angle HZK = \omega_e : \omega_p$  till  $\angle x : \angle HZK = \omega_p : \omega_e$ .

### s. 16

Ändra  $\angle KEH : \angle H\Theta K = \omega_t : \omega_s$  till  $\angle KEH : \angle H\Theta K = \omega_s : \omega_t$ .

### s. 18

Ändra 'Pederssen använder ordet argumentför' till 'Pederssen använder ordet argument för'.

### s. 18

Ändra 'är vinkeldistansen från den samma apogeum' till 'är vinkeldistansen av planeten från den samma apogeum'.

### s. 28

Ändra 'men detta är ekvationen för elliptisk bana med solen som en av brännpunkterna. Alltså är planetens bana en ellips med solen som en av brännpunkterna.' till 'men detta är ekvationen för ett kägelsnitt. Eftersom planeten har en periodisk bana måste  $e < 1$ . Alltså är planetens bana en ellips med solen som en av brännpunkterna.'.

**s. 31**

Ändra 'Integralen kan beräknas genom att utveckla koefficienten och integranden med oändliga serier och integrera med potenser av  $e$ ' till 'Integralen kan beräknas genom att utveckla koefficientent samt integranden genom oändlig serier av potenser av  $e$  och därefter integreras termvis'.