



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Klimatkris, fredagsdejter och kannibalism

En introduktion till spelteori

av

Jacob Peterson

2026 - No K22

Klimatkris, fredagsdejter och kannibalism

En introduktion till spelteori

Jacob Peterson

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Per Alexandersson

2026

Abstract

Game theory studies strategic situations in which the decisions of multiple agents affect each other's outcomes. The subject is of great importance in fields such as mathematics, economics, and the social sciences. The aim of this thesis is to provide an introductory yet mathematically rigorous presentation of central aspects of finite game theory, with a focus on concepts, models, and results that are relevant for upper secondary education or further studies.

The thesis examines static games in normal form, where concepts such as pure and mixed strategies, dominance, best response, Pareto optimality, and Nash equilibrium are introduced. It also studies games in extensive form, where sequential decisions are modeled using game trees and analyzed through subgame perfect Nash equilibrium and backward induction. Games with imperfect information are further explored through information sets and the distinction between mixed and behavioral strategies.

A central component of the thesis is the existence of Nash equilibrium in finite games. This is presented through an analytical proof based on Brouwer's fixed-point theorem and Sperner's lemma.

The thesis is intended to function both as an introduction to game theory and as an illustration of how mathematical models can be used to analyze conflict, cooperation, and rational decision-making.

Sammanfattning

Spelteori studerar strategiska situationer där flera aktörers beslut påverkar varandras utfall. Ämnet har stor betydelse inom bland annat matematik, ekonomi och samhällsvetenskap. Syftet med detta arbete är att ge en introducerande, men matematiskt stringent framställning av centrala delar av ändlig spelteori, med fokus på begrepp, modeller och resultat som kan vara relevanta för gymnasial undervisning eller vidare studier.

Arbetet behandlar statiska spel i normalform, där begrepp som rena och blandade strategier, dominans, bästa respons, Pareto-optimalitet och Nash-jämvikt introduceras. Vidare studeras spel i extensiv form, där sekventiella beslut modelleras genom spelträd och analyseras med hjälp av delspelsperfekt Nash-jämvikt och baklängesinduktion. Även spel med imperfekt information behandlas genom informationsmängder och skillnaden mellan blandade- och beteendestrategier.

Ett centralt inslag i arbetet är existensen av Nash-jämvikt i ändliga spel. Detta presenteras genom ett analytiskt bevis som bygger på Brouwers fixpunktssats och Spencers lemma.

Arbetet ska fungera både som en introduktion till spelteori och som ett exempel på hur matematiska modeller kan användas för att analysera konflikter, samarbete och rationella beslut.

Innehåll

1	Introduktion	5
1.1	Bakgrund	5
1.2	Arbetets avgränsningar	5
1.3	Vad är spelteori	6
2	Exempel på spel	6
2.1	Fångarnas dilemma	6
2.2	Klimatkris	8
3	Beslutsteori och rationella beslut	10
4	Statiska spel med fullständig information	11
4.1	Spel i normalform	12
4.1.1	Mer exempel på spel i normalform	13
4.1.2	Könskampen	15
4.2	Strategier i spel i normalform	16
5	Optimala strategier och jämvikt	18
5.1	Pareto-optimalt	18
5.2	Bästa respons och Nash-jämvikt	20
6	Att bestämma Nash-jämvikt för spel i normalform	22
6.1	Dominanta strategier och IESDS	22
6.2	Jämvikter i Fångarnas Dilemma	24
6.3	Jämvikter i Könskampen	24
6.4	Busken eller brottet - Kurragömma med en twist	27
6.5	Jämvikter hos Hjort/Hare-spelet	30
7	Bevis för existens av Nash-jämvikt	31
8	Spel i extensiv form med perfekt information	38
8.1	Delspelsperfekt Nash-jämvikt och baklängesinduktion	42
8.1.1	Kannibalskandal	46
9	Spel i extensiv form med imperfekt information	47
9.1	Strategier och jämvikt	49

9.1.1	Sekventiell jämvikt	50
10	Sammanfattning	52
	Tack!	53
	Redogörelse för användning av AI	53
	Referenser	55

1 Introduktion

Detta examensarbete är en introduktion till spelteori. Arbetet inleds med en introduktion till beslutsteori och rationellt handlande som grund för spelteoretisk analys. Därefter behandlas statiska spel i normalform, där centrala begrepp såsom strategier, dominans, bästa respons och begreppet Nash-jämvikt introduceras och analyseras med hjälp av klassiska exempel. Det presenteras även ett analytiskt bevis på existensen av Nash-jämvikt som involverar Spencers lemma och Brouwers fixpunktssats.

Vidare utvidgas teorin till spel i extensiv form där sekventiella beslut och dynamiska situationer modelleras genom spelträd. Slutligen berör vi även spel med imperfekt information där osäkerhet och informationsmängder påverkar analysen. Genomgående kombineras formella definitioner med konkreta exempel för att skapa en tydlig och sammanhängande förståelse.

Som ett pedagogiskt stöd har jag färgkodat vissa delar i exemplen där varje spelare representeras av en färg. Detta med förhoppningen att det ska underlätta för läsaren.

1.1 Bakgrund

Som blivande gymnasielärare i matematik söker jag områden som är både tillgängliga och intresseväckande för framtida elever. Spelteori rymmer många idéer som lämpar sig väl i undervisning, såsom logiskt tänkande, modellering, sannolikhet, optimering, och frågor om vad rationalitet verkligen innebär. Dessutom krävs inte mer än högstadiematematik för att få en intuitiv förståelse och kunna lösa enklare spelteoretiska problem. Samtidigt erbjuder området tydliga kopplingar till verkliga situationer, allt från vardagsliv till samhällsfrågor. Detta möjliggör att skolans demokrati- och värdegrundsarbete kan komma till uttryck i ämnets innehåll, inte bara i arbets sättet.

1.2 Arbetets avgränsningar

Eftersom spelteori är ett omfattande område görs flera avgränsningar i arbetet. Framställningen fokuserar huvudsakligen på ändlig och icke-kooperativ spelteori, med särskild tonvikt på spel i normalform och extensiv form. Arbetet syftar inte till att ge en fullständig forskningsorienterad framställning av ämnet, utan fokuserar istället på centrala begrepp, modeller och resultat som kan vara relevanta för undervisning på gymnasial nivå eller vidare studier inom ämnet.

Arbetet utgår huvudsakligen från *Essentials of Game Theory* av Leyton-Brown och Shoham [4]. Eftersom framställningen i denna litteratur är relativt koncentrerad och ofta presenteras resultat i hög takt, kompletteras den med delar av Tadelis *Game Theory: An introduction* [7], som i flera aspekter erbjuder mer utförliga resonemang och alternativa perspektiv på området.

1.3 Vad är spelteori

Spelteori är ett tvärvetenskapligt område med rötter i både matematik och ekonomi. Ett spel är en situation där flera rationella aktörer fattar beslut, och där varje aktörs utfall beror på samtliga aktörers val. Detta innebär, till skillnad från klassiska optimeringsproblem, att aktören inte bara behöver ta hänsyn till sina egna mål, utan även förutse hur andra kan komma att agera. Spelteorin erbjuder matematiska modeller för att beskriva sådana beslutssituationer. Området har tillämpningar inom många områden, bland annat ekonomi, statsvetenskap och biologi [6, s. 1-2].

2 Exempel på spel

Ett bra sätt att förstå det spelteoretiska ramverket är att studera exempel. Nedan följer två exempel på spel.

2.1 Fångarnas dilemma

Två fångar, Oscar och Klara, är gripna efter att ha gjort intrång på ett skyddat område. Övervakningskameror visar tydligt att de har befunnit sig på platsen, vilket räcker för att styrka ett åtal för olaga intrång. Samtidigt har ett sabotage skett inne på området där viktig utrustning har förstörts, men det finns inga direkta bevis som knyter någon av dem till själva sabotagehandlingen.

På polisstationen blir fångarna placerade i två olika rum och får inte tillåtelse att kommunicera med varandra. De ges två olika val. De kan antingen erkänna (E); det var de som förstörde utrustningen eller neka (N); det var *inte* dem som förstörde utrustningen. Detta innebär att fyra olika scenarion kan uppstå.

1. Båda fångarna erkänner brottet.
2. Båda fångarna nekar till brottet.
3. Klara erkänner och Oscar nekar.
4. Oscar erkänner och Klara nekar.



Figur 1: En illustrativ bild av fångarnas dilemma.

Åklagaren, som i detta fall är matematiker, försöker komma fram till en strategi som gör att en eller båda fångarna erkänner brottet. Han kommer slutligen fram till följande:

1. *Om båda fångarna erkänner* döms de för olaga intrång samt sabotage och får då 2 års fängelse vardera.
2. *Om båda nekar till brott* får de 1 års fängelse vardera. Detta på grund av att åklagaren inte har tillräcklig bevisning för att döma dem för hela brottet, utan de blir bara dömda för olaga intrång.

Om detta var den enda informationen är det självklart att båda fångarna kommer neka till brott och därmed spendera 1 år i fängelset, men den matematiskt skickliga åklagaren är inte riktigt klar utan förklarar även följande:

3. *Om den ena erkänner och den andra nekar* kommer den som erkänner slippa fängelse, medan den andra, som nekade till brott, döms till 3 års fängelse eftersom det nu finns starka bevis.

Om Klara nekar till brott medan Oscar erkänner blir det sämsta tänkbara scenariot för Klara. Samtidigt blir det bästa tänkbara scenariot för Oscar. Givet denna information, *vad bör fångarna göra?* Resultatet kan beskrivas med hjälp av en utbetalningsmatris som vi ser i Figur 2.

		Klara	
		<i>E</i>	<i>N</i>
Oscar	<i>E</i>	-2, -2	0, -3
	<i>N</i>	-3, 0	-1, -1

Figur 2: Utbetalningsmatris för fångarnas dilemma.

Utbetalningsmatrisen kan hjälpa oss att förstå hur de olika utfallen ser ut i olika scenarier. Låt oss nu, med hjälp av Figur 2, försöka att avgöra vad Oscar bör göra.

Anta att vi vet att Klara väljer att erkänna. Om Oscar väljer att neka kommer han hamna i fängelse i **3** år, men om han istället väljer att erkänna behöver han (bara) sitta **2** år istället. Med vetskapen att Klara har erkänt kan Oscar gynnas genom att själv erkänna.

Anta nu det andra scenariot; vi vet att Klara har valt att neka. Om Oscar också väljer att neka kommer han hamna i fängelse i **1** år, men om han istället väljer att erkänna går han fri. Med vetskapen att Klara har nekat kan Oscar, precis som fallet innan, gynnas genom att själv erkänna. Oscar gynnas alltså genom att erkänna oavsett vad Klara väljer att göra. Vad Klara gör blir därför irrelevant för Oscar, då han får färre år i fängelse genom att erkänna.

Ändra nu synsätt och fråga dig vad Klara borde göra. Med samma resonemang som ovan borde Klara också välja att erkänna på grund av spelets symmetri.

Detta kan kännas paradoxalt. Vi har just argumenterat för att båda deltagarna gynnas genom att erkänna, men samtidigt hade de båda fått ett lindrigare straff om båda hade valt att neka. När Oscar och Klara agerar utifrån egen vinning och utgår från vad som är bäst för dem, oavsett vad den andra väljer att göra, är det mest rationella att båda väljer att erkänna. Trots att det hade varit mer gynnsamt om båda hade valt att neka, driver den individuella rationaliteten dem till att erkänna, vilket gör att båda får ett sämre resultat.

2.2 Klimatkris

Om historien om Oscar och Klara inte väcker tillräckligt intresse för området kommer nu ett till exempel inspirerat av Carl-Joar Karlsson [3, s. 2-3].

Klockan slår 14:00 i Belém, Brasilien. Det är dags för COP30, ett toppmöte där två länder antingen kan välja att samarbeta eller inte samarbeta inom det nya klimatförslaget. Om de samarbetar gynnas båda länderna med 6 enheter (exempelvis råvaror eller pengar), men om bara ett av länderna väljer att samarbeta kommer länderna endast få 3 enheter. Självklart kostar det att samarbeta, det krävs både tid och pengar, något som valideras till 4 enheter. Vi kan nu skapa en utbetalningsmatrix och försöka komma fram till vad som anses vara det mest rimliga beslutet; samarbeta (S) eller inte (inte S)?

		Land 2	
		Inte S	S
Land 1	Inte S	0, 0	3, -1
	S	-1, 3	2, 2

Figur 3: Utbetalningsmatrix för spelet klimatkris

Precis som förra problemet med fångarna finns det en strategi som utifrån ländernas egna intressen alltid är den mest gynnsamma. I detta fall; att inte samarbeta. Det bästa kollektiva utfallet blir överkört av ländernas mest rationella strategi. Detta är ett tydligt exempel på hur egenintresse kan hindra kollektiv handling; trots ett akut gemensamt problem räddades inte klimatet.

Klimatkrisen väcker en rad större frågor, vissa existentiella. Om varje land prioriterar sina egna kortsiktiga intressen vad kan vi då förvänta oss av internationella klimatförhandlingar? Skulle besluten sett annorlunda ut om länderna fick kommunicera och lova varandra att samarbeta? Vad händer när länderna möts i nya förhandlingar gång på gång, år efter år? I vilken utsträckning påverkas länderna av hur rationell den andra aktören antas vara? Är tillit en faktor?

Spelteorin ger oss verktyg att analysera just dessa typer av frågor. Den förklarar varför egna individuella intressen kan prioriteras över gemensam framgång. Än viktigare kan vi studera under vilka omständigheter samarbete istället skulle kunna uppstå.

3 Beslutsteori och rationella beslut

Detta Avsnitt bygger på Kapitel 1 i Tadelis [7, s. 3-10].

Innan vi fördjupar oss i spelteorin behöver några grundläggande begrepp och definitioner införas. Den "rationella spelaren" är en term som frekvent kommer att återkomma, men vad innebär det att en spelare agerar (är) rationell i sina beslut. Det kan framstå överdrivet att formellt definiera vad som menas med en rationell spelare, men en sådan definition är nödvändig för att den fortsatta analysen ska vara entydig.

Tadelis beskriver beslutsproblem som ett problem innehållande tre specifika inslag:

1. *Handlingar* är de handlingar som står till buds för en spelare i ett spel. Mängden av möjliga val betecknas A .
2. *Utfall* är de möjliga konsekvenserna som resultat av någon av handlingarna. Mängden av utfall betecknas X .
3. *Preferenser* beskriver hur spelaren kan rangordna de olika utfallen från mest till minst önskat. Preferensrelationen \succsim , som definieras nedan, beskriver vad som menas med att spelaren föredrar något över något annat.

Definition 3.1. Låt X vara en mängd av möjliga utfall. En *preferensrelation* på X är en binär relation där $x \succsim y$ tolkas som "utfallet x är minst lika bra som utfallet y ".

Axiom 1 (Fullständighet). *Preferensrelationen \succsim på X är fullständig. Det vill säga att det för alla $x, y \in X$ gäller att*

$$x \succsim y \quad \text{eller} \quad y \succsim x.$$

Axiom 2 (Transitivitet). *Preferensrelation \succsim på X sägs vara transitiv om för alla $x, y, z \in X$ gäller att*

$$x \succsim y \quad \text{och} \quad y \succsim z \quad \Rightarrow \quad x \succsim z.$$

Definition 3.2. En *utbetalningsfunktion* $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ representerar preferensrelationen så att det för något par $x, y \in X$ gäller

$$u(x) \geq u(y) \quad \Longleftrightarrow \quad x \succsim y.$$

Ett centralt antagande inom spelteorin är att spelets aktörer agerar rationellt i den meningen att de alltid gör vad som är bäst för dem själva. Eftersom varje handling i detta sammanhang leder till ett bestämt utfall kan utbetalningen också ses som en funktion av handlingar. I viss litteratur, till exempel hos Tadelis [7], används beteckningen $v(\cdot)$ för denna funktion. I detta arbete används i stället $u(\cdot)$ genomgående, både för utbetalning över utfall och för utbetalning över handlingar. Syftet är att hålla framställningen notationsmässigt enkel. Vi har nu det som krävs för att definiera vad det innebär för en spelare att vara rationell.

Definition 3.3. (Rationell) En spelare är *rationell* om den i ett beslutsproblem, med en utbetalningsfunktion $u(\cdot)$ över handlingar, väljer en handlingsprofil $a \in A$ så att den maximerar utbetalningen. Det vill säga att a^* blir vald om och endast om

$$u(a^*) \geq u(a) \quad \text{för alla } a \in A.$$

4 Statiska spel med fullständig information

Du som läser detta har med stor sannolikhet suttit och studerat inför ett prov. Att hårt arbete och dedikerade studier ofta ger resultat i form av högre betyg är något som både du och jag som läsare sannolikt kan enas om. Detta kan beskrivas som ett beslutsproblem: det finns tydliga handlingar, till exempel hur mycket tid man väljer att lägga på studier, och tydliga utfall, i form av betyg, där högre betyg i allmänhet är att föredra. I en sådan situation framstår sambandet mellan mer studier och bättre utfall som relativt okomplicerat. Om detta inte helt speglar din egen studieerfarenhet är det dock fullt förståeligt.

Under perioden 1966-1995 tillämpades i den svenska grundskolan ett system med relativ betygssättning, där betygen 1-5 fördelades i proportion till gruppens prestationer. Antalet högsta betyg var begränsat, vilket innebar att en femma i en grupp i praktiken kunde motsvara en trea i en annan. Utfallet berodde alltså inte enbart på den egna prestationen, utan även på hur övriga elever presterade.

Ett liknande inslag återfinns i dagens högskoleprov. Slutpoängen är normalfördelad utifrån provdeltagarnas prestationer, vilket innebär att det inte är ett visst antal rätta svar som garanterar en viss poäng. Resultatet beror istället på hur väl man presterar relativt andra. Av denna anledning kan det ibland uppstå ett visst, och enligt mig fullt legitimt, ifrågasättande mot de personer som skriver 2,0 på högskoleprovet flera gånger i rent rekreationssyfte.

I dessa situationer räcker det inte längre att betrakta studier som ett rent beslutsproblem. När utfallet beror på hur andra individer presterar måste ramarna för analysen ändras. Du är inte längre den enda rationella aktören vars handlingar påverkar resultatet. Istället befinner du dig i en situation där flera rationella aktörer fattar beslut samtidigt, och där utfallet för var och en beror på samspelet mellan alla handlingar. För att kunna analysera sådana situationer krävs därför ett mer generellt ramverk än beslutsteorin. Det är här spelteorin tar vid. Vi börjar därmed att analysera strategier i de mest renodlade situationerna, som vi nu kallar för *spel*.

Första kategorin av spel som kommer att behandlas är statistiska spel med fullständig information. För att ett spel ska vara statistiskt måste spelarnas handlingar väljas simultant. Detta innebär dock inte nödvändigtvis att valen sker vid exakt samma tidpunkt, utan snarare att ingen spelare har kännedom om de övriga spelarnas val vid tidpunkten för sitt eget beslut. Spelet behöver även resultera i någon form av utbetalning för spelarna, exempelvis att man får eller förlorar poäng. Att ett spel har fullständig information handlar om att alla spelare vet vad de har gett sig in på; de vet spelets regler och utfallet av deras handlingar [7, s. 44-45].

Definition 4.1. En händelse E är *allmän vetskap* om (1) alla vet E , (2) alla vet att alla vet E , och så vidare i all oändlighet.

För att sammanfatta är ett statistiskt spel med fullständig information ett spel innehållande fyra komponenter som behöver vara allmän vetskap bland alla spelare:

- alla möjliga handlingar från alla spelare,
- alla möjliga utfall,
- vad varje kombination av handlingar från alla spelare (handlingsprofil) kommer att resultera i,
- preferenserna hos varje spelare [7, s. 45].

4.1 Spel i normalform

Spel kan modelleras och representeras på flera olika sätt inom spelteorin. En av de mest grundläggande formerna är spel i normalform. Det som utmärker denna typ av spel är att de kan sammanfattas i en matris, där varje spelares möjliga handlingar ställs mot varandra och där konsekvenserna av varje kombination av handlingar blir tydliga [4, s. 3]. Fångarnas dilemma och klimatkrisen är båda exempel på spel i normalform.

För spel i normalform beror utfallet enbart på spelarnas handlingar. Det finns inga yttre variabler, såsom tid, ordningsföljd eller slump i omgivningen, som påverkar resultatet. Denna avskalade struktur gör normalformen särskilt lämpad för att analysera grundläggande strategiska konflikter mellan individuellt rationella val och kollektiva konsekvenser.

Många komplexa spel kan reduceras till spel i normalform. Av den anledningen utgör dessa spel en central byggsten inom spelteorin och en naturlig utgångspunkt för att förstå mer avancerade modeller.

Definition 4.2. Ett spel i normalform är en tupel $G = (N, A, u)$ där:

- N är en ändlig mängd bestående av n spelare där varje spelare indexeras av $i \in N$.
- $A = A_1 \times \dots \times A_n$, där A_i är en ändlig mängd av handlingar som står till förfogande för spelare i . Varje vektor $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ kallas en handlingsprofil.
- $u = (u_1, \dots, u_n)$ där $u_i : A \rightarrow \mathbb{R}$ är en reellvärd utbetalningsfunktion för spelare i .

Exempel 1. Betrakta det klassiska spelet sten, sax och påse mellan två spelare. Detta är ett spel i normalform. $N = 2$, $A_1 = \{\text{sten, sax, påse}\}$, $A_2 = \{\text{sten, sax, påse}\}$, $A = A_1 \times A_2$. Ett exempel på en möjlig handlingsprofil är $a = (\text{sten, sax})$ där $u_1(a) = 1$ och $u_2(a) = -1$ (Spelare 1 vinner vid handlingsprofil a och Spelare 2 förlorar vid handlingsprofil a).

4.1.1 Mer exempel på spel i normalform

Två undergrupper av spel i normalform som är värda att nämna är *konstant-summa-spel* och *gemensam-utbetalnings-spel*.

Definition 4.3. Ett spel med två spelare är ett *konstant-summa-spel* om det existerar en konstant c sådan att för varje handlingsprofil $a \in A_1 \times A_2$ gäller det $u_1(a) + u_2(a) = c$.

Vi har även *gemensam-utbetalnings-spel* som också kallas för *lagspel* eller *rent samordningsspel*.

Definition 4.4. Ett *gemensam-utbetalnings-spel* är ett spel där det för alla handlingsprofiler $a \in A$ och för varje par av spelare i, j gäller att $u_i(a) = u_j(a)$.

För lagspel kan spelarna samordna sina handlingar så det blir maximal utbetalning för samtliga spelare. I Figur 4 kan vi se hur den maximala utbetalningen sker då spelare 1 väljer handling R och spelare 2 väljer handling L.

	R	L
R	1, 1	3, 3
L	-1, -1	2, 2

Figur 4: Utbetalningsmatris för ett gemensam-utbetalningsspel

Syftet med att lyfta dessa undergrupper av spel är på grund av att alla lagspel kan omvandlas till ett konstant-summa-spel om man lägger till en tredje spelare vars handlingar inte påverkar övriga spelares utfall men gör så att summan av utbetalningarna blir c . När $c = 0$ får spelen ett eget namn – *Nollsummespel*. Nollsummespel har fått stor betydelse inom moderna tillämpningsområden såsom artificiell intelligens och maskininlärning, där spelteoretiska idéer används inom bland annat förstärkningsinlärning (reinforcement learning), datasäkerhet och optimeringsproblem [5, s. 48-49].

Definition 4.5. Ett spel är ett *nollsummespel* om det för varje handlingsprofil $a \in A_1 \times \dots \times A_n$ gäller $\sum_{i \in N} u_i(a) = 0$.

Exempel 2. (Kurragömma – Ett nollsummespel) Filip och Nora ska leka kurragömma. Filip är den som letar och Nora väljer att antingen gömma sig bakom en buske eller bakom ett hus. Filip får sedan välja om han ska leta bakom busken eller bakom huset. Utbetalningsmatrisen för spelet representeras i Figur 5.

		Nora	
		B	H
Filip	B	1, -1	-1, 1
	H	-1, 1	1, -1

Figur 5: Utbetalningsmatris för spelet kurragömma.

4.1.2 Könskampen

Klimatkrisen och fångarnas dilemma är båda exempel på spel som rymmer både konflikt och samordning, men där dessa element samexisterar i ett paradoxalt sammanhang. Detta är något återkommande för många spel. Ett annat känt exempel är ett spel (i normalform) som kallas för könskampen (*battle of the sexes*) [7, s. 69-70] [4, s. 6]. Även om spelet ofta diskuteras i relation till heteronormativa antaganden, belyser det flera centrala och intressanta spelteoretiska resultat, som vi återkommer till längre fram.

Johan och Becka är sambos och gillar att gå på fredagsdejter på fredagseftermiddagarna. Denna fredag kan de antingen välja mellan att åka in till stan och göra ett Escape Room (ER) eller spendera eftermiddagen på en trampolinpark (T). Båda föredrar att vara med varandra, samtidigt som Johan föredrar Escape Room och Becka föredrar trampolinpark. Denna fredag har Johans mobil laddat ur och de behöver enskilt välja om de ska bege sig mot stan för ett escape room, eller åka till trampolinparken. De har alltså inte möjligheten att samordna sina val sinsemellan eftersom Johans mobil är urladdad. Utbetalningsmatrisen kan vi se i Figur 7.



Figur 6: En illustrativ bild av könskampen.

		Becka	
		ER	T
Johan	ER	2, 1	0, 0
	T	0, 0	1, 2

Figur 7: Utbetalningsmatris för könskampen.

4.2 Strategier i spel i normalform

Ett centralt begrepp inom spelteorin är strategier. För någon som är ny inom området kan strategier lätt förväxlas eller likställas med handlingar. En typ av strategi är att välja en handling och sedan spela den. En sådan strategi kallar vi för *ren strategi*.

Definition 4.6. En *ren strategi* för spelare i är en deterministisk handlingsplan. Mängden av *rena strategier* för spelare i noteras med S_i . En strategiprofil $s = (s_1, \dots, s_n)$, $s_i \in S_i$ för alla $i \in N$, beskriver en kombination av strategier valda av alla n spelare i spelet.

I spel i normalform sammanfaller begreppen handling och ren strategi. Utifrån en mängdteoretiskt förhållningssätt kan vi säga att det finns en bijektion mellan spelarens rena strategier S_i och spelarens handlingar A_i . Observera att denna identifikation är specifik för spel i normalform. I dynamiska spel kan en strategi inte reduceras till en enskild handling, utan måste ange val vid varje möjlig beslutspunkt, något vi undersöker mer i Avsnitt 8.

Analysen i rena strategier ger i vissa fall ingen stabil eller entydig förutsägelse av utfallet. Detta väcker frågan om hur spelare bör agera i situationer där ingen ren strategi framstår som självklar. Återvänder vi till Kurragömma-spelet där Filip ska försöka att hitta Nora bakom busken eller huset är den intuitiva strategin att Nora väljer att gömma sig hälften av gångerna bakom busken och hälften av gångerna bakom huset. Detta gör att Filip tvingas att leta bakom busken hälften av gångerna och bakom huset hälften av gångerna. För att analysera detta val av strategi – att slumpa mellan två eller flera handlingar – behöver vi utvidga strategibegreppet och införa det vi kallar för *blandade strategier*. Notera även hur det inte är ett irrationellt beslut att slumpa. Slumpan det är själva strategin.

Definition 4.7. (Blandad strategi) Låt $G = (N, A, u)$ vara ett spel i normalform. För varje mängd X , låt $\Pi(X)$ beteckna mängden av alla sannolikhetsfördelningar över X . Då är mängden av *blandade strategier* för spelare i $S_i = \Pi(A_i)$

Definition 4.8. (Blandade strategiprofiler) Mängden av *blandade strategiprofiler* är den kartesiska produkten av de individuella blandade strategimängderna: $S_1 \times \dots \times S_n$.

Med $s_i(a_i)$ betecknar vi sannolikheten att handling a_i spelas under den blandade strategin s_i .

Definition 4.9. (Stödet) *Stödet* till en blandad strategi s_i för spelare i betecknas $\text{supp}(s_i)$ och är mängden av rena strategier (handlingar) sådana att $\{a_i | s_i(a_i) > 0\}$.

Exempel 3. För att försöka förankra idén bakom blandade strategier i ett spel i normalform kollar vi på följande exempel:

Antag ett klassiskt spel av sten, sax, påse, där vinnaren får utbetalningen $+1$, förloraren -1 och oavgjort ger 0 poäng till båda spelarna. Mängden av blandade strategier kan i detta fall beskrivas som

$$S_{i \in \{1,2\}} = \{p_{\text{sten}}, p_{\text{sax}}, p_{\text{påse}} \mid p_{\text{sten}} + p_{\text{sax}} + p_{\text{påse}} = 1, \quad p_j \geq 0\}.$$

Spelare 1 och spelare 2 väljer nu en blandad strategi

$$s_* = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} \in S_{i \in \{1,2\}},$$

som innebär att sten, sax och påse har lika stor chans att bli valda. Vi noterar även att $\text{supp}(s_i) = \{\text{sten}, \text{sax}, \text{påse}\} = A_i$ för både spelare 1 och 2. Eftersom spelarna väljer samma strategi så har vi att $s_* = s_1 = s_2$. Strategiprofilen i detta fall blir alltså den kartesiska produkten av s_1 och s_2 : $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$.

En rimlig fråga blir nu hur vi kan rangordna de olika strategierna. Är s_* en bra strategi för sten, sax, påse? Ett sätt att studera detta är med hjälp av *förväntad utbetalning*.

Definition 4.10. (Förväntad utbetalning av en blandad strategi) Låt (N, A, u) vara ett spel i normalform. Den *förväntade utbetalningen* u_i för spelare i med strategiprofilen $s = (s_1, \dots, s_n)$ definieras som

$$u_i(s) = \sum_{a \in A} u_i(a) \prod_{j=1}^n s_j(a_j)$$

Exempel 4. Vi återgår till exemplet med sten, sax, påse och beräknar den förväntade utbetalningen för spelare 1 med en strategiprofil $s = (s_*, s_*)$.

$$\begin{aligned} u_1(s) &= \sum_{a \in A} u_1(a) \prod_{j=1}^2 s_j(a_j) \\ &= \left((3 \cdot 1) \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{9} + 3 \cdot 0 \cdot \frac{1}{9} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Att utföra dessa beräkningar kan upplevas krångligt. Ett annat sätt är att se på den förväntade utdelningen som

$$u_i(s) = \sum (\text{utbetalning}) \cdot (\text{sannolikhet}).$$

Utbetalningen för spelare 1 då handlingsprofilen $a = \{\text{sten, sax}\}$ är $+1$ och sannolikheten att denna handlingsprofil spelas är $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$. Således har vi fått fram en av våra nio termer. Att den förväntade utdelningen är noll i en klassisk sten, sax, påse kan intuitivt förklaras med att spelet är ett symmetriskt spel där man förväntas vinna lika många gånger som man förlorar, givet att spelarna spelar strategin s_* .

5 Optimala strategier och jämvikt

Likt många delar av matematiken är optimering en central och viktig del. Till skillnad från beslutsproblem där en aktörs handling får ett specifikt utfall, blir spel med flera spelare en mer komplex situation och där miljön spelet äger rum i kan påverka. I detta avsnitt kommer vi studera olika *lösningssbegrepp*. Med ett lösningssbegrepp avses ett kriterium som används för att identifiera rimliga eller stabila utfall i ett spel [7, s. 54][4, s. 9].

5.1 Pareto-optimalt

När man analyserar spel uppstår naturligt frågan hur olika utfall ska jämföras. Ett möjligt angreppssätt vore att summera utbetalningen över samtliga spelare och sedan jämföra dessa totalsummor. Ett sådant förfarande kräver dock starka antaganden om hur olika spelares nyttor ska vägas mot varandra. I allmänhet kan spelare ha skilda intressen och preferenser, vilket gör att en direkt summering av nyttor bör behandlas med försiktighet. Däremot finns jämförelser som kan göras utan att införa

sådana värderingar. Om ett utfall gör minst en spelare bättre ställd utan att göra någon annan sämre ställd, framstår det som entydigt bättre. Exempelvis är utfallet

$$A = (\text{Person 1 får 5, person 2 får 3})$$

sämre än

$$B = (\text{Person 1 får 6, person 2 får 3}),$$

eftersom person 1 får det bättre i B medan utfallet för person 2 inte är särskiljande. Denna intuitiva idé kan vi formulera som en definition.

Definition 5.1. (Pareto-dominant) Strategiprofil s *Pareto-dominerar* strategiprofil s' om det för alla $i \in N$, $u_i(s) \geq u_i(s')$, och det finns något $j \in N$ så att $u_j(s) > u_j(s')$.

Layton-Brown och Shoham har valt att definiera Pareto-dominans över strategiprofiler, inte bara handlingsprofiler. I spel i normalform med rena strategier sammanfaller strategiprofiler med handlingsprofiler, medan definitionen ovan även täcker fall med blandade strategier genom att jämföra de förväntade nyttor som strategiprofilerna ger upphov till [4, s. 10].

För ett spel kan flera olika strategier dominera över andra. En naturlig följdfråga blir om det finns en strategi som dominerar *alla* andra strategier. Om det finns en sådan strategi kallar vi den för *Pareto-optimal*.

Definition 5.2. (Pareto-optimal) Strategiprofilen s' är *Pareto-optimal* om det inte existerar någon annan strategiprofil $s \in S$ som Pareto-dominerar s' .

Exempel 5. Ett ytterligare klassiskt exempel på spel är *Hjort/Hare-spelet*. Föreställ dig två spelare som ska ut i skogen och jaga. I denna fiktiva skog finns det endast en hjort och två harar. För att kunna jaga hjorten måste spelarna samarbeta. Att jaga hararna klarar man på egen hand. De olika utfallen representeras i utbetalningsmatrisen i Figur 8 nedan.

		Jägare 2	
		Hjort	Hare
Jägare 1	Hjort	3, 3	0, 2
	Hare	2, 0	1, 1

Figur 8: Utbetalningsmatris för spelet Hjort/Hare

I detta exempel kan vi exempelvis se hur strategiprofilen $s = (\text{hjort}, \text{hjort})$ Pareto-dominerar strategiprofilen $s' = (\text{hare}, \text{hare})$. Utfallet är bättre för båda spelarna när de samarbetar och jagar hjorten. Efter en närmare titt kan vi även se att strategiprofilen $s = (\text{hjort}, \text{hjort})$ är Pareto-optimal i den meningen att ingen annan strategiprofil kan göra någon spelare bättre ställd utan att göra den andra sämre ställd. Trots detta saknar Pareto-analysen i sig ett strategiskt stabilitetskriterium: för en enskild spelare kan valet av hjort innebära en risk om den andra spelaren väljer annorlunda. Detta visar att kollektiv nytta inte nödvändigtvis sammanfaller med strategisk rationalitet och leder naturligt vidare till analys av *bästa respons* och *Nash-jämvikt*.

5.2 Bästa respons och Nash-jämvikt

Vi kommer nu att ta analysen in till spelarens perspektiv som kommer leda fram till det mycket betydelsefulla och inflytelserika begreppet *Nash-jämvikt*.

Om det hade varit så att en spelare vet vad övriga spelare kommer att spela, blir problemet direkt ett besluts-optimerings-problem. Detta är en bra utgångspunkt när vi nu ska utvidga vår analys.

Vi börjar med att definiera $s_{-i} = (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$, en strategiprofil s som saknar spelare i :s strategi. Därav kan vi skriva $s = (s_i, s_{-i})$.

Definition 5.3. (Bästa respons) Spelare i :s *bästa respons* på en strategiprofil s_{-i} är en blandad strategi $s_i^* \in S_i$ sådan att $u_i(s_i^*, s_{-i}) \geq u_i(s_i, s_{-i})$ för alla strategier $s_i \in S_i$

Mängden bästa responser kan vara oändlig, särskilt när spelaren är likgiltig mellan flera rena strategier. Bästa respons är ingen optimal strategi i sig självt. Den

säger egentligen bara vad man bör göra *givet vad motspelaren gör just nu*, men den kulminerar i en central idé för spelteorin: Nash-jämvikt [4, s. 11].

Definition 5.4. (Nash-jämvikt) En strategiprofil $s = (s_1, \dots, s_n)$ är en *Nash-jämvikt* om för alla spelare i , s_i är bästa respons på s_{-i} .

Denna definition kan upplevas som abstrakt och brukar därför konkretiseras som en *stabil* strategiprofil s där ingen av spelarna gynnas av att byta strategi. I YouTube-videon *Nash Equilibriums // How to use Game Theory to render your opponents indifferent* [1] förklarar professorn Trefor Bazett att en Nash-jämvikt är ”Ett val av blandade strategier för varje spelare sådant att ingen spelare ensidigt kan förbättra sin förväntade utdelning”.

Ett annat, enligt mig, intuitivt sätt att se på Nash-jämvikt, taget från William Spaniel, är där han väljer att förklara Nash-jämvikt som ”En lag som ingen skulle vilja bryta, även i frånvaro av en effektiv polis”. Han exemplifierar detta genom att använda följande exempel som han presenterar i YouTube-videon *Game Theory 101 (5): What Is a Nash Equilibrium?* [8].

Exempel 6. (Bilförarna) Anta två bilförare som närmar sig en korsning från två vinkelräta riktningar. För den ena föraren är trafikljuset grönt och för den andra rött. Varje förare har två möjliga strategier: Kör eller Stanna. Om båda väljer att köra kommer de att kollidera vilket innebär en kraftigt negativ utbetalning. Om en förare kör medan den andra stannar passerar den körande utan försening, medan den som stannar förlorar tid. Om båda stannar uppstår en onödig tidsförlust för båda. Låt oss även anta att det inte fanns någon polis – hade någon av bilförarna velat bryta mot lagen? Spelet representeras i en utbetalningsmatris, se Figur 9.

	Kör	Stanna
Kör	-10, -10	1, 0
Stanna	0, 1	-1, -1

Figur 9: Utdelningsmatris för bilförarna.

Detta spel har två rena Nash-jämvikter: (Kör, Stanna) och (Stanna, kör). I dessa utfall har ingen spelare incitament att ensidigt avvika. Om en förare stannar är det optimalt för den andra att köra, och om en förare kör är det optimalt för den andra

att stanna. Det intressanta är att trafikregeln inte drivs av hot och sanktioner från stat eller polis, snarare att laglydnad sammanfaller med bilförarnas egenintresse. Rödljusens funktion kan därmed tolkas som en koordineringsmekanism som väljer en av spelets jämvikter.

Vidare kan vi dela upp Nash-jämvikt i två underkategorier *strikt-* och *svag Nash*:

Definition 5.5. (Strikt Nash) En strategiprofil $s = (s_1, \dots, s_n)$ är *strikt Nash-jämvikt* om det för alla aktörer och för alla strategier $s'_i \neq s_i$, $u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i})$.

Definition 5.6. (Svag Nash) En strategiprofil $s = (s_1, \dots, s_n)$ är *svag Nash-jämvikt* om det för alla aktörer och för alla strategier $s'_i \neq s_i$, $u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i})$, och det är inte en strikt Nash-jämvikt.

Dessa undergrupper finns för att kunna beskriva hur stabilt en Nash-jämvikt är. En blandad-strategi-Nash-jämvikt kommer alltid vara svag, medan en ren strategi kan vara antingen strikt eller svag beroende på spelet.

Vi har nu nått fram till den mest centrala satsen, formulerad av John Nash.

Sats 5.7. (Nash 1951) *Varje spel med ett begränsat antal spelare och handlingsprofiler har åtminstone en Nash-jämvikt.*

Denna sats bevisas i Avsnitt 7.

6 Att bestämma Nash-jämvikt för spel i normalform

Vi kommer alldeles strax göra ett återbesök hos några spel som presenterats tidigare i arbetet. Denna gång vill vi systematiskt och matematiskt ta fram spelens Nash-jämvikter. Innan vi gör det inför vi en definition av *dominans*. Ett begrepp som kommer underlätta arbetet att ta fram rena Nash-jämvikterna.

6.1 Dominanta strategier och IESDS

Definition 6.1. (Dominans) Låt s_i och s'_i vara två strategier för spelare i , och låt S_{-i} beteckna mängden av alla strategiprofiler för de övriga spelarna. Då gäller:

1. Strategin s_i *strikt dominerar* s'_i om det för alla $s_{-i} \in S_{-i}$ gäller att

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}).$$

2. Strategin s_i *svagt dominerar* s'_i om det för alla $s_{-i} \in S_{-i}$ gäller att

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}),$$

och det finns minst ett $s_{-i} \in S_{-i}$ sådant att

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}).$$

3. Strategin s_i *mycket svagt dominerar* s'_i om det för alla $s_{-i} \in S_{-i}$ gäller att

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}).$$

Om en strategi dominerar alla andra strategier säger vi att den är (strikt, svagt eller mycket svagt) *dominerande*.

Det är viktigt att skilja mellan dominans av en strategi och Pareto-dominans. När vi säger att en strategi s_i dominerar en annan strategi s'_i avser vi en jämförelse ur spelare i 's perspektiv. Dominans är alltså ett *individuell*t begrepp och tar endast hänsyn till spelare i 's nytta, medan Pareto-dominans är ett *kollektiv*t begrepp som beskriver en förbättring för kollektivet som helhet.

Om det finns en strategi som *dominerar* kommer det också finnas en strategi som blir *dominerad*. Vi inför en kort definition för detta.

Definition 6.2. (Dominerad strategi) En strategi s'_i är *strikt (svagt, mycket svagt) dominerad* för en spelare i om en annan strategi s_i strikt (svagt, mycket svagt) dominerar s'_i .

Det centrala med att ha infört begreppet dominans är att vi kan utesluta vissa strategier från vidare analys. Om en strategi är strikt dominerad av en annan strategi kan den aldrig vara en bästa respons mot någon strategi hos motspelarna. Därmed kan den inte heller ingå i någon Nash-jämvikt.

Givet ett spel i normalform $G = (N, A, u)$ med rena strategier $s \in S$ kan vi utföra en så kallad Itererad Elimination av Strikt Dominerade Strategier (även kallat IESDS) för att hitta en så kallad strikt-dominant-strategi-jämvikt.

Definition 6.3. Strategiprofilen $s^D \in S$ är en *strikt-dominant-strategi-jämvikt* om $s_i^D \in S_i$ är en strikt dominerande strategi för alla $i \in N$.

6.2 Jämvikter i Fångarnas Dilemma

Fångarnas dilemma är ett av de mest klassiska spelen inom spelteorin. Detta spel har en strikt-dominant-strategi-jämvikt: (Erkänna, Erkänna) och är därför *lösbar* genom IESDS.

Exempel 7. (Fångarnas dilemma löst med IESDS) Betrakta spelet i normalform med två spelare $i \in \{1, 2\}$ och strategimängder

$$S_1 = \{E, N\}, \quad S_2 = \{E, N\},$$

samt nyttofunktioner u_1, u_2 givna av utdelningsmatrisen i Figur 2.

Vi visar först att E strikt dominerar N för spelare 1. Enligt Definition 6.1 räcker det att kontrollera att

$$u_1(E, s_2) > u_1(N, s_2) \quad \text{för alla } s_2 \in S_2.$$

Detta ger de två fallen

$$u_1(E, N) = 0 > -1 = u_1(N, N) \quad \text{och} \quad u_1(E, E) = -2 > -3 = u_1(N, E).$$

Alltså är N strikt dominerad av E för spelare 1 och kan elimineras.

På samma sätt gäller att E strikt dominerar N för spelare 2, eftersom

$$u_2(s_1, E) > u_2(s_1, N) \quad \text{för alla } s_1 \in S_1,$$

det vill säga

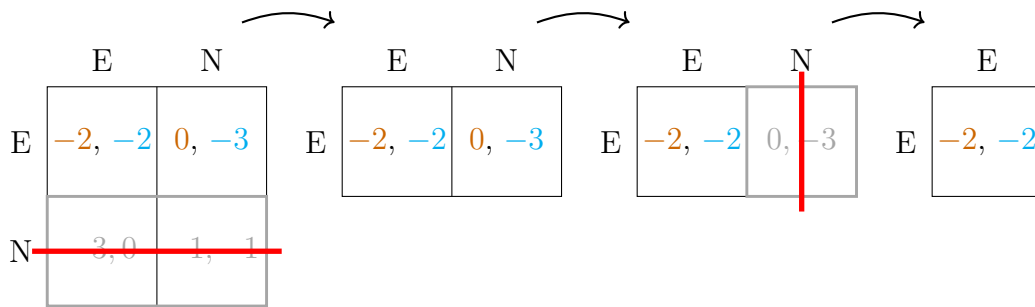
$$u_2(N, E) > u_2(N, N) \quad \text{och} \quad u_2(E, E) > u_2(E, N).$$

Alltså kan även N elimineras för spelare 2.

Efter iterativ eliminering av strikt dominerade strategier återstår endast strategiprofilen (E, E) . Därmed är (E, E) den unika Nash-jämvikten i spelet. Processen illustreras i Figur 10.

6.3 Jämvikter i Könskampen

Vi återgår nu till könskampen och frågar oss vad Johan och Becka bör göra för att det ska bli en så lyckad fredags dejt som möjligt. Detta spel visar sig ha tre stycken



Figur 10: Visuell representation av IESDS för Fångarnas dilemma.

Nash-jämvikter, där två av jämvikterna är rena strategier medan den tredje är en blandad strategi.

Om vi antar att Johan spelar en blandad strategi

$$s_{\text{Johan}} = \begin{pmatrix} p_{\text{Johan}}(ER) \\ p_{\text{Johan}}(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 1 - r \end{pmatrix}, \quad r \in [0, 1]$$

och Becka en blandad strategi

$$s_{\text{Becka}} = \begin{pmatrix} p_{\text{Becka}}(ER) \\ p_{\text{Becka}}(T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 1 - q \end{pmatrix}, \quad q \in [0, 1]$$

kan vi beräkna deras förväntade utbetalning och sedan avgöra vad deras bästa respons bör vara. Eftersom en ren strategi är ett specialfall av en blandad strategi kommer alltså alla tre Nash-jämvikter trilla ut när vi ansätter s_{Johan} och s_{Becka} att vara blandade strategier.

Vi kommer att vilja undersöka spelarnas bästa respons. För Johan innebär det bästa r beroende på Beckas val av q .

Låt oss anta att Johan spelar ER respektive T. Förväntade utdelningen ges då av

$$\begin{aligned} u_{\text{Johan}}(ER) &= 2 \cdot q + 0 \cdot (1 - q) = 2q \\ u_{\text{Johan}}(T) &= 0 \cdot q + 1 \cdot (1 - q) = 1 - q. \end{aligned}$$

I fallet då

$$u_{\text{Johan}}(ER) > u_{\text{Johan}}(T) \iff 2q > 1 - q \iff q > \frac{1}{3}$$

blir Johans bästa respons att använda sig av strategin $r = 1$, det vill säga den rena strategin där man alltid väljer ER.

Om istället

$$u_{\text{Johan}}(ER) < u_{\text{Johan}}(T) \iff 2q < 1 - q \iff q < \frac{1}{3}$$

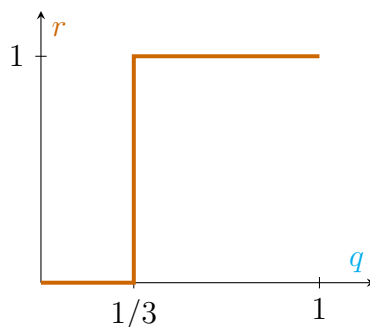
blir bästa respons att hela tiden välja T, vilket betyder att $r = 0$.

Det intressanta fallet blir när

$$u_{\text{Johan}}(ER) = u_{\text{Johan}}(T) \iff q = \frac{1}{3}$$

eftersom det nu inte spelar någon roll vad Johan väljer. Alla möjliga r ger en strategi som är bästa respons.

Resultatet från de olika fallen kan sammanfattas och representeras visuellt i Figur 11 nedan.



Figur 11: Visuell representation av Johans bästa respons mot strategin s_{Becka}

Om vi på liknande sätt bestämmer Beckas bästa strategier givet ett visst r erhåller vi

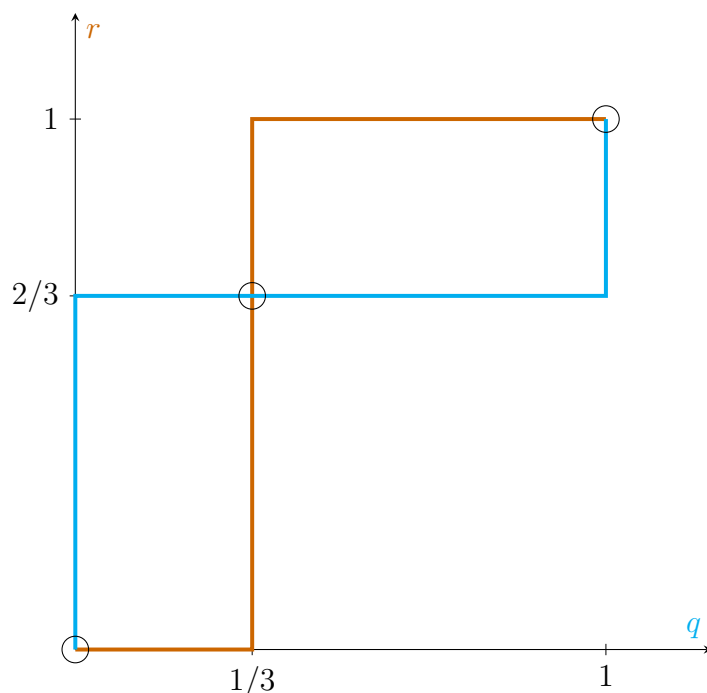
$$\begin{aligned} u_{\text{Becka}}(ER) &= r \\ u_{\text{Becka}}(T) &= 2 - 2r, \end{aligned}$$

vilket innebär att

$$\begin{aligned} r > \frac{2}{3} &\rightarrow q = 1 \\ r < \frac{2}{3} &\rightarrow q = 0 \\ r = \frac{2}{3} &\rightarrow q = x, \quad x \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Detta resultat kan läggas in i grafen i Figur 11 vilket då ger en ny graf där

skärningspunkterna är koordinaterna där det uppstår en Nash-jämvikt eftersom det är där båda spelarna spelar en strategi som är bästa respons. Se Figur 12.



Figur 12: Visuell representation av Johans och Beckas bästa respons mot varandras strategier med Nash-jämvikterna markerade.

Nash-jämvikterna för könskampen är alltså

$$\begin{aligned}
 s_{\text{I}} &= ((1, 0); (1, 0)) \\
 s_{\text{II}} &= ((0, 1); (0, 1)) \\
 s_{\text{III}} &= \left(\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right); \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\right).
 \end{aligned}$$

6.4 Busken eller brottet - Kurragömma med en twist

Betrakta nu kurragömma-spelet som presenterades i Exempel 2. Vi modifierar spelet genom att utrusta huset med ett larmsystem. Om Nora väljer att gömma sig bakom huset finns det en sannolikhet att larmet utlöses. I de fall larmet går får Filip information om att Nora har valt att gömma sig bakom huset. Larmsystemet är däremot inte helt tillförlitligt, utan utlöses endast 75% av gångerna Nora väljer att gömma sig bakom huset. Frågeställningarna lyder: Hur ofta bör Filip leta bakom busken och hur ofta bör Nora gömma sig bakom busken?



Figur 13: En illustrativ bild av spelet Busken eller brottet - Kurragömma med en twist

Intuitivt kan man förvänta sig att Filip väljer att leta bakom busken mer frekvent eftersom han använder larmsystemet för att avslöja Nora en del av gångerna. Det visar sig att denna intuition är korrekt; Filip bör leta bakom busken oftare än vad han letar bakom huset.

För Nora kan det vara lockande att justera sin strategi på ett liknande sätt; att gömma sig bakom busken oftare för att inte riskera en garanterad förlust när larmet utlöses. Detta visar sig inte vara fallet. Nora borde utnyttja larmet och gömma sig bakom huset, något som kan tyckas ologiskt.

Anta att Filip spelar en blandad strategi

$$s_{\text{Filip}} = \begin{pmatrix} p_{\text{Filip}}(B) \\ p_{\text{Filip}}(H) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \\ 1 - r \end{pmatrix}, \quad r \in [0, 1]$$

och Nora en blandad strategi

$$s_{\text{Nora}} = \begin{pmatrix} p_{\text{Nora}}(B) \\ p_{\text{Nora}}(H) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q \\ 1 - q \end{pmatrix}, \quad q \in [0, 1],$$

där r är sannolikheten att Filip letar bakom busken och q är sannolikheten att Nora gömmer sig bakom busken.

Målet för Filip är att välja en strategi som gör Nora likgiltig mellan sina val. Det

vill säga att

$$u_{\text{Nora}}(B) = u_{\text{Nora}}(H)$$

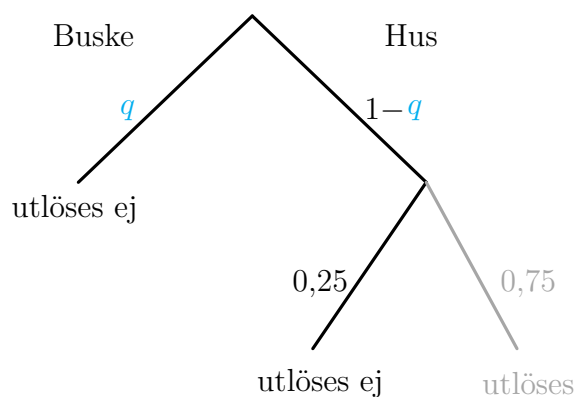
$$\iff 1(1-r) + (-1)(r) = (0,75)(-1) + (0,25)((-1)(1-r) + (1)(r)).$$

Löser vi ekvationen får vi att $r = 0,8$ vilket innebär att Filip bör leta bakom busken 80% av gångerna.

Målet för Nora är att välja en strategi som gör att Filip blir likgiltig i valet att leta bakom busken eller huset *givet att larmet inte utlöses*. Detta fall är något mer komplicerat än föregående beräkningar eftersom villkoret är nu att Filip inte får någon indikation från larmet. Genom att använda Figur 14 kan vi beräkna sannolikheten att Nora har gömt sig bakom huset givet att larmet inte utlöstes.

$$p(\text{Nora är bakom huset, givet att larmet inte har utlösts}) = \frac{(1-q)(0,25)}{(1-q)(0,25) + q}$$

$$p(\text{Nora är bakom busken, givet att larmet inte har utlösts}) = \frac{q}{(1-q)(0,25) + q}$$



Figur 14: Sannolikhetssträd för kurragömma-spelet med larmsystem.

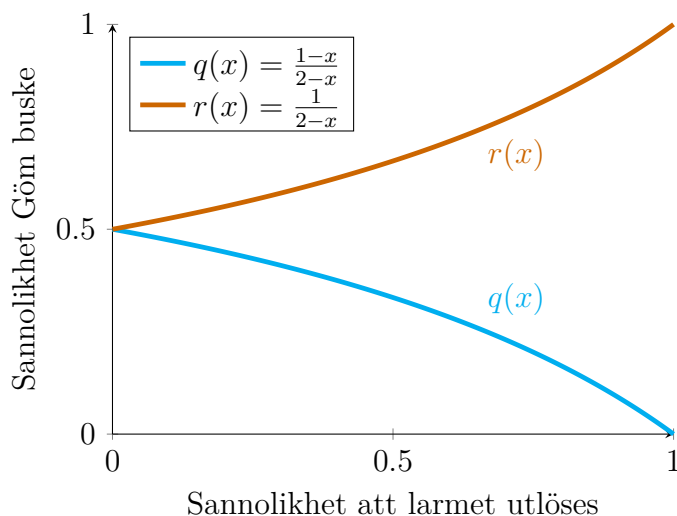
Vi är nu redo att ställa upp ekvationen $u_{\text{Filip}}(B) = u_{\text{Filip}}(H)$ som innebär att Filip blir likgiltig om och endast om

$$1\left(\frac{q}{(1-q)(0,25) + q}\right) + (-1)\left(\frac{(1-q)(0,25)}{(1-q)(0,25) + q}\right) =$$

$$= (1)\left(\frac{(1-q)(0,25)}{(1-q)(0,25) + q}\right) + (-1)\left(\frac{q}{(1-q)(0,25) + q}\right).$$

Löser vi ekvationen erhåller vi lösningen $q = 0,2$, vilket innebär att Nora borde välja en strategi där hon gömmer sig bakom busken 20% av gångerna.

Vidare kan problemet generaliseras genom att låta x vara sannolikheten för att larmet utlöses. Vi kan då hitta funktioner som beskriver hur Filips och Noras strategi bör väljas givet något värde x . Dessa funktioner plottas i Figur 15. Genom figuren kan man dra några intressanta slutsatser, exempelvis att ju oftare larmet utlöses, desto oftare bör Nora välja att gömma sig bakom huset, vilket kan te sig paradoxalt.



Figur 15: Graferna för $q(x)$ och $r(x)$.

6.5 Jämvikter hos Hjort/Hare-spelet

Till skillnad från könskampen, där spelarna vill koordinera sina val men har olika preferenser över utfallet, representerar Hjort/Hare-spelet en situation där spelarna i grunden föredrar samma utfall. Problemet ligger istället i osäkerheten kring motspelarens val. Att jaga hjorten ger den högsta utbetalningen för båda spelarna, men innebär samtidigt en risk om den andre spelaren väljer att jaga hare.

Trots dessa skillnader har båda spelen samma matematiska struktur. Jämvikterna kan alltså beräknas på liknande sätt som i könskampen. Däremot kommer jag denna gång bestämma de rena jämvikterna genom att identifiera bästa respons för spelarna givet att spelarna spelar rena strategier.

Bästa respons för Jägare 1, om Jägare 2 spelar den rena strategin $s_2 = (\text{Hjort})$, kommer att vara att själv spela den rena strategin $s_1 = (\text{Hjort})$. Vi kan alltså markera 3:an för Jägare 1. På grund av symmetri kommer Jägare 2 ha en bästa

respons $s_2 = (\text{Hjort})$ givet att Jägare 1 spelar den rena strategin $s_1 = (\text{Hjort})$. Strategierna är markerade i Figur 16.

Låt oss nu anta att Jägare 2 spelar den rena strategin $s_2 = (\text{Hare})$. Bästa respons för Jägare 1 skulle då vara att också spela rena strategin $s_1 = (\text{Hare})$ eftersom Jägare 1 inte har några incitament att spela hjort. Detsamma gäller om vi byter perspektiv till Jägare 2. På så sätt blir även den rena strategin $s = (\text{Hare})$ en bästa respons på motståndarens rena strategi $s = (\text{Hare})$.

		Jägare 2	
		Hjort	Hare
Jägare 1	Hjort	<u>3, 3</u>	0, 2
	Hare	2, 0	<u>1, 1</u>

Figur 16: Utbetalningsmatris för spelet Hjort/Hare där bästa respons är markerade med ett streck.

I Figur 16 ser vi att i boxen uppe åt väster och boxen nere åt höger har båda jägarna sina bästa responser. I dessa utfall har ingen spelare incitament att ensidigt avvika; det skulle förvärpa deras utdelning. Därigenom kan vi utläsa spelets två rena Nash-jämvikter:

$$s_I = (\text{Hjort}, \text{Hjort})$$

$$s_{II} = (\text{Hare}, \text{Hare})$$

Att bestämma den blandade strategin som ger jämvikt lämnar jag som en övning till läsaren.

7 Bevis för existens av Nash-jämvikt

I denna del kommer ett bevis för Sats 5.7. Beviset är inspirerat av Xin Jiang och Leyton-Browns analytiska bevis [2]. Vissa delar av framställningen har omarbetats i syfte att göra det tydligare, bland annat genom illustrativa figurer och ekvationer.

Definition 7.1. (Konvex) En mängd $C \subset \mathbb{R}^m$ är *konvex* om det för varje $x, y \in C$ och $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$. För vektorer x^0, \dots, x^n och icke-negativa skalärer

$\lambda_0, \dots, \lambda_n$ som uppfyller $\sum_{i=0}^n \lambda_i = 1$, vektorn $\sum_{i=0}^n \lambda_i x^i = 1$ kallas för en *konvex kombination* av x^0, \dots, x^n .

Definition 7.2. (Affint oberoende) En mängd av vektorer $\{x^0, \dots, x^n\}$ i ett vektorrum är *affint oberoende* om den enda lösningen till $\sum_{i=1}^n \lambda_i x^i = 0$ och $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$ är $\lambda_1 = \dots = \lambda_n$.

En affint kombination av två vektorer v_1, v_2 kommer att spänna upp en linje L . Mer bestämt den linje som går genom punkterna v_1, v_2 . Om vi nu vill lägga till en vektor v_3 så att mängden $\{v_1, v_2, v_3\}$ blir affint oberoende så får inte v_3 ligga på linjen L . Vi kan nu definiera vad en hypertetraeder eller n -simplex är.

Definition 7.3. (n -simplex) En n -simplex, med notationen $x^0 \dots x^n$ är mängden av alla konvexa kombinationer av den affint oberoende mängden av vektorer $\{x^0, \dots, x^n\}$, med andra ord

$$x^0 \dots x^n = \left\{ \sum_{i=0}^n \lambda_i x^i : \forall i \in \{0, \dots, n\}, \lambda_i \geq 0; \text{ och } \sum_{i=0}^n \lambda_i = 1 \right\}.$$

Varje x^i kallas för *hörn* av simplexen $x^0 \dots x^n$.

Definition 7.4. (Standard n -simplex) *Standard n -simplex*en Δ_n definieras som

$$\Delta_n = \left\{ y \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n y_i = 1 \text{ och } y_i \geq 0 \quad \forall i = 0, \dots, n \right\}.$$

Exempel 8. Vi har att

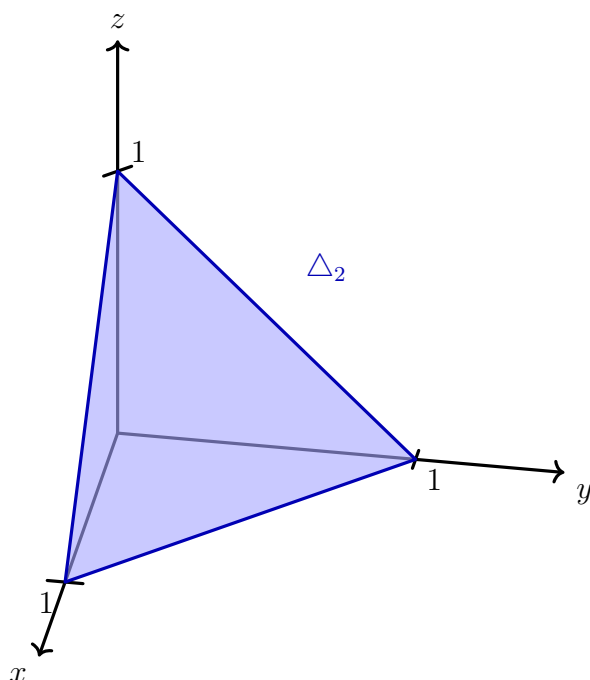
$$\Delta_2 = \left\{ y \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=0}^2 y_i = 1 \text{ och } y_i \geq 0 \quad \forall i = 0, \dots, n \right\}$$

vilket mer konkret betyder

$$\Delta_2 = \left\{ \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid y_0 + y_1 + y_2 = 1, y_i \geq 0 \right\}.$$

Denna mängd representeras geometriskt i Figur 17. Detta simplex har hörnen

$$x^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Figur 17: Standard 2-simplex

Definition 7.5. (Simpliciell uppdelning) En *simpliciell uppdelning* av en n -simplex T är en ändlig mängd simplex $\{T_i\}$ sådan att $\cup_i T_i = T$, och för alla T_i, T_j gäller att $T_i \cap T_j$ antingen är tom eller lika med en gemensam sida till både T_i och T_j .

Låt $y \in x^0 \dots x^n$ vara en godtycklig punkt i en simplex. Ett sätt att beskriva denna punkt är med hjälp av en konvex kombination av hörnen: $y = \sum_i \lambda_i x^i$. För Δ_2 kan punkten $y_0 = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{pmatrix}$ skrivas som en konvex kombination $\lambda_1 x^0 + \lambda_2 x^2$ där $\lambda_1 = \lambda_2 = 0,5$. Här har vi involverat *två* av hörnen för att beskriva y_0 . Idén om att involvera hörn för att beskriva en godtycklig punkt y kan vi nu uttrycka genom att definiera en funktion: $\chi(y) = \{i : \lambda_i > 0\}$. Denna funktion använder vi nu för att definiera korrekt märkning.

Definition 7.6. (Korrekt märkning) Låt $T = x^0 \dots x^n$ vara en simpliciell uppdelning och låt V benämna mängden av alla hörn för alla delsimplex. En funktion $\mathcal{L} : V \rightarrow \{0, \dots, n\}$ är en *korrekt märkning* av en uppdelning om $\mathcal{L}(v) \in \chi(v)$.

Denna definition gör att hörnen i en simpliciell uppdelning inte kan få vilka etiketter som helst. Exempelvis måste ett hörn som ligger på en kant mellan v_1 och

v_2 få en etikett v_1 eller v_2 för att det ska vara en korrekt märkning. Detta krav är ekvivalent med vad som ibland kallas för *Sperners randvillkor*.

Definition 7.7. (Fullständig märkning) En delsimplex är *fullständigt märkt* om \mathcal{L} är surjektiv på värdemängden $\{0, \dots, n\}$.

Lemma 7.8. (Sperners lemma) Låt $T = x^0 \dots x^n$ vara en n -simplex, låt T_n vara en simplicieell uppdelning och låt \mathcal{L} vara en korrekt märkning. Då finns det minst ett udda antal (minst en) fullständigt märkta n -simplex i T_n .

Beviset av Sperners lemma hänvisas till sida 4-5 i Xin Jang och Leyton-Brown [2].

Definition 7.9. (Tyngdpunkter) Tyngdpunkten av en simplex $x_k^0 \dots x_k^m$ är medelvärdet av dess hörn, $\frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^m x^i$.

Sats 7.10. (Brouwers fixpunktssats) Låt $f : \Delta_m \rightarrow \Delta_m$ vara kontinuerlig. Då har f en fixpunkt, det vill säga, $\exists z \in \Delta_m$ sådant att $f(z) = z$.

Bevis. Beviset bygger på Sperners lemma och går ut på att vi konstruerar en fullständig märkning av Δ_m för att sedan göra en oändlig simplicieell uppdelning så att det finns en delföljd av fullständigt märkta delsimplex som konvergerar mot en fixpunkt.

Del 1. Konstruera en korrekt märkning \mathcal{L} . Låt $\epsilon > 0$. Gör nu en simplicieell uppdelning av Δ_m så att det euklidiska avståndet mellan samma m -simplex är mindre än ϵ . Definiera nu en märkning $\mathcal{L} : V \rightarrow \{0, \dots, m\}$ enligt följande: För varje v välj en etikett som uppfyller

$$\mathcal{L}(v) \in \chi(v) \cap \{i : f_i(v) \leq v_i\} \quad (1)$$

där v_i är den i :te komponenten av v och $f_i(v)$ är den i :te komponenten av $f(v)$. Vi behöver dessutom försäkra oss högerledet i 1 inte är den tomma mängden för att säkerställa att \mathcal{L} är väldefinierad för alla v . Detta görs genom ett motsägelsebevis. Antag att ingen koordinat minskar när vi när vi applicerar funktionen f , dvs $f_i(v) > v_i$ för alla $i \in \chi(v)$. Enligt definitionen av χ gäller $v_j > 0 \iff j \in \chi(v)$. Därmed har vi

$$\sum_{j \in \chi(v)} v_j = \sum_{i=0}^m v_i = 1. \quad (2)$$

Eftersom $f_j(v) > v_j$ för alla $j \in \chi(v)$,

$$\sum_{j \in \chi(v)} f_j(v) > \sum_{j \in \chi(v)} v_j = 1. \quad (3)$$

Men eftersom $f(v)$ också tillhör standardsimplexen Δ_m har vi,

$$\sum_{j \in \chi(v)} f_j(v) \leq \sum_{i=0}^m f_i(v) = 1. \quad (4)$$

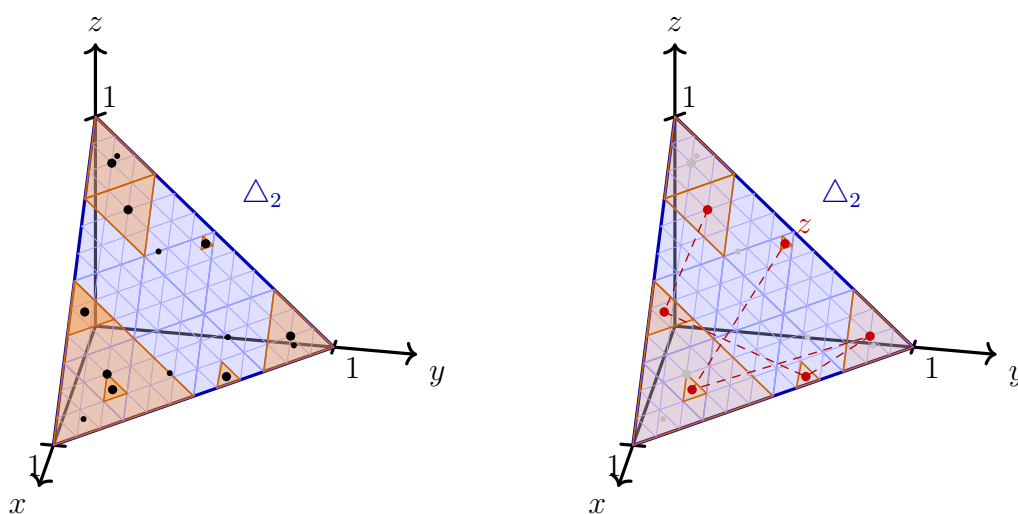
Ekvation 3 och 4 leder till en motsägelse. Därav är \mathcal{L} väldefinierad för alla v .

Del 2. Då $\epsilon \rightarrow 0$, fullständigt märkta delsimplex konvergerar till en fixpunkt av f . Eftersom \mathcal{L} är en korrekt märkning så kommer det, enligt Sperners lemma 7.8, åtminstone finnas en simplex $p^0 \dots p^m$ som är fullständigt märkt, sådant att $f_i(p^i) \leq p^i$. När vi låter $\epsilon \rightarrow 0$ så kommer det att finnas en begränsad följd \mathcal{C} av tyngdpunkter för fullständigt märkta delsimplex. Varje tyngdpunkt är en konvex kombination av hörn i simplexen, och ligger därför själv i simplexen Δ_m . Eftersom Δ_m är kompakt kommer talföljden vara begränsad. Enligt Bolzano–Weierstaß sats kommer det alltså finnas en konvergent delföljd som går mot ett värde z . Detta kan observeras i Figur 18. Det betyder att för alla $i = 0, \dots, m$, $p^i \rightarrow z$ då $\epsilon \rightarrow 0$. Eftersom f är kontinuerlig måste $f_i(z) \leq z_i$ för alla i . Genom ett liknande argument som i Del 1 ($1 = \sum_i f_i(z) < \sum_i z_i = 1$, vilket är en motsägelse) kan vi nu säga att $f(z) = z$. \square

Sats 7.9 kan inte användas direkt för att bevisa existensen av Nash-jämvikt. Eftersom Nash-jämvikt ges av en strategiprofil behöver vi istället studera *simplotop*, vilket är den kartesiska produkten av simplex. Det visar sig att Brouwers fixpunktssats även kan tillämpas på simplotoper, eftersom dessa, precis som simplex, är kompakta och konvexa mängder, vilket är centrala förutsättningar för att kunna använda satsen.

Hjälpsats 7.11. (Brouwers fixpunktssats för simplotoper) Låt $K = \prod_{j=1}^k \Delta_{m_j}$ vara en simplotop och låt $f : K \rightarrow K$ vara en kontinuerlig funktion. Då har f en fixpunkt.

Vi är nu redo att ta itu med beviset för existens av Nash-jämvikt. Beviset bygger på att vi konstruerar en kontinuerlig funktion $f : S \rightarrow S$ sådan att varje fixpunkt till f är en Nash-jämvikt. Sedan använder vi Hjälpsats 7.11 för att argumentera för att det alltid kommer att finnas en fixpunkt för f , det vill säga, det finns alltid en Nash-jämvikt.



(a) Triangulering och ett urval tyngdpunkter hos fullständigt märkta delsimplex. (b) Vald delföljd av tyngdpunkter med gränsvärde z .

Figur 18: Illustration av hur tyngdpunkter från fullständigt märkta delsimplex kan väljas så att de konvergerar mot ett värde z .

Sats. (Nash 1951) Varje spel med ett ändligt antal spelare och handlingsprofiler har åtminstone en Nash-jämvikt.

Bevis. Givet en strategiprofil $s \in S$, för alla $i \in N$ och $a_i \in A_i$, definierar vi

$$\varphi_{i,a_i}(s) = \max\{0, u_i(a_i, s_{-i}) - u_i(s)\}.$$

Vi definierar sedan funktionen $f : S \rightarrow S$ genom $f(s) = s' = \{s'_1, \dots, s'_n\}$, där

$$s'_i(a_i) = \frac{s_i(a_i) + \varphi_{i,a_i}(s)}{\sum_{b_i \in A_i} (s_i(b_i) + \varphi_{i,b_i}(s))} = \frac{s_i(a_i) + \varphi_{i,a_i}(s)}{1 + \sum_{b_i \in A_i} (\varphi_{i,b_i}(s))}. \quad (5)$$

Funktionen tar alltså en strategiprofil s och skickar den på en ny justerad strategiprofil s' . s'_i är justerad så att den ökar sannolikheten för den handling a_i som ger mer utbetalning för spelare i ; det är täljaren. Nämnaren normaliserar den nya strategin s'_i så att den fortfarande klassas som en strategi.

Vi noterar hur s är en vektor i \mathbb{R}^n och hur $s_i(a_i)$ blir en projektion i i -planet. Eftersom det är en projektion är funktionen $s_i(a_i)$ kontinuerlig. Notera hur differensen $u_i(a_i, s_{-i}) - u_i(s)$ är ett kontinuerligt polynom eftersom det är förväntade utbetalningen. $\varphi_{i,a_i}(s) = \max\{0, u_i(a_i, s_{-i}) - u_i(s)\}$ kommer alltså också vara kontinuerligt. Nämnaren är dessutom större eller lika med 1. Slutsatsen blir att f är kontinuerlig.

Eftersom $f : S \rightarrow S$ är kontinuerlig, S är konvex och kompakt, så har f en fixpunkt enligt Hjälpsats 7.11

Vi behöver nu visa att

$$s \text{ är en en Nash-jämvikt} \iff s \text{ är en fixpunkt av } f.$$

Om s är en Nash-jämvikt innebär det att $\varphi_{i,a_i}(s) = 0$, för alla i . Insatt i ekvation (5) ger

$$\begin{aligned} s'_i(a_i) &= \frac{s_i(a_i) + \varphi_{i,a_i}(s)}{1 + \sum_{b_i \in A_i} (\varphi_{i,b_i}(s))} \\ &= \frac{s_i(a_i) + 0}{1 + 0} \\ &= s_i(a_i). \end{aligned}$$

Alltså är,

$$f(s) = s.$$

Nu behöver vi visa att påståendet gäller åt andra hållet. Antag att $s = f(s)$. Eftersom $u_i(s)$ är ett viktat medelvärde av $u_i(a_i, s_{-i})$ kommer det finnas en handling $a_i \in \text{supp}(s)$ vars utbetalning inte överstiger $u_i(s)$. Alltså gäller det att det existerar ett a'_i sådant att

$$u_i(a'_i, s_{-i}) \leq u_i(s) \iff u_i(a'_i, s_{-i}) - u_i(s) \leq 0. \quad (6)$$

Genom definitionen av φ och ekvation 6 kan vi säga att

$$\varphi_{i,a'_i}(s) = \max \left\{ 0, \underbrace{u_i(a'_i, s_{-i}) - u_i(s)}_{\leq 0} \right\} = 0. \quad (7)$$

Eftersom s är en fixpunkt till f gäller det att $s = s'$ vilket i sin tur innebär att

$$s'_i(a'_i) = s_i(a'_i). \quad (8)$$

Ekvationerna (7) och (8) i (5) ger

$$s'_i(a'_i) = \frac{s_i(a'_i) + \varphi_{i,a'_i}(s)}{1 + \sum_{b_i \in A_i} (\varphi_{i,b_i}(s))} = \frac{s'_i(a'_i)}{1 + \sum_{b_i \in A_i} (\varphi_{i,b_i}(s))},$$

vilket bara kan vara sant om

$$1 + \sum_{b_i \in A_i} (\varphi_{i,b_i}(s)) = 1 \iff \sum_{b_i \in A_i} (\varphi_{i,b_i}(s)) = 0,$$

eftersom $s_i(a'_i) > 0$. Alltså måste

$$\varphi_{i,b_i}(s) = 0 \quad \text{för alla } i \in N, \quad b_i \in A_i.$$

Detta kan endast uppstå om ingen spelare kan förbättra sin utbetalning genom att byta till en ren strategi. Därmed är s en Nash-jämvikt. \square

8 Spel i extensiv form med perfekt information

Hittills har vi studerat spel där aktörerna väljer sina handlingar samtidigt. Denna typ av modell kan beskriva många strategiska situationer, men i många sammanhang sker besluten istället sekventiellt: aktörerna interagerar med varandra och fattar beslut efter varandra. För att analysera sådana situationer introduceras spel i extensiv form. I denna framställning begränsar vi oss fortfarande till spel med perfekt information, vilket innebär att spelets struktur, strategier och utbetalningar är kända av samtliga spelare.

Definition 8.1. (Potensmängd) Potensmängden av en mängd A , $\mathcal{P}(A)$, ges av

$$\mathcal{P}(A) = \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Definition 8.2. (Spel i extensiv form med perfekt information) Ett ändligt spel med perfekt information i extensiv form definieras som en tupel $G = (N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u)$ där

- N är en ändlig mängd bestående av n spelare där varje spelare indexeras av $i \in N$.
- A är en mängd av handlingar.
- H är mängden av icke-terminala noder (beslutsnoder).
- Z är mängden av terminala noder (slutnoder), där Z är disjunkt från H .

- $\chi : H \rightarrow \mathcal{P}(A)$ är handlingsfunktionen som till varje beslutspunkt $h \in H$ tilldelar mängden av möjliga handlingar i den noden.
- $\rho : H \rightarrow N$ är spelar-funktionen som till varje beslutspunkt $h \in H$ tilldelar den spelare som fattar beslut i noden.
- $\sigma : H \times A \rightarrow H \cup Z$ är successorfunktionen som till varje par (h, a) tilldelar den efterföljande noden i spelet. Funktionen uppfyller att om

$$\sigma(h_1, a_1) = \sigma(h_2, a_2)$$

så gäller $h_1 = h_2$ och $a_1 = a_2$.

- $u = (u_1, \dots, u_n)$ är utbetalningsfunktionerna där $u_i : Z \rightarrow \mathbb{R}$ anger spelare i :s utbetalning i varje slutnod.

För att exemplifiera spel i extensiv form betraktar vi ett eskalationsspel mellan två länder. Spelet börjar med att land 1 kan välja att hota eller att acceptera situationen. Om land 1 accepterar avslutas spelet direkt med utbetalningen $(0, 0)$. Om land 1 istället väljer att hota får land 2 möjlighet att välja mellan att ge efter eller att eskalera konflikten. Om land 2 ger efter avslutas spelet med utbetalningen $(1, -2)$. Om land 2 istället eskalerar får spelare 1 återigen fatta ett beslut: att ge upp eller att gå i krig. Om land 1 ger upp blir utbetalningen $(-2, 1)$, medan krig leder till utbetalningen $(-1, -1)$.

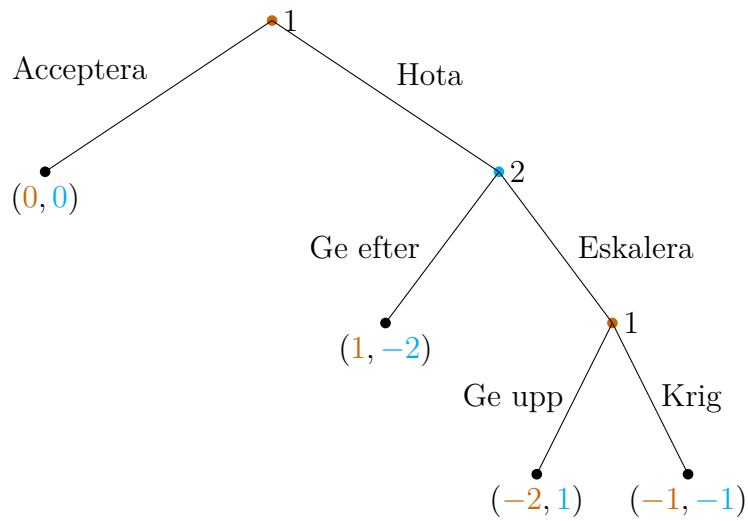
Spelet kan representeras med ett spelträd enligt Figur 19.

Definition 8.3. (Ren strategi) Låt $G = (N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u)$ vara ett spel i extensiv form med fullständig information. Rena strategin S_i för en spelare i ges av den kartesiska produkten

$$S_i = \prod_{h \in H, \rho(h)=i} \chi(h).$$

Man kan tänka sig att en ren strategi för en spelare i är instruktioner på vilken handling i ska välja vid varje nod. Notera att den rena strategin måste ange vilken handling som spelaren ska använda vid *varje* nod, det spelar alltså ingen roll om det skulle vara omöjligt att ta sig dit eller inte.

Exempel 9. För eskalationsspelet har land 1 fyra olika rena strategier och land 2



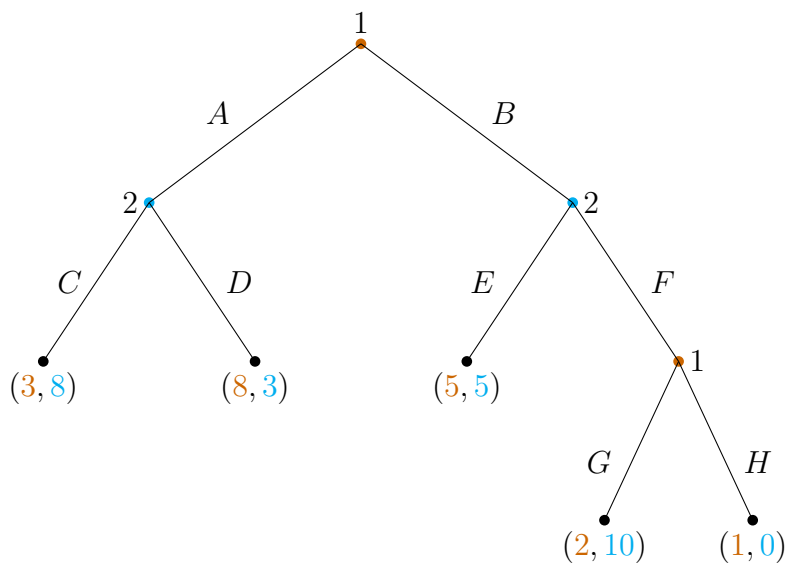
Figur 19: Eskalationsspelet.

har två stycken rena strategier. De är:

$$S_1 = \{(Acceptera, Ge\ upp), (Acceptera, Krig), (Hota, Ge\ upp), (Hota, Krig)\}$$

$$S_2 = \{(Ge\ efter), (Eskalera)\}.$$

Nu när vi fått försmak för hur spel i extensiv form kan se ut kommer vi nu att undersöka ett specifikt spel närmare. Spelet är taget från Leyton-Brown och Shoham[4, s. 33-35].



Figur 20: Ett spel med perfekt information i extensiv form.

	(C, E)	(C, F)	(D, E)	(D, F)
(A, G)	3, 8	3, 8	8, 3	8, 3
(A, H)	3, 8	3, 8	8, 3	8, 3
(B, G)	5, 5	2, 10	5, 5	2, 10
(B, H)	5, 5	1, 0	5, 5	1, 0

Figur 21: Spelet från Figur 20 i normalform.

Betrakta spelet i Figur 20. Varje spelare kan välja mellan två handlingar vid varje nod. Spelets rena strategier ges av:

$$S_1 = \{(A, G), (A, H), (B, G), (B, H)\}$$

$$S_2 = \{(C, E), (C, F), (D, E), (D, F)\}.$$

Som i nästan alla spelteoretiska modeller är vi intresserade av att analysera spelet med hjälp av olika lösningsbegrepp. Det kan därför vara naturligt att fråga sig hur ett spel i extensiv form bör utvärderas. Det visar sig dock att situationen inte är särskilt ny. Definitionerna av bästa respons och Nash-jämvikt är i detta fall exakt desamma som för spel i normalform. Faktum är att alla spel i extensiv form och fullständig information kan omvandlas till ett spel i normalform. Spelet som representeras i Figur 20 kan omvandlas till ett spel i normalform som illustreras med hjälp av Figur 21.

Alltså finns det, för alla spel i extensiv form, ett motsvarande spel i normalform. Däremot är det viktigt att lyfta strukturella skillnader som tillkommer när man omvandlar mellan de olika formerna. Exempelvis kan vi se hur utbetalningen (3,8) förekommer endast en gång i Figur 20 medan det förekommer fyra gånger i spelets normalform. Generellt kommer det ske en exponentiell förstoring av spelets representation när man går från extensiv form till normalform.

Å andra sidan får spel i normalform sin revansch när de kan skrivas om i en mer kompakt extensiv form, dock är det viktigt att poängtera att det inte alltid är möjligt. Exempelvis är det inte möjligt att ta spelet klimatkrisen (Figur 3) och göra om det till ett spel i extensiv form med perfekt information och samtidigt behålla

strategiprofiler och utbetalningar. De generella karaktärsdragen för klassen av spel i normalform för vilka det existerar ett motsvarande spel i extensiv form är något komplexa. Därav är det något vi inte kommer att dyka djupare i denna gång [4, s. 35].

Sats 8.4. *Varje ändligt spel i extensiv form med perfekt information har minst en ren-strategi-Nash-jämvikt.*

Det är fullt rimligt att fråga sig hur vi bör hantera blandade strategier i extensiva spel. På grund av satsen ovan kan vi, i nuläget, nöja oss med att försöka bestämma jämvikter då endast rena strategier är tillåtna.

8.1 Delspelsperfekt Nash-jämvikt och baklängesinduktion

Vi kommer nu att närmare undersöka jämvikterna för spelet som representeras i Figur 20. Som tidigare nämnt har alla spel i extensiv form med fullständig information ett motsvarande spel i normalform. För att hitta spelets rena jämvikter kan vi alltså hitta bästa respons för spelarna och markera de i Figur 21, på samma sätt som vi gjorde i sektion 6.5. Resultatet kan vi se i Figur 22 och jämvikterna för spelet blir alltså $\{(A, G), (C, F)\}$, $\{(A, H), (C, F)\}$ och $\{(B, H), (C, E)\}$.

	(C, E)	(C, F)	(D, E)	(D, F)
(A, G)	3, <u>8</u>	<u>3</u> , <u>8</u>	<u>8</u> , 3	<u>8</u> , 3
(A, H)	3, <u>8</u>	<u>3</u> , <u>8</u>	<u>8</u> , 3	<u>8</u> , 3
(B, G)	<u>8</u> , <u>5</u>	2, <u>10</u>	5, 5	2, <u>10</u>
(B, H)	<u>5</u> , <u>5</u>	1, 0	5, <u>5</u>	1, 0

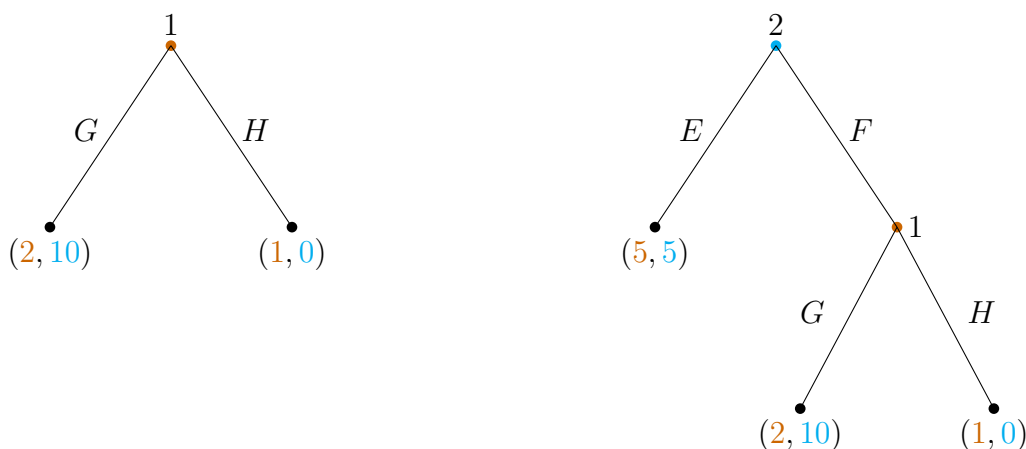
Figur 22: Spelet från Figur 20 i normalform med markerade bästa responser.

Strategiprofilen $\{(B, H), (C, E)\}$ är visserligen en Nash-jämvikt, men den framstår, vid närmare granskning som problematiskt och för vissa mindre intuitiv. För att se detta kan vi studera de delar av spelet som visas i Figur 23.

Börja med att studera det vänsta spelträdet. Om denna nod nås är det uppenbart att spelare 1 föredrar att spela G , eftersom detta ger en högre utbetalning än att

spela H . I strategiprofilen anger spelare 1 dock att den kommer att spela H i denna situation. Detta kan tolkas som ett *hot* riktat mot spelare 2: om spelare 2 skulle välja F tidigare i spelet kommer spelare 1 svara med H , vilket leder till en sämre utbetalning för spelare 2. Detta blir tydlig när vi studerar det högra spelträdet i Figur 23. Av denna anledning väljer spelare 2 istället att spela E .

Är hotet trovärdigt? Om noden faktiskt nås skulle spelare 1 rationellt välja G istället för H . Strategiprofilen bygger alltså på ett hot som spelare 1 inte har några incitament att genomföra.



Figur 23: Två delspel i extensiv form.

Detta påvisar en svaghet hos Nash-jämviktsbegreppet i spel med sekventiella beslut. En Nash-jämvikt kan nämligen bygga på hot som inte är trovärdiga om spelet faktiskt når den aktuella beslutsnoden. För att utesluta sådana jämvikter introduceras ett nytt lösningsbegrepp som förfinar jämviktsbegreppet för spel i extensiv form med perfekt information.

Definition 8.5. (Delspel) Givet ett spel G i extensiv form med perfekt information definieras ett *delspel* som den del av spelet som börjar i en nod h och innehåller alla efterföljande noder till h .

Vi kan nu definiera vad som menas med delspelsperfekt Nash-jämvikt.

Definition 8.6. (Delspelsperfekt Nash-jämvikt) Låt G vara ett spel i extensiv form. En strategiprofil s sägs vara en *delspelsperfekt Nash-jämvikt* (SPE) om begränsningen av s till varje delspel G' av G utgör en Nash-jämvikt i G' .

Denna definition kan kännas något abstrakt första gången man läser den. Jag gillar att tänka: En strategiprofil sägs vara en delspelsperfekt Nash-jämvikt om spelarnas strategier utgör en Nash-jämvikt inte bara i hela spelet utan även i varje delspel som kan uppstå under spelets gång.

Eftersom spelet G själv är ett delspel följer att varje delspelsperfekt Nash-jämvikt också är en Nash-jämvikt. Däremot gäller inte det omvända generellt, vilket innebär att delspelsperfekt jämvikt är ett starkare lösningsbegrepp än Nash-jämvikt.

För att hitta delspelsperfekta Nash-jämvikter kan vi använda oss av *baklänges induktion*. Proceduren, som inte är allt för komplicerad, går ut på att man börjar att hitta Nash-jämvikter hos delspel ”längst ner” i trädet och jobbar sig sedan, nod för nod, baklänges upp till toppen. Nedan följer ett exempel för att tydliggöra hur man använder sig av baklängesinduktion.

Exempel 10. Vi återgår för en stund till eskalationsspelet i Figur 19. I början av spelet har land 1 en möjlighet att Acceptera eller Hota. Att välja Hota är endast rationellt om det som händer efter att land 1 har hotat, är bättre än om land 1 Accepterade. Det enda sättet att ta reda på vad som händer efter att land 1 har hotat är att kolla vad som händer efter att land 1 har hotat.

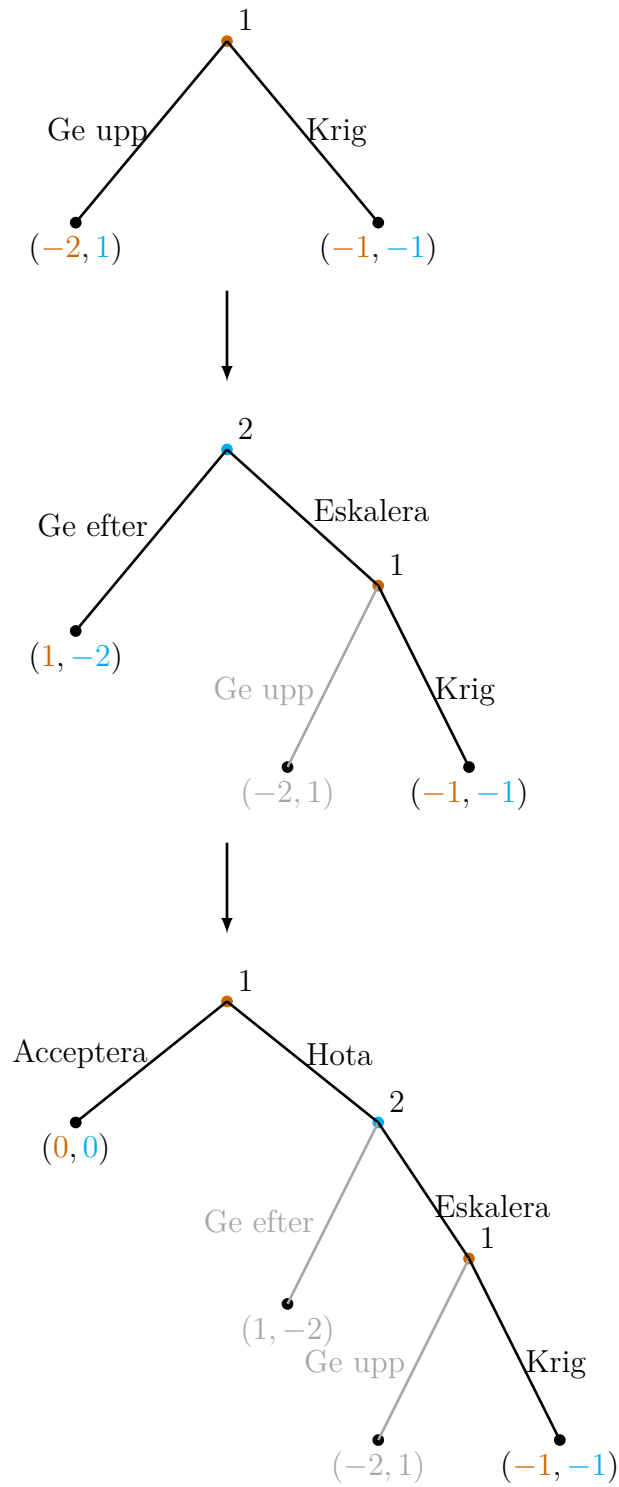
Vi kommer alltså behöva jobba oss ner i spelträdet ändå till slutet där land 1 behöver välja Krig eller Ge upp. Om denna situation skulle infinna sig kommer land 1 att välja Krig eftersom det ger bäst utbetalning.

Vi kan sedan gå vidare till den nod där land 2 har valet att Ge efter eller Eskalera. Om land 2 Ger efter får landet en utbetalning på -2 . Om land 2 istället väljer att Eskalera kommer det innebära att land 1 väljer krig och land 2 får då en utbetalning på -1 . Eftersom $-2 < -1$ kommer land 2 välja Eskalera.

Vi kan nu avgöra vad land 1 borde göra i början av spelet. Om landet väljer Acceptera blir utbetalningen 0. Om landet väljer att hota kommer land 2 svara med Eskalera och sedan kommer land 1 välja Krig vilket kommer resultera i en utbetalning på -1 . Eftersom $-1 < 0$ är det rationella för land 1 att Acceptera.

Vi har nu hittat vår delspelsperfekta Nash-jämvikt: $S = \{(\text{Acceptera}, \text{Krig}), (\text{Eskalera})\}$. Processen baklängesinduktion för eskalationsspelet illustreras i Figur 24.

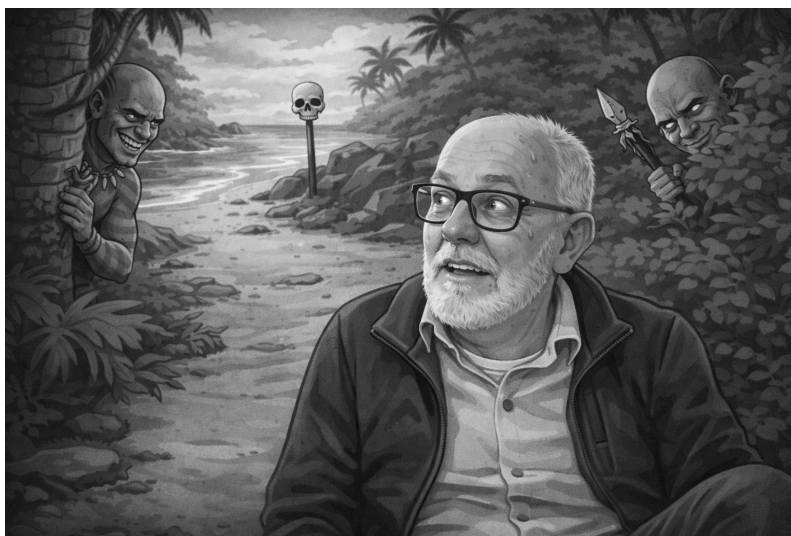
Innan vi går vidare kommer ytterligare ett exempel på ett spel där baklängesinduktion kan användas för att bestämma lösningen till ett problem.



Figur 24: Baklängesinduktion i eskalationsspelet. I varje steg elimineras de handlingsalternativ som inte är rationella givet de återstående delspelen.

8.1.1 Kannibalskandal

Matematikläraren Krister har hamnat i en goda/dåliga nyheter situation. De dåliga nyheterna är att han är strandsatt på en öde ö. De bra nyheterna är att han inte är själv på ön. De dåliga nyheterna är att dessa personer är hungriga kannibaler. De bra nyheterna är att kannibalerna är lika benägna att äta Krister till middag som de är att äta någon av de andra kannibalerna på ön. Det finns alltså en liten chans att Krister överlever.



Figur 25: En illustrativ bild av spelet Kannibalskandal.

Spelet går till enligt följande. Numrera alla kannibaler från ett till tolv. Spelet börjar med att kannibal 1 väljer mellan att tillaga Krister eller inte. Om kannibal 1 väljer att inte tillaga Krister är spelet slut och Krister klarar sig. Om kannibal 1 väljer att tillaga Krister blir den sårbar vid elden och kannibal 2 ges då möjligheten att tillaga kannibal 1 eller inte. Om kannibal 2 inte väljer att tillaga kannibal 1 slutar spelet. Om kannibal 2 väljer att tillaga kannibal 1 blir den sårbar vid elden och kannibal 3 ges då möjligheten att tillaga kannibal 2 eller inte, och så vidare.

Kannibalernas (och Kristers) viktigaste uppdrag är att överleva. Om man överlever föredrar kannibalerna att tillaga en annan människa över att inte tillaga någon.

Kommer Krister att överleva, eller är han redan dödsdömd när han sätter sin fot på ön?

Lösningen bygger på baklängesinduktion. Vi behöver börja med att undersöka hur kannibal 12 kommer att handla i den situationen där den får möjlighet att tillaga kannibal 11. Eftersom kannibal 12 inte har någon kannibal som hotar att äta honom

är valet enkelt; han kommer välja att tillaga kannibal 11. Detta innebär i sin tur att kannibal 11, om den hamnar i en situation där den ges ett val, inte kommer att välja att tillaga kannibal 10 eftersom den då kommer att bli sårbar för kannibal 12 som garanterat väljer att tillaga kannibal 11. Konsekvensen blir att kannibal 10 väljer att tillaga kannibal 9 eftersom kannibal 11 är hotad av kannibal 12 och därav känner sig kannibal 10 säker.

Vi har nu upptäckt ett mönster. Kannibaler med ett udda nummer kommer känna sig hotade av de kannibaler med jämna nummer och väljer därför att inte tillaga någon, vilket visuellt visas i Figur 26. Alltså kommer kannibal 1 avstå från att tillaga matematikläraren Krister.



Figur 26: Illustration av lösningen till Kannibalskandal. Kannibalerna är uppradade och de med udda nummer identifieras som blodtörstiga (markerade med blodstänk).

9 Spel i extensiv form med imperfekt information

Detta Avsnitt följer Kapitel 5 i Leyton-Brown och Shoham [4, s. 41-48].

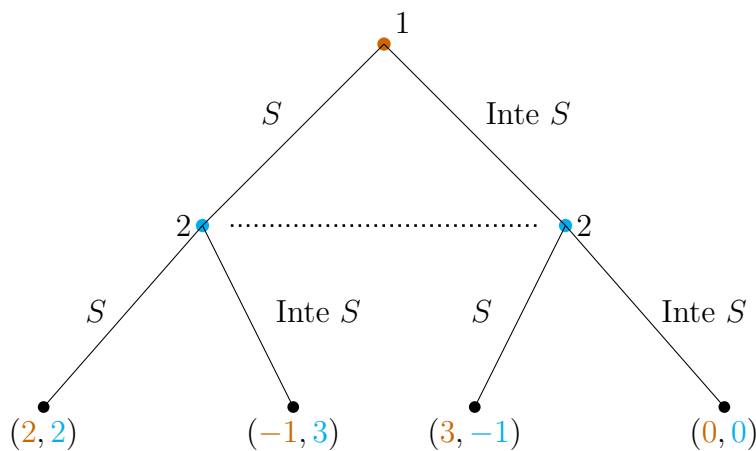
Hittills har vi studerat spel i extensiv form med perfekt information. Det innebär att, när varje spelare fattar ett beslut, observerar den alla tidigare handlingar i spelet. Detta antagande är i vissa fall orealistiskt. I många verkliga situationer behöver spelare agera med lite eller ibland ingen kunskap och det är inte självklart att de kommer ihåg hur de har handlat tidigare i spelet. För att modellera sådana situationer introduceras spel i extensiv form med *imperfekt information*. I dessa spel kan en spelare, vid ett givet beslutstillfälle, vara osäker på vilken nod i spelträdet den befinner sig i.

Definition 9.1. Ett spel i extensiv form med imperfekt information är en tupel $(N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u, I)$ där,

- $(N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u)$ är ett spel i extensiv form med perfekt information och,
- $I = (I_1, \dots, I_n)$, där $I_i = (I_{i,1}, \dots, I_{i,k_i})$.

Komponenten I beskriver spelets informationsstruktur. För varje spelare i utgör I_i en partition som uppstår från en ekvivalensrelation på $\{h \in H \mid \rho(h) = i\}$ sådan att $h \sim h'$ om $\chi(h) = \chi(h')$ och $\rho(h) = \rho(h')$. Ekvivalensrelationen säger att två noder är relaterade om spelaren inte kan skilja dem åt.

Tidigare nämnde vi att spelet Klimatkrise inte kunde representeras som ett spel i extensiv form med perfekt information. Däremot kan det representeras som ett spel i extensiv form med *imperfekt* information. Spelet representeras i Figur 27.



Figur 27: Klimatkrise som ett spel i extensiv form med imperfekt information.

I spelet finns det, för land 2, två noder som ingår i samma informationsmängd. Detta innebär att Land 2 inte vet om Land 1 valde att samarbeta (S) eller inte (Inte S) när det ska ta sitt beslut. För att tydligt visa vilka noder som tillhör samma informationsmängd brukar man dra en prickad linje mellan de noder som tillhör samma informationsmängd.

Genom detta exempel kan vi se hur alla spel i normalform kan transformeras till ett spel i extensiv form med imperfekt information. Vi kan alltså använda oss av teorin vi lärde oss för spel i normalform och tillämpa på spel i extensiv form.

9.1 Strategier och jämvikt

Precis som med tidigare spel vill vi nu etablera begreppen strategi och jämvikter. Till skillnad från spel med perfekt information måste spelare i denna typ av spel fatta beslut utan att exakt veta var i spelet de befinner sig, vilket gör att strategier måste specificeras för hela informationsmängder snarare än enskilda noder.

Notera hur informationsmängden $I_{i,j}$ utgör en ekvivalensklass där $h \in I_{i,j}$ är de noder som inte spelare i kan skilja mellan. Mängden av alla möjliga handlingar vid en nod, med informationsmängden $I_{i,j}$, kan noteras som $\chi(I_{i,j})$.

Definition 9.2. (Ren strategi) Låt $G = (N, A, H, Z, \chi, \rho, \sigma, u, I)$ vara ett spel i extensiv form med imperfekt information. De *rena strategierna* för spelare i är den kartesiska produkten

$$\prod_{I_{i,j} \in I_i} \chi(I_{i,j}).$$

Det visar sig att slumpande strategier kan delas upp i två olika grupper: *blandade strategier* och *beteendestrategier*. Blandade strategier är, precis som innan en konvex kombination av spelets rena strategier. En beteendestrategi berättar hur man bör slumpa i varje informationsmängd. De två olika typerna av strategier kan vid första anblick anses vara de samma, men det finns en tydlig skillnad som fyller en viktig funktion för vår analys i spel med imperfekt information. Återgå till spelet som representerades i Figur 20. En blandad strategi för spelare 1 skulle kunna vara $s_1 = (0, 2(A, G); 0, 8(B, H))$ och en beteendestrategi för spelare 1 kan vara: Välj A med en sannolikhet 0,5 och välj G med en sannolikhet 0,2. I spel med perfekt information sammanfaller beteendestrategier och blandade strategier i praktiken. De kan efterlikna varandra i den meningen att de leder till samma sannolikhetsfördelningar över spelets utfall. Det visar sig även att strategierna sammanfaller även i imperfekta spel så länge spelen har *perfekt återkallelse*.

Definition 9.3. (Perfekt återkallelse) Spelare i har *perfekt återkallelse* i ett spel G med imperfekt information om det för varje två noder h och h' som ligger i samma informationsmängd för spelare i , för varje väg

$$h_0, a_0, h_1, a_1, h_2, \dots, h_n, a_n, h$$

från spelets rot till h (där h_j är beslutsnoder och a_j handlingar), och för varje väg

$$h_0, a'_0, h'_1, a'_1, h'_2, \dots, h'_m, a'_m, h'$$

från roten till h' , gäller att:

1. $n = m$,
2. för alla $0 \leq j \leq n$ ligger h_j och h'_j i samma ekvivalensklass för spelare i ,
3. för alla $0 \leq j \leq n$, om $\rho(h_j) = i$, så gäller $a_j = a'_j$.

G är ett spel med perfekt återkallelse om alla spelare har perfekt återkallelse.

Definitionen för perfekt återkallelse kan uppfattas som abstrakt. Intuitivt har en spelare perfekt återkallelse om den vet vad den själv har gjort samt vet vad den har vetat tidigare i spelet. Ett annat sätt att se på det är att inse att ett spel saknar perfekt återkallelse om en spelare har två beslutsnoder i samma informationsmängd där den ena kan nås efter att spelaren tidigare har passerat den andra.

Anta att en förare färdas på en huvudväg i tät dimma, vilket gör att sikten är kraftigt begränsad. Vid ett första tillfälle passerar föraren en avfart och har då valet att antingen svänga av eller fortsätta rakt fram. På grund av den dåliga sikten kan föraren dock inte i efterhand avgöra vilket beslut som faktiskt fattades. Vid ett senare tillfälle når föraren ytterligare en avfart. Sikten har nu förbättrats något, men inte tillräckligt för att föraren ska kunna avgöra om denne befinner sig vid den första eller den andra avfarten. De två beslutssituationerna är därmed informationsmässigt oskiljbara och kan representeras som en och samma informationsmängd i ett spelträd. Detta scenario kan modelleras som ett spel i extensiv form med imperfekt information. Dessutom saknar spelet perfekt återkallelse, eftersom föraren inte kan skilja mellan situationer som uppstått genom olika egna tidigare handlingar (att ha svängt av respektive att ha fortsatt rakt fram). Föraren har alltså glömt sin egen beslutshistoria, vilket strider mot antagandet om perfekt återkallelse.

9.1.1 Sekventiell jämvikt

I Avsnitt 8.1 såg vi hur icke trovärdiga Nash-jämvikter ledde till ett starkare lösningsbegrepp: Delspelsperfekt Nash-jämvikt. För spel i extensiv form med imperfekt information har vi ett motsvarande lösningsbegrepp: *Sekventiell jämvikt*. Sekventiell jämvikt stärker jämviktbegreppet genom att kombinera strategier med *förenliga uppfattningar* om var i spelet spelaren befinner sig. För att kunna definiera och tolka sekventiell jämvikt krävs att alla spelare har perfekt återkallelse. Utan detta antagande blir både strategibegreppet och uppfattningarna problematiska. Därav begränsar man analysen till spel med perfekt återkallelse.

Innan vi kan formulera definitionen av sekventiell jämvikt behöver vi noga bestämma vad som menas med en spelares uppfattningar och hur det relaterar till strategierna som spelas. I spel med imperfekt är det ibland oklart i vilken nod spelaren befinner sig i, men kan däremot bilda sig en uppfattning om detta. Dessa uppfattningar kan beskrivas som en sannolikhetsfördelning $\mu(h)$ som tolkas som sannolikheten att spelaren befinner sig i nod h , givet den informationsmängd som innehåller h . För att dessa uppfattningar ska vara meningsfulla (rimliga) krävs det att det är *förenliga* med de strategier som spelas, i den meningen att de, där det är möjligt, kan härledas med Bayes sats.

Ett problem som kan uppstå är att en viss nod i en informationsmängd tilldelas sannolikheten noll, vilket gör att Bayes sats inte direkt är tillämpbar. För att undgå detta problem betraktar vi sekvenser av fullt blandade strategier, alltså de strategier där varje handling tilldelas en positiv sannolikhet. Uppfattningarna definieras som gränsvärdet av de uppfattningar som erhålls i dessa approximationer.

Vidare kan vi låta den förväntade utbetalningen för spelare i , givet att spelet startar i en nod h med en uppfattning $\mu(h)$ och att spelarna spelar enligt en strategiprofil S ges av

$$u_i(S \mid h, \mu(h)).$$

Låt även $\{S^n\}_{n=1}^\infty$ beteckna en följd av fullt blandade strategiprofiler som konvergerar mot S . För varje strategiprofil S^n kan en förenlig uppfattning μ^n bestämmas entydigt med hjälp av Bayes Sats.

Med dessa förberedelser är vi redo att formulera definitionen av en sekventiell jämvikt.

Definition 9.4. En strategiprofil S är en *sekventiell jämvikt* i ett spel G i extensiv form om det finns en $\mu(h)$ för varje informationsmängd I i G sådan att dessa två villkor är uppfyllda:

1. $(S, \mu) = \lim_{n \rightarrow \infty} (S^n, \mu^n)$ och
2. för varje informationsmängd I_i , och varje alternativ strategi S'_i , så gäller det att

$$u_i(S \mid h, \mu(h)) \geq u_i((S', S_{-i}) \mid h, \mu(h)).$$

10 Sammanfattning

I detta arbete har vi introducerat centrala delar av ändlig spelteori och undersökt hur matematiska modeller kan användas för att analysera strategiska situationer. Framställningen inleddes med beslutsteori och vad som menas med att agera rationellt.

Därefter behandlades statiska spel i normalform, där begrepp utvecklades och analyserades med hjälp av klassiska exempel. Arbetet påvisar hur Nash-jämvikten är ett lösningsbegrepp som kan användas för att beskriva stabila situationer där ingen av spelarna har incitament att ensidigt ändra sin strategi.

Vidare utvidgades arbetet till spel i extensiv form där spelträd användes för att modellera dessa situationer. Slutligen behandlades spel med perfekt och imperfekt information, där informationsmängder och uppfattningar blir nya parametrar i Nash-jämvikterna.

Samtidigt utgör arbetet en begränsad introduktion till ett mycket större område. För att vidare fördjupa sig i teorin hade man exempelvis kunnat undersöka ändligt och oändligt repeterade spel eller undersöka situationer där spelarna har uppfattningar om de andra spelarnas uppfattningar. Dessa områden rymms inte i detta arbete.

Efter att ha tagit del av spelteorins många modeller och tillämpningar kan det nästan kännas som om allt i världen är spel. Områdets tillämpningar är så breda att spelteorin i någon mening framstår som ett slags universalverktyg för att förutsäga det sociala livets många strategiska situationer. Samtidigt finns det anledning att vara försiktig med en alltför långtgående tolkning. I den värld vi lever i idag agerar människor inte alltid rationellt. Därför kan spelteorin inte fullt ut förutsäga hur impulsiva politiker, två kärlekslystna ungdomar eller svältande kannibaler kommer att fatta sina beslut.

Tack!

Även om detta arbete benämns som ett självständigt arbete är det många personer som på olika sätt har bidragit till att det blivit möjligt. Jag vill därför rikta ett varmt tack till några personer som haft särskilt stor betydelse för mig och mitt intresse för matematik.

Först och främst vill jag tacka min morfar, Krister Larsson. Om det är någon jag alltid gärna har pratat matematik med så är det du. Tack för multiplikationsförhören på familjesemestrarna, matematiknötterna på julafton och alla pluggkvällar inför prov. På ett utvecklingssamtal i årskurs 5 fick jag frågan om vilka mål jag hade med matematiken. Mitt svar var att jag ville bli lika bra som min morfar. Jag känner nu att jag är på god väg.

Jag vill också tacka Lana Hermanovich, som undervisade mig i matematik i årskurs 9. Du är en sann eldsjäl och en stor inspiration för min framtida yrkesroll som lärare. Du såg varje elev och dina ”ryska mördaruppgifter” snurrar fortfarande i tankarna än idag.

Tack även till Johan Diser, som undervisade mig i matematik och fysik på gymnasiet. Du har alltid varit öppen för diskussion, hållit mitt intresse levande och ständigt utmanat mig med nya områden och perspektiv. Stort tack för våra lösningsfokuserade mejlkonversationer som kunde hålla på sent efter läggdags.

Slutligen vill jag tacka min handledare, Per Alexandersson, för värdefull feedback och vägledning under arbetets gång. Dina synpunkter kring matematiska formuleringar, notation och struktur har hjälpt mig att göra uppsatsen tydligare och mer matematiskt stringent.

Redogörelse för användning av AI

Generativ AI (ChatGPT) har använts som stöd under arbetet med uppsatsen. Framför allt har AI använts för kodning i \LaTeX . Samtliga figurer i arbetet är i grunden framtagna med hjälp av AI. Vidare har AI använts för att språkligt bearbeta text, genom att kolla stavning och meningsbyggnad. I vissa fall har AI använts för att diskutera spelteoretiska begrepp, kontrollera intuitioner och ge alternativa förklaringar av matematiska idéer.

All matematik, alla bevis, definitioner, tolkningar och det slutliga innehållet i arbetet har dock granskats, bearbetats och ansvarats för av mig själv.

Referenser

- [1] Dr. Trefor Bazett. Nash equilibriums // how to use game theory to render your opponents indifferent, 09 2021. Accessed on 23.03.2026.
- [2] Albert Xin Jiang and Kevin Leyton-Brown. A tutorial on the proof of the existence of nash equilibria. Technical report, University of British Columbia, Vancouver, BC, Canada, November 2007.
- [3] Carl-Joar Karlsson. *Game Theory and Applications: Connecting Individual-Level Interactions to Collective-Level Consequences*. Licentiate thesis, Chalmers University of Technology and University of Gothenburg, 2021. Accessed 2026-03-24.
- [4] Kevin Leyton-Brown and Yoav Shoham. *Essentials of Game Theory*. Synthesis Lectures on Artificial Intelligence and Machine Learning. Morgan & Claypool, San Rafael, CA, June 2008.
- [5] Snehasis Mukhopadhyay, Omkar Tilak, and Subir Chakrabarti. Reinforcement learning algorithms for uncertain, dynamic, zero-sum games. In *2018 17th IEEE International Conference on Machine Learning and Applications (ICMLA)*, page 48–54. IEEE, December 2018.
- [6] Martin J Osborne et al. *An introduction to game theory*, volume 3. Springer, 2004.
- [7] Steven Tadelis. *Game Theory: An Introduction*. Princeton University Press, 2013.
- [8] William Spaniel. Game theory 101 (5): What is a nash equilibrium?, 09 2012. Accessed on 15.02.2026.

Rättelseblad

Jacob Peterson

31 maj 2026

Detta rättelseblad avser mindre korrigeringar i det inlämnade examensarbetet som kan skapa förvirring för läsaren.

Rättelser

1. Definition 3.3, sida 11.

I definitionen står det:

“väljer en handlingsprofil”

Det korrekta ska vara:

“väljer en handling”

2. Figur 22, sida 42.

I den första kolumnen och tredje raden står det:

8, 5

Det korrekta ska vara:

5, 5

3. Definition 7.2, sida 32.

I definitionen står det:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x^i = 0 \quad \text{och} \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i = 0.$$

Det korrekta ska vara:

$$\sum_{i=0}^n \lambda_i x^i = 0 \quad \text{och} \quad \sum_{i=0}^n \lambda_i = 0.$$