



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Reellt analytiska funktioner av en variabel

av

Karl Westergren

2026 - No K28

Reellt analytiska funktioner av en variabel

Karl Westergren

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Penelope Gehring

2026

Abstract

In this thesis, we discuss real analytic functions of one variable, including their basic properties and illustrative examples. All real analytic functions are in particular smooth. However, not all smooth functions are real analytic, since analyticity is a stronger condition which ensures that the function is locally representable by an absolutely convergent power series. Within the class of real analytic functions, the functions themselves are, locally around a point, uniquely determined by their derivatives of all orders at that point. This property makes them rigid and can, for example, be useful in the theory of ordinary differential equations.

Sammanfattning

I denna uppsats diskuteras reellt analytiska funktioner av en variabel, inklusive deras grundläggande egenskaper och illustrativa exempel. Alla reellt analytiska funktioner är i synnerhet släta. Däremot är inte alla oändligt deriverbara funktioner reellt analytiska, då analyticitet är ett starkare villkor som säkerställer att funktionen lokalt kan representeras av en absolutkonvergent potensserie. Inom klassen av reellt analytiska funktioner är funktionerna, lokalt kring en punkt, unikt bestämda av sina derivator av alla ordningar i den punkten. Denna egenskap gör dem rigida, vilket exempelvis kan vara användbart inom teorin för ordinära differentialekvationer.

Förord

Jag vill rikta ett stort tack till min handledare, Penelope. Hennes engagemang, positiva inställning och konstruktiva feedback har varit ovärderliga för mig och min uppsats.

Innehåll

1	Introduktion	9
2	Reellt analytiska funktioner och deras grundläggande egenskaper	11
2.1	Definition och grundidé	11
2.2	Derivering/integrering av potensserier och Taylorutveckling	13
2.3	Operationer på potensserier	18
2.4	Derivatauppskattningar och kriterium för reellt analytiska funktioner	27
3	Sammansatta funktioner och inversa funktioner	32
3.1	Sammansatta funktioner	32
3.2	Inversa funktioner	36
4	Tillämpning: Lösning av ordinära differentialekvationer	39
4.1	Cauchy–Kovalevskayas Sats	39
5	Sammanfattning och slutsatser	47
A	Appendix	50
A.1	Kompletterande satser och lemmor	50

1 Introduktion

Reellt analytiska funktioner är en viktig klass av funktioner inom reell analys. Dessa släta funktioner kännetecknas av att lokalt kunna representeras exakt av absolutkonvergenta potensserier. Inom grundläggande analys stöter man tidigt på exempel av sådana funktioner, däribland exponentialfunktionen och de trigonometriska funktionerna sinus och cosinus. För dessa funktioner gäller det att Taylorutvecklingen kring en punkt är mer än en bra approximation av funktionen. De sammanfaller faktiskt exakt med funktionen inom ett intervall kring expansionspunkten. Exempelvis kan Taylorserien för exponentialfunktionen runt noll skrivas som

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

där serien konvergerar absolut för alla reella tal x . Sambandet mellan funktioner och deras potensserieutveckling har en grundläggande betydelse inom analysen. Potensserier är mer än ett verktyg för approximationer, utan möjliggör en djupare förståelse för en funktions lokala struktur. En naturlig fråga blir då vilka funktioner som lokalt kan representeras på detta sätt och vilka egenskaper en sådan representation medför. Det är särskilt intressant att undersöka skillnaden mellan reellt analytiska funktioner mot funktioner som är oändligt deriverbara, speciellt då dessa klasser av funktioner ofta sammanblandas i elementära sammanhang.

Syftet med denna uppsats är att studera reellt analytiska funktioner av en variabel och undersöka deras grundläggande egenskaper. Särskild vikt läggs vid potensserier och funktionens derivator. Vidare redogörs hur analyticiteten påverkas av algebraiska operationer såsom addition, subtraktion, multiplikation och division, samt hur egenskapen bevaras under sammansättning och inversion av funktioner.

En central del av uppsatsen handlar om kriterier som gör det möjligt att avgöra när en funktion är reellt analytisk utan att explicit skapa dess Taylorserie. Detta leder till undersökningar av derivatans tillväxt som i sin tur ger upphov till de uppskattningar som karaktäriserar reellt analytiska funktioner. Resultaten av derivatans tillväxt ger samtidigt en tydlig förklaring varför vissa oändligt deriverbara funktioner inte är reellt analytiska. Uppsatsen är begränsad till reellt analytiska funktioner av en variabel. Målet är att ge en sammanhängande framställning av teorin och belysa de egenskaperna som särskiljer en reellt analytisk funktion från de oändligt

deriverbara funktionerna.

Utöver det teoretiska intresset så har reellt analytiska funktioner betydande tillämpningar inom differentialekvationsteorin. För reellt analytiska initialvärdesproblem så kan lösningar ofta konstrueras genom potensserieutvecklingar, vilket skapar en metod för att behandla problem som annars kan vara svåra att analysera. Ett exempel är Riccatiekvationen

$$u'(t) = 3u(t) + u(t)^2 + 2, \quad u(0) = 0,$$

där kunskap om reellt analytiska funktioner möjliggör konstruktion av en lösning genom rekursion av potensseriens koefficienter.

Disponeringen på uppsatsen lyder enligt följande. I [Sektion 2](#) introduceras definitionen av reellt analytiska funktioner samt viktiga satser om konvergensradier, derivering av potensserier och Taylorutvecklingar med restterm. Vidare visas hur reellt analytiska funktioner beter sig under addition, subtraktion, multiplikation och division. Därefter framgår vilka krav som ställs på derivatan av alla ordningar för att en funktion ska vara reellt analytisk. Unikheten av dessa funktioner behandlas även här. I [Sektion 3](#) så visas hur de analytiska egenskaperna påverkas under sammansättning och inversion. Slutligen, i [Sektion 4](#), ges en tillämpning på teorin till ordinära differentialekvationer, där analyticiteten i initialvärdesproblemet blir avgörande för huruvida potensserier kan användas för att konstruera en lösning. Exempel är en stor del av uppsatsen och syftar till att visa hur teorin kan användas i praktiken.

2 Reellt analytiska funktioner och deras grundläggande egenskaper

2.1 Definition och grandidé

Vi börjar med att introducera begreppet reellt analytisk funktion och vad som skiljer dessa från andra typer av funktioner. Utgångspunkten är potensserier och hur dessa exakt representerar funktionen lokalt runt en punkt i definitionsmängden.

Definition 2.1 (Definition 1.1.5 i [3]). Vi säger att funktionen $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ är reellt analytisk i punkten $\alpha \in I$ om funktionen kan representeras av en potensserie i något öppet intervall kring α .

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - \alpha)^n.$$

Alltså konvergerar serien till funktionen i ett öppet intervall $(-R+\alpha, R+\alpha)$, för något $R > 0$. R är potensseriens maximala konvergensradie och för alla konvergensradier $0 < r \leq R$ så konvergerar potensserien absolut. Om funktionen är reellt analytisk i alla punkter $\alpha \in I$ så betecknar vi att $f \in C^\omega(I)$.

För att en funktion ska vara reellt analytisk måste därmed funktionen, i varje punkt i dess definitionsmängd kunna representeras av en absolutkonvergent potensserie i ett öppet intervall kring punkten. För att kunna använda definitionen så behöver vi ett sätt att bestämma en potensseries konvergensradie, alltså hur stort område representationen är lika med funktionen. Då denna uppsats riktar sig mot funktioner av en variabel så kan konvergensradien användas för att skapa ett konvergensintervall. Ifall potensserien runt en punkt α har maximal konvergensradie R så gäller det att serien är absolutkonvergent i intervallet $(-R+\alpha, R+\alpha)$. Med hjälp av d'Alemberts kvotkriterium och Cauchy–Hadamard Sats för serier så kan vi finna konvergensradien.

Sats 2.2 (Lemma 1.1.8 i [3]). Låt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - \alpha)^n$$

vara en potensserie kring α . Låt A vara definierad enligt

$$A := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |a_n|^{1/n}.$$

Då är potensseriens maximala konvergensradie lika med

$$R = \begin{cases} 0, & A = \infty. \\ \frac{1}{A}, & 0 < A < \infty. \\ \infty, & A = 0. \end{cases}$$

Bevis. Med rotestet för hela uttrycket i potensserien får vi:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |a_n(x - \alpha)^n|^{\frac{1}{n}} = |x - \alpha| \lim_{n \rightarrow \infty} \sup |a_n|^{\frac{1}{n}} = |x - \alpha| \cdot A.$$

Rottestet säger att serien konvergerar absolut om $L < 1$ och divergerar om $L > 1$. För $L = 1$ är testet inkonklusivt. Vi får därmed att potensserien konvergerar absolut när

$$A \cdot |x - \alpha| < 1 \iff |x - \alpha| < \frac{1}{A}.$$

□

Sats 2.3 (Theorem 13, chapter 10 i [2]). Låt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - \alpha)^n$$

vara en potensserie kring α . Låt M vara definierad enligt

$$M := \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|.$$

Under förutsättning att gränsvärdet existerar, där $0 \leq M \leq \infty$, är potensseriens maximala konvergensradie lika med

$$R = \begin{cases} 0, & M = \infty. \\ \frac{1}{M}, & 0 < M < \infty. \\ \infty, & M = 0. \end{cases}$$

Bevis. Med kvottestet för hela uttrycket i potensserien får vi:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x - \alpha)^{n+1}}{a_n(x - \alpha)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| |x - \alpha| = M \cdot |x - \alpha|.$$

Kvottestet säger att om $L < 1$ så konvergerar serien absolut. Om $L > 1$ så diver-

gerar serien och för $L = 1$ är testen inkonklusivt. Vi får därmed att potensserien konvergerar absolut när

$$M \cdot |x - \alpha| < 1 \iff |x - \alpha| < \frac{1}{M}.$$

□

Sats 2.2 och Sats 2.3 blir därmed två sätt att bestämma en potensseries konvergensradie. I uppsatsen kommer satserna användas för att avgöra ifall en serie divergerar eller konvergerar. I det senare fallet så kan även potensseriens maximala konvergensradie bestämmas.

2.2 Derivering/integrering av potensserier och Taylorutveckling

I Definition 2.1 definierade vi begreppet reellt analytisk funktion, alltså en funktion som lokalt kan representeras av en absolutkonvergent potensserie med en konvergensradie större än noll. En naturlig fråga att ställa sig är då om man kan derivera och integrera potensserien och om dess derivata och primitiva form representerar funktionens derivata och primitiva form med samma konvergensradie.

Sats 2.4 (Theorem 8.1 i [4]). Antag att

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - \alpha)^n, \quad |x - \alpha| < R. \quad (1)$$

Då konvergerar potensserien i (1) likformigt på $[-R + \epsilon + \alpha, R - \epsilon + \alpha]$, oavsett vilket $\epsilon > 0$ som väljs. Det gäller även att f är kontinuerlig och differentierbar i $(-R + \alpha, R + \alpha)$ och

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - \alpha)^{n-1}, \quad |x - \alpha| < R \quad (2)$$

Bevis. Låt $\epsilon > 0$ vara givet. För $|x - \alpha| \leq R - \epsilon$ så har vi att

$$|a_n(x - \alpha)^n| \leq |a_n(R - \epsilon)^n|$$

och eftersom

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(R - \epsilon)^n$$

konvergerar absolut har vi likformig konvergens på (1) i intervallet $[-R + \epsilon + \alpha, R - \epsilon + \alpha]$ enligt Sats 7.10 i [4]. Eftersom $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ när $n \rightarrow \infty$ så gäller det att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{n|a_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Serierna i (1) och (2) har därmed samma konvergensradie och eftersom (2) är en potensserie så konvergerar den likformigt på $[-R + \epsilon + \alpha, R - \epsilon + \alpha]$, för varje $\epsilon > 0$. Vi applicerar nu Sats A.2 (för serier istället för funktionsföljder). Det gäller då att (2) är giltig om $|x - \alpha| \leq R - \epsilon$. Men givet ett x så att $|x - \alpha| < R$ så kan vi hitta ett $\epsilon > 0$ så att $|x - \alpha| < R - \epsilon$, alltså gäller (2) för $|x - \alpha| < R$. Kontinuiteten från f följer av existensen hos f' . $\square$

Sats 2.4 visar att reellt analytiska funktioner är stabila under derivering. Potensserien får termvis deriveras och är exakt lika med funktionens derivata med samma konvergensradie. Vi har nu verifierat att en reellt analytisk funktion är deriverbar inom sin konvergensradie. För att potensserien ska sammanfalla exakt med funktionen så kan inte koefficienterna vara godtyckliga.

Följdsats 2.5 (Corollary sid.173 i [4]). För $f \in C^\omega(I)$ gäller det att alla ordningsderivator existerar i I och $f^{(n)} \in C^\omega(I)$ för alla $n \in \mathbb{N}$. För varje $\alpha \in I$ ges koefficienterna, a_n , i potensserien

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - \alpha)^n, \quad |x - \alpha| < R,$$

av

$$a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}.$$

Bevis. Från Sats 2.4 har vi att

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x - \alpha)^{n-1}, \quad |x - \alpha| < R.$$

Genom att applicera Sats 2.4 upprepade gånger så ges den k :te derivatan av

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n(x - \alpha)^{n-k}, \quad |x - \alpha| < R.$$

Sätt $x = \alpha$. För alla $n > k$ är $(\alpha - \alpha)^{n-k} = 0$ och endast termen där $n = k$ finns

kvar då $(\alpha - \alpha)^0 = 1$. Den k :te derivatan i punkten α blir då lika med

$$f^{(k)}(\alpha) = k(k-1) \cdots 2 \cdot 1 a_k = k! a_k \iff a_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}.$$

Potensserien för en reellt analytisk funktion är därmed lika med

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n, \quad |x - \alpha| < R.$$

□

Följdsats 2.5 visar att reellt analytiska funktioner är oändligt deriverbara och att alla ordningens derivator besitter de analytiska egenskaperna. Den visar också att koefficienterna i potensserien för en reellt analytisk funktion fullständigt bestäms av funktionens derivator i expansionspunkten. En reellt analytisk funktion kan därför skrivas som

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n$$

inom konvergensintervallet $(-R + \alpha, R + \alpha)$. En följd av Sats 2.4 och Följdsats 2.5 blir att reellt analytiska funktioner även behåller sina analytiska egenskaper vid integrering.

Följdsats 2.6 (Proposition 1.1.18 i [3]). Om $f(x)$ är reellt analytisk i en punkt α med konvergensradie $R > 0$ så är varje primitiv funktion med avseende på x också reellt analytisk i α med samma konvergensradie R .

För att kunna avgöra om potensserien verkligen representerar funktionen i intervallet behöver man kontrollera utvecklingens restterm, vilket leder oss in på Taylorserier och Lagranges restterm. För att potensserien exakt ska sammanfalla med funktionen i ett visst intervall så krävs det att "felet" går mot noll när polynomets grad växer.

Sats 2.7 (Theorem 5.15 i [4]). Låt $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ vara en funktion där $f^{(n-1)}$ är kontinuerlig på det slutna intervallet $[a, b]$ och $f^{(n)}$ existerar på det öppna intervallet (a, b) för positiva heltal n . Låt $\alpha, \beta \in (a, b)$ där $\alpha \neq \beta$ och definiera Taylorpolynomet av ordning $n - 1$ kring punkten α som

$$P_{n-1}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!} (x - \alpha)^j.$$

Då existerar det ett ξ_n strikt mellan α och β så att

$$f(\beta) = P_{n-1}(\beta) + \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}(\beta - \alpha)^n,$$

där

$$R_n(\beta) = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}(\beta - \alpha)^n$$

kallas resttermen och anger felet när funktionen approximeras med sitt Taylorpolynom.

Bevis. Låt $\alpha, \beta \in (a, b)$. Låt R_n definieras av

$$f(\beta) := P_{n-1}(\beta) + R_n(\beta). \quad (3)$$

Vi inför hjälpfunktionen

$$g_n(x) = f(x) - P_{n-1}(x) - \frac{R_n(\beta)}{(\beta - \alpha)^n}(x - \alpha)^n \quad \text{för } a < x < b. \quad (4)$$

Vi har att $g_n(\alpha) = g_n(\beta) = 0$ och kan därmed tillämpa Rolles Sats. Det finns alltså ett ξ_1 strikt mellan α och β så att $g'_n(\xi_1) = 0$. Eftersom Taylorpolynomet och funktionen har samma derivator i punkten α upp till ordning $n - 1$ så gäller det att $g_n^{(k)}(\alpha) = 0$ för $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Rolles Sats kan därmed tillämpas succesivt på $g'_n, g''_n, \dots, g_n^{(n-1)}$ tills vi erhåller ett ξ_n strikt mellan α och β så att

$$g^{(n)}(\xi_n) = 0.$$

Efter derivering n gånger av hjälpfunktionen i (4) får vi att

$$g_n^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - n! \frac{R_n(\beta)}{(\beta - \alpha)^n}.$$

Genom att låta $x = \xi_n$, erhålls

$$0 = f^{(n)}(\xi_n) - n! \frac{R_n(\beta)}{(\beta - \alpha)^n} \iff R_n(\beta) = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}(\beta - \alpha)^n.$$

□

Resttermen visar hur väl potensserien approximerar funktionen. Om resttermen går mot noll när n går mot oändligheten för varje x i ett öppet intervall kring α så

innebär detta att funktionen sammanfaller med sin Taylorserie i det intervallet. Ett enkelt exempel för att illustrera en reellt analytisk funktion är exponentialfunktionen vars derivata är lika med funktionen.

Exempel 2.8. Låt $f(x) = e^x$ där $x \in \mathbb{R}$. För alla $k \in \mathbb{N}$ gäller det att $f^{(k)}(x) = e^x$. Alltså är $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Taylorpolynomet för $f(x)$ kring en punkt α ges av

$$P_{n-1}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!} (x - \alpha)^j = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{e^\alpha}{j!} (x - \alpha)^j. \quad (5)$$

Vi använder Sats 2.3 och undersöker konvergensradien.

$$\left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| = \frac{1}{j+1} \rightarrow 0 \text{ då } j \rightarrow \infty \text{ för alla } x \in \mathbb{R}.$$

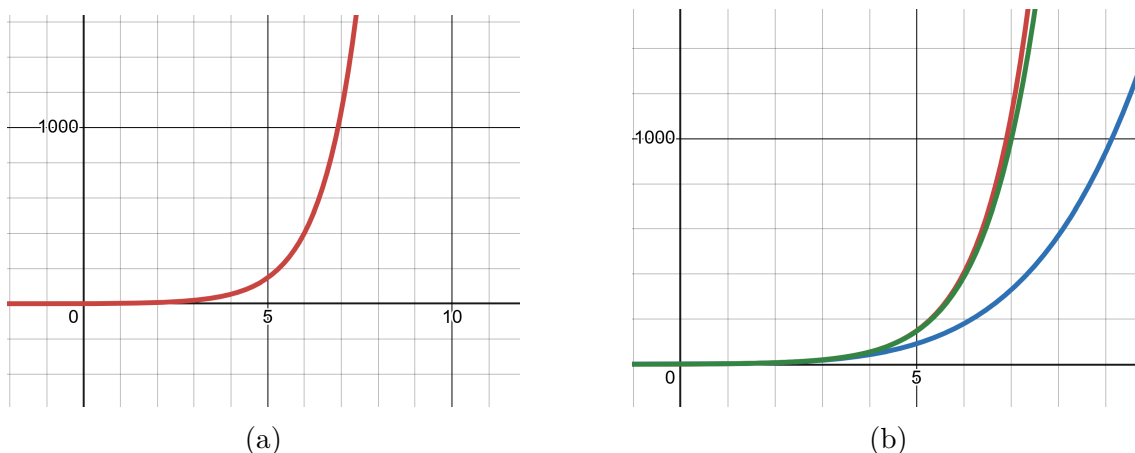
Konvergensradien för potensserien i (5) är därmed oändlig. Vi använder nu Sats 2.7 och undersöker ifall resttermen går mot noll. För varje n existerar en punkt ξ_n mellan α och x så att

$$R_n(x) = f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{f^{(j)}(\alpha)}{j!} (x - \alpha)^j = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!} (x - \alpha)^n.$$

Men vi vet att $f^{(n)}(\xi_n) = e^{\xi_n}$. För alla $x \in \mathbb{R}$ gäller därmed att

$$|R_n(x)| = \frac{e^{\xi_n}}{n!} |x - \alpha|^n \rightarrow 0 \text{ när } n \rightarrow \infty,$$

då $n!$ växer snabbare än någon potens av $|x - \alpha|$. Eftersom $R_n(x) \rightarrow 0$ så konvergerar Taylorserien mot funktionen för alla reella tal x vilket leder till att $f \in C^\omega(\mathbb{R})$.



Figur 1: Exempel 2.8 med funktionen i (a). I (b) syns funktionen (röd) och Taylorpolynomet som beskrivs i (5) kring $\alpha = 0$ av ordning 5 (blå) och 10 (grön).

Exemplet visar att Taylorserien inte bara är en bra approximation av funktionen utan att den exakt sammanfaller med funktionen för alla reella tal x . I Figur (1b) ser vi hur Taylorpolynomet snabbt närmar sig funktionens graf med högre ordning. När $n \rightarrow \infty$ så kommer grafen för Taylorserien exakt motsvara funktionens graf för alla reella tal x .

2.3 Operationer på potensserier

Eftersom reellt analytiska funktioner lokalt kan representeras av en potensserie med en viss konvergensradie så vill vi nu ta reda på om dessa funktioner bevarar sina analytiska egenskaper under algebraiska operationer. I synnerhet vill vi undersöka hur de analytiska egenskaperna påverkas av addition, subtraktion, multiplikation och division.

Sats 2.9 (Proposition 1.1.7 i [3]). Låt f och g vara reellt analytiska i punkten α . Om potensserien för $f(x)$ runt α konvergerar på det öppna intervallet C_1 och potensserien för $g(x)$ runt α konvergerar på det öppna intervallet C_2 , så gäller på deras gemensamma konvergensintervall $C = C_1 \cap C_2$ att:

1. $f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x - \alpha)^n$
2. $f(x) \cdot g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n+k=m} (a_n \cdot b_k)(x - \alpha)^m$

Bevis. 1. Låt

$$A_N = \sum_{j=0}^N a_j(x - \alpha)^j \text{ och } B_N = \sum_{j=0}^N b_j(x - \alpha)^j,$$

vara de N :te partialsummorna av potensserierna som definierar f och g . Ifall S_N är den N :te partialsumman av potensserien

$$S_N = \sum_{j=0}^N (a_j \pm b_j)(x - \alpha)^j$$

så gäller att

$$\begin{aligned} f(x) \pm g(x) &= \lim_{N \rightarrow \infty} A_N \pm \lim_{N \rightarrow \infty} B_N \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} (A_N \pm B_N) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} S_N \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (a_j \pm b_j)(x - \alpha)^j. \end{aligned}$$

Eftersom $A_N \rightarrow f(x)$ och $B_N \rightarrow g(x)$ likformigt på varje kompakt delmängd av $\mathbb{C}$ så kan vi termvis addera och subtrahera.

2. Låt

$$D_N = \sum_{m=0}^N \sum_{n+k=m} (a_n \cdot b_k)(x - \alpha)^n \text{ och } R_N = \sum_{j=N+1}^{\infty} b_j(x - \alpha)^j.$$

Då gäller det att

$$\begin{aligned} D_N &= \sum_{j=0}^N a_j(x - \alpha)^j B_{N-j} \\ &= \sum_{j=0}^N a_j(x - \alpha)^j (g(x) - R_{N-j}) \\ &= g(x) \sum_{j=0}^N a_j(x - \alpha)^j - \sum_{j=0}^N a_j(x - \alpha)^j R_{N-j}, \end{aligned}$$

eftersom $B_i = g(x) - R_i$ för alla $i = 0, 1, \dots, N$. Vi ser även tydligt att

$$g(x) \sum_{j=0}^N a_j(x - \alpha)^j = g(x) \cdot f(x) \quad \text{när } N \rightarrow \infty.$$

Vi behöver då visa att termen $|a_0 R_N + a_1(x - \alpha)R_{N-1} + \cdots + a_N(x - \alpha)^N R_0|$ går mot noll då $N \rightarrow \infty$. Givet $\epsilon > 0$ så kan vi hitta ett N_0 så att det för varje $N \geq N_0$ gäller att $|R_N| \leq \epsilon$. Vi får då triangelolikheten:

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{j=0}^N a_j(x - \alpha)^j R_{N-j} \right| \\ & \leq \left| \sum_{j=0}^{N-N_0} a_j(x - \alpha)^j R_{N-j} \right| + \left| \sum_{j=N-N_0+1}^N a_j(x - \alpha)^j R_{N-j} \right| \\ & \leq \epsilon |A_{N-N_0}| + \left| \sum_{j=N-N_0+1}^N a_j(x - \alpha)^j R_{N-j} \right|. \end{aligned}$$

Vid ett fixerat N_0 så går termerna mot 0 då $N \rightarrow \infty$, eftersom $|a_{N-N_0+1}(x - \alpha)^{N-N_0+1} R_{N_0-1} + \cdots + a_N(x - \alpha)^N R_0|$ består av N_0 , alltså ett ändligt, antal termer och varje $a_{N-i}(x - \alpha)^{N-i} \rightarrow 0$ när N går mot oändligheten för varje $i = 0, 1, \dots, N_0 - 1$.

□

Vi har nu visat att reellt analytiska funktioner behåller sina analytiska egenskaper under operationerna addition, subtraktion och multiplikation. Detta är avgörande för vidare undersökning, speciellt när det kommer till sammansatta funktioner och inversa funktioner. Vi kommer behöva följande lemma när vi undersöker division av reellt analytiska funktioner då det är en grundläggande förutsättning för att en potensserie ska ha en konvergensradie större än noll.

Lemma 2.10 (Corollary 1.1.10 i [3]). Potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - \alpha)^n \tag{6}$$

har en konvergensradie R om och endast om det för varje $0 < \rho < R$ existerar en konstant $C > 0$ så att det för alla $n \in \mathbb{N}$ gäller att

$$|a_n| \leq \frac{C}{\rho^n}.$$

Bevis. Vi visar denna ekvivalens genom implikation åt båda hållen. Antag först att konvergensradien är R . Välj ett ρ som uppfyller $0 < \rho < R$. Serien konvergerar då

absolut i $|x - \alpha| = \rho$. Alltså gäller att

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \rho^n < \infty.$$

Serien är begränsad. Därför finns ett tal C som uppfyller

$$C = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \rho^n.$$

Då gäller för varje $n \in \mathbb{N}$ att

$$|a_n| \rho^n \leq C \iff |a_n| \leq \frac{C}{\rho^n}.$$

Antag nu att det för varje $0 < \rho < R$ existerar en konstant $C > 0$ så att $|a_n| \leq C/\rho^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Låt x vara en punkt som uppfyller $|x - \alpha| < R$ och välj ett ρ så att $|x - \alpha| < \rho < R$. Då gäller att

$$|a_n(x - \alpha)^n| = |a_n| |x - \alpha|^n \leq \frac{C}{\rho^n} |x - \alpha|^n = C \left(\frac{|x - \alpha|}{\rho} \right)^n.$$

Eftersom $|x - \alpha|/\rho < 1$ så konvergerar den geometriska serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| |x - \alpha|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} C \left(\frac{|x - \alpha|}{\rho} \right)^n.$$

Enligt jämförelsekriteriet så konvergerar därför potensserien i (6) absolut. Då x uppfyller $|x - \alpha| < R$ så konvergerar potensserien absolut på hela intervallet $(\alpha - R, \alpha + R)$.

□

Lemma 2.10 visar att vi genom att undersöka koefficienterna kan garantera om en potensserie har en konvergensradie större än noll. Vi kan nu gå vidare till satsen om division, som skillnad från multiplikation, addition och subtraktion, kräver extra försiktighet då nämnaren inte får vara noll i expansionspunkten, α .

Sats 2.11 (Proposition 1.1.12 i [3]). Låt f och g vara reellt analytiska funktioner i punkten α , där potensserierna som representerar f och g har konvergensintervall

C_1 , respektive C_2 . Ifall $g(\alpha) \neq 0$, så är funktionen h som definieras enligt

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

reellt analytisk i punkten α . Vidare gäller att första koefficienten för potensserien som motsvarar $h(x)$ i dess konvergensintervall ges av

$$c_0 = \frac{a_0}{b_0}$$

och högre ordningars koefficienter ges rekursivt av

$$c_n = \frac{1}{b_0} \left(a_n - \sum_{j=1}^n b_j c_{n-j} \right).$$

Bevis. Koefficienterna framför x^n i

$$g(x) \cdot h(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - \alpha)^k \right) \left(\sum_{j=0}^{\infty} c_j (x - \alpha)^j \right)$$

är lika med

$$\sum_{l=0}^n b_l c_{n-l} = b_0 c_n + \sum_{l=1}^n b_l c_{n-l} = a_n.$$

Ifall vi kan visa att potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - \alpha)^n$$

konvergerar på ett öppet intervall $|x - \alpha| < C_3$ så gäller att $g(x)h(x) = f(x)$ för $|x - \alpha| < C_2 \cap C_3$ enligt Sats 2.9. Utan förlust av generalitet kan vi anta att $\alpha = 0$ då vi kan göra variabelbytet $x - \alpha = y$ utan att förändra analyticiteten. Vi kan även anta att $b_0 = 1$ (genom att dela hela uttrycket med b_0) samt att $(-1 - \epsilon, 1 + \epsilon) \subseteq C_1 \cap C_2$ för något $\epsilon > 0$ genom dilation/kontraktion. Efter våra antaganden kommer bägge serierna

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ och } \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

ha en konvergensradie större än 1. Vi kan då se från Lemma 2.10 att det existerar en konstant $0 < M < \infty$ sådant att $|a_n| \leq M$ och $|b_n| \leq M$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Med induktion kommer vi nu visa att $|c_n| \leq M(1 + M)^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Vårt antagande

att $b_0 = 1$ ger $|c_0| = |a_0| \leq M$. Alltså stämmer basfallet. Antag nu att påståendet stämmer för indexen $0, 1, \dots, n-1$. Vi vill nu visa att påståendet stämmer för n . Vi har då att

$$c_n = a_n - \sum_{l=1}^n b_l c_{n-l}.$$

Med absolutvärden får vi triangelolikheten

$$|c_n| \leq |a_n| + \sum_{l=1}^n |b_l| |c_{n-l}|.$$

Vi använder nu våra övre gränser $|a_n| \leq M$, $|b_n| \leq M$ samt induktionsantagandet $|c_{n-l}| \leq M(1+M)^{n-l}$ för varje $l = 1, 2, \dots, n$. Det ger oss

$$|c_n| \leq M + \sum_{l=1}^n M \cdot M(1+M)^{n-l} = M + M^2 \sum_{l=1}^n (1+M)^{n-l}.$$

Vi indexerar om summan och sätter $k = n - l$. När l går från 1 till n så går k från 0 till $n-1$, vilket leder till att

$$|c_n| \leq M + M^2 \sum_{l=1}^n (1+M)^{n-l} = M + M^2 \sum_{k=0}^{n-1} (1+M)^k = M \left(1 + M \sum_{k=0}^{n-1} (1+M)^k \right).$$

Tillsammans med Lemma A.3 får vi att

$$|c_n| \leq M \left(1 + M \sum_{k=0}^{n-1} (1+M)^k \right) = M(1+M)^n.$$

Enligt Sats 2.2 så har då potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - \alpha)^n$$

en konvergensintervall på minst

$$\left(-\frac{1}{1+M} + \alpha, \frac{1}{1+M} + \alpha \right).$$

□

Sats 2.11 visar att kvoten av två reellt analytiska funktioner, förutsatt att nämnaren är nollskild, också är reellt analytisk. Därmed kan man konstruera lösningen till divisionen genom att lösa det rekursiva sambandet mellan koefficienterna. För

att illustrera hur vi kan använda satserna som behandlar algebraiska operationer så studerar vi ett exempel där funktionen saknar en enkel form på sin Taylorserie runt alla expansionspunkter skilda från noll.

Exempel 2.12. Låt

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+x^2t} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

Vi sätter funktionen

$$\phi(x, t) = \frac{e^{-t}}{1+x^2t}.$$

För varje $t \geq 0$ och $x \in \mathbb{R}$ är $\phi(x, t)$ en oändligt deriverbar funktion med avseende på x , då det är ett rationellt polynom där nämnaren aldrig blir noll. Eftersom ϕ är en jämn funktion i x är alla udda derivator i $x = 0$ lika med noll. För $n \in \mathbb{N}$ gäller det att

$$\left. \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \phi(x, t) \right|_{x=0} = \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \left(\frac{e^{-t}}{1+x^2t} \right) \Big|_{x=0} = e^{-t} (2n)! (-1)^n t^n.$$

Med absolutbelopp får vi

$$\left| \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \phi(x, t) \right|_{x=0} = (2n)! e^{-t} t^n.$$

För små x i en omgivning av $x = 0$ finns det, för varje $n \in \mathbb{N}$ en konstant C_n så att

$$\left| \frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}} \phi(x, t) \right| \leq C_n e^{-t} t^n = \psi_n(t).$$

Det följer då av satsen om derivering under integraltecknet, vilket exempelvis visas i Sats 2.27 i [1], att

$$\left. \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} f(x) \right|_{x=0} = (2n)! (-1)^n \int_0^\infty e^{-t} t^n dt = (2n)! (-1)^n n!. \quad (7)$$

Genom uttrycket för $f^{(2n)}(0)$ i (7) tillsammans med vetskapen om att alla udda derivator i $x = 0$ är lika med noll kan vi skapa Taylorpolynomet för f kring $\alpha = 0$, vilket ges av

$$P_{n-1}(x) = \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j j! x^{2j}. \quad (8)$$

Med Sats 2.3 kan vi beräkna konvergensradien för potensserien.

$$\left| \frac{a_{j+1}}{a_j} \right| = \frac{(j+1)!}{j!} = (j+1) \rightarrow \infty \text{ när } j \rightarrow \infty$$

för alla reella tal x skilda från noll. Konvergensradien för Taylorserien i (8) är därmed lika med noll. Enligt Definitionen 2.1 så ska potensserien konvergera till funktionen i en omgivning $(-R + \alpha, \alpha + R)$ av α för något $R > 0$ för att den ska vara reellt analytisk där. I vårt fall är $\alpha = 0$ och Taylorserien konvergerar bara i $x = 0$ vilket leder till att $f(x)$ inte är reellt analytisk där. Om vi istället ser på funktionen i en punkt $x \neq 0$ så kan vi börja med att förenkla uttrycket med variabelsubstitution.

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{1+x^2t} dt = \left[\begin{array}{l} s = x^2t \\ dt = \frac{ds}{x^2} \end{array} \right] = \frac{1}{x^2} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{s}{x^2}}}{1+s} ds, \quad x \neq 0. \quad (9)$$

Sätt $a = 1/x^2$. Då gäller att för $x \neq 0$ är $a > 0$. Från (9) får vi då att

$$a \int_0^\infty \frac{e^{-sa}}{1+s} ds = \left[\begin{array}{l} u = a(1+s) \\ ds = \frac{du}{a} \end{array} \right] = a \int_a^\infty \frac{e^a e^{-u}}{u/a} \frac{du}{a} = a e^a \int_a^\infty \frac{e^{-u}}{u} du.$$

När $s = 0$ är $u = a$ och när $s \rightarrow \infty$ så går $u \rightarrow \infty$. Vi sätter in $a = 1/x^2$ erhåller då

$$f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^2} \int_{\frac{1}{x^2}}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du. \quad (10)$$

Funktionen i (10) kan därmed skrivas som en multiplikation av funktionerna g och h , så att

$$f(x) = h(x) \cdot g(x), \quad h(x) = \int_{\frac{1}{x^2}}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du, \quad g(x) = \frac{1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x^2}}. \quad (11)$$

Vi undersöker nu analyticiteten för h och g separat. Ifall bägge funktionerna är reellt analytiska i alla punkter skilda från noll så är även f det enligt Sats 2.9. Vi börjar med att undersöka $h(x)$. Om derivatan till h är reellt analytisk i en punkt, så är även h reellt analytisk i den punkten, enligt Följdsats 2.6. Derivatan för $h(x)$ ges av

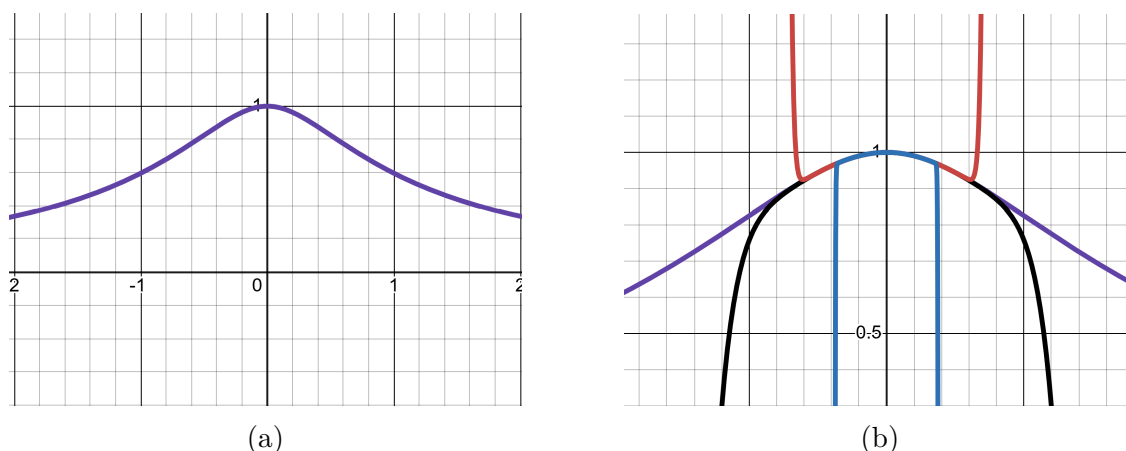
$$h'(x) = \frac{d}{dx} \int_{\frac{1}{x^2}}^\infty \frac{e^{-u}}{u} du = -\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{1/x^2} \left(-\frac{2}{x^3} \right) = \frac{2}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Med hjälp av Sats 2.11 ser vi att funktionen $x \mapsto 2/x$ är reellt analytisk i alla

reella punkter x skilda från noll, eftersom nämnaren aldrig är noll där. Vi kommer, i Exempel 3.2, visa att $x \mapsto e^{-1/x^2}$ är reellt analytisk i alla punkter x bortsett från noll, alltså är även $h'(x)$ reellt analytisk för alla $x \neq 0$ enligt Sats 2.9. Med Följdsats 2.6 får vi därmed att $h(x)$ är reellt analytisk för alla reella tal x skilda från noll.

Vi övergår nu till $g(x)$ och delar upp funktionen i de två faktorerna $1/x^2$ och e^{1/x^2} . Eftersom både täljaren och nämnaren i $1/x^2$ är reellt analytiska funktioner och $x^2 \neq 0$ för alla $x \neq 0$, ger Sats 2.11 att $x \mapsto 1/x^2$ är reellt analytisk i varje punkt x skild från noll. Den andra faktorn är en sammansättning av funktionerna $y \mapsto e^y$ som i Exempel 2.8 visat sig vara reellt analytisk för alla y , samt $x \mapsto 1/x^2$. I Sektion 3 kommer vi visa att sammansättningen av två reellt analytiska funktioner är reellt analytisk. Alltså är även g reellt analytisk för $x \neq 0$ enligt Sats 2.9.

Vi har nu visat att både $h(x)$ och $g(x)$ är reellt analytiska för alla x skilda från noll. Det följer då från Sats 2.9 att även $f(x)$ är reellt analytisk för alla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.



Figur 2: Exempel 2.12 med funktionen i (a). I (b) syns funktionen (lila) och Taylorpolynomet som beskrivs i (8) av ordning 5 (svart), 20 (röd) och 75 (blå).

I Exempel 2.12 kan vi skapa en Taylorserie för funktionen runt $\alpha = 0$. Däremot blir det väldigt svårt att få en explicit Taylorserie i något punkt $\alpha \neq 0$. Vi använder därför Sats 2.9 och Sats 2.11 för att motivera varför funktionen är reellt analytisk i alla punkter skilda från noll. I Figur (2b) ser vi hur konvergensintervallet för funktionens Taylorpolynom kring $\alpha = 0$ minskar med ökad ordning. När $n \rightarrow \infty$ så konvergerar potensserien bara i punkten $x = 0$ vilket leder till att den ej är reellt

analytisk där.

2.4 Derivatauppskattningar och kriterium för reellt analytiska funktioner

För att systematiskt kunna arbeta med reellt analytiska funktioner behöver vi ett kriterium för att kontrollera koefficienternas tillväxt i potensserierna. Sådana uppskattningar gör att vi direkt kan avgöra ifall en given potensserie verkligen representerar en reellt analytisk funktion. Vi ser nu till följande lemma.

Lemma 2.13 (Lemma 1.2.2 i [3]). För varje icke-negativt heltal n och för alla $-1 < x < 1$ så gäller det att

$$\sum_{m=n}^{\infty} m(m-1)\dots(m-n+1)x^{m-n} = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

Bevis. Resultatet får vi genom att derivera den geometriska serien

$$\sum_{m=0}^{\infty} x^m = \frac{1}{1-x}, \quad -1 < x < 1,$$

och vi erhåller då resultatet enligt Sats 2.4. □

Då vi får en explicit form på både potensseriens derivata och funktionens derivata så blir Lemma 2.13 en viktig del när vi nu ska flytta Taylorserien från en punkt α till en punkt β inom konvergensintervallet. Följande Sats blir avgörande för att kunna skapa ett kriterium om derivatans tillväxt.

Sats 2.14 (Proposition 1.2.3 i [3]). Antag att potensserien

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j(x-\alpha)^j$$

har en konvergensradie $R > 0$ och därmed representerar en reellt analytisk funktion f på intervallet $(\alpha - R, \alpha + R)$. Om β är en punkt som uppfyller $|\alpha - \beta| < R$ så kan vi definiera potensserien

$$\sum_{j=0}^{\infty} b_j(x-\beta)^j \tag{12}$$

genom att låta

$$b_j = \frac{f^{(j)}(\beta)}{j!}.$$

Potensserien i (12) har då en konvergensradie på minst $\tau = R - |\alpha - \beta|$, och konvergerar därmed till f på det öppna intervallet $(\beta - \tau, \beta + \tau)$.

Bevis. Från Sats 2.4 får vi att

$$f^{(n)}(\beta) = \sum_{m=n}^{\infty} m(m-1)\dots(m-n+1)a_m(\beta-\alpha)^{m-n}.$$

Från Lemma 2.10 vet vi att det för varje $0 < \rho < R$ finns en konstant $C > 0$ så att

$$|a_j| \leq \frac{C}{\rho^j}.$$

Genom att använda ovanstående lemma tillsammans med Lemma 2.13 får vi att

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(\beta)| &\leq C \sum_{m=n}^{\infty} m(m-1)\dots(m-n+1) \frac{|\beta-\alpha|^{m-n}}{\rho^m} \\ &= \frac{C}{\rho^n} \sum_{m=n}^{\infty} m(m-1)\dots(m-n+1) \left(\frac{|\beta-\alpha|}{\rho}\right)^{m-n} \\ &= \frac{C}{\rho^n} \frac{n!}{\left(1 - \frac{|\beta-\alpha|}{\rho}\right)^{n+1}} \\ &= D \frac{n!}{(\rho - |\beta-\alpha|)^n}, \end{aligned}$$

där $D = \frac{C\rho}{\rho - |\beta-\alpha|}$. Enligt Lemma 2.10 medför denna uppskattning att potensserien i (12) har en konvergensradie på minst $\rho - |\beta - \alpha|$ för varje $\rho < R$. Eftersom $\rho < R$ var givet, följer det att potensserien i (12) har en konvergensradie på minst $\tau = R - |\alpha - \beta|$. Vi definierar nu funktionen g på intervallet $(\beta - \tau, \beta + \tau)$ som

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j(x - \beta)^j.$$

Från Sats 2.7 vet vi att det finns ett ξ_n mellan x och β så att

$$f(x) - \sum_{j=0}^{n-1} b_j(x - \beta)^j = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!}(x - \beta)^n.$$

Men samma uppskattning, som ges i Lemma 2.10, gäller för $f^{(n)}(\xi_n)$ som för $f^{(n)}(\beta)$,

då ξ_n ligger mellan β och x . Vi får därmed att $g(x) = f(x)$. $\square$

I Sats 2.14 visas hur expansionspunkten för en reellt analytisk funktion kan flyttas inom konvergensraden och bibehålla sina analytiska egenskaper. En naturlig del av detta blir att konvergensraden som mest minskar med $|\alpha - \beta|$ när expansionspunkten flyttas från punkten α till β , alltså närmre randen till det ursprungliga konvergensintervallet. När den nya potensserien runt β är given så definierar den då samma reellt analytiska funktion i varje punkt av det nya konvergensintervallet. Detta är ett viktigt resultat då det visar att de analytiska egenskaperna inte är begränsade till den punkt där serien först skapats.

Följdsats 2.15 (Corollary 1.2.4 i [3]). Låt

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - \alpha)^j$$

vara en potensserie med ett öppet konvergensintervall K . Låt $f(x)$ vara funktionen som definieras av potensserien på K . Då är f reellt analytisk på varje punkt i K .

Detta följer direkt av Sats 2.14. Ytterligare en följd av att reellt analytiska funktioner kan representeras av en potensserie är att de är helt unika inom sin funktionsklass. Om två reellt analytiska funktioner har samma derivator av alla ordningar i en punkt så måste de därmed sammanfalla i en omgivning av den punkten.

Följdsats 2.16 (Corollary 1.2.5 i [3]). Låt f och g vara reellt analytiska på ett öppet intervall I och antag att det finns en punkt $\alpha \in I$ så att

$$f^{(n)}(\alpha) = g^{(n)}(\alpha), \quad \text{för alla } n \in \mathbb{N}.$$

Då är $f(x) = g(x)$ för alla $x \in I$.

Bevis. Eftersom f och g är reellt analytiska i punkten α representeras de lokalt av sina Taylorserier kring α . Antagandet att

$$f^{(n)}(\alpha) = g^{(n)}(\alpha), \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

innebär att Taylorserierna har identiska koefficienter. Det gäller därmed att $f(x) = g(x)$ på ett öppet intervall kring α . Vi behöver visa att likheten gäller på hela

intervallet I . Vi definierar därför mängden

$$J = \{x \in I : f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x), \forall n = 0, 1, 2, \dots\}. \quad (13)$$

Alla ordningars derivator till en reellt analytisk funktion är kontinuerliga. Därför är funktionen

$$h^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - g^{(n)}(x)$$

kontinuerlig för alla $n = 0, 1, 2, \dots$. Nollställemängden till $h^{(n)}$ är sluten i I , eftersom $h^{(n)}$ är kontinuerlig. Mängden J i (13) är snittet av dessa nollställemängder över alla n . Ett snitt av slutna mängder är sluten, så J är sluten i I . Vi visar nu att J är öppet relativt I . Låt $x \in J$. Då gäller att

$$f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x), \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots$$

Precis som ovan har därför f och g identiska Taylorserier kring punkten x . Enligt Sats 2.14 representerar dessa Taylorserier funktionerna på ett öppet intervall kring x . Alltså sammanfaller f och g på ett öppet intervall kring x , vilket innebär att detta intervall ligger i J . Därmed är J öppen. Det gäller även att $\alpha \in J$, så J är icke-tom. Den enda delmängden av ett sammanhängande intervall som både är öppen och sluten samt icke-tom är hela intervallet. Alltså måste

$$J = I$$

och

$$f(x) = g(x)$$

för alla $x \in I$. □

Följdsats 2.16 visar att inom klassen av reellt analytiska funktioner så är funktionen, lokalt kring en punkt, unikt bestämd av alla ordningars derivator i den punkten. Detta är en av de egenskaperna som särskiljer en reellt analytisk funktion från en slät funktion. Om två funktioner som är reellt analytiska sammanfaller på en öppen delmängd, är de därför tvungna att sammanfalla över hela det sammanhängande intervallet där de är reellt analytiska. Detta är en direkt följd av Följdsats 2.16.

Följdsats 2.17 (Corollary 1.2.6 i [3]). Om f och g är reellt analytiska funktioner

på ett öppet intervall I och det finns en öppen delmängd $J \subseteq I$ så att

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in J,$$

då gäller även att

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in I.$$

Följande exempel visar hur man, med hjälp av Följdsats 2.16, direkt kan avgöra ifall en funktion är reellt analytisk i en viss punkt.

Exempel 2.18. Ta funktionen $f(x) = e^{-1/x^2}$. I Exempel 3.2 kommer vi visa att $f^{(n)}(0) = 0$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Men funktionen $h(x) = 0$ har även den $h^{(n)}(0) = 0$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Men $f(x) \neq h(x)$, alltså är inte $f(x)$ reellt analytisk i $x = 0$, då $h(x)$ tydligt är reellt analytisk i alla $x \in \mathbb{R}$.

Vi kan formulera ytterligare en följsats från Sats 2.14.

Följdsats 2.19 (Corollary 1.2.9 i [3]). Om $f \in C^\omega(I)$ för något öppet intervall I , så finns det för varje $\alpha \in I$ ett öppet intervall J med $\alpha \in J \subseteq I$ samt konstanter $C > 0$ och $R > 0$ så att

$$|f^{(n)}(x)| \leq C \frac{n!}{R^n}, \quad \forall x \in J \text{ och alla } n \in \mathbb{N}.$$

Det gäller även att motsatsen till Följdsats 2.19 är sann, vilket formuleras i följande lemma.

Lemma 2.20 (Lemma 1.2.10 i [3]). Ifall $f \in C^\infty(I)$ i något öppet intervall I och det för varje $\alpha \in I$ finns ett öppet delintervall J med $\alpha \in J \subseteq I$ samt konstanter $C > 0$ och $R > 0$ så att

$$|f^{(n)}(x)| \leq C \frac{n!}{R^n}, \quad \forall x \in J \text{ och alla } n \in \mathbb{N}. \quad (14)$$

Då är $f \in C^\omega(I)$.

Bevis. Med Sats 2.2 kan vi visa att potensserien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x - \alpha)^n$$

åtminstone konvergerar absolut på det öppna intervallet $K = (\alpha - R, \alpha + R)$. Sats 2.7 tillsammans med olikheten (14) visar att potensserien konvergerar till $f(x)$ på $J \cap K$. $\square$

För att kunna avgöra om en funktion är reellt analytisk är det opraktiskt att explicit skapa potensserien och undersöka konvergensraden och Taylorseriens rest-term. Det är oftast mycket smidigare att undersöka derivatornas tillväxt. Om derivatorna av alla ordningar kan dämpas av den faktoriella tillväxten av typen $Cn!/R^n$, så är detta tillräckligt för att funktionen ska vara reellt analytisk. Följsats 2.19 tillsammans med Lemma 2.20 leder oss vidare till det centrala derivatakriteriet.

Sats 2.21 (Proposition 1.2.12 i [3]). Låt $f \in C^\infty(I)$ för något öppet intervall I . f är reellt analytisk, alltså $f \in C^\omega(I)$, om och endast om det för varje $\alpha \in I$ finns ett öppet intervall J med $\alpha \in J \subseteq I$ och konstanter $C > 0$ och $R > 0$ så att

$$|f^{(n)}(x)| \leq C \frac{n!}{R^n}, \quad \forall x \in J \text{ och alla } n \in \mathbb{N}.$$

Bevis. Detta följer direkt genom att kombinera Följsats 2.19 och Lemma 2.20. $\square$

Sats 2.21 kommer vara särskilt användbart i senare avsnitt, där vi undersöker en funktions analytiska egenskaper direkt genom uppskattningar av derivatan, snarare än att skapa potensserierna.

3 Sammansatta funktioner och inversa funktioner

3.1 Sammansatta funktioner

Nu har vi fått klarhet om hur reellt analytiska funktioner fungerar under algebraiska operationer samt vilka krav som ställs på derivatan. I detta avsnitt ser vi istället till hur en sammansättning av funktioner påverkar en funktions analytiska egenskaper.

Sats 3.1 (Proposition 1.4.2 i [3]). Låt $J, I \subseteq \mathbb{R}$ vara öppna intervall där $f \in C^\omega(I)$, $g \in C^\omega(J)$ och $f(I) \subseteq J$. Då är $g \circ f \in C^\omega(I)$.

Bevis. Antag att $\alpha \in I$ och att $\beta = f(\alpha) \in J$. Med Sats 2.21 så kan vi antaga att det finns konstanter $C, D, R, S > 0$ så att det för ett öppet intervall kring x nära α samt y nära $f(\alpha)$, där $y = f(x)$, gäller att

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(x)| &\leq C \frac{n!}{R^n} \\ |g^{(n)}(y)| &\leq D \frac{n!}{S^n}. \end{aligned}$$

Med Sats A.5 så ges den n :te derivatan av $h = g \circ f$ enligt

$$h^{(n)}(x) = \sum_{\substack{k=k_1+\dots+k_n \\ n=k_1+\dots+nk_n}} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!} g^{(k)}(y) \left(\frac{f^{(1)}(x)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{f^{(2)}(x)}{2!}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\right)^{k_n},$$

där $k_1, k_2, \dots, k_n > 0$. För x nära α kan vi då få en övre uppskattning av $h^{(n)}(x)$ som

$$\begin{aligned} |h^{(n)}(0)| &\leq \sum_{\substack{k=k_1+\dots+k_n \\ n=k_1+\dots+nk_n}} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!} D \frac{k!}{S^k} \left(\frac{C}{R^1}\right)^{k_1} \left(\frac{C}{R^2}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{C}{R^n}\right)^{k_n} \\ &= n! \frac{D}{R^n} \sum_{\substack{k=k_1+\dots+k_n \\ n=k_1+\dots+nk_n}} \frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!} \frac{C^k}{S^k} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &= n! \frac{C}{R^n} \frac{D}{S} \left(1 + \frac{C}{S}\right)^{n-1} \\ &= \left[E = \frac{CD}{S(1+C/S)} \text{ och } T = R \left(1 + \frac{C}{S}\right)^{-1} \right] \\ &= E \frac{n!}{T^n} \end{aligned} \quad (16)$$

där $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$ och genom att använda Lemma A.6 mellan (15) och (16). □

Resultatet blir att om g och f är reellt analytiska så garanteras att den sammansatta funktionen, $h = g \circ f$, är reellt analytisk. Notera att motsatsen inte alltid är sann. Ta exemplet med $h = g \circ f$ där $f(x) = x^2$ och $g(y) = |y|$. Vi har att g inte är reellt analytisk i punkten $y = 0$ då den inte ens är deriverbar där. Den sammansatta funktionen $h(x) = |x^2| = x^2$ är ett polynom och tydligt reellt analytisk för alla reella tal x . Resultatet från Sats 3.1 blir viktigt då flera funktioner som behandlas är av typen $f(g(x))$. Vi undersöker nu teorin med ett exempel där funktionen är en sammansättning av två funktioner.

Exempel 3.2. Se till den sammansatta funktionen

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

där $h(y) = e^y$ och $g(x) = -1/x^2$. I Exempel 2.8 visade vi att exponentialfunktionen är reellt analytisk för alla reella tal. Däremot är g inte reellt analytisk i punkten

$x = 0$ enligt Sats 2.11 då nämnaren är noll. Sats 3.1 kan då inte garantera att den sammansatta funktionen är reellt analytisk i punkten $x = 0$. Trots detta är den sammansatta funktionen slät för alla reella tal x . Det följer av att alla ordningens derivator ges på formen $f^{(n)}(x) = Q_n(1/x)e^{-1/x^2}$, där $Q_n(1/x)$ är ett rationellt polynom i x . Tillsammans med Lemma A.7 får vi att $f^{(n)}(0) = 0$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Vi gör ett antagande att f är reellt analytisk i $x = 0$. Enligt Sats 2.21 finns det då konstanter $E, T > 0$ och ett öppet intervall J där $0 \in J$ så att

$$|f^{(n)}(x)| \leq E \frac{n!}{T^n}, \quad \forall x \in J, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (17)$$

Eftersom J är öppet och innehåller noll så finns det en punkt $x_0 \in J$ så att $0 < |x_0| < T$. Enligt Sats 2.7 gäller det för varje $n \in \mathbb{N}$ att

$$f(x_0) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x_0^k + R_n(x_0), \quad R_n(x_0) = \frac{f^{(n)}(\xi_n)}{n!} x_0^n \quad (18)$$

för något ξ_n mellan 0 och x_0 . Men, $f^{(n)}(0) = 0$ för alla $n \in \mathbb{N}$ vilket leder till att

$$f(x_0) = R_n(x_0), \quad (19)$$

då alla koefficienter i Taylorserien i (18) är lika med noll. Eftersom $\xi_n \in J$, ger (17) och (18) att

$$|R_n(x_0)| = \frac{|f^{(n)}(\xi_n)|}{n!} |x_0|^n \leq E \left(\frac{|x_0|}{T} \right)^n. \quad (20)$$

Eftersom $0 < |x_0| < T$ så går högerledet i (20) mot noll när $n \rightarrow \infty$. Då måste även $R_n(x_0)$ gå mot noll som tillsammans med (19) innebär att för alla $n \in \mathbb{N}$ så är

$$f(x_0) = R_n(x_0) = 0.$$

Men $f(x) = e^{-1/x^2} > 0$ för $x \neq 0$, alltså har vi en motsägelse. Det existerar därmed inte några konstanter $E, T > 0$ och ett öppet intervall J där $0 \in J$ vilket betyder att f inte är reellt analytisk i punkten $x = 0$. Vi undersöker nu funktionen i punkter x skilda från noll. I Exempel 2.8 så visade vi att exponentialfunktionen är reellt analytisk för alla $x \in \mathbb{R}$. För $g(x) = -1/x^2$ så kan vi med hjälp av Sats 2.11 se att funktionen är reellt analytisk för alla reella tal x skilda från noll. Sats 3.1 garanterar därmed att den sammansatta funktionen f är reellt analytisk för alla $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Det går inte att skapa en explicit Taylorserie för e^{-1/x^2} runt en punkt $\alpha \neq 0$. Vi vet däremot att både h och g i den sammansatta funktionen $f = h \circ g$ är reellt analytiska för alla reella tal x skilda från noll. Genom att skapa Taylorserien för $g(x) = -1/x^2$ runt en punkt $\alpha \neq 0$ och använda det som exponenten så får vi en uppfattning om hur konvergensradien för den sammansatta funktionens Taylorserie ser ut grafiskt. Vi kan med induktion visa att den n :te derivatan för $g(x)$ ges av

$$g^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}(n+1)!x^{-2-n}.$$

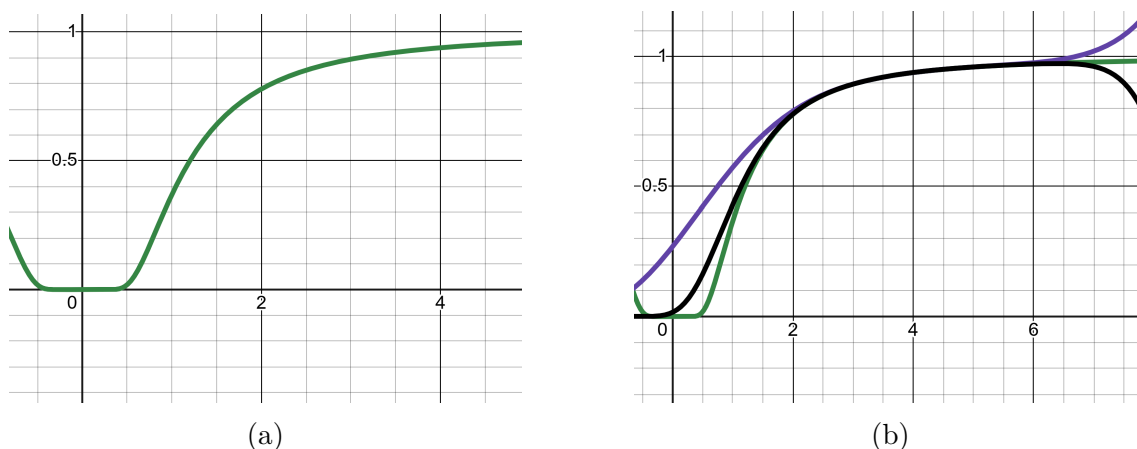
Taylorpolynomet för $g(x)$ runt en punkt $\alpha \neq 0$ ges således av

$$P_n(x) = \sum_{j=0}^n (-1)^{(j+1)}(j+1) \frac{(x-\alpha)^j}{\alpha^{j+2}}. \quad (21)$$

Låter vi n gå mot oändligheten för $P_n(x)$ erhålls Taylorserien som representerar $g(x)$, vars konvergensradie är lika med $|x - \alpha| < |\alpha|$. Använder vi $P_n(x)$ som exponent så kan vi grafiskt undersöka konvergensradien för Taylorserien som representerar $f(x)$ runt en punkt $\alpha \neq 0$. Detta fungerar på grund av att vi i Exempel 2.8 visat att e^x är reellt analytisk för alla reella tal x och $-1/x^2$ är reellt analytisk i alla reella tal $x \neq 0$. Vi får därmed ett uttryck för funktionen enligt

$$S_n(x) = \exp(P_n(x)). \quad (22)$$

Låter vi $n \rightarrow \infty$ i (22) så kommer $S_n(x) = f(x)$ inom konvergensradien för Taylorserien i (21).



Figur 3: Exempel 3.2 med funktionen i (a). I (b) syns funktionen (grön) och Taylorserien som beskrivs i (22) kring $\alpha = 4$ av ordning 5 (lila) och 10 (svart).

Exemplet visar att även om en funktion är oändligt deriverbar i en punkt och har en konvergent Taylorserie där, så motsvarar den inte funktionen i någon annan punkt förutom $x = 0$. Detta motiverar användningen av derivatuppskattningar som kriterium för att undersöka en funktions analytiska egenskaper. I Figur (3b) ser vi hur Taylorserien i (22) närmar sig funktionens graf i ett område kring expansionspunkten. Med ökad ordning på Taylorserien får vi en bättre approximation på värden som $f(x)$ antar inom seriens konvergensintervall. I Figur (3b) kan man även se hur konvergensradien faktiskt är lika med α då grafen avviker från funktionens kurva när $|x - \alpha| > |\alpha|$. Detta blir ännu tydligare vid högre ordning av Taylorpolynomet.

3.2 Inversa funktioner

Efter att ha studerat sammansatta funktioner så frågar vi oss nu hur de analytiska egenskaperna påverkas vid invertering av funktioner. Detta leder oss till den inversa funktionssatsen för reellt analytiska funktioner.

Sats 3.3 (Theorem 1.5.3 i [3]). Låt $f \in C^\omega(I)$ för något öppet intervall $I \subseteq \mathbb{R}$. Om $\alpha \in I$ och $f'(\alpha) \neq 0$, då finns det ett område J kring α och en reellt analytisk funktion g , definierad på ett öppet intervall K som innehåller $f(\alpha)$ så att $g \circ f(x) = x$ för alla $x \in J$ och $f \circ g(x) = x$ för alla $x \in K$.

Bevis. Låt $\beta = f(\alpha)$. Eftersom g är en lokal invers till f så gäller att $f(g(y)) = y$. Genom att derivera med avseende på y får vi att $f'(g(y))g'(y) = 1$, alltså $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$. Vi introducerar funktionen $h(x) = \frac{1}{f'(x)}$. Vi kan då skriva $g'(y) = h(g(y))$.

Från Sats 2.11 ser vi att $h(x)$ tydligt är reellt analytisk i ett öppet intervall kring α . Sats 2.21 säger att vi kan hitta konstanter $C > 0$ och $R > 0$ så att

$$|h^{(n)}(x)| \leq C \frac{n!}{R^n}$$

för alla x tillräckligt nära α . Från C^∞ -inversa funktions-satsen så gäller det för y tillräckligt nära β att $g(y)$ kommer vara nära α så att uppskattningen $h^{(n)}(x)$ kommer hålla för $x = g(y)$. Fixera ett y och $x = g(y)$. Vi hävdar då att det för positiva heltal j , gäller att

$$|g^{(j)}(y)| \leq j!(-1)^{j-1} \left(\frac{1}{2}\right) \frac{(2C)^j}{R^{j-1}}. \quad (23)$$

Vi bevisar detta med induktion. I fallet $j=1$ är det uppenbart att $g'(y) = h(g(y))$ och $|h(x)| \leq C$. Vi antar att (23) gäller för alla $j = 1, 2, \dots, n$ och visar att det gäller för $n+1$.

$$\begin{aligned} |g^{(n+1)}(y)| &\leq n! \sum_{\substack{k=k_1+\dots+k_n \\ n=k_1+\dots+nk_n}} \frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!} \frac{C}{R^k} \left(\left(\frac{1}{2}\right)2C\right)^{k_1} \dots \left((-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2}\right) \frac{(2C)^n}{R^{n-1}}\right)^{k_n} \\ &= n!(-1)^n \frac{(2C)^n}{R^n} C \sum_{\substack{k=k_1+\dots+k_n \\ n=k_1+\dots+nk_n}} \frac{(-1)^k k!}{k_1!k_2!\dots k_n!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{1}{2}\right)^{k_n} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} &= n!(-1)^n \frac{(2C)^n}{R^n} C \cdot 2(n+1) \binom{\frac{1}{2}}{n+1} \\ &= (n+1)!(-1)^n \binom{\frac{1}{2}}{n+1} \frac{(2C)^{n+1}}{R^n} \end{aligned} \quad (25)$$

där $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$ och där vi använder Lemma A.9 mellan (24) och (25). Vi verifierar nu ifall (23) uppfyller kravet som ges i Sats 2.21.

$$(-1)^{n-1} \binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2^n n!} \leq \frac{2^{n-1}(n-1)!}{2^n n!} = \frac{1}{2n} \leq \frac{1}{2} \quad \forall n \geq 1.$$

Vidare får vi att

$$|g^{(n)}(y)| \leq \frac{1}{2} n! \frac{(2C)^n}{R^{n-1}} = n! \frac{R}{2} \left(\frac{2C}{R}\right)^n = D \frac{n!}{S^n}$$

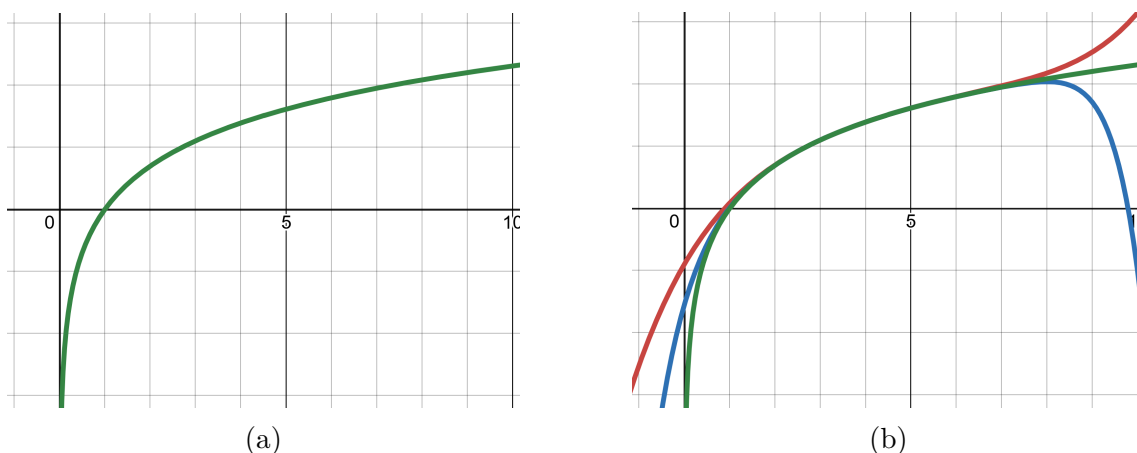
där $D = R/2$ och $S = R/(2C)$. Här beror D och S på R och C . Enligt Sats 2.21

säkerställs då att g är reellt analytisk i α . $\square$

Satsen påvisar ytterligare en egenskap hos reellt analytiska funktioner, nämligen att den inversa funktionen också besitter de analytiska egenskaperna, förutsatt att det för alla punkter α i funktionens definitionsmängd gäller att $f'(\alpha) \neq 0$. Ta funktionen $g(x) = x^2$ där $x \in \mathbb{R}$. Den är tydligen reellt analytisk i hela sin definitionsmängd men saknar ändå en entydig invers. Ett exempel där en entydig lösning blir extra tydlig är exponentialfunktionen, som visades i Exempel 2.8, då $f^{(n)}(x) = e^x$ aldrig är lika med noll för alla $n \in \mathbb{N}$ och $x \in \mathbb{R}$. Därmed finns det enligt Sats 3.3 en lokal invers till funktionen överallt som är reellt analytisk.

Exempel 3.4. Låt $f(x) = e^x$. I Exempel 2.8 visade vi att f är reellt analytisk för alla $x \in \mathbb{R}$. Dess derivata $f'(x) = e^x > 0$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Alltså är den inversa funktionen $g(x) = \ln x$ reellt analytisk på hela sin definitionsmängd. Vi undersöker nu även g grafiskt genom att skapa dess Taylorserie kring en punkt $\alpha > 0$. Via induktion kan vi bevisa att den n :te derivatan av g ges av, $g^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!x^{-n}$ för alla positiva heltal n . Taylorpolynomet runt en punkt $\alpha \neq 0$ är därmed lika med

$$P_{n-1}(x) = \ln \alpha + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{(-1)^{j+1}}{j} \left(\frac{x - \alpha}{\alpha} \right)^j. \quad (26)$$



Figur 4: Exempel 3.4 med funktionen i (a). I (b) syns funktionen (grön) och Taylorpolynomet som beskrivs i (26) kring $\alpha = 4$ av ordning 5 (röd) och 10 (blå).

Detta exempel illustrerar att inversen inte bara existerar utan också är reellt analytisk på hela sin definitionsmängd. I Figur (4) ser vi hur Taylorpolynomet för

inversen som visas i (26) närmar sig funktionens kurva för ökad ordning på polynomet. I Figur (4b) kan vi även visuellt se att konvergensradien är lika med α . När $|x - \alpha| > |\alpha|$ så avviker Taylorpolynomet från funktionens graf. Vid högre ordning eller när $n \rightarrow \infty$ blir detta ännu tydligare då polynomets graf exakt kommer sammanfalla med funktionens graf för $|x - \alpha| < |\alpha|$ och divergera för alla $|x - \alpha| > |\alpha|$.

4 Tillämpning: Lösning av ordinära differentialekvationer

Reellt analytiska funktioner är kraftfulla funktioner då de lokalt kan representeras av en unik potensserie. Ett område där de är särskilt användbara är inom teorin för differentialekvationer.

4.1 Cauchy–Kovalevskayas Sats

Cauchy–Kovalevskayas Sats är en av de mest fundamentala satserna för partiella differentialekvationer då den lokalt garanterar existens och entydighet av en analytisk lösning. Satsen säger att ett initialvärdesproblem alltid har en unik, lokal, analytisk lösning om alla ingående funktioner är analytiska. När problemet reduceras till funktioner av en variabel så kan satsen även appliceras för att lösa ordinära differentialekvationer. Oändligt deriverbara initialvärdesproblem har en lösning som lokalt är slät, enligt Sats A.10. Men, för att gå från oändligt deriverbar till reellt analytisk så krävs att vi kan kontrollera derivatornas tillväxt enligt Sats 2.21. Genom att skapa en majorantfunktion till den givna differentialekvationen så får vi en enklare ekvation vars lösning kan analyseras explicit.

Lemma 4.1. Låt $F(x)$ vara reellt analytisk i en omgivning av $x = 0$. Då finns en reellt analytisk funktion $G(x)$ som uppfyller $G^{(n)}(0) \geq |F^{(n)}(0)|$ för alla $n \in \mathbb{N}$. Vidare gäller att lösningen till den ordinära differentialekvationen

$$v'(t) = G(v(t)), \quad v(0) = 0$$

också är reellt analytisk i en omgivning av $t = 0$.

Bevis. Vi konstruerar nu majorantfunktionen G . Eftersom F är reellt analytisk

nära noll så gäller det att

$$|F^{(n)}(x)| \leq C \frac{n!}{R^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

där x ligger i ett öppet intervall kring noll och för något $C > 0$ och $R > 0$ enligt Sats 2.21. Vi sätter nu funktionen G till den geometriska serien

$$G(x) := C \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{R}\right)^n = C \frac{1}{1 - x/R} = \frac{CR}{R - x},$$

som är reellt analytisk i punkten $x = 0$ och har därmed en konvergensradie större än noll. Eftersom $G^{(n)}(0) = Cn!/R^n$ så uppfyller majoranten tydligt $G^{(n)}(0) \geq |F^{(n)}(0)|$ för alla $n \in \mathbb{N}$. För att slutföra beviset så beräknar vi v från ekvationen

$$\frac{d}{dt}v(t) = G(v(t)) = \frac{CR}{R - v(t)}, \quad v(0) = 0.$$

Vi gör detta genom variabelseparation. Sätt $w = R - v$ vilket leder till att $dv = -dw$. Vi får därmed:

$$-w \, dw = CR \, dt \implies -\frac{w^2}{2} = CRt + K.$$

Byt tillbaka till v , alltså $w = R - v$. Vi får då

$$-\frac{(R - v)^2}{2} = CRt + K \iff -(R - v)^2 = 2CRt + 2K.$$

Då det gäller att $v(0) = 0$ så måste $2K = -R^2$, vilket ger oss

$$(R - v)^2 = R^2 - 2CRt \iff v = R \pm R\sqrt{1 - \frac{2Ct}{R}}.$$

Med initialvillkoret $v(0) = 0$ ser vi att

$$v(t) = R - R\sqrt{1 - \frac{2Ct}{R}},$$

som är reellt analytisk för $|t| \leq R/(2C)$ vilket slutför beviset. □

I Lemma 4.1 så skapar vi en reellt analytisk majorantfunktion vars derivator dominerar den ursprungliga funktionens derivator. Vi kan nu formulera huvudresultatet för ordinära differentialekvationer.

Sats 4.2 (Theorem 1.1 i [6]). Antag att $a > 0$ och att $F : (-a, a) \rightarrow \mathbb{R}$ är reellt analytisk i ett intervall kring noll och $u(t)$ är den unika lösningen till den ordinära differentialekvationen

$$\frac{d}{dt}u(t) = F(u(t)), \quad \text{med} \quad u(0) = 0.$$

Då är u också reellt analytisk i ett intervall kring noll.

Bevis. Eftersom F är reellt analytisk och därmed oändligt deriverbar så gäller det enligt Sats A.10 att $u \in C^\infty(I)$, där I är ett öppet intervall kring noll. Vi kan då derivera u upprepade gånger med hjälp av Sats A.5.

$$\begin{aligned} u^{(1)}(t) &= F(u(t)) \\ u^{(2)}(t) &= F^{(1)}(u(t)) \cdot F(u(t)) \\ u^{(3)}(t) &= F^{(2)}(u(t)) \cdot F(u(t))^2 + F^{(1)}(u(t))^2 \cdot F(u(t)) \end{aligned}$$

och så vidare. Varje derivata $u^{(n)}(t)$ är därmed lika med ett polynom i derivator av $F^{(i)}(u(t))$ för $i = 0, 1, \dots, n-1$. Alltså gäller att

$$u^{(n)}(t) = p_n \left(F^{(0)}(u(t)), \dots, F^{(n-1)}(u(t)) \right).$$

Med monotonicitet härleder vi att

$$|u^{(n)}(0)| \leq p_n \left(|F^{(0)}(0)|, \dots, |F^{(n-1)}(0)| \right) \leq p_n \left(G^{(0)}(0), \dots, G^{(n-1)}(0) \right), \quad (27)$$

då polynomet, p_n i (27), endast innehåller positiva koefficienter eftersom $|F^{(i)}(u(t))| \geq 0$. G är en funktion med icke-negativa derivator så att $G^{(n)}(0) \geq |F^{(n)}(0)|$ för alla $n \in \mathbb{N}$. En sådan funktion G existerar enligt Lemma 4.1 och är en majorant funktion till F . Men polynomet av $G^{(i)}(0)$ för $i = 0, 1, \dots, n-1$ är exakt lika med

$$p_n \left(G^{(0)}(0), \dots, G^{(n-1)}(0) \right) = v^{(n)}(0) = |v^{(n)}(0)|$$

där v löser hjälpekvationen

$$\frac{d}{dt}v(t) = G(v(t)), \quad v(0) = 0.$$

Från Lemma 4.1 vet vi att v är reellt analytisk runt $t = 0$. Därför gäller det att

potensserien

$$S_v(t) := \sum_{n=0}^{\infty} v^{(n)}(0) \frac{t^n}{n!}$$

har en konvergensradie större än noll. Genom att se till olikheten i (27) så har då även potensserien

$$S_u(t) := \sum_{n=0}^{\infty} |u^{(n)}(0)| \frac{t^n}{n!}$$

en konvergensradie större än noll enligt jämförelsekriteriet. Alltså är $u(t)$ reellt analytisk i en omgivning av $t = 0$. $\square$

Satsen visar att de analytiska egenskaperna hos initialvärdesproblemet är bevarat under lösning av en ordinär differentialekvation.

Följdsats 4.3. Observera differentialekvationen i Sats 4.2. Ifall $F(0) = 0$ så gäller det att $u(t) = 0$.

Anmärkning 4.4. Följdsats 4.3 grundar sig i unikheten av lösningen. Funktionen

$$u(t) \equiv 0$$

är uppenbart en lösning eftersom $F(0) = 0$. Om u_1 och u_2 är två lösningar till samma initialvärdesproblem följer det av Picard–Lindelöfs Sats, vilket exempelvis hittas i Theorem 2.2 i [5], att lösningen är unik, vilket innebär att $u_1 = u_2$.

För att illustrera Sats 4.2 så studerar vi nu ett konkret initialvärdesproblem. Exemplet visar en Riccatiekvation, vilket är en, icke-linjär, ordinär differentialekvation av första ordningen. Även om Riccatiekvationen i Exempel 4.5 har en explicit lösning så använder vi problemet för att påvisa att lösningen som konstrueras med potensserier exakt representerar den explicita lösningen.

Exempel 4.5. Vi ser till den ordinära differentialekvationen

$$u'(t) = 3u(t) + u(t)^2 + 2, \quad u(0) = 0. \quad (28)$$

Eftersom högerledet är reellt analytiskt med avseende till u , så finns det en reellt analytisk lösning enligt Sats 4.2. Låt

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad |t| < R. \quad (29)$$

Det gäller då att den deriverade serien har samma konvergensradie och är lika med

$$u'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n, \quad |t| < R. \quad (30)$$

Produkten $u(t)^2$ ges enligt Sats 2.9 av

$$u(t)^2 = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) t^n, \quad |t| < R. \quad (31)$$

Initialvärdesproblemet i (28) kan med hjälp av potensserierna i (29), (30) och (31) skrivas om som

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n = 2 + 3 \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) t^n, \quad a_0 = 0,$$

för $|t| < R$. Vi ser nu till koefficienterna framför t^n där $n \in \mathbb{N}$ och använder rekursion för att få fram fler koefficienter. Det rekursiva sambandet för naturliga tal n större eller lika med 1 ges av

$$a_{n+1} = \frac{3a_n + \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}}{n+1}.$$

Vi beräknar nu de första koefficienterna.

$$\begin{aligned} a_1 &= 2, \\ a_2 &= \frac{3a_1 + \sum_{k=0}^1 a_k a_{1-k}}{2} = 3, \\ a_3 &= \frac{3a_2 + \sum_{k=0}^2 a_k a_{2-k}}{3} = \frac{13}{3}, \\ a_4 &= \frac{3a_3 + \sum_{k=0}^3 a_k a_{3-k}}{4} = \frac{25}{4}. \end{aligned}$$

Genom att fortsätta rekursionen erhålls fler koefficienter och ett mer exakt Taylorpolynom. Lösningen till initialvärdesproblemet i (28) ges därmed av

$$u(t) = 2t + 3t^2 + \frac{13}{3}t^3 + \frac{25}{4}t^4 + \dots \quad (32)$$

Den ordinära differentialekvationen i (28) har även en sluten lösning av elementära funktioner, nämligen

$$u(t) = \frac{2(e^t - 1)}{2 - e^t},$$

vars Taylorpolynom i ett intervall kring $t = 0$ ges av

$$\frac{2(e^t - 1)}{2 - e^t} = 2t + 3t^2 + \frac{13}{3}t^3 + \frac{25}{4}t^4 + \dots$$

Detta verifierar att lösningen som konstruerats med hjälp av potensserier faktiskt är den unika lösningen till initialvärdesproblemet.

Exemplet visar hur vi kan använda Sats 4.2. Rekursionen för koefficienterna gör det möjligt att beräkna lösningen, term för term. Vi ser nu till en ordinär differentialekvation där en explicit lösning saknas vilket gör metoden med potensserier till den huvudsakliga metoden att konstruera en lösning.

Exempel 4.6. Låt

$$u'(t) = e^{-u(t)^2}, \quad u(0) = 0, \quad (33)$$

vara den ordinära differentialekvationen vi ska lösa. Eftersom $F(u) = e^{-u^2}$ är reellt analytisk med avseende på u så garanteras en reellt analytisk lösning enligt Sats 4.2. Låt

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \quad |t| < R.$$

Med begynnelsevillkoret, $u(0) = 0$, får vi att $a_0 = 0$ vilket leder till uttrycket för $u(t)$ som

$$u(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n = a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5 + \dots, \quad |t| < R. \quad (34)$$

Den deriverade serien kommer också vara reellt analytisk enligt Sats 2.4 och är lika med

$$\begin{aligned} u'(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} n a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n \\ &= a_1 + 2a_2 t + 3a_3 t^2 + 4a_4 t^3 + 5a_5 t^4 + 6a_6 t^5 + \dots, \end{aligned} \quad (35)$$

för $|t| < R$. Vi ser nu till $F(u(t)) = e^{-u(t)^2}$ och skapar Taylorserien enligt

$$e^{-u(t)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} u(t)^{2n} = 1 - u(t)^2 + \frac{u(t)^4}{2!} - \frac{u(t)^6}{3!} + \dots \quad (36)$$

Med hjälp av Sats 2.9 beräknar vi $u(t)^2$ och får då för $|t| < R$ att

$$\begin{aligned} u(t)^2 &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} \right) t^n \\ &= a_1^2 t^2 + 2a_1 a_2 t^3 + (a_2^2 + 2a_1 a_3) t^4 + (2a_1 a_4 + 2a_2 a_3) t^5 + \dots \end{aligned} \quad (37)$$

Vi uttrycker även $u(t)^4$ i potenser av t genom att använda (37).

$$u(t)^4 = \left(u(t)^2 \right)^2 = a_1^4 t^4 + 4a_1^3 a_2 t^5 + \dots, \quad |t| < R. \quad (38)$$

Insättning av (37) och (38) i (36) ger oss

$$\begin{aligned} e^{-u(t)^2} &= 1 - a_1^2 t^2 - 2a_1 a_2 t^3 + \left(\frac{1}{2} a_1^4 - 2a_1 a_3 - a_2^2 \right) t^4 \\ &\quad + \left(2a_1^3 a_2 - 2a_1 a_4 - 2a_2 a_3 \right) t^5 + \dots \end{aligned} \quad (39)$$

Vi jämför nu koefficienterna framför t^n där $n \in \mathbb{N}$ för uttrycken i (35) och (39). Efter koefficientmatchning och rekursion upp till och med ordning 6 erhålls lösningen

$$u(t) = t - \frac{1}{3} t^3 + \frac{7}{30} t^5 + \dots,$$

där fler termer i polynomet kan beräknas genom vidare rekursion och jämföring av koefficienterna mellan (35) och (39). Genom att lösa initialvärdesproblemet i (33) med variabelseparation får man

$$\int_0^{u(t)} e^{y^2} dy = t,$$

vilket inte är en sluten lösning av elementära funktioner.

5 Sammanfattning och slutsatser

Reellt analytiska funktioner är en funktionsklass med hög strukturell stabilitet. Under algebraiska operationer, sammansättning och inversion bibehåller de sina analytiska egenskaper. Sambandet till Taylorserier ger oss praktiska kriterier för att undersöka derivatans tillväxt och på så sätt analyticiteten. Om det finns konstanter $C, R > 0$ så att $|f^{(n)}(x)| \leq Cn!/R^n$ för alla $n \in \mathbb{N}$ i ett område kring x så garanteras att funktionen är reellt analytisk där. Vidare har reellt analytiska funktioner egenskapen att de, lokalt, fullständigt bestäms av sina derivator i en enda punkt. Lokal information om funktionen räcker därmed för att bestämma funktionen på hela det sammanhängande intervallet där den är reellt analytisk. Denna unikheter är en egenskap som särskiljer reellt analytiska funktioner från oändligt deriverbara funktioner.

Den rigida struktur som reellt analytiska funktioner besitter gör de särskilt användbara inom differentialekvationsteorin. För reellt analytiska initialvärdesproblem garanteras existensen av en reellt analytisk lösning, vilket i sin tur möjliggör konstruktion av lösning med hjälp av potensserier. Dessa funktioner är därmed inte bara teoretiskt intressanta, utan har även praktiska användningsområden som hjälper oss lösa matematiska problem.

Eftersom uppsatsen undersöker reellt analytiska funktioner av en variabel så finns det flera intressanta områden för vidare undersökning. Några av dessa områden är:

1. Reellt analytiska funktioner i flera dimensioner.
2. Komplext analytiska funktioner och hur en reellt analytisk funktion i $\mathbb{R}$ kan fortsättas till en holomorf funktion i $\mathbb{C}$.
3. Partiella differentialekvationer och hur Cauchy–Kovalevskayas Sats tillämpas vid initialvärdesproblem i flera variabler.

Referenser

- [1] Gerald B. Folland. *Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications*. 2. utg. Pure and Applied Mathematics. New York: John Wiley & Sons, 1999. ISBN: 0-471-31716-0.
- [2] George B. Thomas Jr., Maurice D. Weir och Joel Hass. *Thomas' Calculus: Early Transcendentals*. 13. utg. Boston: Pearson, 2014. ISBN: 978-0-321-88407-7.
- [3] Steven G. Krantz och Harold R. Parks. *A Primer of Real Analytic Functions*. 2. utg. Boston: Birkhäuser, 2002. ISBN: 978-1-4612-6412-5.
- [4] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. 3. utg. New York: McGraw-Hill, 1976. ISBN: 0-07-054235-X.
- [5] Gerald Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. Providence, RI: American Mathematical Society, 2012. ISBN: 978-0-8218-8328-0.
- [6] Uppsala universitet. *The Cauchy–Kovalevskaya Theorem*. Föreläsningsanteckning. u.å. URL: <https://www2.math.uu.se/~danga916/1MA216/CK.pdf>.

A Appendix

A.1 Kompletterande satser och lemmen

I detta appendix samlas tekniska satser, lemmen och hjälpresultat som används i uppsatsen, men som inte är centrala för det huvudsakliga framställningen.

Sats A.1 (Theorem 7.11 i [4]). Antag att $f_n \rightarrow f$ likformigt på en mängd E i ett metriskt rum. Låt x vara en gränspunkt av E och antag att

$$\lim_{t \rightarrow x} f_n(t) = A_n, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (40)$$

Då konvergerar $\{A_n\}$ och

$$\lim_{t \rightarrow x} f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n. \quad (41)$$

Alltså gäller det att

$$\lim_{t \rightarrow x} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{t \rightarrow x} f_n(t). \quad (42)$$

Bevis. Låt $\epsilon > 0$ vara givet. Genom den likformiga konvergensen av $\{f_n\}$ så existerar det ett N så att det för $n \geq N$, $m \geq N$, $t \in E$ implicerar att

$$|f_n(t) - f_m(t)| \leq \epsilon. \quad (43)$$

Låter vi $t \rightarrow x$ i (43) så får vi

$$|A_n - A_m| \leq \epsilon$$

för $n \geq N$, $m \geq N$, så att $\{A_n\}$ är en Cauchyföljd och konvergerar därför till A . Vi ser nu till olikheten

$$|f(t) - A| \leq |f(t) - f_n(t)| + |f_n(t) - A_n| + |A_n - A|. \quad (44)$$

Vi väljer ett n så att

$$|f(t) - f_n(t)| \leq \frac{\epsilon}{3} \quad (45)$$

för alla $t \in E$ (vilket är möjligt på grund av den likformiga konvergensen), och så

att

$$|A_n - A| \leq \frac{\epsilon}{3}. \quad (46)$$

För det givna värdet på n så väljer vi ett område V runt x så att

$$|f_n(t) - A_n| \leq \frac{\epsilon}{3} \quad (47)$$

ifall $t \in V \cap E$, $t \neq x$. Genom att ersätta olikheterna från (45), (46) och (47) till olikheten i (44) så ser vi att

$$|f(t) - A| \leq \epsilon$$

givet att $f \in V \cap E$, $t \neq x$. Detta är exakt lika med (41). $\square$

Sats A.2 (Theorem 7.17 i [4]). Antag att $\{f_n\}$ är en funktionsföljd, differentierbar på $[a, b]$ och så att $\{f_n(x_0)\}$ konvergerar för någon punkt x_0 på $[a, b]$. Ifall $\{f'_n\}$ konvergerar likformigt på $[a, b]$, då gäller det att $\{f_n\}$ konvergerar likformigt på $[a, b]$ till en funktion f , och

$$f'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x), \quad a \leq x \leq b \quad (48)$$

Bevis. Låt $\epsilon > 0$ vara givet. Välj ett N så att $n \geq N$ och $m \geq N$ implicerar att

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\epsilon}{2} \quad (49)$$

och,

$$|f'_n(t) - f'_m(t)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}, \quad a \leq t \leq b. \quad (50)$$

Om vi nu applicerar Medelvärdessatsen till funktionen $f_n - f_m$, så får vi från (50) att

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| \leq \frac{|x-t|\epsilon}{2(a-b)} \leq \frac{\epsilon}{2} \quad (51)$$

för alla x och t på $[a, b]$, givet $n \geq N$ och $m \geq N$. Olikheten

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_0) + f_m(x_0)| + |f_n(x_0) - f_m(x_0)|$$

implicerar, genom (49) och (51), att

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon$$

för ett $a \leq x \leq b$ och $n \geq N$, $m \geq N$. Alltså konvergerar $\{f_n\}$ likformigt på $[a, b]$. Låt

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Vi fixerar en punkt x på $[a, b]$ och definierar

$$\phi_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t - x}, \quad \phi(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad (52)$$

för $a \leq t \leq b$, $t \neq x$. Då gäller det att

$$\lim_{t \rightarrow x} \phi_n(t) = f'_n(x), \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (53)$$

Olikheten i (51) visar att

$$|\phi_n(t) - \phi_m(t)| \leq \frac{\epsilon}{2(b-a)}, \quad n \geq N, m \geq N,$$

så att $\{\phi_n\}$ konvergerar likformigt för $t \neq x$. Eftersom $\{f_n\}$ konvergerar till f så kan vi från (52) dra slutsatsen att

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = \phi(t) \quad (54)$$

likformigt för $a \leq t \leq b$, $t \neq x$. Om vi nu applicerar Sats A.1 till $\{\phi_n\}$ så visar (53) och (54) att

$$\lim_{t \rightarrow x} \phi(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x)$$

och detta är precis (48) enligt definitionen av $\phi(t)$. □

Lemma A.3 (Lemma 1.1.11 i [3]). För $-\infty < M < \infty$ och positiva heltal n gäller det att

$$1 + M \sum_{j=0}^{n-1} (1 + M)^j = (1 + M)^n.$$

Bevis. Vi visar detta med hjälp av induktion. För $n = 1$ får vi att

$$1 + M \sum_{j=0}^0 (1 + M)^j = 1 + M \cdot (1 + M)^0 = 1 + M = (1 + M)^1.$$

Alltså stämmer basfallet. Vi antar nu att påståendet stämmer för $n = k$ så att

$$1 + M \sum_{j=0}^{k-1} (1 + M)^j = (1 + M)^k.$$

För $n = k + 1$ får vi då att

$$\begin{aligned} 1 + M \sum_{j=0}^k (1 + M)^j &= 1 + M \left(\sum_{j=0}^{k-1} (1 + M)^j + (1 + M)^k \right) \\ &= 1 + M \sum_{j=0}^{k-1} (1 + M)^j + M(1 + M)^k. \end{aligned}$$

Med induktionsantagandet blir uttrycket

$$\begin{aligned} 1 + M \sum_{j=0}^{k-1} (1 + M)^j + M(1 + M)^k &= (1 + M)^k + M(1 + M)^k \\ &= (1 + M)^{k+1}. \end{aligned}$$

□

Sats A.4 (Theorem 1.3.1 i [3]). För positiva heltal k och n så gäller det att

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^k = \sum \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

där summan tas över alla $k_1, k_2, \dots, k_n$ som uppfyller $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$. Multinomialkoefficienten definieras enligt

$$\binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_n!}.$$

Sats A.5 (Theorem 1.3.2 i [3]). Låt $I \subseteq \mathbb{R}$ vara ett öppet intervall och antag att $f \in C^\infty(I)$. Antag även att $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow J \subseteq \mathbb{R}$ och att $g \in C^\infty(J)$. Då ges derivatan

av $h = g \circ f$ för $t \in I$ enligt

$$h^{(n)}(t) = \sum \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!} g^{(k)}(f(t)) \left(\frac{f^{(1)}(t)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{f^{(2)}(t)}{2!}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{f^{(n)}(t)}{n!}\right)^{k_n},$$

där $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ och summan går över alla lösningar till $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$.

Bevis. När vi deriverar den sammansatta funktionen $g \circ f$ många gånger så används kedjeregeln och produktregeln upprepade gånger. Termerna som bildas kommer vara en kombination av olika ordningens derivator från f och g . Genom upprepad kedjeregeln och produktregel för derivering måste uttrycket för den n :te derivatan ha formen

$$h^{(n)}(t) = \sum C(n, k_1, k_2, \dots, k_n) g^{(k)}(f(t)) (f^{(1)}(t))^{k_1} (f^{(2)}(t))^{k_2} \dots (f^{(n)}(t))^{k_n},$$

där den icke-negativa koefficienten $C(n, k_1, k_2, \dots, k_n)$ är oberoende av vårt val av f och g , sålängde $f \in C^\infty(I)$ och $g \in C^\infty(J)$. Det gäller även att $k = k_1 + k_2 + \dots + k_n$ och summan går över alla lösningar till $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$. Vi sätter nu ett fixt värde på k och n . Låt

$$\begin{aligned} g(x) &= x^k \\ f(t) &= a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_n t^n \end{aligned}$$

där a_i är reella koefficienter. Med Sats A.4 ser vi att $h = g \circ f$ ger oss

$$\begin{aligned} h(t) &= (f(t))^k = \sum \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n} (a_1 t)^{k_1} (a_2 t^2)^{k_2} \dots (a_n t^n)^{k_n} \\ &= \sum \frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!} a_1^{k_1} \dots a_n^{k_n} t^{k_1+2k_2+\dots+nk_n}, \end{aligned}$$

där summan tas över alla $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$ som uppfyller $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$. Vi får då

$$h^{(n)}(0) = \sum \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n} n! \left(\prod_{i=1}^n a_i^{k_i} \right).$$

Här tas summan över alla $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$ som uppfyller $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ och $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$. Vidare så har vi även att

$$h^{(n)}(0) = \sum C(n, k_1, k_2, \dots, k_n) k! (1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \dots (n!)^{k_n} \left(\prod_{i=1}^n a_i^{k_i} \right),$$

där summan tas över samma villkor för $k_1, k_2, \dots, k_n$ som tidigare. Vi får $k!$ på grund

av att $g^{(l)}(0)$ är nollskilt enbart när $l = k$, alltså $g^{(k)}(0) = k!$. Vi får därmed att

$$\sum C(n, k_1, k_2, \dots, k_n) k!(1!)^{k_1} \dots (n!)^{k_n} \left(\prod_{i=1}^n a_i^{k_i} \right) = \sum \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n} n! \left(\prod_{i=1}^n a_i^{k_i} \right)$$

gäller för alla val av $a_1, a_2, \dots, a_n$ där båda summorna är över alla $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$ som uppfyller $k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ och $k_1 + 2k_2 + \dots + nk_n = n$. Det enda sättet som likheten håller för alla val av $a_1, a_2, \dots, a_n$ är om koefficienterna på båda sidorna är lika. Vi får då att

$$\begin{aligned} C(n, k_1, k_2, \dots, k_n) &= \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_n} \frac{n!}{(1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \dots (n!)^{k_n}} \frac{1}{k!} \\ &= \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \frac{1}{(1!)^{k_1} (2!)^{k_2} \dots (n!)^{k_n}}, \end{aligned}$$

vilket slutför beviset. □

Lemma A.6 (Lemma 1.4.1 i [3]). För positiva heltal n och positiva reella tal R så gäller det att

$$\sum_{\substack{k=k_1+\dots+k_n \\ n=k_1+\dots+nk_n}} \frac{k!}{k_1! k_2! \dots k_n!} R^k = R(1+R)^{n-1},$$

där $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$.

Bevis. Ta funktionerna $f(t) = \frac{1}{1-t}$ och $g(x) = \frac{1}{1-R(x-1)}$. Dessa funktioner kan även skrivas som serier, där

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} t^n, & |t| < 1 \\ g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} R^n (x-1)^n, & |R(x-1)| < 1. \end{aligned}$$

Det sammansatta funktionen $h(t) = g \circ f(t)$ blir då

$$\begin{aligned}
h(t) &= g \circ f(t) = \frac{1}{1 - R\left(\frac{1}{1-t} - 1\right)} = \frac{1-t}{1 - (1+R)t} \\
&= \frac{1 - (1+R)t + Rt}{1 - (1+R)t} = 1 + \frac{Rt}{1 - (1+R)t} \\
&= 1 + Rt \sum_{n=0}^{\infty} (1+R)^n t^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} R(1+R)^{n-1} t^n, \quad |(1+R)t| < 1.
\end{aligned}$$

Om vi utvärderar f i $t = 0$ och därmed $x = f(0) = 1$ så får vi att $f^{(n)}(0) = n!$ och $g^{(k)}(f(0)) = g^{(k)}(1) = k!R^k$. Vidare kan vi med uttrycket för $h(x)$ få fram ett uttryck för den n :te derivatan som $h^{(n)}(0) = n!R(1+R)^{n-1}$ för positiva heltal n . Sats A.5 säger även att derivatan kommer vara lika med

$$\begin{aligned}
h^{(n)}(0) &= \sum_{\substack{k=k_1+\dots+k_n \\ n=k_1+\dots+nk_n}} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!} g^{(k)}(1) \left(\frac{f^{(1)}(0)}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{f^{(2)}(0)}{2!}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right)^{k_n} \\
&= \sum_{\substack{k=k_1+\dots+k_n \\ n=k_1+\dots+nk_n}} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!} k!R^k,
\end{aligned}$$

där $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$. Men vi har även att $h^{(n)}(0) = n!R(1+R)^{n-1}$. Alltså måste de två uttrycken för $h^{(n)}(0)$ vara lika, vilket ger oss

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{k=k_1+\dots+k_n \\ n=k_1+\dots+nk_n}} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!} k!R^k &= n!R(1+R)^{n-1} \\
&\iff \\
\sum_{\substack{k=k_1+\dots+k_n \\ n=k_1+\dots+nk_n}} \frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!} R^k &= R(1+R)^{n-1},
\end{aligned}$$

där $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$. Vilket slutför beviset. □

Lemma A.7 (Lemma 1.5.1 i [3]). För varje $a \in \mathbb{R}$ och t som uppfyller $-1 < t < 1$ så gäller det att

$$(1+t)^a = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{a}{j} t^j$$

där

$$\binom{a}{j} = \frac{a(a-1)\dots(a-j+1)}{j!}$$

för positiva heltal j och där $\binom{a}{0} = 1$

Lemma A.8. För varje $m \geq 0$ gäller det att

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{-m} e^{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

Bevis. Låt $t = 1/x^2$. Vi får då att

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x|^{-m} e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{m}{2}} e^{-t} = 0.$$

Vilket slutför beviset. □

Lemma A.9 (Lemma 1.5.2 i [3]). För positiva heltal n gäller det att

$$\sum_{\substack{k=k_1+\dots+k_n \\ n=k_1+\dots+nk_n}} \frac{(-1)^k k!}{k_1! k_2! \dots k_n!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{1}{2}\right)^{k_n} = 2(n+1) \binom{\frac{1}{2}}{n+1},$$

där $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$.

Bevis. Låt $f(t) = 1 - \sqrt{1-2t}$ och $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Det är uppenbart att $h(t) = g \circ f(t) = \frac{1}{\sqrt{1-2t}} = f'(t)$ vilket ger oss att $h^{(n)}(t) = f^{(n+1)}(t)$. Från Lemma A.7 har vi att

$$(1-2t)^{1/2} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{j} (-2t)^j.$$

Vi kan därmed skapa serier av både f och g enligt:

$$f(t) = 1 - (1-2t)^{1/2} = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{j} (-2t)^j = - \sum_{j=1}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{j} (-2t)^j, \quad -0.5 < t < 0.5$$

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} x^j, \quad -1 < x < 1$$

För positiva heltal j gäller det att

$$f^{(j)}(0) = -j! \binom{\frac{1}{2}}{j} (-2)^j,$$

$$g^{(k)}(f(0)) = k!.$$

Eftersom $f^{(n+1)}(t) = h^{(n)}(t)$ kan vi med Sats A.5 skriva derivatan som

$$\begin{aligned}
h^{(n)}(0) &= n! \sum_{\substack{k=k_1+\dots+k_n \\ n=k_1+\dots+nk_n}} \frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!} \left(-\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{k_1} \dots \left(-\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{k_n} (-2)^n \\
&= (-2)^n n! \sum_{\substack{k=k_1+\dots+k_n \\ n=k_1+\dots+nk_n}} \frac{(-1)^k k!}{k_1!k_2!\dots k_n!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{2}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{1}{2}\right)^{k_n} \\
&= -(n+1)! \binom{\frac{1}{2}}{n+1} (-2)^{n+1} = f^{(n+1)}(0)
\end{aligned}$$

där $k_1, k_2, \dots, k_n \geq 0$. Genom att dela ekvationen med $n!(-2)^n$ erhåller vi resultatet i lemmat. □

Sats A.10 (Theorem 2.10 i [5]). Antag att $F \in C^\infty(J)$, där J är ett icke-tomt intervall kring u_0 , och låt $u(t)$ vara den lokala lösningen till differentialekvationen

$$u'(t) = F(u(t)), \quad u(t_0) = u_0.$$

Då finns det ett intervall $I = (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \subset J$, för ett $\delta > 0$, sådant att lösningen är definierad på intervallet och $u \in C^\infty(I)$.