



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Varianter av solitär

av

Linda Skaring

2026 - L10

Varianter av solitär

Linda Skaring

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Per Alexandersson

2026

Sammanfattning

Syftet med denna uppsats är visa att den femte raden är omöjlig att nå inom solitärspelen Conways soldater. Spelet började analyseras redan 1961 av John Horton Conway. För att bevisa detta används det matematiska verktyget invariansprincipen. Även det gyllene snittet spelar roll i beviset, då det oväntat framträder. Genom att skapa en viktad funktion, kan man förstå hur ett visst värde förändras genom spelets gång och därmed bevisa att det aldrig ökar på det sätt som krävs för att den femte raden ska vara nåbar.

Uppsatsen behandlar också andra varianter av spelet, såsom Conways soldater där diagonala hopp är tillåtna, samt den triangulära versionen Pablitos Soldater. Dessa exempel visar hur små förändringar i regler eller spelplan kan påverka vilka positioner eller rader som är möjliga att nå.

Abstract

The purpose of this thesis is to show that the fifth row is impossible to reach in the solitaire game Conway's Soldiers. The game was first analyzed in 1961 by John Horton Conway. The proof is based on the mathematical principle of invariance. The golden ratio also plays an important role in the argument, appearing in an unexpected way. By constructing a weighted function, it becomes possible to study how a certain value changes during the game and thereby prove that it can never increase in the manner required for the fifth row to be reached.

The thesis also examines other variants of the game, including a version of Conway's Soldiers in which diagonal jumps are allowed, as well as the triangular version Pablito's Army. These examples demonstrate how small changes to the rules or the structure of the board can affect which positions or rows are possible to reach.

Innehåll

1	Introduktion	8
2	Conways Soldater	8
2.1	Problembeskrivning och regler	9
2.2	Möjliga rader i Conways soldatproblem	9
3	Analysverktyg	12
3.1	Invariant	12
3.1.1	Pagodafunktion	12
3.1.2	Dominoproblemet	13
3.2	Gyllene snittet	14
4	Conways bevis	14
4.1	Beräkning av Conways bevis	17
4.2	Beräkning av rader	17
4.3	Analys av bevis	19
5	Andra varianter	20
5.1	Om diagonala hopp är tillåtna	21
5.1.1	Maximal räckvidd vid diagonala hopp	23
5.2	Skew, enbart diagonala hopp	25
5.3	Triangulärt spelbräde, Pablitos soldater	25
5.3.1	Invariant för Pablitos soldater	26
5.3.2	Analys av rader	26
5.3.3	Nåbara rader för Pablitos soldater	28
6	Slutsats	30
	Referenser	31

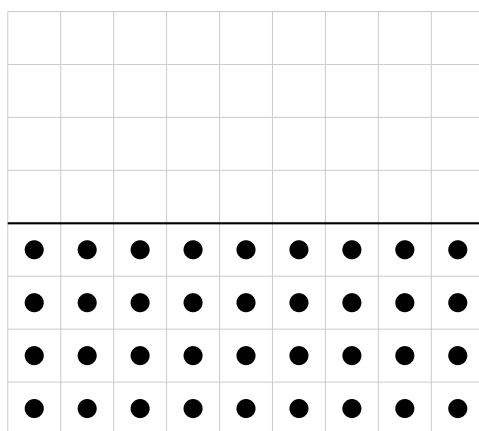
1 Introduktion

Solitär är en grupp av populära spel där man spelar ensam. Namnet härstammar från latinets *solitarius* som betyder just "ensam". Det finns flera versioner av spelet, bland annat har vi patienser där man använder en kortlek och olika träspel där spelet går ut på att tömma ett bräde. Vi har bland annat brädspelen *peg solitaire*, som spelades i Frankrike redan på 1900-talet. Gemensamt för alla dessa solitärspel är att man genom strategi och logik ska lösa spelet, antingen med kort, pjäser eller brickor.

I denna uppsats kommer fokuset ligga på solitärspel som spelas på rutnät, precis som *peg solitaire*. Exemplevis Conways soldater, som inte enbart har fungerat som underhållning, utan även väckt intressanta matematiska frågeställningar.

2 Conways Soldater

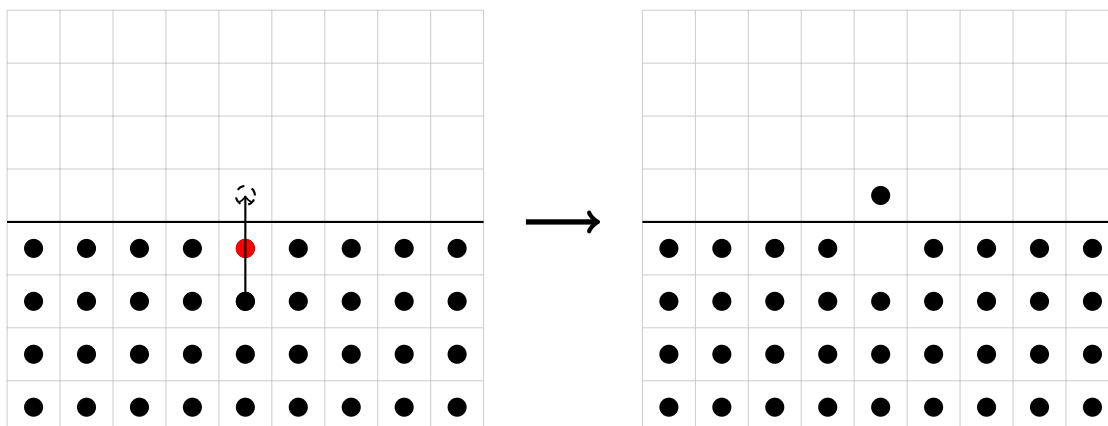
Conways soldater som är väldigt lik *peg solitaire*, är ett solitärspel som spelas på ett oändligt schackbräde. Brädet är uppdelat i två delar, övre och undre, som avdelas med hjälp av en horisontell linje. Ovanför linjen finns det ett obegränsat antal tomma rutor, se Figur 1. Under linjen finns det även där obegränsat med rutor som dock är fyllda med spelpjäser som kallas soldater [BHGG07].



Figur 1: Conways soldater, del av spelplan.

2.1 Problembeskrivning och regler

Spelet går till så att en soldat hoppar över en annan, den överhoppade soldaten tas då bort från spelplanen. Se illustrationen i Figur 2.



Figur 2: Conways soldater, ett hopp.

Till skillnad från peg solitaire där målet är att få bort alla spelpjäser, så går Conways soldater ut på att komma så långt ovanför den horisontella linjen som möjligt.

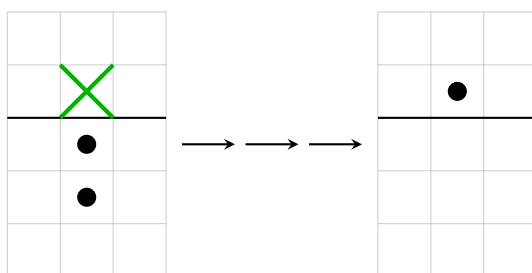
Regler för Conways Soldater:

- En soldat får enbart förflyttas till en tom ruta, genom att hoppa över en annan soldat. Den överhoppade soldaten måste stå i en grannruta (precis som i Figur 2). Soldaten som hoppas över får stå horisontellt eller vertikalt intill (inte diagonalt).
- Hoppen leder till att den överhoppade soldaten tas bort.
- Målet med spelet är att få en soldat så långt som möjligt ovanför linjen.

2.2 Möjliga rader i Conways soldatproblem

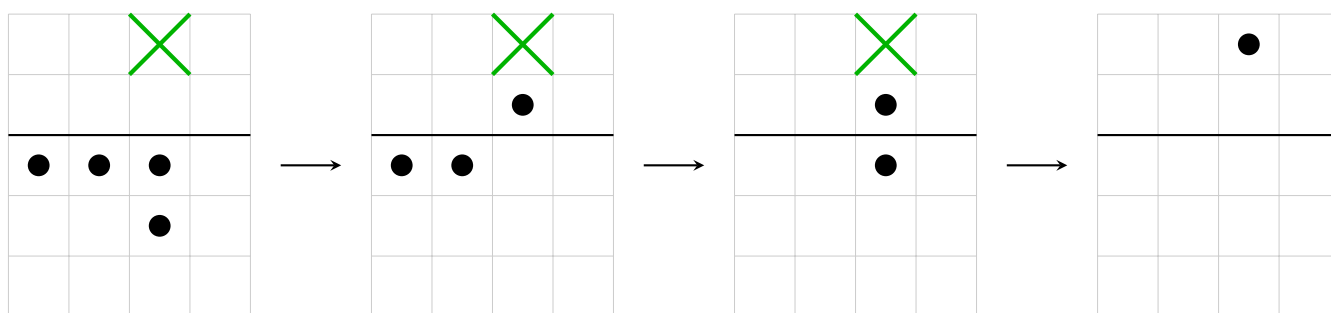
För att uppnå de olika raderna i spelet så behövs olika antal soldater arrangerade på ett visst sätt.

För att nå rad 1: För att nå rad 1 behövs det 2 soldater i formationen nedan [Wei].



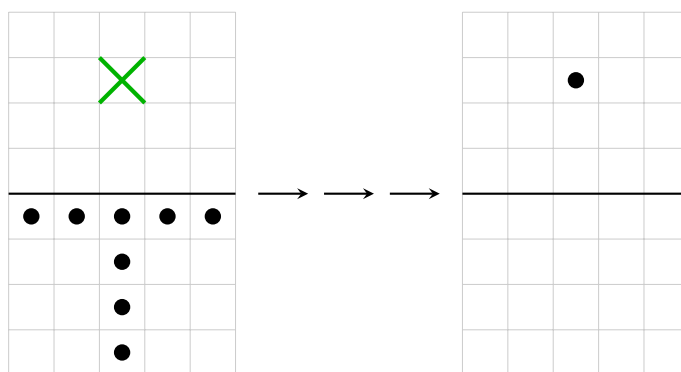
Figur 3: Conways soldater, nå rad 1.

Nå rad 2: För att nå rad 2 så behövs det minst 4 soldater. Soldaterna ska då ha denna formation [Wei].



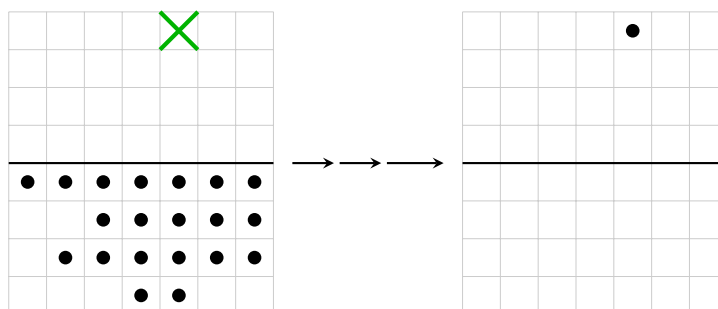
Figur 4: Conways soldater, nå rad 2.

Nå rad 3: För att kunna nå rad 3 är det ännu fler soldater som behövs, detta gör det även svårare att uppnå. Antalet soldater som behövs är då minst 8, i denna formation [Wei].



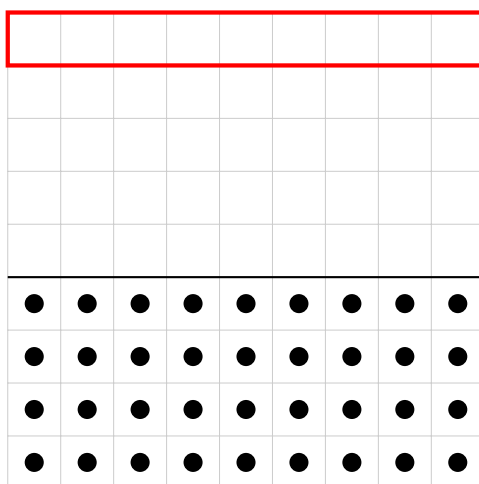
Figur 5: Conways soldater, nå rad 3.

Nå rad 4: För rad 1, 2 och 3 behövdes 2, 4 och 8 soldater. Man skulle då kunna tro att antalet fördubblas för varje rad. Detta skulle då innebära att vi behöver 16 soldater för att nå rad 4. Det stämmer däremot inte, vi behöver nämligen 20 soldater för det [Con19]. Soldaterna behöver stå i denna formation [Wei].



Figur 6: Conways soldater, nå rad 4.

Nå rad 5: Förvånande nog visar det sig att det är omöjligt att nå rad 5. Detta faktum bevisades av John Horton Conway när han analyserade spelet 1961 [Clend].



Figur 7: Conways soldater, rad 5

Det går inte att urskilja något mönster i hur många soldater som krävs för att nå varje rad. Även om det ser ut som om antalet möjliga drag ökar snabbt, så behövs ett mer systematiskt sätt för att avgöra vad som faktiskt är möjligt.

För att kunna analysera det här problemet räcker det inte att analysera enskilda exempel för varje rad. Istället behövs ett matematiskt verktyg som kan beskriva hur en egenskap förändras genom spelet.

I nästa avsnitt introduceras därför begreppet invariant som kommer att användas för att undersöka vilka rader som är möjliga att nå, samt varför rad 5 inte kan nås.

Sats 2.1. *Det är omöjligt att nå den femte raden på Conways soldater.*

3 Analysverktyg

I det här avsnittet kommer matematiska verktyg att presenteras. Dessa kommer att användas för att analysera problemet. Här introduceras begreppen invariant och gyllene snittet, som kommer att spela en central roll i analysen.

3.1 Invariant

En invariant är inom matematiken en egenskap som inte förändras under vissa operationer eller transformationer. Det innebär att även om ett system förändras på olika sätt, finns det någonting som förblir konstant. Exempelvis har vi en triangels sidor eller vinklar som då inte förändras under rotation, vilket gör dessa egenskaper invarianta under sådana förändringar [Stond].

Begreppet används för att förenkla och förstå olika matematiska problem. Genom att identifiera när något förblir oförändrat kan man dra slutsatser om systemets beteende, trots att andra egenskaper skulle förändras. Det här gör en invariant till ett viktigt verktyg inom de flesta områdena, så som algebra och geometri [CS13].

I mer komplexa problem kan en invariant användas som ett verktyg för att avgöra om något är möjligt eller omöjligt. Eftersom invarianten alltid behåller samma värde kan den fungera som en begränsning i analysen. Det här är speciellt användbart på problem där många steg eller förändringar är möjliga [Stond].

I Conways soldater finns det många möjliga drag, vilket gör det svårt att direkt avgöra hur högt en soldat kan nå. Genom att introducera invariant så kan vi undersöka hur högt en soldat kan nå. På så sätt kommer invariant vara ett centralt verktyg för att förstå och lösa vårt problem.

3.1.1 Pagodafunktion

En särskild typ av invariant som kommer att användas i analysen av Conways soldater är en så kallad pagodafunktion. Den innebär att olika positioner på spelplanen

tilldelas olika värden. Summan av dessa värden förändras på ett kontrollerat sätt vid förflyttningar [BHGG07].

Grundtanken är att tilldela spelplanens olika positioner vikter, där vissa positioner bekräftas som mer värdefulla än andra. Genom att välja vikter på ett lämpligt sätt så kan man visa att den totala summan aldrig ökar under spelets gång.

I senare analys kommer pagodfunktionen att användas för att undersöka begränsningar i hur långt upp en soldat kan nå [BHGG07].

3.1.2 Dominoproblemet

Ett klassiskt exempel på en invariant är dominoproblemet på ett schackbräde. Problemet använder sig av ett 8×8 schackbräde som går består av 64 rutor, rutorna är växelvis färgade svart och vitt, precis som på ett vanligt schackbräde. Frågan är då om det är möjligt att täcka hela schackbrädet med 2×1 dominos, om två diagonalt motsatta hörn tas bort.

En domino täcker alltid exakt två rutor bredvid varandra. Det innebär att varje domino täcker en vit och en svart ruta. Den här egenskapen fungerar då som vår invariant i problemet, eftersom att balansen mellan de vita och de svarta rutorna inte förändras oavsett hur dominobrickorna placeras [Yound].

På ett fullstort schackbräde finns det lika många vita som svarta rutor. De diagonalt motsatta hörnrutorna har alltid samma färg. Om då dessa tas bort uppstår det en obalans, det vill säga att det återstår 30 rutor av den ena färgen och 32 av den andra [Yound].

Eftersom varje dominobricka täcker exakt en vit och en svart ruta, så kan aldrig schackbrädet täckas om det inte är lika många vita som svarta rutor. Den här obalansen som uppstår om de två diagonala hörnrutorna försvinner gör att det är omöjligt att täcka hela schackbrädet med dominobrickor.

Det här visar att processen med övertäckning av dominobrickor har en invariant, i det här fallet färgbalansen mellan de olika rutorna, vilket medför att en övertäckning av det defekta schackbrädet inte finns.

3.2 Gyllene snittet

Gyllene snittet är en frekvent använd formel inom matematiken. Den betecknas ofta som φ . Det definieras som den positiva lösningen till andragradsekvationen

$$\varphi^2 - \varphi - 1 = 0 \quad \text{vilket ger} \quad \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Den motsvarande negativa lösningen är

$$\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \approx -0,61803.$$

Talet φ kommer att spela en central roll i Conways bevis, vilket vi strax kommer att se.

4 Conways bevis

I sitt bevis visar John Horton Conway att varje ruta kan tilldelas en vikt. Han kunde utifrån vikterna visa att en placering av soldater har ett värde som är summan av vikterna där soldaterna står. Genom att se hur summan förändras vid tillåtna drag kan man visa att rad 5 är omöjlig att nå.

För att detta ska fungera så behöver vikterna väljas på ett genomtänkt sätt. Man utgår ifrån rutorna på rad 5 som är vårt mål. Vikterna runt denna beror på avståndet till målet. Då en soldat närmare målet har större betydelse för att nå dit än en soldat som står längre bort så kommer rutorna närmare målet ha högre vikt än de längre bort.

Vikterna definieras så att den totala vikten aldrig ökar när man gör ett tillåtet drag. Summan av vikterna fungerar därmed som en invariant. Eftersom den totala vikten inte kan öka går det inte att nå en ruta som kräver en vikt större än den vikt man har från början.

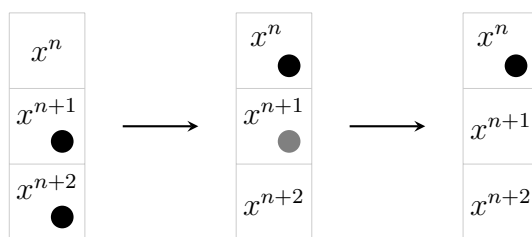
Man kan utgå från en exponentiell viktning där målrutorna ges värdet $x^0 = 1$, och där rutorna på Manhattanavstånd n från målet ges vikten x^n . Exponenten motsvarar då antalet tillåtna steg från det givna målet [Baz].

Manhattanavståndet mellan två rutorna definieras som summan av antalet horisontella

och vertikala steg som krävs för att nå målet, diagonala hopp är därmed inte tillåtna med detta avstånd [Baz].

x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	1	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}
x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}
x^{13}	x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}
x^{14}	x^{13}	x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}	x^{14}

Figur 8: Conways soldater, rutornas olika vikter. De skuggade rutorna markerar soldaternas positioner.



Figur 9: Vikter vid ett drag.

Varje ruta tilldelas en vikt av formen x^n , där n anger avståndet till målrumen, x är ett positivt tal mellan 0 och 1 som vi ska bestämma senare. Då vikten minskar exponentiellt så innebär det att rutor längre bort från målet har mindre betydelse till den totala summan.

När en soldat hoppar över en annan så förändras strukturen enligt Figur 9. En

soldat i en ruta med vikten x^{n+2} flyttas till en ruta med vikten x^n samtidigt som en soldat tas bort från en ruta med vikt x^{n+1} . Detta leder naturligt till sambandet att $x^{n+2} + x^{n+1}$ jämförs med x^n .

För att summan inte ska öka krävs det att

$$x^{n+2} + x^{n+1} \geq x^n.$$

Dividering med x^n (om $x > 0$) ger

$$x^2 + x \geq 1 \implies x^2 + x - 1 \geq 0.$$

Vilket innebär att gränsfallet uppstår när denna likhet gäller:

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Denna andragradsekvation har de två lösningarna

$$x_1 = -\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = -\varphi \approx -1.61803$$

och

$$x_2 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \approx 0.61803.$$

Som även kan kopplas till det gyllene snittet. Detta genom att $x_1 = -\varphi$ och $x_2 = \frac{1}{\varphi}$.

Dessa två konstanter är då potentiella x värden för vår beräkning nedan. Men frågan är vilket vi ska använda oss av.

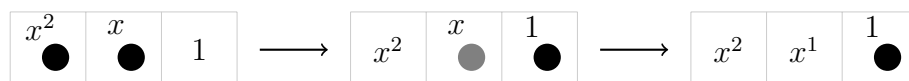
I konstruktionen av den viktade summan krävs det att vikterna avtar med avståndet från målrutan. Det här innebär då att $0 < x < 1$ måste uppfyllas. Detta eftersom varje steg från målrutan ska ge mindre bidrag till summan.

Vi kan därför inte använda den negativa lösningen $-\varphi$ då den inte uppfyller vårt krav.

Conway valde då att använda sig av $x_2 = \frac{1}{\varphi} \approx 0.61$ i beräkningen, som uppfyller kravet på avtagande vikter [Con19]. Detta innebär att ju längre ifrån målrutan på rad 5 man kommer, ju mindre blir rutans vikt.

Om man har två soldater och flyttar dem mot målrutan, så förändras inte summan. Vi säger att vi har en soldat i en ruta med x^2 samt en soldat i rutan för x^1 och dessa

ska tillsammans flyttas till rutan 1 får vi detta:



Figur 10: Conways soldater, hopp mot målrutan

Detta innebär att $x^2 + x = 1$. Vilket även är den ekvation vi fick från Figur 9.

4.1 Beräkning av Conways bevis

För att en soldat ska kunna nå rad 5 så måste summan av ett antal soldater bli just 1. Vi får då beräkna om detta faktiskt är möjligt.

Vi har då $x = \frac{1}{\varphi} = x_2 \approx 0.61803$.

rad 5	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	1	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
rad 4	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7
rad 3	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8
rad 2	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^3	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9
rad 1	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^4	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}
rad 0	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^5	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}
rad -1	x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^6	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}
rad -2	x^{13}	x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^7	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}
rad -3	x^{14}	x^{13}	x^{12}	x^{11}	x^{10}	x^9	x^8	x^9	x^{10}	x^{11}	x^{12}	x^{13}	x^{14}

Figur 11: Conways soldater, upp till rad 5. De skuggade rutorna markerar soldaternas positioner.

Vi börjar med att beräkna summan av vikterna på rad 5. Vi får dock under beräkningen inte glömma bort att brädet är obegränsat.

4.2 Beräkning av rader

Rad 5

Vi har då $1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$ på den högra sidan, samt $x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$ på den vänstra. Vi ser snabbt att $1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$ är en vanlig geometrisk serie. Vi vet då att den högra sidan:

$$1 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \frac{1}{1 - x}.$$

Detta fungerar dock enbart om $-1 < x < 1$. Som den valda konstanten ≈ 0.61 uppfyller.

Vi vill dock förenkla svaret något. I en tidigare uträkning från Figur 10 så fick vi fram att $x^2 + x = 1$ vilket även betyder att $x^2 = 1 - x$. Vi kan därför förenkla uttrycket $\frac{1}{1-x}$ till $\frac{1}{x^2}$.

Då vår valda konstant är $\frac{1}{\varphi}$ kan vi förenkla ytterligare:

$$\frac{1}{1 - x} = \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\frac{1}{\varphi^2}} = \varphi^2.$$

Vi har då fått fram att den högra sidan av rad 5 är φ^2 . Vi vill även räkna ut den vänstra sidan, vilket är en betydligt enklare beräkning. Enda skillnaden mellan den högra och den vänstra sidan är att den högra sidan innehåller 1. Vi kan därmed säga att den vänstra sidan har en summa på $\varphi^2 - 1$.

Vi vet då att rad 5 har en summa på:

$$\varphi^2 + \varphi^2 - 1.$$

Detta vill vi däremot förenkla något. Enligt tidigare ekvation för det gyllene snittet fick vi fram att $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$. Vilket innebär att om vi adderar φ på vardera sida, så får vi $\varphi^2 - 1 = \varphi$. Detta innebär att vi kan ersätta $\varphi^2 - 1$ med φ . Vi får då:

$$\varphi^2 + \varphi = \varphi(\varphi + 1).$$

Med samma ekvation som ovan $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$ får vi även att $\varphi^2 = \varphi + 1$. Så:

$$\varphi(\varphi + 1) = \varphi(\varphi^2) = \varphi^3.$$

Detta innebär att summan för hela rad 5 blir φ^3 [Con19].

Resterande rader

Att beräkna resterade radsummor är betydligt enklare. Rad 4 är precis som rad 5, fast multiplicerad med x . Rad 3 är rad 4 multiplicerad med x , och så vidare med resterande rader.

Eftersom summan på rad 5 är φ^3 så är summan för rad 4 $\varphi^3 \cdot x$ och då vår konstant är $\frac{1}{\varphi}$ blir summan för rad 4:

$$\varphi^3 \cdot \frac{1}{\varphi} = \varphi^2.$$

Detta fortsätter med resterande rader också.

Rad	Beräkning
3	$\varphi^2 \cdot \frac{1}{\varphi} = \varphi$
2	$\varphi \cdot \frac{1}{\varphi} = 1$
1	$1 \cdot \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi} = \varphi^{-1}$
0	$\frac{1}{\varphi} \cdot \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^2} = \varphi^{-2}$
-1	$\frac{1}{\varphi^2} \cdot \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^3} = \varphi^{-3}$
-2	$\frac{1}{\varphi^3} \cdot \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^4} = \varphi^{-4}$
-3	$\frac{1}{\varphi^4} \cdot \frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi^5} = \varphi^{-5}$

Tabell 1: Vikterna för de olika raderna

Mönstret fortsätter för övriga rader.

4.3 Analys av bevis

För att det ska vara möjligt att nå rad 5 behöver summan av ett antal soldater bli minst 1.

Vi vill då summera alla summor av de olika raderna för att se om detta ens är en möjlighet.

Summorna av raderna under linjen, dvs summor av raderna med soldater är φ^{-2} för översta raden under linjen (rad 0), φ^{-3} för nästa rad, etc.

Vi har då:

$$\varphi^{-2} + \varphi^{-3} + \varphi^{-4} + \varphi^{-5} + \varphi^{-6} + \varphi^{-7} \dots$$

Detta går att förenkla till

$$\varphi^{-2}(1 + \varphi^{-1} + \varphi^{-2} + \varphi^{-3} + \varphi^{-4} + \varphi^{-5} \dots).$$

Som vi vet är $(1 + x + x^2 + x^3 + \dots)$ en geometrisk serie. Då vår konstant är $\frac{1}{\varphi} = \varphi^{-1}$ innebär detta att $(1 + \varphi^{-1} + \varphi^{-2} + \varphi^{-3} + \varphi^{-4} + \varphi^{-5} \dots)$ är en geometrisk serie med vår konstant. Detta är även något vi beräknade när vi beräknade rad 5. Vi fick då fram att den geometiska serien blev φ^2 .

Detta innebär att summan av alla rader med soldater blir: $\varphi^{-2} \cdot \varphi^2 = 1$.

Däremot är det, trots att summan blir 1, omöjligt att nå rad 5. Detta då man behöver oändligt många soldater och rader för att det ska bli just 1. Tar man bort minsta lilla soldat kommer summan att bli mindre än 1. Om vi når rad 5, betyder det att vi har exakt en enda soldat kvar. Men detta kan inte åstadkommas med ett ändligt antal drag. Därmed följer att det är omöjligt att nå den femte raden på Conways soldater, vilket bevisar Sats 2.1.

5 Andra varianter

Hur fungerar det på andra spelplaner eller med andra regler?

I det här avsnittet undersöks hur idéerna bakom Conways soldater påverkas om man antingen ändrar regler eller spelplanen. I vissa fall handlar det om mindre förändringar, såsom om diagonala hopp tillåts. Då kan liknande metod användas som i den ursprungliga varianten.

I andra fall, med andra varianter, som Pablitos soldater. Där spelplanen ändras till en triangelformad spelplan med hexagonformade positioner, ändras förutsättningarna. I detta fall ändras möjliga drag och avstånd, analysen måste därför anpassas på denna version.

Syftet med det här avsnittet är dels att undersöka om metoderna från originalproblemet kan generaliseras, men även belysa hur olika typer av förändringar påverkar

hur högt soldaterna kan nå.

5.1 Om diagonala hopp är tillåtna

Vi har ju beviset med alla rutors vikter ovanför. Däremot måste vi ändra vikterna för diagonala hopp. I det ursprungliga problemet så används det så kallade Manhattan-avståndet, där diagonala hopp inte är möjliga. Det vill säga om man vill hoppa diagonalt så behöver man ta två steg, därav är diagonala hopp dyrare än vertikala eller horisontella hopp, på det brädet. Om man då tillåter diagonala hopp förändras vikterna så att diagonala hopp blir lika billiga som horisontella och vertikala hopp. Vi får då ersätta Manhattan-avståndet med Chebyshev-avståndet [Baz]. Detta innebär att viktstrukturen förändras från den tidigare diamantformade strukturen, till en kvadratisk struktur.

x^6	x^5	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^5	x^6
x^6	x^5	x^4	x^3	x^3	x^3	x^3	x^3	x^3	x^3	x^4	x^5	x^6
x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^1	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	1	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^1	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
x^6	x^5	x^4	x^3	x^3	x^3	x^3	x^3	x^3	x^3	x^4	x^5	x^6
x^6	x^5	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^5	x^6
x^6	x^5	x^5	x^5	x^5	x^5	x^5	x^5	x^5	x^5	x^5	x^5	x^6
x^6	x^6	x^6	x^6	x^6	x^6	x^6	x^6	x^6	x^6	x^6	x^6	x^6
x^7	x^7	x^7	x^7	x^7	x^7	x^7	x^7	x^7	x^7	x^7	x^7	x^7
x^8	x^8	x^8	x^8	x^8	x^8	x^8	x^8	x^8	x^8	x^8	x^8	x^8

Figur 12: Conways soldater med diagonala hopp. De skuggade rutorna markerar soldaternas positioner [BHGG07].

I den här varianten kan soldater hoppa vertikalt, horisontellt och diagonalt, det vill säga i 8 riktningar [Bel15].

rad 5	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	1	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
rad 4	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^1	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
rad 3	x^6	x^5	x^4	x^3	x^2	x^2	x^2	x^2	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
rad 2	x^6	x^5	x^4	x^3	x^3	x^3	x^3	x^3	x^3	x^3	x^4	x^5	x^6
rad 1	x^6	x^5	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^4	x^5	x^6
rad 0	x^6	x^5	x^5	x^5	x^5	x^5	x^5	x^5	x^5	x^5	x^5	x^5	x^6
rad -1	x^6	x^6	x^6	x^6	x^6	x^6	x^6	x^6	x^6	x^6	x^6	x^6	x^6
rad -2	x^7	x^7	x^7	x^7	x^7	x^7	x^7	x^7	x^7	x^7	x^7	x^7	x^7
rad -3	x^8	x^8	x^8	x^8	x^8	x^8	x^8	x^8	x^8	x^8	x^8	x^8	x^8

Figur 13: Conways soldater med diagonala hopp, rader.

För att beräkna om rad 5 är möjlig med diagonala hopp behöver vi beräkna summan för alla soldater.

Om vi börjar med Rad 0 så ser vi följande summa:

$$\begin{aligned} \dots + x^6 + x^5 + x^5 + x^5 + x^5 + x^5 + x^5 + x^5 + x^5 + x^5 + x^5 + x^5 + x^6 + \dots = \\ \dots + x^6 + 11x^5 + x^6 + \dots \end{aligned}$$

Fokuserar vi enbart på de vikterna som ingår i rad 0 på Figur 13 så får vi:

$$x^6 + 11x^5 + x^6 = 2x^6 + 11x^5.$$

Om vi nu sätter in vår tidigare konstant $x = \frac{1}{\varphi}$ så får vi:

$$2x^6 + 11x^5 = 2\left(\frac{1}{\varphi^6}\right) + 11\left(\frac{1}{\varphi^5}\right) = \frac{2}{\varphi^6} + \frac{11}{\varphi^5}.$$

Genom att ersätta φ med dess värde kan vi beräkna första radens summa:

$$\frac{2}{\varphi^6} + \frac{11}{\varphi^5} = \frac{2}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^6} + \frac{11}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5} \approx \frac{2}{17,94} + \frac{11}{11,09} \approx 1,1 > 1.$$

Alltså har rad 0 en summa som överstiger 1, och för varje rad efter under kommer

radsommen minska, men aldrig bli negativ. Beviset är däremot inte tillräckligt starkt för att utesluta att rad 5 inte kan nås vid diagonala hopp. Vi måste därför analysera med hjälp av andra uträkningar.

5.1.1 Maximal räckvidd vid diagonala hopp

Beräkningen ovan visade att rad 5 bör vara nåbar, men stämmer det verkligen, och hur högt är det isåfall möjligt att nå med denna version?

När denna variant analyserats tidigare visade resultatet att man kan nå upp till rad 8. Däremot ska rad 9 vara onåbar [Bel15].

Sats 5.1. *Det är omöjligt att nå den nionde raden på Conways soldater om diagonala hopp tillåts.*

För att beräkna detta kan vi använda oss av en pagodafunktion [Bel15]:

$$S_n = x^{n-5}((4n-2)x + 3 - 2n)$$

där n anger raden man försöker nå och x är samma konstant som i tidigare analys.

Här är $S_n > 1$ ett nödvändigt villkor för att kunna nå rad n .

Vi vill nu beräkna om rad 5 faktiskt är nåbar eller ej.

Rad 5

Vi lägger då in $n = 5$.

$$S_5 = x^{5-5}((4 \cdot 5 - 2)x + 3 - 2 \cdot 5) = 18x - 7.$$

Lägger vi nu in vår tidigare konstant ($\frac{1}{\varphi}$) får vi:

$$\frac{18}{\varphi} - 7 \approx 4.12$$

Därav är rad 5 nåbar, då $S_5 \approx 4.12 > 1$.

Resterande rader

Om vi sätter in $x = \frac{1}{\varphi}$ och undersöker värdet på S_n för olika rader får vi denna tabell.

Rad n	S_n	Slutsats
6	$\approx 2.84 > 1$	Nåbar
7	$\approx 1.94 > 1$	Nåbar
8	$\approx 1.31 > 1$	Nåbar
9	$\approx 0.88 < 1$	Ej nåbar

Tabell 2: Värden på S_n för $x = \frac{1}{\varphi}$.

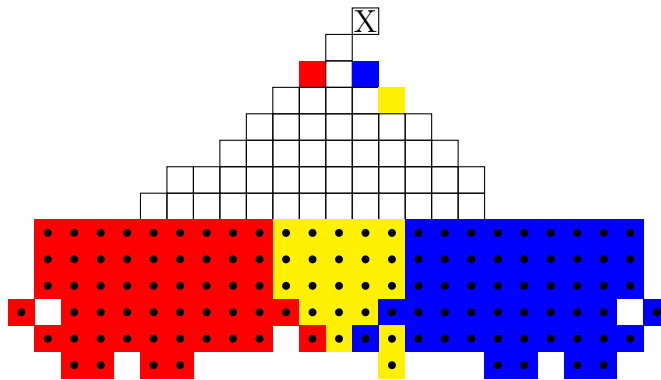
Vi ser att $S_n > 1$ för raderna 6–8, vilket innebär att dessa är nåbara. För rad 9 gäller $S_9 < 1$, och därför är den inte nåbar.

Så vi vet att rad 5 är nåbar utifrån att summan för första raden överstiger 1. Men vi vet även att man kan komma upp till rad 8. Då summan för alla soldater överstiger 1 för just rad 8.

Däremot är rad 9 ej nåbar med denna version, detta då $S_9 < 1$.

Lösning rad 8

Våra beräkningar visar att $S_8 > 1$, vilket innebär att rad 8 är nåbar i denna variant. Det här bekräftas även av Figur 14, där soldaternas möjliga positioner illustreras för att nå rad 8.



Figur 14: Conways soldater diagonala hopp, lösning rad 8 [Bel15].

De olika färgerna i figuren används för att illustrera hur soldaterna samarbetar för att nå den översta cellen i samma färg. De röda soldaterna landar i den röda cellen högst upp, de blå soldaterna landar i den blå cellen och de gula soldaterna landar

i den gula cellen. När alla soldater hoppat så finns det enbart tre kvar. Dessa tre kommer att nå målet tillsammans [Bel15].

Däremot är rad 9 inte möjlig att nå då $S_9 \approx 0.88 < 1$ visar att systemet inte har tillräckligt med vikt för att nå så högt, vilket bevisar Sats 5.1.

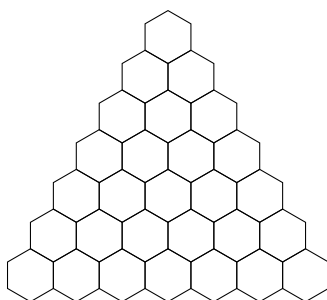
5.2 Skew, enbart diagonala hopp

Skew är en variant av Conways soldater, men istället för vertikala och horisontella hopp så är enbart diagonala hopp tillåtna. Detta förändrar både rörelsemönster och möjligheter jämfört med andra varianter [Bel15].

I varianter där fler typer av hopp är tillåtna ökar flexibiliteten i hur soldater kan förflyttas, medan i Skew begränsas man istället. Trots denna begränsning kan man i denna variant nå till rad 6, vilket är högre än i det ursprungliga problemet, men längre än där både diagonala och raka hopp är tillåtna. Skillnaden illustrerar hur regler påverkar systemets maximala räckvidd.

5.3 Triangulärt spelbräde, Pablitos soldater

Pablitos soldater är precis som Conways soldater, ett solitärspel där man ska nå så högt som möjligt. Men till skillnad från Conways soldater som spelas på ett oändligt rutnät så spelas Pablitos soldater på ett triangulärt bräde med hexagonformade celler.



Figur 15: Pablitos soldater, spelplan

Soldaterna, som kan vara oändligt många, placeras på den undre delen av brädet, där n antal rader ovanför är tomma. Målet är att ta sig till toppen av brädet, det vill säga översta raden [Bel15].

Då Pablitos soldater är uppbyggt på en spelplan med hexagonformade hål så har

varje soldat 6 olika riktningar denne kan hoppa. Vi måste dock, även här, hoppa över en soldat för att kunna ta oss framåt. Den överhoppade soldaten tas då bort, precis som i Conways soldater.

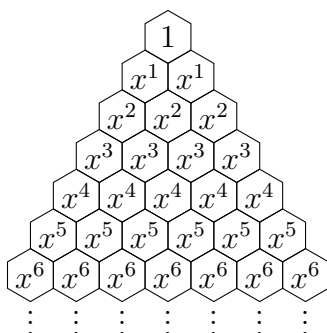
Även här finns det rader som är omöjliga att nå. Frågan är då hur högt det är möjligt att nå i denna variant.

När denna variant har analyserats tidigare så resulterade det i att rad 7 är omöjlig att nå.

Sats 5.2. *Det är omöjligt att nå den sjunde raden på Pablitos soldater.*

5.3.1 Invariant för Pablitos soldater

Precis som i Conways soldater så har soldater längre ifrån målet mindre påverkan för att nå målet jämfört med en soldat i närheten. Vi kan därför använda samma mönster i vikterna som där. Därmed kan vi sätta vårt mål som $x^0 = 1$ och resterande rutor som x^n där n är antal steg från målet.



Figur 16: Pablitos soldater, vikter [Bel15]

Även här kommer vårt tidigare valda konstant $x = \frac{1}{\varphi}$ att användas [Bel15].

Summan för raderna från och med rad n ges av formeln:

$$S_n = x^{n-3}((n+1)x + 1).$$

Denna kan nu användas för att se vad som är möjligt inom denna modell [Bel15].

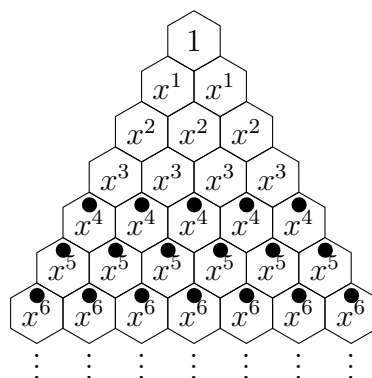
5.3.2 Analys av rader

Målet med detta spel är att nå så högt som möjligt. Så vilka rader är då möjliga att nå?

Vi har vår formel ovan, summan måste vara $S_n > 1$ för att rad n ska kunna nås.

Vi kan börja med Rad 4.

Rad 4, ($n = 4$)



Figur 17: Pablitos soldater, Rad 4

Tar vi då formeln och lägger in vårt n -värde får vi:

$$S_4 = x^{4-3}((4+1)x+1) = x(5x+1).$$

Lägger vi nu in vår konstant får vi:

$$\frac{1}{\varphi} \left(\frac{5}{\varphi} + 1 \right) \approx$$

$$0.61803(5 \cdot 0.61803 + 1) \approx$$

$$0.61803 \cdot 4.09015 \approx 2.5278.$$

Detta innebär att $S_4 \approx 2.53 > 1$ och rad 4 är nåbar.

Resterande rader

Vi beräknar S_n för olika rader och sätter $x = \frac{1}{\varphi}$. Resultaten sammanfattas i tabellen nedan.

$$S_6 \approx 1.26 > 1.$$

Eftersom summan är större än 1 finns det tillräckligt med vikt i systemet för att man ska kunna nå rad 6. Detta är även något som figuren illustrerar.

Däremot går det inte att nå rad 7 där vi enligt beräkningarna får

$$S_7 \approx 0.87 < 1.$$

Detta innebär att det inte finns tillräckligt med vikt i systemet för att kunna konstruera en uppställning av soldater som når så högt. Det innebär att även om man försöker konstruera en liknande uppställning som i Figur 18 kommer den alltid att bryta mot invariantvillkortet innan målet nås. Därför är det i Pablitos soldater inte möjligt att nå rad 7, vilket bevisar Sats 5.2.

6 Slutsats

I denna uppsats har Conways soldater analyserats med hjälp av invariansprincipen och det gyllene snittet. Genom att tilldela varje ruta en exponentiellt avtagande vikt har det varit möjligt att konstruera en invariant som inte ökar under tillåtna drag.

Resultatet av analysen visade att det finns en begränsning i systemet vilket gör att det finns en övre gräns för hur högt en soldat kan nå. Vi kunde genom analysen visa att rad 5 inte kan nås i originalproblemet. Detta då den nödvändiga vikten inte kan nås vid ett ändligt antal soldater och ett ändligt antal drag.

Vidare har även andra varianter undersökts. När reglerna ändras, exempelvis genom att tillåtna diagonala hopp, så förändras även de matematiska villkoren. Detta leder till att andra varianter har andra maximala nivåer. Exempelvis kan rad 8 nås i den diagonala varianten och rad 6 kan nås i Pablitos soldater.

Sammanfattningsvis visar uppsatsens analyser att små förändringar i regler eller spelplan kan ha stora konsekvenser för vilka rader som är nåbara eller ej.

Referenser

- [Baz] Dr. Trefor Bazett. Weird notions of distance| intro to metric spaces. YouTube video. Hämtad 2026-05-12. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=f15f0AYY-1s>.
- [Bel15] George I. Bell. Peg solitaire army (conway's soldiers), 2015. Last modified November 14, 2015. Accessed: 2026-04-17. URL: <http://recmath.org/pegsolitaire/army/index.html>.
- [BHGG07] George I. Bell, Daniel S. Hirschberg, and Pablo Guerrero-García. The minimum size required of a solitaire army. *INTEGERS: Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 7:G07, 2007. Accessed: 2026-04-17. URL: <https://math.colgate.edu/~integers/hg7/hg7.pdf>.
- [Clend] Clever Learning. Conway's soldiers. <https://www.cleverlearning.co.uk/blogs/blogConway.php>, n.d. Accessed: 2026-05-12.
- [Con19] John Conway. The game you can't win. <https://www.youtube.com/watch?v=Y7hm0Xeicus>, 2019. YouTube video, accessed 15 October 2025.
- [CS13] Valentina Chapovalova and Erik Svensson. *Matematisk utflykt: 40 problem med eleganta lösningar*. Studentlitteratur, 2013.
- [Stond] Story of Mathematics. Invariant, n.d. URL: <https://www.storyofmathematics.com/glossary/invariant/>.
- [Wei] Eric W. Weisstein. Conway's soldiers. <https://mathworld.wolfram.com/ConwaysSoldiers.html>. Accessed: 2025-10-20.
- [Yound] YouTube. Domino invariant problem, n.d. URL: <https://www.youtube.com/watch?v=9lyz923Jd9Y>.