



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Introduktion till Lie-algebror

av

Merve Tuncay

2026 - No L11

Introduktion till Lie-algebror

Merve Tuncay

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Gregory Arone

2026

Acknowledgements

Jag vill rikta ett stort tack till min handledare Gregory Arone för hans tillgänglighet och för hans värdefulla insatser under arbetets gång.

Abstract

Lie algebras were originally introduced by Sophus Lie in connection to the study of continuous symmetries and transformations. Since then, the theory has developed into a central area of modern algebra. Against this background, this work aims to provide a basic introduction to the algebraic structure and classification of Lie algebras.

The thesis presents basic definitions such as the Lie bracket, subalgebras, ideals, and homomorphisms. Lie algebras in low dimensions are then classified: in dimension 1, there is only the trivial Abelian structure. In dimension 2, it is shown that all non-Abelian Lie algebras are isomorphic to each other, and in dimension 3, the Heisenberg algebra is studied as a central example. Finally, the derived series and the concepts of solvability and semisimplicity are introduced, where the radical proves to be a central tool for understanding the division between these two classes of Lie algebra.

Sammanfattning

Lie-algebror introducerades ursprungligen av Sophus Lie i samband med studiet av kontinuerliga symmetrier och transformationer. Sedan dess har teorin utvecklats till ett centralt område inom modern algebra. Mot denna bakgrund syftar detta arbete till att ge en grundläggande introduktion till Lie-algebrors algebraiska struktur och klassifikation.

I arbetet presenteras grundläggande definitioner såsom Lie-bracket, subalgebror, ideal och homomorfier. Därefter klassificeras Lie-algebror i låg dimension: i dimension 1 finns det endast den triviala abelska strukturen. I dimension 2 visas att alla icke-abelska Lie-algebror är isomorfa med varandra och i dimension 3 studeras Heisenbergalgebran som ett centralt exempel. Slutligen introduceras derived serien och begreppen solvabilitet och semisimplehet, där radikalen visar sig vara ett centralt verktyg för att förstå uppdelningen mellan dessa två klasser av Lie-algebror.

Innehåll

1	Inledning	10
2	Grundläggande begrepp inom Lie-teorin	11
2.1	Definition av Lie-algebra och Lie-bracket	11
2.2	Lie-subalgebror och ideal	12
2.3	Homomorfier och adjoint-avbildningen	15
2.4	Kvot Lie-algebror och faktoralgebror	16
2.5	Abelska Lie-algebror: när kommutatorn försvinner	17
3	Lie-algebror i låg dimension	19
3.1	Dimension 1: den abelska strukturen	19
3.2	Dimension 2: abelska och icke-abelska fall	19
3.3	Dimension 3: Heisenbergalgebran	21
4	Solvable och semisimple Lie-algebror	23
4.1	Derived algebra och icke-kommutativitet	23
4.2	Solvable Lie-algebror och den derived serien	24
4.3	Semisimple Lie-algebror och radikalen	26
5	Avslutande ord	29
	Referenser	30

1 Inledning

Studiet av symmetrier och kontinuerliga transformationer har en lång historia inom matematiken. På 1800-talet utvecklade den norske matematikern Sophus Lie en systematisk teori för att studera kontinuerliga symmetrigrupper, den så kallade Lie-grupper. I detta sammanhang uppstod naturligt behovet av att studera de infinitesimala strukturer som är associerade med dessa grupper, vilket ledde till introduktionen av Lie-algebror.

En Lie-algebra är ett vektorrum utrustat med en bilinjär operation, kallad Lie-bracket, som mäter hur långt två element är från att kommutera. Till skillnad från associativa algebror karakteriseras Lie-algebra av Jacobi-identiteten, vilket är ett villkor som säkerställer att Lie-bracketen betar sig konsekvent och som ligger till grund för stora delar av teorin.

Teorin har sedan dess vuxit till ett centralt område inom modern algebra. En grundläggande fråga inom teorin är hur Lie-algebror kan klassificeras och förstås strukturellt. Två viktiga klasser är solvable och semisimple Lie-algebror, vilka på många sätt utgör varandras motsatser och tillsammans ger en djupare bild av hur Lie-algebror är uppbyggda.

I denna uppsats kommer vi att utforska de matematiska grunderna i Lie-algebrors teori. Mer konkret kommer vi att:

1. definiera Lie-algebror och grundläggande begrepp såsom subalgebror, ideal och homomorfier,
2. klassificera Lie-algebror i låg dimension, det vill säga dimension 1, 2 och 3,
3. studera Heisenbergalgebran som ett centralt exempel,
4. introducera begreppet derived algebra och derived serie,
5. definiera och jämföra solvable och semisimple Lie-algebror,
6. visa att radikalen ger en naturlig uppdelning av varje ändligdimensionell Lie-algebra i en solvable och en semisimple del.

Vissa matematiska termer saknar etablerade svenska översättningar och används därför i sin engelska form genomgående i texten.

2 Grundläggande begrepp inom Lie-teorin

2.1 Definition av Lie-algebra och Lie-bracket

I många delar av matematiken studeras algebraiska strukturer där en multiplikation är associativ, såsom ringar och associativa algebror. I flera sammanhang, särskilt vid studiet av symmetrier och linjära transformationer är det dock naturligt att fokusera på hur element inte kommuterar. Detta leder till introduktionen av Lie-algebror, där den grundläggande operationen mäter just avvikelser från kommutativitet.

Definition 2.1. Låt F vara ett fält. En *Lie-algebra* över F är ett vektorrum L över F tillsammans med en bilinjär avbildning

$$[\cdot, \cdot] : L \times L \rightarrow L,$$

kallad *Lie-bracket*, som till varje par (x, y) associerar ett element $[x, y] \in L$.

Lie-bracketen ska uppfylla följande villkor för alla $x, y, z \in L$:

$$\text{(L1)} \quad [x, x] = 0,$$

$$\text{(L2)} \quad [x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Villkor (L1) innebär att kvadraten av varje element under Lie-bracketen är noll. Av bilinjariteten följer att

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y]$$

och eftersom $[x, x] = [y, y] = 0$ enligt (L1) fås $[x, y] = -[y, x]$, det vill säga *antisymmetri*. Notera att (L1) och antisymmetri inte är ekvivalenta i allmänhet. Om karakteristiken av F inte är 2 följer (L1) redan från antisymmetri. Antisymmetri ger $[x, x] = -[x, x]$ och därmed $2[x, x] = 0$, vilket innebär att $[x, x] = 0$. I karakteristisk 2 gäller däremot att $-1 = 1$, så $[x, y] = -[y, x]$ reduceras till $[x, y] = [y, x]$. Det vill säga, antisymmetri och symmetri blir samma sak i karakteristisk 2. Men det säger inte något om $[x, x]$. Därför måste (L1) skrivas ut som ett explicit villkor.

Villkor (L2) kallas för *Jacobi-identiteten*. Jacobi-identiteten (L2) är ett mer subtilt villkor som skiljer Lie-algebror från godtyckliga antisymmetriska bilinjärformer. Den säkerställer att Lie-bracketen beter sig konsekvent vid kombination av tre element

och är ett centralt verktyg i flera av arbetets bevis, bland annat för att visa att L' är ett ideal och att adjoint-avbildningen är en homomorfism. Ett centralt exempel på en Lie-algebra ges av matriser med Lie-bracket definierad som *kommutatorn*

$$[A, B] = AB - BA.$$

Mer generellt gäller att om \mathcal{A} är en associativ algebra kan det göras till en Lie-algebra med operationen $[x, y] = xy - yx$. Vi verifierar att denna operation uppfyller villkoren för en Lie-algebra. Bilinjäritet följer direkt från distributiviteten i \mathcal{A} . Villkor (L1) gäller eftersom $[x, x] = xx - xx = 0$. För Jacobi-identiteten beräknas

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]]$$

och genom att expandera varje term med definitionen $[y, z] = yz - zy$ och utnyttja associativiteten i \mathcal{A} får vi termerna:

$$[x, [y, z]] = xyz - xzy - yzx + zyx, \quad [y, [z, x]] = yzx - yxz - zxy + xyz.$$

Det ger $[z, [x, y]] = zxy - zyx - xyz + yxz$. Summeras dessa tre uttryck får vi att de tar ut varandra och summan blir noll. Därmed är \mathcal{A} en Lie-algebra under denna operation.

Ett grundläggande exempel på en Lie-algebra är $\mathfrak{gl}(n, F)$: mängden av alla $n \times n$ -matriser över F där Lie-bracketen definieras som kommutatorn. Lie-algebran $\mathfrak{gl}(n, F)$ är av särskild betydelse eftersom varje ändligdimensionell Lie-algebra kan förverkligas som en Lie-subalgebra av $\mathfrak{gl}(n, F)$. Kommutatorn $[A, B] = AB - BA$ mäter hur två linjära transformationer beror på ordningen i vilken de appliceras. Detta gör $\mathfrak{gl}(n, F)$ till ett grundläggande exempel som återkommer genom hela Lie-teorin.

Ett särskilt viktigt specialfall fås när Lie-bracketen är identiskt noll, det vill säga när $[x, y] = 0$ för alla $x, y \in L$. Sådana Lie-algebror kallas abelska och kommer att behandlas mer ingående i ett senare avsnitt.

2.2 Lie-subalgebror och ideal

Efter att ha introducerat Lie-algebror och gett grundläggande exempel uppstår naturligt frågan om vilka delstrukturer som bevarar Lie-algebrans algebraiska egen-

skaper. I likhet med hur underrum spelar en central roll i linjär algebra är det därför av intresse att studera delrum som är stabila under Lie-bracketen.

Definition 2.2. Låt L vara en Lie-algebra över ett fält F . Ett delrum $K \subseteq L$ kallas för en *Lie-subalgebra* om det är stängt under Lie-bracketen, det vill säga om

$$[x, y] \in K \quad \text{för alla } x, y \in K.$$

Eftersom Lie-bracketen på L uppfyller antisymmetri och Jacobi-identiteten, gäller dessa egenskaper automatiskt på K . För att visa att ett delrum är en Lie-subalgebra räcker det därför att kontrollera att det är stängt under Lie-bracketen.

De enklaste exemplen på Lie-subalgebror är det triviala delrummet $\{0\}$ samt hela Lie-subalgebran L självt. Mer intressanta exempel fås genom att betrakta naturliga delrum av matrisalgebror. I Lie-algebran $\mathfrak{gl}(n, F)$ utgör exempelvis mängden av alla diagonala matriser en Lie-subalgebra eftersom kommutatorn av två diagonala matriser är noll. Även mängden av övre triangulära matriser bildar en Lie-subalgebra, vilket visar att Lie-subalgebror ofta uppträder som strukturellt definierade delrum. Lie-subalgebror bevarar Lie-algebrans inre struktur, men de är i allmänhet inte tillräckliga för att beskriva hur en Lie-algebra samverkar med sina delrum. Detta leder till introduktionen av en starkare typ av delstruktur, det så kallade idealet.

Definition 2.3. Ett delrum $I \subseteq L$ kallas för ett *ideal* i Lie-algebran L om

$$[x, y] \in I \quad \text{för alla } x \in L \text{ och alla } y \in I.$$

Varje ideal är automatiskt en Lie-subalgebra, men omvänt behöver en Lie-subalgebra inte vara ett ideal. Skillnaden ligger i hur ett ideal är stabilt under Lie-bracket med hela Lie-algebran, medan en Lie-subalgebra endast kräver slutenhet internt.

Ett viktigt exempel ges av Lie-algebran $\mathfrak{gl}(n, F)$. Delrummet $\mathfrak{sl}(n, F)$ som består av alla matriser med spår noll är ett ideal i $\mathfrak{gl}(n, F)$. Detta beror på att spåret av en kommutator alltid är noll. För godtyckliga $A, B \in \mathfrak{gl}(n, F)$ gäller det att kommutatorn $[A, B] = AB - BA$ har spår noll och därmed tillhör $[A, B]$ alltid $\mathfrak{sl}(n, F)$, oavsett om A eller B själva har spår noll.

Ett centralt motexempel ges av $\mathfrak{b}_n(F)$, vilket är mängden av alla övre triangulära matriser. Detta delrum är stängt under Lie-bracketen och utgör därför en Lie-

subalgebra av $\mathfrak{gl}(n, F)$. För $n \geq 2$ gäller dock att $\mathfrak{b}_n(F)$ inte är ett ideal. Vi visar detta med ett konkret exempel för $n = 2$.

Exempel 2.4. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{b}_2(F), \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{gl}(2, F).$$

En direkt beräkning ger att

$$[A, B] = AB - BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Denna matris är inte en övre triangulär eftersom $(2, 1)$ -elementet är $-1 \neq 0$. Alltså är $\mathfrak{b}_n(F)$ inte ett ideal i $\mathfrak{gl}(n, F)$.

I varje Lie-algebra L finns alltid två triviala ideal: $\{0\}$ och hela L . Ett särskilt viktigt exempel på ett ofta icke-trivialt ideal är centrum av L .

Exempel 2.5. Låt L vara en Lie-algebra. Centrum av L definieras som

$$Z(L) = \{x \in L : [x, y] = 0 \text{ för alla } y \in L\}.$$

Vi visar att $Z(L)$ är ett ideal i L . Låt $x \in Z(L)$ och $y \in L$ vara godtyckliga. Vi ska visa att $[x, y] \in Z(L)$, det vill säga att

$$[z, [x, y]] = 0 \text{ för alla } z \in L.$$

Av Jacobi-identiteten gäller det att

$$[z, [x, y]] = -[x, [y, z]] - [y, [z, x]].$$

Eftersom $x \in Z(L)$ gäller det att $[x, [y, z]] = 0$ och $[x, [z, y]] = 0$, vilket ger $[y, [z, x]] = -[y, [x, z]] = 0$. Alltså är $[z, [x, y]] = 0$ för alla $z \in L$ och därmed är $Z(L)$ ett ideal i L .

Om L är abelsk sammanfaller centrumet med hela Lie-algebran, medan centrumet i många icke-abelska fall reduceras till det triviala delrummet. Centrumet spelar därför en central roll vid analysen av Lie-algebrors struktur och kommer att återkomma i senare avsnitt.

2.3 Homomorfier och adjoint-avbildningen

Efter att ha studerat Lie-algebror samt deras delstrukturer i form av Lie-subalgebror och ideal är nästa naturliga steg att undersöka avbildningar som bevarar Lie-algebrans algebraiska struktur. Sådana avbildningar möjliggör jämförelser mellan olika Lie-algebror och spelar en central roll vid analys av deras inre strukturer.

Definition 2.6. Låt L_1 och L_2 vara Lie-algebror. En avbildning $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$ kallas en *homomorfism* om

- (i) φ är linjär,
- (ii) $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ för alla $x, y \in L_1$.

Det andra villkoret innebär att homomorfismen bevarar Lie-algebrans algebraiska struktur, i den meningen att Lie-bracketen samverkar med avbildningen. Homomorfier kan därmed ses som strukturbevarande avbildningar mellan Lie-algebror, på samma sätt som linjära avbildningar bevarar vektorrumstrukturen.

Exempel 2.7. Ett särskilt viktigt exempel är den så kallade *adjoint-avbildningen*. Det är centralt eftersom den låter oss studera en Lie-algebras egen struktur inifrån, då algebran verkar på sig själv via Lie-bracketen. För en Lie-algebra L definieras avbildningen

$$\text{ad} : L \rightarrow \mathfrak{gl}(L), \quad \text{ad}(x)(y) = [x, y].$$

Här skickar ad varje element $x \in L$ till den linjära avbildningen $\text{ad}(x) : L \rightarrow L$ som verkar på ett element $y \in L$ via Lie-bracketen $[x, y]$. Av bilinjäriteten hos Lie-bracketen följer att $\text{ad}(x)$ är en linjär avbildning för varje $x \in L$. För att visa att ad är en Lie-algebrahomomorfism måste vi verifiera att

$$\text{ad}([x, y]) = \text{ad}(x) \circ \text{ad}(y) - \text{ad}(y) \circ \text{ad}(x),$$

vilket följer direkt från Jacobi-identiteten.

Lemma 2.8. *Avbildningen $\text{ad} : L \rightarrow \mathfrak{gl}(L)$ är en Lie-algebrahomomorfism.*

Bevis. Låt $z \in L$ vara godtyckligt. Vänsterledet ger $\text{ad}([x, y])(z) = [[x, y], z]$. Högerledet ger

$$(\text{ad}(x) \circ \text{ad}(y))(z) - (\text{ad}(y) \circ \text{ad}(x))(z) = [x, [y, z]] - [y, [x, z]].$$

Av Jacobi-identiteten gäller att

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0,$$

vilket omskrivet ger $[[x, y], z] = [x, [y, z]] - [y, [x, z]]$. Vänster- och högerleden är därmed lika, vilket visar att ad är en Lie-algebratomorfism.

□

Kärnan till adjoint-avbildningen sammanfaller med centrum av L , då $\text{ad}(x) = 0$ om och endast om $[x, y] = 0$ för alla $y \in L$, det vill säga om och endast om $x \in Z(L)$.

Homomorfier används för att jämföra Lie-algebror och identifiera när två Lie-algebror är strukturellt ekvivalenta. I de följande avsnitten kommer dessa begrepp att användas för att studera mer avancerade strukturella egenskaper, såsom derived algebra och solvabilitet.

2.4 Kvot Lie-algebror och faktoralgebror

Precis som i linjär algebra där kvotvektorrum används för att studera strukturer genom att identifiera element som skiljer sig åt med ett delrum, kan man konstruera *kvot* i Lie-algebra genom att faktorisera bort ideal. Det avgörande är att ideal, till skillnad från godtyckliga Lie-subalgebror, möjliggör en väldefinierad Lie-bracket på kvoten.

Definition 2.9. Låt L vara en Lie-algebra och I ett ideal i L . Eftersom I är ett delrum av L , kan man betrakta sidoklasserna

$$z + I = \{z + x : x \in I\}, \quad z \in L,$$

och därmed bilda kvotvektorrummet

$$L/I = \{z + I : z \in L\}.$$

Eftersom I är ett ideal kan Lie-bracketen på L inledas till en Lie-bracket på kvotvektorrummet L/I genom definitionen

$$[w + I, z + I] := [w, z] + I \quad \text{för alla } w, z \in L.$$

Intuitivt innebär denna definitionen att Lie-bracketen på kvoten ges av Lie-bracketen i L , där skillnader som ligger i idealet I identifieras som 0. För att denna definition ska vara meningsfull måste man kontrollera att uttrycket $[w, z] + I$ endast beror på sidoklasserna som innehåller w och z och inte valet på representationer.

Antag därför att

$$w + I = w' + I, \quad \text{och} \quad z + I = z' + I.$$

Då gäller det att $w - w' \in I$ och $z - z' \in I$. Med hjälp av Lie-bracketens bilinjäritet följer att skillnaden mellan $[w, z]$ och $[w', z']$ tillhör idealet I .

Detta visar att

$$[w' + I, z' + I] = [w', z'] + I,$$

och att Lie-bracketen på L/I därmed är väldefinierad.

Med denna Lie-bracket blir L/I en Lie-algebra, kallad *kvot-* eller *faktoralgebra* av L med avseende på I . Kvotkonstruktionen är ett centralt verktyg inom teorin och återkommer bland annat i studiet av solvable Lie-algebror i avsnitt 4.

2.5 Abelska Lie-algebror: när kommutatorn försvinner

Det enklaste exemplet på en Lie-algebra fås när Lie-bracketen inte ger någon struktur utöver vektorrummet. Detta leder till begreppet abelska Lie-algebror vilket också utgör en naturlig referenspunkt för de mer komplexa strukturer som studeras i senare avsnitt.

Definition 2.10. En Lie-algebra L kallas för *abelsk* om Lie-bracketen är identiskt noll, det vill säga om

$$[x, y] = 0 \quad \text{för alla } x, y \in L.$$

Abelska Lie-algebror utgör de enklaste exemplen på Lie-algebror och många begrepp inom Lie-teorin kan förstås som generaliseringar av eller avvikelser från det abelska fallet. Framför allt gäller att L är abelsk om och endast om $L = Z(L)$, alltså om centrumet sammanfaller med hela Lie-algebran, vilket följer direkt av definitionerna.

Slutligen kan det noteras att abelska Lie-algebror är ett specialfall av solvable Lie-algebror, vilket behandlas mer ingående i avsnitt 4.

3 Lie-algebror i låg dimension

I de föregående avsnitten har den abstrakta definitionen av Lie-algebror presenterats tillsammans med grundläggande begrepp såsom subalgebror, ideal och homomorfier. För att utveckla intuitionen kring dessa strukturer studeras Lie-algebror i dimension 1, 2 och 3. Dessa fall är tillräckligt enkla för att klassificeras fullständigt, samtidigt som de illustrerar centrala fenomen som återkommer i teorin för högre dimensioner. I dimension 1 finns endast den triviala abelska strukturen. I dimension 2 förekommer det första icke-abelska fallet, medan dimension 3 ger en grund till Heisenbergalgebran, vilket utgör ett viktigt exempel på en solvable men icke-abelsk Lie-algebra.

3.1 Dimension 1: den abelska strukturen

Vi börjar med det enklaste fallet. Låt L vara en Lie-algebra över ett fält F med $\dim L = 1$. Då är $L = \text{Span}\{x\}$ för något $x \in L$. Eftersom Lie-bracketen uppfyller villkor (L1), gäller att $[x, x] = 0$. För godtyckliga element $u, v \in L$ gäller då $[u, v] = 0$, eftersom både u och v är skalära multiplar av x . Alltså är Lie-bracketen identiskt noll på L .

Detta visar att varje endimensionell Lie-algebra är abelsk. Vidare följer att alla abelska Lie-algebror av samma dimension över ett givet fält är isomorfa. Därmed finns det upp till isomorfi endast en Lie-algebra av dimension 1. Detta enkla fall visar att alla icke-triviala strukturella fenomen i Lie-teorin först uppträder i dimension minst 2.

3.2 Dimension 2: abelska och icke-abelska fall

Låt L vara en Lie-algebra över ett fält F med $\dim L = 2$. Vi skiljer mellan det abelska och det icke-abelska fallet.

Det abelska fallet. Om Lie-bracketen är identiskt noll, det vill säga om

$$[x, y] = 0 \quad \text{för alla } x, y \in L,$$

är L en abelsk Lie-algebra. Alla abelska Lie-algebror av dimension 2 över ett givet fält är isomorfa och det finns därför upp till isomorfism exakt en abelsk Lie-algebra

av dimension 2.

Det icke-abelska fallet. Antag nu att L är icke-abelsk. Betrakta delrummet

$$[L, L] = \text{span}\{[x, y] : x, y \in L\},$$

som består av alla linjära kombinationer av kommutatorer i L . Eftersom L inte är abelsk är detta delrum icke-trivialt. Antag för motsägelse att $[L, L] = L$. Låt $\{x, y\}$ vara en bas för L . Då spänns $[L, L]$ av $\{[x, y]\}$, vilket är endimensionellt. Men eftersom vi antog att $[L, L] = L$ vilket är tvådimensionellt, blir det en motsägelse. Alltså är $[L, L] \neq 0$ och strikt innehållen i L , det vill säga $[L, L]$ är exakt endimensionell. Det finns därför ett element $x \in L$ som spänner $[L, L]$, vilket kan kompletteras till en bas x, y för L . Eftersom $[L, L]$ är endimensionellt finns ett tal $\alpha \in F$ sådant att $[x, y] = \alpha x$. Antagandet att L är icke-abelsk medför att $\alpha \neq 0$ och genom ett lämpligt basbyte kan vi därför anta att $[x, y] = x$.

Eftersom basen x, y och relationen $[x, y] = x$ fullständigt bestämmer Lie-bracketen på L , följer att alla icke-abelska 2-dimensionella Lie-algebror är isomorfa med varandra. Vi kan realisera denna algebra i $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$. Låt

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En direkt beräkning ger oss

$$xy = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad yx = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Med kommutatorn får vi att

$$[x, y] = xy - yx = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = x,$$

vilket verifierar relationen $[x, y] = x$.

3.3 Dimension 3: Heisenbergalgebran

I detta avsnitt studeras Heisenbergalgebran som ett centralt exempel på en icke-abelsk solvable Lie-algebra i dimension 3.

Lemma 3.1. *Låt L vara en icke-abelsk Lie-algebra av dimension 3 sådan att $[L, L]$ är endimensionell och innehållen i centrum $Z(L)$. Antag att $f, g \in L$ är element sådana att $z = [f, g]$ och $z \neq 0$. Då spänner z upp $[L, L]$ och elementen f, g och z är linjärt oberoende och bildar en bas för L .*

Bevis. Eftersom $[L, L]$ är endimensionell och $z = [f, g] \neq 0$, spänner z upp $[L, L]$. Antag att $\alpha f + \beta g + \gamma z = 0$ för några skalärer $\alpha, \beta, \gamma \in F$. Vi ska visa att $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Vi applicerar Lie-bracketen med f på båda sidor av antagandet:

$$[f, \alpha f + \beta g + \gamma z] = [f, 0] = 0.$$

Av bilinjäriteten ger detta att $\alpha[f, f] + \beta[f, g] + \gamma[f, z] = 0$. Eftersom $[f, f] = 0$ enligt villkor (L1) och $z \in Z(L)$, blir $[f, z] = 0$ vilket reduceras till $\beta z = 0$. Eftersom $z \neq 0$ följer det att $\beta = 0$. På motsvarande sätt applicerar vi Lie-bracketen med g :

$$[g, \alpha f + \beta g + \gamma z] = 0,$$

vilket ger $\alpha[g, f] = -\alpha z = 0$ och därmed $\alpha = 0$. Då återstår $\gamma z = 0$ och eftersom $z \neq 0$ får vi kvar $\gamma = 0$.

Alltså är $\alpha = \beta = \gamma = 0$, vilket visar att f, g, z är linjärt oberoende. Eftersom $\dim L = 3$ bildar de därmed en bas för L . \square

Lie-bracketen bestäms då entydigt av relationen $[f, g] = z$, medan $[f, z] = [g, z] = 0$. Detta motiverar följande definition.

Definition 3.2. Låt L vara ett tredimensionellt vektorrum med bas $\{f, g, z\}$ över ett fält F . Lie-algebran med Lie-bracket definierad av

$$[f, g] = z, \quad [f, z] = 0, \quad [g, z] = 0$$

kallas för *Heisenbergalgebran*.

Vi verifierar att Jacobi-identiteten (L2) är uppfylld här. Den enda icke-triviala fallet är tripeln (f, g, z) :

$$[f, [g, z]] + [g, [z, f]] + [z, [f, g]] = [f, 0] + [g, 0] + [z, z] = 0.$$

Alla övriga tripplar innehåller ett upprepat element och är identiskt noll enligt villkor (L1). Därmed är Heisenbergalgebran en väldefinierad Lie-algebra.

Anmärkning 3.3. Det följer av Lemma 3.1 att om L är en icke-abelsk Lie-algebra av dimension 3 sådan att $[L, L]$ är endimensionell och innehållen i centrum $Z(L)$, så är L isomorf med Heisenbergalgebran.

Detta ger ett centralt exempel inom teorin för lågdimensionella Lie-algebror eftersom det illustrerar hur en Lie-algebra kan vara icke-abelsk samtidigt som dess icke-abelska struktur är koncentrerad till ett endimensionellt centralt ideal.

Detta fall täcker inte alla Lie-algebror av dimension 3. En fullständig klassifikation kräver en analys av flera fall beroende på dimensionen av den derived algebran $[L, L]$ och dess relation till centrum $Z(L)$. Exempelvis ger fallet $[L, L] = L$ en grund till semisimple Lie-algebror såsom $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, vilket ligger utanför ramen för detta arbete. Vi begränsar oss här till Heisenbergalgebran eftersom den utgör det mest centrala exemplet på en icke-abelsk men solvable Lie-algebra i dimension 3 och eftersom den illustrerar begrepp som derived algebra, centrum och solvabilitet, vilka behandlas i kommande avsnitt. En fullständig klassifikation av Lie-algebror i dimension 3 ges i [1, kap. 3].

4 Solvable och semisimple Lie-algebror

4.1 Derived algebra och icke-kommutativitet

I de föregående avsnitten har grundläggande definitioner och exempel på Lie-algebror presenterats. Ett naturligt nästa steg är att studera hur Lie-algebror kan analyseras och klassificeras utifrån hur långt ifrån de är att vara abelska. För detta ändamål introduceras i detta avsnitt begreppet derived algebra, vilket ger ett mått på Lie-algebrans icke-kommutativitet.

Definition 4.1. Låt L vara en Lie-algebra. Den *derived algebra* av L definieras som

$$L' = [L, L] = \text{span}\{[x, y] : x, y \in L\}.$$

Delrummet L' består alltså av alla linjära kombinationer av kommutatorer i L [2, s. 6]. Derived algebran ger ett mått på hur icke-abelsk L är. Om $L' = 0$ är L abelsk och ju större L' är i förhållande till L , desto mer komplex är kommutatorstrukturen. Ett extremfall är $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ där $L' = L$, medan Heisenbergalgebran utgör ett mellanfall där L' är ett endimensionellt ideal.

Anmärkning 4.2. Den derived algebran $L' = [L, L]$ är ett ideal i L . Detta följer av att L' per definition består av alla linjära kombinationer av kommutatorer, och om $z \in L'$ och $x \in L$, så är $[z, x]$ per definition en kommutator av element i L och tillhör därmed L' .

Ett centralt samband mellan den derived algebran och kvot Lie-algebror ges av följande resultat.

Lemma 4.3. Låt I vara ett ideal i en Lie-algebra L . Då är kvot-Lie-algebran L/I abelsk om och endast om I innehåller den derived algebran L' .

Bevis. Kvoten L/I är abelsk om och endast om $[x + I, y + I] = I$ för alla $x, y \in L$. Det vill säga, om och endast om $[x, y] + I = I$, vilket är ekvivalent med att $[x, y] \in I$ för alla $x, y \in L$. Detta gäller om och endast om delrummet uppspänt av alla kommutatorer $[x, y]$ är innehållet i I , alltså om och endast om $L' \subseteq I$ [1, s. 28].

□

Detta lemma visar att L' är det minsta ideal i L som måste faktoriseras bort för att

få en abelsk kvot. Med andra ord är kvoten L/L' alltid abelsk och varje abelsk kvot av L fås genom att faktorisera bort ett ideal som innehåller L' .

Genom att iterera konstruktionen av den derived algebran fås en avtagande följd av ideal

$$L = L^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq \dots,$$

där

$$L^{(k+1)} = [L^{(k)}, L^{(k)}] \quad \text{för } k \geq 0.$$

Följden kallas för den *derived serien* av L och kommer att ligga till grund för definitionen av solvable Lie-algebror i nästa avsnitt. Beroende på om denna serie terminerar i noll eller stabiliserar vid ett icke-trivialt ideal fås fundamentalt olika typer av Lie-algebror.

4.2 Solvable Lie-algebror och den derived serien

I föregående avsnitt introducerades begreppet derived algebran $L' = [L, L]$ som ett mått på Lie-algebrans icke-kommutativitet. Genom att iterera denna konstruktion fås den derived serien. En naturlig fråga är om denna serie alltid terminerar i noll, det vill säga om Lie-algebran successivt kan reduceras till en abelsk struktur. Detta leder till begreppet solvable Lie-algebra.

Definition 4.4. En Lie-algebra L sägs vara *solvable* om det finns ett heltal $m \geq 1$ sådant att

$$L^{(m)} = 0,$$

där $L^{(m)}$ betecknar den m :te termen i den derived serien

$$L = L^{(0)} \supseteq L^{(1)} \supseteq L^{(2)} \supseteq \dots, \quad L^{(k+1)} = [L^{(k)}, L^{(k)}].$$

Motivationen för denna definition kommer direkt från Lemma 4.3. Eftersom derived algebran L' är det minsta ideal som måste faktoriseras bort för att få en abelsk kvot, är det naturligt att upprepa denna konstruktion för att undersöka om Lie-algebran successivt kan reduceras till en abelsk struktur.

Definitionen innebär att Lie-algebran efter ett ändligt antal steg blir abelsk i den meningen att alla tillräckligt höga kommutatorer försvinner. Alla abelska Lie-algebror är därmed solvable, men begreppet omfattar även vissa icke-abelska Lie-algebror.

Vidare visar klassifikationen av Lie-algebror i dimension 2 att varje 2-dimensionell Lie-algebra är solvable, trots att det finns icke-abelska exempel. Detta visar att solvabilitet är ett relativt svagt krav.

Ett viktigt exempel på en icke-abelsk men solvable Lie-algebra är Heisenbergalgebran (se Definition 3.2), där derived algebran är endimensionell och den andra termen i serien är 0. För Heisenbergalgebran L gäller att

$$L^{(1)} = [L, L] = \text{span}\{z\}, \quad L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}] = 0,$$

vilket visar att den derived serien terminerar efter två steg. Detta verifierar explicit att Heisenbergalgebran är solvable.

Alla Lie-algebror är däremot inte solvable. Ett centralt motexempel är Lie-algebran $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, vars derived serie inte terminerar i noll eftersom $L = L'$ och därmed $L^{(m)} = L$ för alla $m \geq 1$ [1, s. 28]. Detta exempel visar att solvabilitet utgör en icke-trivial strukturell egenskap som delar upp Lie-algebror i två fundamentalt olika klasser.

En viktig observation är att solvabilitet bevaras under vissa operationer. Detta formaliseras i följande lemma, vilket också kommer vara avgörande för att förstå radikalens existens i nästa avsnitt.

Lemma 4.5. *Låt L vara en Lie-algebra.*

- (i) *Om I är ett solvable ideal i L och kvoten L/I är solvable, så är L själv solvable.*
- (ii) *Om I och J är solvable ideal i L , så är även deras summa $I + J$ ett solvable ideal.*

Bevis. (i) Eftersom (L/I) är solvable finns ett m sådant att $(L/I)^{(m)} = 0$, det vill säga $L^{(m)} + I = I$ och därmed $L^{(m)} \subseteq I$. Eftersom I är solvable finns ett k sådant att $I^{(k)} = 0$. Då $L^{(m)} \subseteq I$ gäller det att $(L^{(m)})^{(k)} \subseteq I^{(k)} = 0$, och eftersom $(L^{(m)})^{(k)} = L^{(m+k)}$ följer det att $L^{(m+k)} = 0$. Alltså är L solvable.

(ii) Se [3, Proposition 1.3.3]. □

Det här ger en metod för att konstruera nya solvable Lie-algebror från kända exempel och kommer att vara avgörande för att förstå strukturen hos radikalen i nästa avsnitt.

4.3 Semisimple Lie-algebror och radikalen

Begreppet solvabilitet leder naturligt till en uppdelning av Lie-algebror i två fundamentalt olika typer. För att formalisera denna uppdelning introduceras begreppet semisimple Lie-algebra.

För att motivera att ett största solvable ideal existerar noterar vi att om I och J är två solvable ideal i L , så är även deras summa $I + J$ ett solvable ideal enligt Lemma 4.5. Eftersom L är ändligdimensionell kan vi därför bilda summan av alla solvable ideal i L , vilket ger ett väldefinierat solvable ideal som innehåller alla andra solvable ideal. Detta ideal kallas för radikalen och betecknas $\text{rad}(L)$. Vi formaliserar detta i följande proposition.

Proposition 4.6. *Varje ändligdimensionell Lie-algebra L har ett unikt solvable ideal som innehåller alla andra solvable ideal i L .*

Bevis. Observera att det triviala idealet är solvable. Eftersom L är ändligdimensionell kan inget solvable ideal ha större dimension än $\dim L$. Det finns därför ett solvable ideal R med maximal dimension bland alla solvable ideal i L .

Låt S vara ett godtyckligt solvable ideal i L . Enligt Lemma 4.5 är summan $S + R$ ett solvable ideal i L . Eftersom $R \subseteq S + R$ gäller det att $\dim R \leq \dim(S + R)$. Men $S + R$ är ett solvable ideal och R valdes med högsta möjliga dimension bland alla solvable ideal, så inget solvable ideal kan ha större dimension än R . Därför gäller $\dim(S + R) \leq \dim R$. Tillsammans ger detta $\dim R = \dim(S + R)$ och därmed $S + R = R$, alltså $S \subseteq R$. Detta visar att R innehåller varje solvable ideal S . Eftersom R själv är ett solvable ideal som innehåller alla andra solvable ideal är R unikt. \square

Definition 4.7. Det största solvable idealet i en ändligdimensionell Lie-algebra L kallas för *radikalen* av L och betecknas $\text{rad}(L)$.

Vi beräknar radikalen för våra två centrala exempel. För Heisenbergalgebran L med bas $\{f, g, z\}$ och relationen $[f, g] = z$ gäller att L själv är solvable, eftersom $L^{(1)} = [L, L] = \text{span}\{z\}$, $L^{(2)} = [L^{(1)}, L^{(1)}] = 0$. Eftersom L är solvable och det inte finns något större ideal än L självt, gäller det att $\text{rad}(L) = L$. För andra exemplet $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ gäller däremot att $L' = L$, vilket innebär att derived serien aldrig terminerar och att $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ inte är solvable. Eftersom det saknas icke-triviala solvable ideal är $\text{rad}(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})) = 0$.

Radikalen ger grund till en naturlig uppdelning av Lie-algebror. De Lie-algebror vars radikal är trivial, det vill säga $\text{rad}(L) = 0$, utgör en särskilt viktig klass vilket är de semisimple Lie-algebrorna.

Definition 4.8. En ändligdimensionell Lie-algebra L sägs vara *semisimple* om den saknar icke-triviala solvable ideal. Detta är ekvivalent med att Lie-algebrans radikal är trivial, det vill säga

$$\text{rad}(L) = 0.$$

Ett klassiskt exempel på en semisimple Lie-algebra är $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Detta står i kontrast till Heisenbergalgebran, som är solvable men inte semisimple. I Heisenbergalgebran är centret icke-trivialt, vilket innebär att radikalen är icke-noll och att Lie-algebran därför inte kan vara semisimple. De två extremfallen illustrerar vad radikalen mäter. För Heisenbergalgebran L är L självt solvable, vilket innebär att $\text{rad}(L) = L$. Kvoten $\frac{L}{\text{rad}(L)} = 0$ är trivial, vilket återspeglar att Heisenbergalgebran saknar semisimple del. För $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ gäller däremot att $\text{rad}(L) = 0$, eftersom $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ är semisimple och därmed saknar icke-triviala solvable ideal. Kvoten $\frac{L}{\text{rad}(L)} = L$ sammanfaller i detta fall med hela Lie-algebran. Dessa exempel visar att radikalen fungerar som ett mått på hur långt ifrån semisimple en Lie-algebra är.

Solvable och semisimple Lie-algebror kan betraktas som motsatta gränfall inom teorin. Den enda Lie-algebran som är både solvable och semisimple är nollalgebran. Detta följer av att om L är solvable är L ett solvable ideal i sig självt, men om L samtidigt är semisimple gäller att $\text{rad}(L) = 0$, vilket innebär att $L = 0$. Ett centralt samband mellan solvable Lie-algebror och semisimple Lie-algebror ges av följande resultat.

Lemma 4.9. *Om L är en ändligdimensionell Lie-algebra så är kvoten $\frac{L}{\text{rad}(L)}$ alltid semisimple.*

Bevis. Låt \bar{J} vara en solvable ideal av $\frac{L}{\text{rad}(L)}$. Vi ska visa att $\bar{J} = 0$.

Enligt ideal-korrespondensen existerar ett ideal J i L som innehåller $\text{rad}(L)$ sådant att $\bar{J} = \frac{J}{\text{rad}(L)}$. Ideal-korrespondensen säger att idealet i $L/\text{rad}(L)$ är på en-till-en korrespondens med ideal i L som innehåller $\text{rad}(L)$. Eftersom $\text{rad}(L)$ är solvable per definition och kvoten $\frac{J}{\text{rad}(L)} = \bar{J}$ är solvable per antagande, följer av Lemma 4.5 (i) att J själv är solvable. Men $\text{rad}(L)$ är det största solvabla idealet i L , vilket innebär att varje solvable ideal måste vara innehållet i $\text{rad}(L)$. Därför gäller $J \subseteq \text{rad}(L)$. Eftersom J redan innehåller $\text{rad}(L)$ enligt ideal-korrespondensen, måste $J = \text{rad}(L)$.

Detta ger att $\bar{J} = \frac{J}{\text{rad}(L)} = \frac{\text{rad}(L)}{\text{rad}(L)} = 0$, vilket visar att $\frac{L}{\text{rad}(L)}$ saknar icke-triviala solvable ideal och är semisimple. \square

Lemmat visar att varje ändligdimensionell Lie-algebra kan reduceras till en semisimple Lie-algebra genom att faktorisera med avseende på sin radikal. Därmed framträder radikalen som en del av Lie-algebran som ansvarar för dess solvable struktur, medan kvoten $\frac{L}{\text{rad}(L)}$ representerar den semisimple delen. Detta ger en naturlig uppdelning av varje ändligdimensionell Lie-algebra i en solvable och en semisimple del. För Heisenbergalgebran är $\text{rad}(L) = L$, vilket innebär att hela algebran är solvable och att den semisimple delen är trivial. För $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ gäller däremot att $\text{rad}(L) = 0$, vilket innebär att algebran sammanfaller helt med sin semisimple del.

5 Avslutande ord

Denna uppsats har gett en grundläggande introduktion till Lie-algebrors struktur och klassifikation i låg dimension. Vi började med de grundläggande definitionerna av Lie-algebror, subalgebror och ideal och studerade sedan homomorfier och adjoint-avbildningen som verktyg för att jämföra och analysera Lie-algebror.

Genom konkreta exempel i dimension 1, 2 och 3 illustrerades hur Lie-algebrors struktur blir alltmer komplex med ökande dimension. Särskilt Heisenbergalgebran visade sig vara ett centralt exempel på en icke-abelsk men solvable Lie-algebra, där den icke-abelska strukturen är koncentrerad till ett endimensionellt ideal i centrum.

Slutligen introducerades begreppen solvabilitet och semisimplehet, vilket utgör en grundläggande uppdelning av Lie-algebror i två fundamentalt olika klasser. Radikalen visade sig vara ett centralt verktyg för denna klassifikation, då kvoten $\frac{L}{\text{rad}(L)}$ alltid är semisimple enligt Lemma 4.9. Detta formaliserar punkt 6 i inledningen. Varje ändligdimensionell Lie-algebra L delar upp sig naturligt i en solvable del, given av $\text{rad}(L)$ och en semisimple del, given av kvoten $L/\text{rad}(L)$.

En naturlig fortsättning på detta arbete vore att studera klassifikationen av Lie-algebror i högre dimension, samt att fördjupa analysen av semisimpla Lie-algebror och deras relation till solvable Lie-algebror. Därutöver utgör också nilpotenta Lie-algebror en naturlig mellanklass mellan abelska och solvable algebror, där Heisenbergalgebran är ett exempel på en sådan. Dessa delar har medvetet lämnats utanför ramen för detta arbete, vars syfte är att ge en grundläggande förståelse för Lie-algebrors struktur och klassifikation.

Referenser

- [1] Erdmann, K., Wildon, M.J. (2006). *Introduction to Lie Algebras*. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer.
- [2] Humphreys, J.E. (1972). *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*. Springer.
- [3] Hazewinkel, M., Gubareni, N., Kirichenko, V.V. (2010). *Algebras, Rings and Modules: Lie Algebras and Hopf Algebras*, Volume 3. American Mathematical Society.

På sida 12 ska:

$$[y,[z,x]] = yzx - yxz - zxy + \mathbf{xyz}$$
 istället vara $[y,[z,x]] = yzx - yxz - zxy + \mathbf{zyx}$.