



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Den tolvfaldiga vägen

av

Sofia Eriksson

2026 - No L12

Den tolvfaldiga vägen

Sofia Eriksson

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Per Alexandersson

2026

Abstract

The purpose of this thesis is to provide an account of the Twelfold Way, a combinatorial framework that classifies twelve closely related distribution problems, structured by the distinctions between objects (*balls*) and containers (*boxes*) under various conditions.

The work follows a pedagogical and combinatorial progression, starting from elementary counting principles such as the multiplication principle, permutations, and unordered selections via *stars and bars*. The study then delves into set partitions, Stirling numbers of the second kind, and their connection to Bell numbers and surjective functions. Thereafter, the focus shifts toward analytic combinatorics, utilizing ordinary generating functions to encode numerical sequences into functions for clearer pattern interpretation. Finally, integer partitions are examined alongside their associated bijective transformations and Ferrers diagrams. Through this structured progression, the thesis demonstrates how unified definitions bridge classic counting methods with analytic combinatorics.

Sammanfattning

Syftet med detta arbete är att redogöra för den tolvfaldiga vägen, ett kombinatoriskt ramverk som klassificerar tolv nära besläktade fördelningsproblem, strukturerade utifrån objektens (*bollarnas*) och behållarnas (*lådornas*) identitet (*om de är unika eller identiska*), under olika villkor.

Arbetet bygger på en pedagogisk och kombinatorisk progression från de elementära räkneprinciperna som multiplikationsprincipen, permutationer och oordnade urval via *stars and bars*. Därefter fördjupas studien i mängdpartitioner, Stirlingtal av andra ordningen samt deras koppling till Belltal och surjektiva funktioner. Arbetet övergår sedan till mer analytisk kombinatorik, där genererande funktioner används för att kapsla in en sekvens av tal till en funktion för att enklare tolka mönster. Avslutningsvis behandlas heltalspartitioner med tillhörande bijektiva transformationer och Ferrers-diagram. Genom denna strukturerade progression visar arbetet hur enhetliga definitioner binder samman klassiska räknemetoder med analytisk kombinatorik.

Innehåll

1	Den tolvfaldiga vägen	9
1.1	Förberedelser och bakgrund	11
2	Elementär kombinatorik och urvalsteori	16
2.1	Klassiska potenser	16
2.2	Permutationer	17
2.3	Klassiska kombinationer	20
2.4	Stars and bars	23
2.5	Kompositioner	26
3	Mängdpartitioner	29
3.1	Mängdpartition i singelmängder	30
3.2	Stirlingtal av andra ordningen	32
3.3	Analytisk kombinatorik och den ordinarie genererande funktionen . .	36
3.4	Belltal	39
3.5	Antalet surjektiva funktioner	43
4	Heltalspartitioner	45
4.1	Heltalspartition i exakt k delar	45
4.2	Heltalspartition i högst k delar	48
4.3	Heltalspartition i enbart ettor	51
4.4	Genererande funktioner för heltalspartitioner	52
	Referenser	55
A	Algebraiskt bevis med genererande funktioner	56

1 Den tolvfaldiga vägen

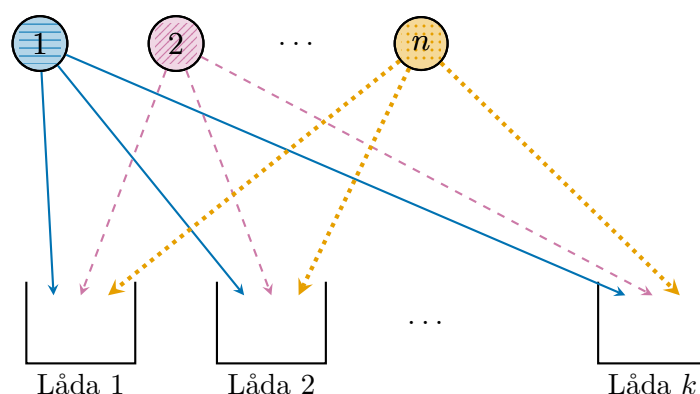
Den tolvfaldiga vägen är ett systematiskt ramverk inom kombinatoriken som klassificerar tolv nära besläktade räkneproblem. Vi kommer att illustrera detta med hjälp av bollar och lådor. Klassificeringen bygger på att bestämma antalet funktioner $f : X \rightarrow Y$ (*antal sätt att fördela bollar i lådor*) under olika villkor, där X (*definitionsmängden*) och Y (*målmängden*) är två ändliga mängder med kardinaliteterna $|X| = n$ (*antal bollar*), respektive $|Y| = k$ (*antal lådor*). Det finns tre villkor som kan ställas på en funktion:

- i) Fri: En fördelning utan restriktioner. Varje enskild boll kan placeras i valfri låda. En låda kan därmed ta emot alltifrån noll till samtliga bollar.
- ii) Injektiv: Varje låda får innehålla högst en boll.
- iii) Surjektiv: Samtliga lådor måste tilldelas minst en boll, vilket innebär att inga lådor tillåts vara tomma.

Vidare kan elementen i X (bollarna) och Y (lådorna) betraktas som *unika* eller *identiska*. När bollarna är unika har det betydelse *vilken* specifik boll som hamnar var. Om de istället är identiska spelar bollarnas identitet ingen roll, utan vi räknar enbart *antalet* bollar per låda. På samma sätt innebär unika lådor att det har betydelse i *vilken* specifik låda en boll hamnar, eftersom lådorna kan skiljas åt. Om lådorna istället är identiska har lådornas identitet ingen betydelse, utan vi bryr oss endast om hur bollarna fördelas i *högar*.

Dessa fyra olika möjligheter kombinerat med de tre funktionsalternativen, ger totalt tolv olika problem. [Sta12]

Exempel på hur ett fall kan se ut:



Tabell 1: Den tolvfaldiga vägen—uppdelning av n bollar i k lådor. Symbolerna i de två första kolumnerna betyder: B = bollar, L = lådor. U = unika och I = identiska.

B	L	Fri inga villkor	Injektiv ≤ 1 per låda	Surjektiv ≥ 1 per låda
U	U	Fall 1 k^n Klassiska potenser. Varje unik boll har k oberoende val bland de unika lådorna. Motsvarar alla funktioner.	Fall 2 $(k)_n = \frac{k!}{(k-n)!}$ Permutationer. Högst en boll per låda. Kräver $n \leq k$, annars blir antalet 0. Motsvarar injektiva funktioner.	Fall 3 $k! S(n, k)$ Antalet surjektiva funktioner. Bollarna grupperas i k icke-tomma högar via Stirlingtal $S(n, k)$ och delas sedan ut till de unika lådorna. Motsvarar surjektiva funktioner.
U	I	Fall 4 $\sum_{k=1}^n S(n, k)$ Belltal. Dela upp n unika bollar i högst k identiska högar. Om $k \geq n$ blir summan lika med Belltalet B_n .	Fall 5 $[n \leq k]$ Mängdpartition i singelmängder. Högst en boll per låda. Eftersom lådorna är identiska finns det bara ett sätt om bollarna får plats, annars inget.	Fall 6 $S(n, k)$ Stirlingtal av andra ordningen. Antalet sätt att partitionera en mängd med n unika bollar i exakt k icke-tomma, identiska lådor.
I	U	Fall 7 $\binom{n+k-1}{n}$ Stars and bars. Klassisk kombination med tillåtelse att välja samma låda fler gånger. Antalet sätt att placera identiska bollar i unika lådor.	Fall 8 $\binom{k}{n}$ Klassisk kombination. Kombinaion utan upprepning. Vi väljer vilka n av de k unika lådorna som ska få en boll.	Fall 9 $\binom{n-1}{k-1}$ Kompositioner. Antalet sätt att fördela n identiska bollar i k unika lådor så att varje låda får minst en boll. Först läggs en boll i varje låda, sedan fördelas resten.
I	I	Fall 10 $p_{\leq k}(n)$ Heltalspartitioner i högst k delar. Fördelning av n identiska bollar i k identiska lådor med valfritt antal tomma lådor. Det har enbart betydelse hur bollarna grupperas i högar, vilket motsvarar en osorterad summanotation för heltalet n och sammanfaller med $p_k(n+k)$.	Fall 11 $[n \leq k]$ Heltalspartitioner i enbart ettor. Högst en boll per låda. Eftersom både bollar och lådor är identiska finns bara ett sätt om bollarna får plats, annars inget.	Fall 12 $p_k(n)$ Heltalspartitioner i exakt k delar. Fördelning av n identiska bollar i k identiska lådor där varje låda måste innehålla minst en boll. Det har enbart betydelse hur många bollar som hamnar i respektive låda, inte vilken låda som innehåller vad.

1.1 Förberedelser och bakgrund

Sats 1.1 (Multiplikationsprincipen, [BXGS23]). *En följd av k val, där det första beslutet kan träffas på m_1 sätt, det andra på m_2 sätt o.s.v., kan sammantaget ske på*

$$m_1 m_2 \cdots m_k$$

olika sätt, förutsatt att antalet av valen är sinsemellan oberoende.

Definition 1.2 (Permutation, [Ros99]). Låt $x_1, \dots, x_n$ vara n stycken distinkta objekt.

En ordnad uppräknings av $x_1, \dots, x_n$ kallas för en *permutation*.

En ordnad uppräknings av $r \leq n$ stycken av $x_1, \dots, x_n$ kallas för en *r -permutation* av $x_1, \dots, x_n$.

Exempel 1.3. Exempel på permutationer av **A, B, C, D, E**, är

$$\{\text{ACDBE}\}, \{\text{DEABC}\}, \{\text{CAEDB}\}.$$

Definition 1.4 (Kombination, [Ros99]). Låt $x_1, \dots, x_n$ vara n stycken distinkta objekt. En *r -kombination* av $x_1, \dots, x_n$ är ett oordnat urval av r stycken av dessa objekt.

Exempel 1.5. Några exempel på 3-kombinationer av de fem objekten **A, B, C, D, E**, där ordningen ej spelar roll är

$$\{\text{A, B, C}\}, \{\text{A, D, E}\}, \{\text{B, C, E}\}$$

Binomialkoefficienter och Pascals triangel

Definition 1.6 (Binomialkoefficient). Låt $0 \leq k \leq n$

$$\binom{n}{k}$$

anger antalet sätt att välja ut k element ur en mängd med n element, *utan* hänsyn till ordningen.

Binomialkoefficienterna har följande egenskaper:

- $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Pascals triangel

Pascals triangel är ett talmönster som inom kombinatoriken används till att snabbt ta fram binomialkoefficienter (*kombinationer*). Den visar på hur många sätt man kan välja ut ett visst antal objekt ur en mängd (*block*).

Sats 1.7. Om n och k är positiva heltal ($n, k \in \mathbb{Z}^+$) sådana att $1 \leq k \leq n$, då gäller att

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Bevis. Låt X vara en mängd med n element, vi väljer ut ett specifikt element som vi kallar för x . Alla sätt vi kan välja ut en delmängd med k element ur X kan delas upp i två disjunkta delar (*separata fall*), U och V , enligt följande

$$U = \{\text{alla } k\text{-delmängder som innehåller } x\}$$

$$V = \{\text{alla } k\text{-delmängder som inte innehåller } x\}.$$

Alla k -delmängder som innehåller x

En k -delmängd tillhör U om och endast om elementet x är valt. Eftersom x redan har sin plats i delmängden behöver vi bara välja ut de resterande $k-1$ elementen bland de $n-1$ andra elementen som finns kvar. Antalet sätt att göra detta på är

$$|U| = \binom{n-1}{k-1}.$$

Alla k -delmängder som inte innehåller x

En k -delmängd tillhör V om och endast om elementet x inte får vara med. Det innebär att hela k -delmängden måste väljas fritt från $(n-1)$ -mängden. Antalet sätt att göra detta på är

$$|V| = \binom{n-1}{k}.$$

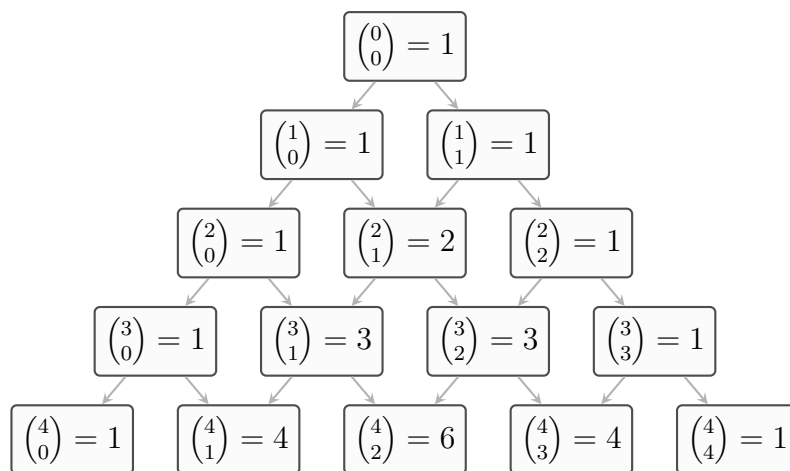
Eftersom en delmängd måste innehålla x eller inte göra det, finns inga andra alternativ och fallen kan inte överlappa. Alltså är delmängderna U och V disjunkta, och tillsammans får vi det totala antalet sätt genom att addera de två fallen:

$$|U| + |V| = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Då det totala antalet k -delmängder från en n -mängd per definition är binomialkoefficienten $\binom{n}{k}$, har vi visat att

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

□



Figur 1: Pascals triangel uppbyggd av binomialkoefficienter $\binom{n}{k}$. Pilarna illustrerar det rekursiva sambandet där summan av två intilliggande block genererar blocket direkt under dem.

Binomialsatsen

Sats 1.8 (Binomialsatsen, [Bru10]). Låt n vara ett positivt heltal ($n \in \mathbb{Z}^+$). Då gäller för alla heltal x och y att

$$(x + y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \cdots + \binom{n}{n}y^n.$$

Detta är ekvivalent med summanotationen

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k. \quad (1)$$

Bevis. Vi vill bevisa binomialsatsen, som säger att:

$$\underbrace{(x+y)^n}_{\text{Vänsterled (VL)}} = \underbrace{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k}_{\text{Högerled (HL)}}.$$

Vi använder matematisk induktion för att bevisa binomialsatsen.

Basfall ($n = 1$): Vi undersöker om satsen stämmer för det allra första talet, $n = 1$, genom att beräkna vänsterledet och högerledet var för sig:

$$\begin{aligned} \text{VL} &= (x+y)^1 = x+y \\ \text{HL} &= \sum_{k=0}^1 \binom{1}{k} x^{1-k} y^k = \binom{1}{0} x^{1-0} y^0 + \binom{1}{1} x^{1-1} y^1 \\ &= 1 \cdot x \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot y = x+y. \end{aligned}$$

Eftersom båda sidor blir $x+y$ ($\text{VL} = \text{HL}$), stämmer satsen för $n = 1$.

Induktionsantagande: Vi antar nu att satsen stämmer för ett tal n :

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Induktionssteg: Nu ska vi visa att satsen även gäller för nästa tal, $n+1$. Vårt mål är att starta med vänsterledet för $n+1$, skriva om det steg för steg och nå fram till högerledet för $n+1$:

$$(x+y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k.$$

Vi börjar räkna på vänsterledet:

$$\begin{aligned} \text{VL} &= (x+y)^{n+1} \\ &= (x+y) \cdot (x+y)^n. \end{aligned}$$

Vidare använder vi sambandet från induktionsantagandet och byter ut $(x+y)^n$ mot summanotationen:

$$(x+y) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k+1} y^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^{k+1}.$$

För att kunna slå ihop de två summorna vill vi att exponenten på y ska vara k istället för $k + 1$ i den andra summan. För att göra detta utan att ändra summans värde byter vi ut variabeln k mot $(k - 1)$. Det gör att summan måste starta på $k = 1$ och sluta på $k = n + 1$:

$$VL = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n+1-k} y^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^{n+1-k} y^k.$$

Nu är exponenterna lika. För att slå ihop summorna plockar vi ut den *första termen* ($k = 0$) ur första summan, och den *sista termen* ($k = n + 1$) ur andra summan:

$$VL = \binom{n}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right] x^{n+1-k} y^k + \binom{n}{n} y^{n+1}.$$

Vi kan nu förenkla uttrycket med hjälp av egenskaperna vi bevisade tidigare:

$$1. \text{ **Pascals identitet: } \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}**$$

$$2. \text{ **Kantsidans värden: } \binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = 1 \text{ och } \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1**$$

Sätter vi in detta får vi:

$$VL = \binom{n+1}{0} x^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k + \binom{n+1}{n+1} y^{n+1}.$$

Slutligen sätter vi tillbaka den första och sista termen i summan igen (så att k går ända från 0 till $n + 1$):

$$VL = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^{n+1-k} y^k = HL.$$

Eftersom $VL = HL$, har vi visat induktionssteget. Enligt induktionsprincipen gäller binomialsatsen för alla heltal $n \geq 1$. $\square$

2 Elementär kombinatorik och urvalsteori

2.1 Klassiska potenser

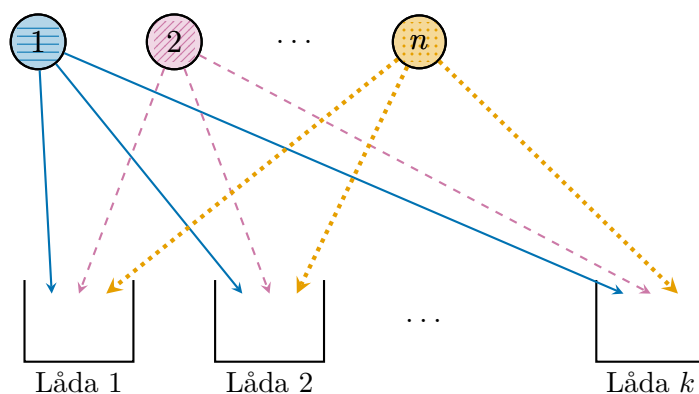
Villkor

Vi har unika bollar och unika lådor, där placeringen är helt fri. Det betyder att varje boll väljer låda helt oberoende av de andra. Eftersom flera bollar får hamna i samma låda har varje boll alltid k olika lådor att välja på:

$$k \cdot k \cdot k \cdot \dots \cdot k = k^n.$$

Detta fall följer direkt från Sats 1.1, multiplikationsprincipen.

Oberoende val: Varje enskild boll har k valmöjligheter



Figur 2: Principen för fri placering av unika bollar i unika lådor (k^n sätt).

2.2 Permutationer

Villkor

Vi har unika bollar och unika lådor, men här krävs att placeringen är injektiv. Det betyder att varje låda får innehålla högst en boll. För att detta ska vara möjligt måste antalet bollar vara mindre än eller lika med antalet lådor ($n \leq k$). Om det finns fler bollar än lådor räcker lådorna inte till och antalet sätt blir 0.

Sats 2.1. *Antalet sätt att placera n unika bollar i k numrerade lådor, så att varje låda innehåller högst en boll, ges av*

$$\frac{k!}{(k-n)!} = k(k-1)(k-2) \dots (k-n+1).$$

Detta betecknas $P(k, n)$.

Bevis. Basfall ($n = 1$)

Vi undersöker om satsen gäller för 1 boll. Vi har k tomma lådor och bollen kan placeras i valfri låda. Alltså har bollen k val. Om vi sätter in $n = 1$ får vi:

$$P(k, 1) = \frac{k!}{(k-1)!} = k.$$

Detta bekräftar basfallet för $n = 1$.

Induktionsantagande

Antag att satsen gäller för n stycken bollar, där ($1 \leq n \leq k$). Antalet sätt att placera ut n bollar i k lådor (högst en boll per låda) ges av

$$P(k, n) = k(k-1) \dots (k-n+1).$$

Induktionssteg

Vi vill visa att om satsen gäller för n bollar så gäller den även för $n+1$ bollar.

Vi börjar med att placera ut de n första bollarna, vilket tar upp n stycken lådor enligt induktionsantagandet.

Detta ger då den sista, $(n+1)$ -te bollen, exakt $k-n$ valmöjligheter (eftersom n lådor redan är upptagna).

Enligt multiplikationsprincipen får vi:

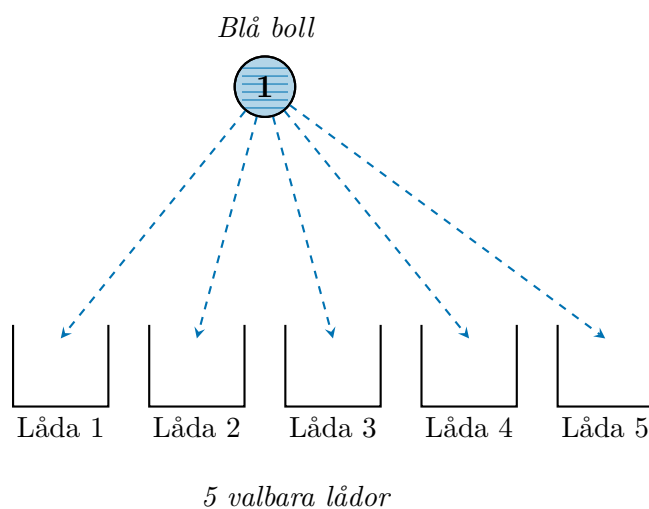
Totalt antal sätt = (antal sätt för n bollar) $\cdot$ (antal sätt för den sista bollen)

$$P(k, n+1) = [k(k-1) \dots (k-n+1)] \cdot (k-n) = \frac{k!}{(k-(n+1))!}.$$

Eftersom satsen gäller för basfallet $n = 1$, och vi har visat att om den stämmer för n bollar så måste den även gälla för nästa boll ($n+1$), följer det enligt induktionsprincipen att satsen gäller för alla $1 \leq n \leq k$. $\square$

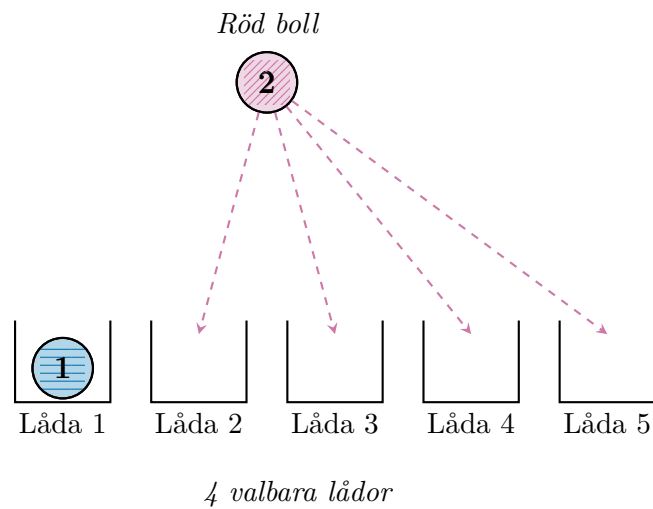
Exempel 2.2. Det finns 3 unika bollar, samt 5 unika lådor. Vi vill ta reda på antalet sätt att placera dessa unika bollar i de unika lådorna, där varje låda får innehålla högst en boll.

Vi börjar med att placera ut den första bollen.



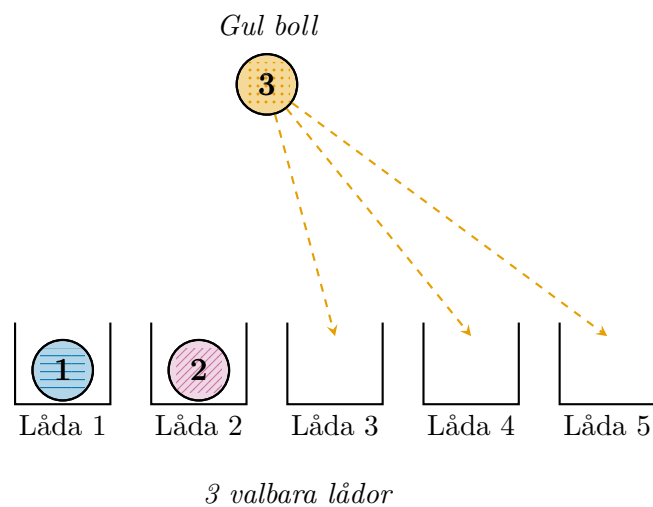
Figur 3: Placering av den blåa bollen i en av de 5 lådorna (5 möjligheter).

Sedan placerar vi ut den röda bollen, som nu har $(k-1)$ valmöjligheter.



Figur 4: Placering av den röda bollen i en av de återstående 4 lådorna.

Nu när 2 lådor är upptagna, finns det $(k - 2) = 3$ lådor att välja på för den gula bollen.



Figur 5: Placering av den gula bollen i en av de återstående 3 lådorna.

Enligt multiplikationsprincipen blir det totala antalet sätt att placera ut 3 unika bollar i 5 numrerade lådor (med högst en boll per låda):

$$5 \cdot 4 \cdot 3 = P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60 \text{ sätt.}$$

2.3 Klassiska kombinationer

Villkor

Här är bollarna identiska medan lådorna är unika, och varje låda får ta emot högst en boll. Det kräver att $n \leq k$. Eftersom alla bollar är identiska väljer vi inte vilken boll som ska i vilken låda, utan helt enkelt vilka n stycken av de k lådorna som ska få en boll.

Giltig fördelning: $n \leq k$

Om antalet bollar är mindre än eller lika med antalet lådor finns det tillräckligt med utrymme. Eftersom bollarna är identiska handlar villkoret i praktiken om att dela upp de k lådorna i två kategorier:

- I) De n lådor som får en boll.
- II) De $k - n$ lådor som förblir tomma.

Antalet sätt att göra detta val ges av binomialkoefficienten

$$\binom{k}{n}.$$

Omöjlig fördelning: $n > k$

Om det finns fler bollar än lådor måste minst två bollar hamna i samma låda. Detta bryter mot villkoret om högst en boll per låda. Därmed gäller att

$$\binom{k}{n} = 0$$

om $n > k$.

Sats 2.3. Antalet sätt att fördela n identiska bollar i k unika lådor under det injektiva villkoret att varje låda innehåller högst en boll ($n \leq k$), ges av binomialkoefficienten

$$\binom{k}{n} = \frac{k!}{n!(k-n)!}.$$

Bevis. Vi ska bestämma det totala antalet sätt att fördela de n identiska bollarna i de k unika lådorna. För att göra detta låter vi bollarna tillfälligt få vara unika och delar upp problemet i två steg.

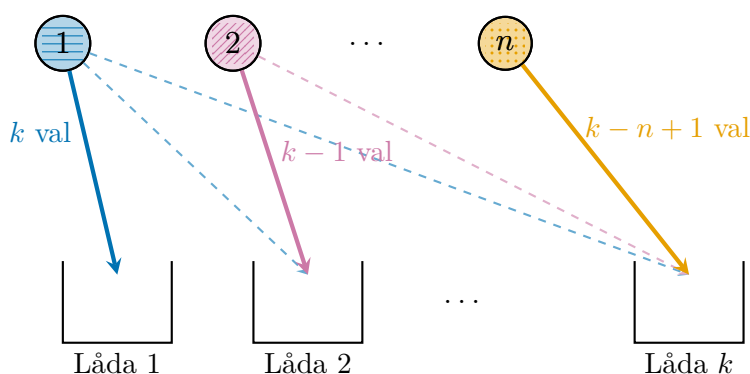
Steg 1: Det ordnade fallet (Permutationer)

Antag först att bollarna är unika och kan identifieras med numren $1, 2, \dots, n$. Vi beräknar hur många sätt det finns att placera ut dessa numrerade bollar i lådorna under villkoret att ingen låda får mer än en boll.

För den första bollen finns det k valbara lådor. På grund av det injektiva villkoret (högst en boll per låda) minskar antalet tillgängliga lådor med exakt 1 för varje ny boll som placeras ut. För den i :te bollen (där $1 < i \leq n$) finns det alltså $k - i + 1$ tillgängliga lådor. Enligt multiplikationsprincipen ges det totala antalet ordnade placeringar av det fallande faktoriella uttrycket

$$P(k, n) = k(k-1)(k-2) \dots (k-n+1) = \frac{k!}{(k-n)!}.$$

Steg 1: Särskiljbara bollar (Ger $P(k, n)$ permutationer)



Figur 6: I det ordnade fallet minskar antalet tillgängliga lådor för varje boll.

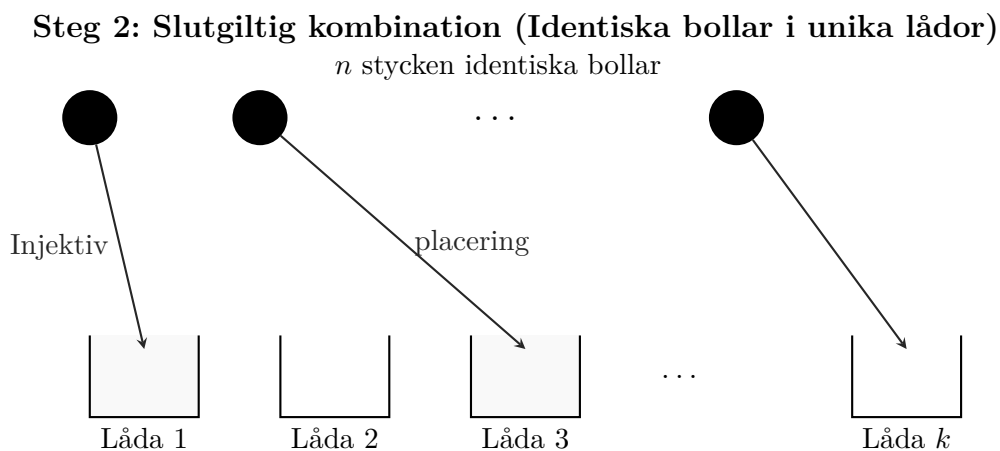
Steg 2: Hantering av överräkning

Eftersom bollarna egentligen är identiska spelar ordningen vid fördelningen ingen roll. Två placeringar av de numrerade bollarna från steg 1 ger exakt samma fördelning så snart det är samma lådor som innehåller bollar.

Varje unikt sätt att välja ut n lådor har i steg 1 räknats så många gånger som de n unika bollarna kan placeras ut på, vilket är exakt $n!$ gånger. Vi har alltså räknat varje tänkbar fördelning av identiska bollar exakt $n!$ gånger för mycket.

För att ta fram det faktiska antalet fördelningar dividerar vi det totala antalet ordnade placeringar med antalet överräkningar per fall:

$$\frac{P(k, n)}{n!} = \frac{k!}{n!(k-n)!} = \binom{k}{n}.$$



Figur 7: Eftersom bollarna är identiska saknar det betydelse vilken boll som hamnar var. Pilarna visar endast hur n unika lådor blir valda.

□

2.4 Stars and bars

Villkor

Här är bollarna identiska och lådorna unika, med fri fördelning vilket innebär att en låda kan innehålla allt från noll till alla n bollar. Då bollarna är unika väljer vi inte vilken boll som hamnar var, utan endast hur antalet n bollar ska fördelas över de k lådorna.

Modellen Stars and Bars

För att bestämma antalet möjliga fördelningar i detta fall används den kombinatoriska modellen *stars and bars*. Modellen bygger på att avbilda varje boll som en stjärna ($\star$) och använda staplar ($|$) som väggar för att avgränsa de olika lådorna. Fördelningen av bollarna motsvarar därmed ett val av positioner för staplarna bland stjärnorna. Vi illustrerar detta nedan.

Fall	Låda 1	Låda 2	Låda 3	Stars and Bars
Fri placering				$\star\star \star\star\star\star$
Surjektiv placering				$\star \star \star\star\star\star$

Sats 2.4. *Antalet sätt att fördela n identiska bollar i k unika lådor vid fri fördelning (där tomma lådor är tillåtna) ges av:*

$$\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Bevis. Eftersom alla bollar ser likadana ut spelar det ingen roll vilken boll som hamnar var, det enda som spelar roll är hur många bollar som hamnar i varje låda.

För att dela upp bollarna i k olika lådor behöver vi $k-1$ väggar (vi använder staplar, $|$, för att avskilja).

När fri fördelning tillåts kan staplarna hamna var som helst. Om två staplar hamnar direkt bredvid varandra betyder det att lådan däremellan är tom. Om en stapel hamnar längst ut i kanten blir den första eller sista lådan tom.

Istället för att fördela bollar i lådor kan vi tänka att vi lägger ut alla objekten på en rad och låter n stjärnor ($\star$) symbolisera bollarna och $k-1$ staplar ($|$) för väggarna mellan lådorna.

Totalt finns det då:

$$n + (k - 1) \text{ platser.}$$

Att bestämma hur bollarna ska fördelas i lådor handlar alltså om på hur många sätt man kan välja platser åt staplarna först, och sedan fördela stjärnorna på de resterande platserna. Detta är ekvivalent med på hur många sätt man kan fördela stjärnorna på platserna först, och därefter låta staplarna uppta de återstående platserna. Detta motsvarar hur många sätt man kan välja ut platser, vilket bestäms genom:

$$\left(\frac{\text{Totalt antal platser}}{\text{Antal platser vi ska välja}} \right) = \underbrace{\binom{n+k-1}{k-1}}_{\text{Väljer platser för } k-1 \text{ staplar först}} = \underbrace{\binom{n+k-1}{n}}_{\text{Väljer platser för } n \text{ stjärnor först}}.$$

Exempel 2.5. Om vi vill fördela $n = 7$ bollar i $k = 3$ lådor behöver vi $3 - 1 = 2$ staplar. Totalt får vi $7 + 2 = 9$ platser i raden.

Frågan blir då: *På hur många sätt kan vi välja 2 platser för staplarna bland de 9 totala platserna?*

$$\binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2 \times 1} = 36 \text{ olika sätt.}$$

□

Sats 2.6. *Antalet sätt att fördela n identiska bollar i k unika lådor så att ingen låda lämnas tom (surjektiv fördelning, $n \geq k$) ges av:*

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Bevis. I fallet då ingen låda får vara tom innebär det att inga staplar får hamna intill varandra och inga staplar får placeras i kanterna av raden.

För att uppfylla villkoret placerar vi först ut de n stjärnorna i en rad:

$$\star \quad \star \quad \star \quad \dots \quad \star.$$

Mellan dessa n stjärnor finns det $n - 1$ tillgängliga mellanrum. Genom att placera högst en stapel i varje sådant mellanrum garanteras att varje låda tilldelas minst en stjärna.

Att bestämma hur bollarna ska fördelas handlar alltså om att välja vilka $k - 1$ av de $n - 1$ tillgängliga mellanrummen som ska innehålla staplar.

Antalet sätt att välja $k - 1$ mellanrum bland $n - 1$ möjliga ges av:

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Exempel 2.7. Om vi vill fördela $n = 7$ bollar i $k = 3$ lådor så att ingen låda blir tom, lägger vi ut de 7 stjärnorna på rad. Detta ger $7 - 1 = 6$ mellanrum mellan stjärnorna. För att skapa 3 lådor behöver vi välja $3 - 1 = 2$ mellanrum där vi placerar staplarna. Frågan blir då: *På hur många sätt kan vi välja 2 mellanrum för staplarna bland de 6 totala mellanrummen?*

$$\binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2 \times 1} = 15 \text{ olika sätt.}$$

□

2.5 Kompositioner

Villkor

Vi har identiska bollar och unika lådor med kravet på surjektiv fördelning. Det innebär att vi endast är intresserade av antalet bollar som hamnar i varje enskild låda, med villkoret att ingen låda lämnas tom.

Definition 2.8. En *komposition* av ett positivt heltal n i k delar är en ordnad sekvens av k positiva heltal $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ sådan att

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$$

där $x_i \geq 1$ för alla $i = 1, 2, \dots, k$.

Med utgångspunkt i resultatet från Sats 2.6 kan vi konstatera att antalet unika kompositioner av n i exakt k delar ges av binomialkoefficienten

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Giltig fördelning: ($n \geq k$)

Eftersom lådorna är unika men bollarna identiska är det ointressant vilka bollar som hamnar var, det enda som avgör fördelningen är hur många bollar respektive låda tilldelas. Att fördela bollarna så att ingen låda förblir tom styrs av binomialkoefficienten $\binom{n-1}{k-1}$. Detta fall är ekvivalent med det som visas i Sats 2.6, vilket innebär att samma princip gäller här.

Om vi istället studerar det *totala* antalet kompositioner av ett heltal n , där antalet delar k tillåts variera fritt från 1 till n , kan vi göra det enligt följande sats.

Sats 2.9. *Det totala antalet kompositioner av ett positivt heltal n är 2^{n-1} .*

Bevis. Vi visar detta direkt genom kombinatoriskt argument med *stjärnor och staplar*. (För ett alternativt algebraiskt bevis med hjälp av genererande funktioner, se Bilaga A).

Betrakta n stycken identiska bollar som ligger på en rad. Mellan dessa n bollar finns det exakt $n-1$ tomma mellanrum. Att välja en komposition i k delar motsvarar att sätta ut $k-1$ staplar i dessa mellanrum, vilket kan göras på $\binom{n-1}{k-1}$ sätt. Om antalet delar k är godtyckligt, har vi för varje enskilt mellanrum, $n-1$, ett binärt val

Ja: sätt en stapel,

Nej: sätt ingen stapel.

Enligt multiplikationsprincipen får vi att det totala antalet fördelningar

$$\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}.$$

□

Exempel 2.10. Vi vill fördela $n = 6$ identiska bollar i $k = 3$ unika lådor, numrerade i ordningen Låda 1, Låda 2 och Låda 3. Det kan vi beräkna genom

$$\binom{n-1}{k-1} = \binom{6-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10 \text{ sätt.}$$

Om vi istället hade velat veta det *totala* antalet sätt att fördela de 6 bollarna på ett surjektivt sätt i ett *valfritt* antal unika lådor (alltså summan av alla kompositioner för $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$), hade svaret varit

$$2^{6-1} = 2^5 = 32 \text{ sätt.}$$

Modell med stjärnor och staplar, för att visualisera ($n = 6, k = 3$)

Vi sätter ut 2 staplar i de 5 tillgängliga mellanrummen mellan de 6 bollarna



Alla 10 unika fördelningar för $k = 3$

Här är samtliga 10 unika kombinationer presenterade i det linjära ledet (Låda 1 $\rightarrow$ Låda 2 $\rightarrow$ Låda 3). Tabellen visar hur fördelningen i lådorna motsvarar *kompositioner* samt hur staplarna placeras i *stars and bars*-modellen.

Sätt	Låda 1	Låda 2	Låda 3	Kompositionsform	Stars and Bars
1				$1 + 1 + 4 = 6$	
2				$1 + 2 + 3 = 6$	

3				$1 + 3 + 2 = 6$
4				$1 + 4 + 1 = 6$
5				$2 + 1 + 3 = 6$
6				$2 + 2 + 2 = 6$
7				$2 + 3 + 1 = 6$
8				$3 + 1 + 2 = 6$
9				$3 + 2 + 1 = 6$
10				$4 + 1 + 1 = 6$

★ | ★★ ★ | ★ ★
 ★ | ★★ ★ ★ | ★
 ★ ★ | ★ | ★ ★ ★
 ★ ★ | ★ ★ | ★ ★
 ★ ★ | ★ ★ ★ | ★
 ★ ★ ★ | ★ | ★ ★
 ★ ★ ★ | ★ ★ | ★
 ★ ★ ★ ★ | ★ | ★

3 Mängdpartitioner

Definition 3.1. En partition av en mängd X bestående av n stycken unika bollar är en familj av icke-tomma delmängder $A_1, A_2, \dots, A_k$ av X (vilka representerar innehållet som placeras i lådorna) så att

I) X är unionen av alla delmängder där $(i = 1, 2, \dots, k)$, det vill säga

$$X = \bigcup_{i=1}^k A_i.$$

II) Varje par av delmängder där $(i \neq j)$ är disjunkta, det vill säga

$$A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Delmängderna A_i kallas för partitionens delar (eller block). Ett annat sätt att uttrycka definitionen är att varje enskild boll i mängden X måste tillhöra exakt en av dessa. [Big02]

Exempel 3.2. Låt $X = \{\text{red}, \text{purple}, \text{blue}, \text{yellow}\}$ vara en mängd bestående av $n = 4$ unika bollar. Vi vill placera dem i $k = 3$ delmängder, *lådor*. Betrakta följande familj av delmängder

$$A_1 = \{\text{red}, \text{blue}\}, \quad A_2 = \{\text{purple}\}, \quad A_3 = \{\text{yellow}\}.$$

Vi kan nu kontrollera att detta är en giltig partition enligt definitionen.

Först kontrollerar vi att inga delmängder får vara tomma. Vi kan bekräfta det snabbt genom att betrakta mängdernas kardinalitet, $|A_1| = 2$, $|A_2| = 1$ och $|A_3| = 1$. Samtliga tre lådor innehåller minst en boll.

I) Unionen av alla delmängder utgör hela X .

$$\bigcup_{i=1}^3 A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \{\text{red}, \text{blue}\} \cup \{\text{purple}\} \cup \{\text{yellow}\} = \{\text{red}, \text{purple}, \text{blue}, \text{yellow}\} = X.$$

Samtliga bollar har alltså placerats i någon av lådorna.

II) Disjunkta delmängder: Vi kontrollerar samtliga parvisa snitt:

$$A_1 \cap A_2 = \{\text{red}, \text{blue}\} \cap \{\text{purple}\} = \emptyset$$

$$A_1 \cap A_3 = \{\text{red}, \text{blue}\} \cap \{\text{yellow}\} = \emptyset$$

$$A_2 \cap A_3 = \{\text{purple}\} \cap \{\text{yellow}\} = \emptyset$$

Detta visar att ingen boll har placerats i mer än en låda och A_1, A_2, A_3 , utgör en partition av X

3.1 Mängdpartition i singelmängder

Villkor

Placering av unika bollar i identiska lådor, under injektivt villkor, alltså att varje låda får högst innehålla en boll. Då bollarna är unika men lådorna identiska finns det exakt 1 sätt att göra detta om $n \leq k$, och 0 sätt om $n > k$.

Fall I: $n > k$ (Fler bollar än lådor)

Enligt villkoret krävs en injektiv placering, vilket innebär att ingen låda får innehålla mer än en boll. Om $n > k$ ger *Lådprincipen*, enligt [Big02], att om n bollar placeras i k lådor måste minst en låda innehålla minst två bollar. Detta bryter direkt mot injektivitetsvillkoret, antalet sätt är därmed 0.

Exempel 3.3. Låt $X = \{\text{purple}, \text{orange}, \text{green}, \text{blue}\}$ vara en mängd med $n = 4$ unika bollar som ska placeras i $k = 3$ identiska lådor, under injektivt villkor.

Då lådorna är identiska spelar det ingen roll vilken boll som hamnar i vilken låda. Så vi börjar med att placera en boll i varje låda. Vi kommer då att ha en boll över, som tvingas att dela låda med en annan boll

$$\{\{\text{purple}, \text{blue}\}, \{\text{orange}\}, \{\text{green}\}\}.$$

Eftersom minst en låda nu innehåller 2 bollar, har injektivitetsvillkoret brutits. Detta visar hur *Lådprincipen* omöjliggör en giltig placering, vilket resulterar i 0 unika sätt.

Fall II: $n \leq k$ (Färre eller lika många bollar som lådor)

Då vi har färre eller lika många bollar som lådor innebär det att varje boll får en egen låda. Eftersom lådorna är identiska spelar det ingen roll vilken boll som hamnar i vilken låda, därmed finns det bara 1 sätt att placera bollarna.

Exempel 3.4. Låt $X = \{\text{purple ball}, \text{orange ball}, \text{green ball}\}$ vara en mängd av $n = 3$ unika bollar som ska placeras i $k = 4$ identiska lådor, under injektivt villkor.

Eftersom vi har färre bollar än lådor, och lådorna är identiska, spelar det ingen roll vilken boll som hamnar i vilken låda. Det enda möjliga utfallet är att tre lådor innehåller varsin singelmängd av bollar, och en låda lämnas tom

$$\{\{\text{purple ball}\}, \{\text{orange ball}\}, \{\text{green ball}\}, \{\}\}.$$

Varje annat försök att flytta om bollarna (till exempel att låta den första lådan vara tom istället för den sista) resulterar i exakt samma partition på grund av lådornas symmetri under permutation. Det finns alltså exakt 1 unikt sätt.

3.2 Stirlingtal av andra ordningen

Villkor

Surjektiv placering av n unika bollar i k identiska lådor med kravet att varje låda måste innehålla minst en boll. Eftersom lådorna inte går att skilja åt bestäms placeringen helt av vilka bollar som hamnar tillsammans. Antalet unika sätt att göra detta på ges av Stirlingtalen av andra ordningen, $S(n, k)$.

Definition 3.5. Stirlingtalet av andra ordningen, $S(n, k)$, är antalet sätt att placera n unika bollar i k icke-tomma identiska lådor.

Vi kan se det som en *mängdpartition*. Om vi låter n unika bollar vara elementen i en mängd X med $|X| = n$, motsvarar varje placering av bollarna i k identiska icke-tomma lådor en *partition* av mängden X i k delmängder.

Sats 3.6. Stirlingtalen $S(n, k)$ kan beräknas rekursivt enligt:

$$S(n, k) = \begin{cases} 1 & \text{om } k = 1 \text{ eller } k = n, \\ 0 & \text{om } k > n, \\ S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k) & \text{för } 2 \leq k \leq n-1. \end{cases}$$

Tabell 4: Stirlingtal av andra ordningen i trappform

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	Radsumma (B_n)
0	1								1
1	0	1							1
2	0	1	1						2
3	0	1	3	1					5
4	0	1	7	6	1				15
5	0	1	15	25	10	1			52
6	0	1	31	90	65	15	1		203
7	0	1	63	301	350	140	21	1	877

Bevis. Vi börjar med att se till randvillkoren för rekursion

$S(n, 1) = 1$, det finns bara ett sätt att placera alla bollar i en låda.

$S(n, n) = 1$, det finns bara ett sätt att placera varje boll i en enskild låda (singelmängd).

$S(n, k) = 0$ om $k > n$, om det finns fler lådor än bollar, finns det inget sätt att placera bollarna.

Låt z vara en specifik boll från mängden X . Varje partition av X kan delas in i två disjunkta fall beroende på vad som händer med den specifika bollen z :

Fall I: z placeras ensamt i en egen låda $\{z\}$ (en singelmängd)

Vi börjar med att placera z i en egen låda. Eftersom z tar upp en hel låda själv, måste de resterande $n - 1$ bollarna delas upp i de återstående $k - 1$ lådorna, och ingen av dessa får vara tom. Enligt definitionen av Stirlingtal kan detta göras på exakt $S(n - 1, k - 1)$ sätt.

Fall II: z delar låda med minst en annan boll

Vi börjar med att partitionera de $n - 1$ bollarna i de k lådorna så att ingen är tom. Detta kan göras på $S(n - 1, k)$ sätt. Vidare placerar vi in z i någon utav de k lådorna. Det finns exakt k möjligheter för z . Enligt multiplikationsprincipen får vi antalet sätt för z att dela låda med minst en annan boll

$$k \cdot S(n - 1, k).$$

Då *Fall I* och *Fall II* är disjunkta och tillsammans utgör alla möjliga utfall för hur z kan placeras, får vi enligt additionsprincipen:

$$\text{Totalt antal partitioner} = (\text{antalet sätt för Fall I}) + (\text{antalet sätt för Fall II})$$

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + k \cdot S(n - 1, k).$$

Detta visar att rekursionen stämmer överens med den kombinatoriska definitionen. □

Exempel 3.7. Låt $X = \{\text{🟡}, \text{🟠}, \text{🟢}, \text{🟣}\}$ vara en mängd bestående av $n = 4$ unika bollar, som vi vill partitionera i $k = 3$ identiska lådor, där ingen låda får lämnas tom.

Enligt Sats 3.6 fixerar vi en boll, låt det vara den 🟣, och delar upp problemet i två disjunkta fall.

Fall 1: (🟣) placeras i en ensam låda

Vi börjar med att placera (🟣) i en egen låda. Då måste de återstående bollarna (🟡, 🟠, 🟢) partitioneras på de $3 - 1 = 2$ återstående lådorna. Vilket kan göras på $S(3, 2)$

sätt.

Fall 2: (⊗) delar låda med någon annan boll.

Vi placerar först ut (⊗, ⊗, ⊗) i alla tre lådor. Detta kan göras på $S(3, 3)$ sätt. Därefter har (⊗) exakt tre lådor att välja på, enligt *Multiplikationsprincipen* får vi

$$3 \cdot S(3, 3)$$

Då *Fall I* och *Fall II* är disjunkta får vi enligt additionsprincipen det totala antalet partitioner av $n = 4$ unika bollar i $k = 3$ identiska lådor som

$$S(4, 3) = S(3, 2) + 3 \cdot S(3, 3).$$

Enligt den rekursiva formeln

$$S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + k \cdot S(n - 1, k)$$

vill vi beräkna $S(4, 3)$.

Vi har

$$S(3, 3) = 1,$$

vilket är ett basfall för $S(n, n)$. För termen $S(3, 2)$, som inte är ett basfall, använder vi oss av den rekursiva formeln ytterligare en gång:

$$S(3, 2) = S(2, 1) + 2 \cdot S(2, 2).$$

Nu har vi två termer som är basfall:

- $S(2, 1) = 1$, då det endast finns en låda.
- $S(2, 2) = 1$, då antalet bollar är lika med antalet lådor.

Insättning ger

$$S(3, 2) = 1 + 2 \cdot 1 = 3,$$

vilket slutligen ger

$$S(4, 3) = 3 + 3 \cdot 1 = 6.$$

Partitioneringar för fall I

$$\begin{aligned} & \{ \{ \text{orange}, \text{green} \}, \{ \text{blue} \}, \{ \text{red} \} \}, \\ & \{ \{ \text{orange}, \text{blue} \}, \{ \text{green} \}, \{ \text{red} \} \}, \\ & \{ \{ \text{orange}, \text{red} \}, \{ \text{blue} \}, \{ \text{green} \} \} \end{aligned}$$

Partitioneringar för fall II

$$\begin{aligned} & \{ \{ \text{orange}, \text{blue} \}, \{ \text{green} \}, \{ \text{red} \} \}, \\ & \{ \{ \text{orange} \}, \{ \text{blue}, \text{green} \}, \{ \text{red} \} \}, \\ & \{ \{ \text{orange} \}, \{ \text{blue} \}, \{ \text{green}, \text{red} \} \} \end{aligned}$$

Sats 3.8. För alla heltal $n, k \geq 1$ kan Stirlingtalen beräknas direkt genom

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

Bevis. Till skillnad från den rekursiva formeln där vi bygger en tabell steg för steg, beräknar vi här värdena direkt med hjälp av inklusions-exklusionsprincipen.

För att räkna ut antalet placeringar av n unika bollar i k identiska lådor utan tomma lådor utgår vi först från fallet där lådorna är *unika*. Om vi tillåter att lådor lämnas tomma och väljer ut en delmängd på i lådor, har varje boll i valmöjligheter, vilket enligt multiplikationsprincipen ger i^n möjliga kombinationer för dessa lådor.

För att utesluta de ogiltiga placeringarna där lådor lämnas tomma använder vi inklusions-exklusionsprincipen. Vi väljer ut i stycken specifika lådor från de k tillgängliga på $\binom{k}{i}$ olika sätt, och beräknar de fria placeringarna i dem. Termen $(-1)^{k-i}$ fungerar som en korrigering som drar bort de fall där lådor står tomma och justerar för överlappande fall.

Genom att summera detta över alla värden på i från 0 till k får vi antalet surjektiva placeringar av de n unika bollarna i k stycken *unika* lådor. Eftersom lådorna i vårt ursprungliga problem är *identiska* (och därmed saknar inbördes ordning) kan varje sådan partition ordnas på $k!$ olika sätt om lådorna vore numrerade. Slutligen dividerar vi därför uttrycket med $k!$, vilket ger:

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n.$$

□

3.3 Analytisk kombinatorik och den ordinarie genererande funktionen

Vi ska nu gå från diskret kombinatorik till analytisk kombinatorik. Detta gör att vi kan undersöka Stirlingtalen med kraftfulla algebraiska verktyg. Som [Big02] förklarar i *Discrete Mathematics* kan en hel talföljd samlas i ett enda algebraiskt uttryck med hjälp av en så kallad genererande funktion.

Definition 3.9. [Big02] Låt $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ vara en oändlig följd av reella tal. Den genererande funktionen associerad med denna följd är den formella potensserien

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Innan vi skapar den genererande funktionen för Stirlingtalen är det viktigt att titta på sekvensens begynnelsevillkor. Eftersom alla lådor måste innehålla minst en boll (surjektivitet) går det inte att placera färre bollar än det finns lådor. Därför är $S(n, k) = 0$ så fort $n < k$. Det betyder att talföljden för ett fixerat k , börjar med k stycken nollor:

$$(u_n)_{n=0}^{\infty} = (\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k \text{ stycken}}, S(k, k), S(k+1, k), S(k+2, k), \dots).$$

Utifrån denna definition kan vi nu koda av den här talföljden till en funktion. Vi låter $S_k(x)$ vara funktionen där Stirlingtalen fungerar som koefficienter framför x^n , där exponenten n står för antalet bollar:

$$S_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n, k) x^n.$$

Eftersom de första k termerna i summan (från $n = 0$ till $n = k - 1$) bara är nollor, bidrar de inte till summan. Vi kan därför börja summan direkt från det första nollskilda fallet $n = k$:

$$S_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} S(n, k) x^n.$$

Här fungerar x^n som en form av platshållare där exponenten visar hur många

bollarna vi har, medan talet framför visar på hur många sätt bollarna kan placeras.

För att ta fram en sluten formel för funktionen tillämpar vi metoden för rekursioner från [Ros99]. Genom att tillämpa Stirlingtalens rekursionsformel på hela summan samtidigt kan vi uttrycka den oändliga serien som ett enkelt bråk.

Sats 3.10. *För ett fixerat heltal $k \geq 1$ är den ordinarie genererande funktionen $S_k(x)$ för Stirlingtal av andra ordningen:*

$$S_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}.$$

Bevis. Vi utgår från rekursionsformeln för Stirlingtal (Sats 3.6):

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k).$$

För att gå från ett samband mellan enskilda tal till en algebraisk ekvation för hela funktioner, multiplicerar vi båda sidor med x^n och summerar över alla $n \geq 1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} S(n, k)x^n = \sum_{n=1}^{\infty} S(n-1, k-1)x^n + k \sum_{n=1}^{\infty} S(n-1, k)x^n.$$

Nu förenklar vi de tre summorna en i taget:

Vänsterledet: Eftersom $S(0, k) = 0$ för alla $k \geq 1$, innehåller den här summan redan alla termer i vår genererande funktion. Det betyder att:

$$\sum_{n=1}^{\infty} S(n, k)x^n = S_k(x).$$

Första summan i högerledet: Här är exponenten x^n , men Stirlingtalet handlar om $n-1$ bollarna. För att exponenten hos x ska stämma överens med indexet för antalet bollarna ($n-1$), bryter vi ut faktorn x . Då får vi den genererande funktionen för $k-1$ lådor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} S(n-1, k-1)x^n = x \sum_{n=1}^{\infty} S(n-1, k-1)x^{n-1} = xS_{k-1}(x).$$

Andra summan i högerledet: På samma sätt bryter vi ut ett x även här för att exponent ska stämma överens. Då återstår uttrycket för $S_k(x)$:

$$k \sum_{n=1}^{\infty} S(n-1, k)x^n = kx \sum_{n=1}^{\infty} S(n-1, k)x^{n-1} = kxS_k(x).$$

Sätter vi ihop de tre delarna får vi ekvationen:

$$S_k(x) = xS_{k-1}(x) + kxS_k(x).$$

Nu samlar vi alla termer med $S_k(x)$ på vänstersidan för att lösa ut funktionen:

$$S_k(x) - kxS_k(x) = xS_{k-1}(x),$$

$$S_k(x)(1 - kx) = xS_{k-1}(x).$$

Om vi dividerar med $(1 - kx)$ får vi ett samband mellan funktionen för k lådor och funktionen för $k - 1$ lådor:

$$S_k(x) = \frac{x}{1 - kx} S_{k-1}(x).$$

För att finna det slutgiltiga sambandet upprepar vi detta steg bakåt, hela vägen ner till $k = 1$. Eftersom alla $S(n, 1) = 1$ har vi basfallet $S_1(x) = \frac{x}{1-x}$. Kedjan blir då:

$$\begin{aligned} S_k(x) &= \frac{x}{1 - kx} \cdot S_{k-1}(x) \\ &= \frac{x}{1 - kx} \cdot \frac{x}{1 - (k-1)x} \cdot S_{k-2}(x) \\ &= \frac{x}{1 - kx} \cdot \frac{x}{1 - (k-1)x} \cdots \frac{x}{1 - 2x} \cdot S_1(x). \end{aligned}$$

När vi sätter in $S_1(x) = \frac{x}{1-x}$ längst till höger får vi slutresultatet:

$$S_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x) \cdots (1-kx)}.$$

□

Anmärkning 3.11. Som [Bru10] påpekar i *Introductory Combinatorics* kan vi förstå satsen kombinatoriskt genom att dela upp bråket i geometriska serier:

$$S_k(x) = x^k \cdot \left(\frac{1}{1-x} \right) \cdot \left(\frac{1}{1-2x} \right) \cdots \left(\frac{1}{1-kx} \right).$$

Faktorn x^k överst betyder att vi först lägger 1 boll i varje låda så att ingen blir tom. Delarna under bråkstreckket, som till exempel $\frac{1}{1-2x} = 1 + 2x + 4x^2 + \dots$, visar hur många val varje ny boll har när $1, 2, \dots, k$ lådor väl har börjat användas.

3.4 Belltal

Villkor

Vi har unika bollar och identiska lådor där placeringen är.

Definition 3.12. [Sta12] Det totala antalet partitioner av en n -mängd kallas Belltal och betecknas B_n (eller $B(n)$).

För $n \geq 1$ definieras Bell-talet av:

$$B_n = \sum_{k=1}^n S(n, k).$$

Förklaring av sambandet

För att förstå varför Belltalet kan skrivas som en summa av Stirlingtal studerar vi hur mängden X , som består av n unika element (bollar), kan delas upp i icke-tomma delmängder (lådor). Det totala antalet sätt att göra denna uppdelning kallas per definition för belltalet B_n .

När vi partitionerar mängden X måste bollarna placeras i ett visst antal icke-tomma lådor. Vi kan antingen som minst använda en låda alltså att alla bollarna är i en låda, eller som mest n lådor, då hamnar varje boll i en egen låda.

Vi kan därför dela upp samtliga partitioner i disjunkta fall baserat på det exakta antalet lådor k , där $1 \leq k \leq n$. Enligt additionsprincipen blir det totala antalet partitioner summan av antalet placeringar för varje enskilt k . Eftersom Stirlingtalet av andra ordningen, $S(n, k)$, anger antalet sätt att partitionera n unika element i exakt k stycken icke-tomma delmängder, kan det totala antalet partitioner skrivas som

$$B(n) = \sum_{k=1}^n S(n, k).$$

I följande exempel illustreras detta samband genom att kombinera de olika fallen för en mängd med tre element.

Exempel 3.13. Partitionering av mängden X

Låt X vara en mängd bestående av tre unika bollar

$$X = \{\text{gul}, \text{lila}, \text{blå}\}.$$

Där $|X| = n = 3$. Vi vill visa hur det totala antalet partitioner av X , som ges av *Belltalet* $B(3)$ enligt Definition 3.12, beräknas genom att summera *Stirlingtalen*

$S(3, k)$ över samtliga möjliga lådor k , där $1 \leq k \leq 3$.

Vi delar upp i tre fall baserat på antalet delmängder (lådor).

Fall I: Exakt en låda ($k = 1$):

Alla tre bollar placeras i en och samma låda. Det finns endast en möjlig partition

$$\{\{\text{gul}, \text{lila}, \text{blå}\}\}.$$

Detta ger oss antalet sätt $S(3, 1) = 1$.

Fall II: Exakt två lådor ($k = 2$):

Bollarna placeras i två identiska lådor. Då ordningen på lådorna inte spelar någon roll, bestäms varje unikt utfall helt av vilken enskild boll som isoleras i den ena lådan, medan de resterande två placeras i den andra

$$\begin{aligned} &\{\{\text{gul}, \text{lila}\}, \{\text{blå}\}\}, \\ &\{\{\text{gul}, \text{blå}\}, \{\text{lila}\}\}, \\ &\{\{\text{lila}, \text{blå}\}, \{\text{gul}\}\}. \end{aligned}$$

Detta ger oss antalet sätt $S(3, 2) = 3$.

Fall III: Exakt tre lådor ($k = 3$):

Bollarna placeras i tre identiska lådor, vilket kräver och innebär att varje låda innehåller exakt en boll. Då lådorna saknar inbördes ordning, alltså att de är identiska, existerar endast en sådan partition

$$\{\{\text{gul}\}, \{\text{lila}\}, \{\text{blå}\}\}.$$

Detta ger oss antalet sätt $S(3, 3) = 1$.

Då fallen för $k = 1$, $k = 2$ och $k = 3$ är parvis disjunkta och tillsammans täcker alla möjliga uppdelningar, får vi enligt additionsprincipen det totala antalet partitioner

$$B_3 = \sum_{k=1}^3 S(3, k) = S(3, 1) + S(3, 2) + S(3, 3) = 1 + 3 + 1 = 5.$$

Sats 3.14. Låt B_{n+1} vara antalet sätt att placera $n + 1$ unika bollar i icke-tomma, identiska lådor. Om $n \geq 0$, så gäller att

$$B_{n+1} = \binom{n}{0}B_0 + \binom{n}{1}B_1 + \cdots + \binom{n}{n}B_n.$$

Med summatecken kan detta skrivas som

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

Bevis. Låt oss beräkna antalet sätt att partitionera en mängd bestående av $n + 1$ unika bollar, $\{1, 2, \dots, n, n + 1\}$, i icke-tomma, identiska lådor. Antalet möjliga partitioner ges per definition av bellet B_{n+1} .

Låt oss fixera den låda som innehåller boll $n + 1$. Utöver denna boll kommer lådan att innehålla en delmängd Y (som kan vara tom) utvald från de resterande n bollarna, $\{1, 2, \dots, n\}$. Antag att delmängden Y har kardinaliteten $|Y| = t$, där $0 \leq t \leq n$. Denna delmängd kan väljas på $\binom{n}{t}$ olika sätt. De resterande $n - t$ bollarna som inte tillhör Y måste därefter partitioneras i egna icke-tomma, identiska lådor. Enligt definitionen av bellet kan detta göras på B_{n-t} sätt.

Eftersom valet av delmängden X och partitioneringen av de resterande bollarna är oberoende kombinatoriska steg, multipliceras antalet möjligheter. Genom att summera över alla giltiga värden på t erhålls relationen

$$B_{n+1} = \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} B_{n-t}.$$

För att överföra summan till dess standardform utförs ett indexbyte där vi låter $k = n - t$ beteckna antalet bollar som hamnar utanför den fixerade lådan. När t löper från 0 till n , kommer k att löpa från n ner till 0. Eftersom binomialkoefficienterna är symmetriska, $\binom{n}{t} = \binom{n}{n-t} = \binom{n}{k}$, kan vi summera termerna i omvänd ordningsföljd.

Därmed får vi

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \sum_{t=0}^n \binom{n}{t} B_{n-t} \\ &= \binom{n}{0} B_n + \binom{n}{1} B_{n-1} + \cdots + \binom{n}{n-1} B_1 + \binom{n}{n} B_0 \\ &= \binom{n}{n} B_0 + \binom{n}{n-1} B_1 + \cdots + \binom{n}{1} B_{n-1} + \binom{n}{0} B_n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k. \end{aligned}$$

□

3.5 Antalet surjektiva funktioner

Villkor

Bollarna och lådorna är unika, och placeringen är *surjektiv*. Ingen låda får vara tom, vilket medför kravet $n \geq k$.

Definition 3: Surjektion

En funktion $f : X \rightarrow Y$ är en surjektion om det för varje element $y \in Y$ finns minst ett element $x \in X$ sådant att $f(x) = y$, vilket betyder att inga lådor (element i målmängden) lämnas tomma.

Sats 3.1: Antalet surjektiva funktioner

Låt X vara en mängd av n urskiljbara bollar, Y vara en mängd av k urskiljbara lådor, och låt J beteckna mängden av alla surjektioner från X till Y . Då gäller att

$$|J| = k! \cdot S(n, k).$$

Bevis. Att placera bollarna så att ingen låda blir tom är ekvivalent med att räkna antalet surjektiva funktioner $f : X \rightarrow Y$. En partition av mängden X i k delar delar upp bollarna i k icke-tomma, disjunkta delmängder. Antalet sådana partitioner ges av Stirlingtalen av andra slaget, $S(n, k)$. Eftersom målmängden Y består av särskiljbara (numrerade) lådor, finns det $k!$ unika sätt att tilldela varje delmängd i partitionen till en unik låda via en bijektion. Enligt multiplikationsprincipen blir det totala antalet surjektioner $k! \cdot S(n, k)$. $\square$

Exempel 3.15. Betrakta placeringen av $n = 3$ särskiljbara bollar, representerade av mängden $\{\text{röd}, \text{blå}, \text{lila}\}$, i $k = 2$ särskiljbara lådor (Låda 1 och Låda 2). Vi vill bestämma antalet surjektiva avbildningar, vilket innebär att ingen låda får lämnas tom.

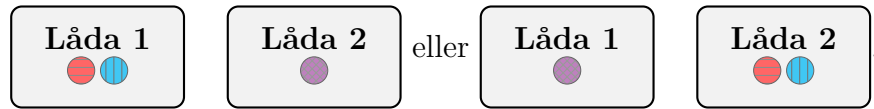
Vi börjar med att partitionera bollarna i icke-tomma, identiska mängder (anonyma högar), för att därefter tilldela dessa mängder de specifika lådorna. Antalet sätt att partitionera en mängd med 3 element i 2 icke-tomma delmängder ges av $S(3, 2) = 3$. Vi får de tre unika partitionerna

Partition 1: $\{\text{röd}, \text{blå}\}$ och $\{\text{lila}\}$,

Partition 2: $\{\text{röd}, \text{lila}\}$ och $\{\text{blå}\}$,

Partition 3: $\{\text{blue circle}, \text{purple circle}\}$ och $\{\text{red circle}\}$.

Eftersom lådorna är unika, har ordningen på bollarnas placering betydelse. För varje enskild partition existerar $2! = 2$ möjliga tilldelningar. Givet Partition 1 fås exempelvis utfallet



Enligt multiplikationsprincipen får vi det totala antalet surjektiva placeringar genom produkten av antalet partitioner och antalet permutationer av lådorna

$$S(3, 2) \cdot 2! = 3 \cdot 2 = 6.$$

Tabell 5: Samtliga surjektiva placeringar för $n = 3$ bollar i $k = 2$ lådor, utifrån deras respektive partition.

Placering i Låda 1	Placering i Låda 2	Ursprunglig hög-partition
Låda 1 	Låda 2 	Från partition 1
Låda 1 	Låda 2 	Från partition 1
Låda 1 	Låda 2 	Från partition 2
Låda 1 	Låda 2 	Från partition 2
Låda 1 	Låda 2 	Från partition 3
Låda 1 	Låda 2 	Från partition 3

4 Heltalspartitioner

4.1 Heltalspartition i exakt k delar

Villkor

Surjektiv fördelning av identiska bollar i identiska lådor.

Definition 4.1. Låt n och k vara positiva heltal. Funktionen $p_k(n)$ betecknar antalet partitioner av heltalet n i exakt k delar. Detta motsvarar antalet sätt att skriva n som en summa av k stycken positiva heltal där ordningen på termerna saknar betydelse:

$$P_k(n) = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k) \in \mathbb{Z}^+ \mid \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k = n, \quad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_k \geq 1 \right\}.$$

Alltså har vi att $|P_k(n)| = p_k(n)$. [Aig07]

Sats 4.2. Låt $p_k(n)$ vara antalet sätt att fördela n identiska bollar i k identiska lådor så att ingen låda är tom. För $n \geq k \geq 1$ gäller rekursionsformeln

$$p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k).$$

Bevis. Låt vänsterledet, $p_k(n)$, visa det totala antalet tillåtna fördelningar av n bollar i k lådor där varje låda innehåller minst en boll.

Vi delar upp de giltiga fördelningarna i två disjunkta fall, baserat på det minsta antalet bollar i någon av lådorna.

Fall I: Det minsta antalet bollar i någon låda är exakt 1.

Antag att vi har en fördelning där minst en låda har exakt en boll. Eftersom lådorna ser likadana ut spelar det ingen roll vilken av dessa lådor vi väljer. Om vi plockar bort den lådan och bollen som ligger där, så har vi $n-1$ bollar kvar och $k-1$ lådor kvar att fördela dem i. Eftersom vi tog bort en låda som bara hade en enda boll, så påverkas inte regeln för de andra lådorna, de måste fortfarande ha minst en boll var. Det betyder att det som är kvar faktiskt är en ny, mindre fördelning där vi har fördelat $n-1$ bollar i $k-1$ lådor på ett giltigt sätt (så att ingen låda är tom). Antalet sådana sätt att göra det på kan vi därför skriva som

$$p_{k-1}(n-1).$$

Fall II: Det minsta antalet bollar i någon låda är strikt större än 1.

Vi antar nu i stället att varje låda i denna fördelning innehåller minst två

bollar. Eftersom det därmed existerar ett överskott av bollar i samtliga lådor, kan vi utföra en förenkling genom att ta bort exakt en boll från var och en av de k lådorna. Vi har då tagit bort totalt k bollar, medan antalet lådor förblir oförändrat.

Eftersom utgångsläget garanterade minst två bollar per låda, konstaterar vi att det kvarstår minst en boll i varje låda efter denna procedur. Villkoret för surjektivitet är därmed uppfyllt för de resterande $n - k$ bollarna fördelade över de k lådorna. Antalet giltiga fördelningar för denna delmängd följer således direkt av definitionen av

$$p_k(n - k).$$

Eftersom det minsta antalet bollar i någon låda, i en godtycklig fördelning, antingen måste vara exakt 1 eller strikt större än 1, visar vi att dessa två fall är disjunkta. Enligt additionsprincipen kan vi därmed erhålla det totala antalet placeringar genom att summera antalet möjligheter från respektive fall, vilket ger oss den sökta rekursionsformeln

$$p_k(n) = p_{k-1}(n - 1) + p_k(n - k).$$

□

Exempel 4.3. Antalet sätt att dela upp $n=7$ identiska bollar i exakt $k=3$ identiska lådor, med kravet att ingen låda får vara tom. Eftersom lådorna ej får vara tomma, börjar vi med att fördela en boll i varje låda



Då lådorna är identiska spelar ordningen på lådorna ingen roll. Vi sorterar fördelningen av bollarna i lådorna genom storleksordning, från störst till minst, för att hålla koll på räkningen. Vi kan därför fördela resterande fyra bollar på följande unika sätt:

<i>Första fördelningen:</i>				$: \lambda = (5, 1, 1) \implies 5 + 1 + 1 = 7$
<i>Andra fördelningen:</i>				$: \lambda = (4, 2, 1) \implies 4 + 2 + 1 = 7$
<i>Tredje fördelningen:</i>				$: \lambda = (3, 3, 1) \implies 3 + 3 + 1 = 7$

Fjärde fördelningen:  : $\lambda = (3, 2, 2) \implies 3 + 2 + 2 = 7$

Ett populärt grafiskt sätt att visualisera heltalspartitioner, är via Ferrers diagram.

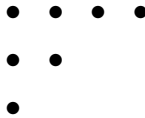
Genom att låta $\lambda = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_k$ vara en partition av n . Det finns k rader, vi placerar λ_1 punkter i rad 1, λ_2 punkter i rad 2, och så vidare, med start i samma kolumn.

Ferrersdiagrammen med punkter för $p_3(7)$

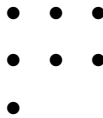
Första fördelningen (5,1,1):



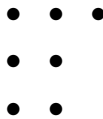
Andra fördelningen (4,2,1):



Tredje fördelningen (3,3,1):



Fjärde fördelningen (3,2,2):



4.2 Heltalspartition i högst k delar

Villkor

Fri fördelning av identiska bollar i identiska lådor.

Definition 4.4. Låt n och k vara positiva heltal. Funktionen $p_{\leq k}(n)$ betecknar antalet partitioner av heltalet n i högst k delar. Detta motsvarar antalet sätt att skriva n som en summa av *högst* k stycken positiva heltal där ordningen på termerna saknar betydelse.

Mängden av alla sådana partitioner, $P_{\leq k}(n)$, definieras formellt som

$$P_{\leq k}(n) = \left\{ (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \mathbb{Z}_+^m \mid 1 \leq m \leq k, \sum_{i=1}^m \lambda_i = n, \text{ och } \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_m \geq 1 \right\}.$$

Antalet partitioner ges av kardinaliteten

$$|P_{\leq k}(n)| = p_{\leq k}(n) = \sum_{i=1}^k p_i(n) = p_1(n) + \dots + p_k(n),$$

där $p_i(n)$ betecknar antalet partitioner av n i exakt i delar.

Sats 4.5. Låt $p_{\leq k}(n)$ vara antalet sätt att fördela n identiska bollar i k identiska lådor under fri fördelning (tomma lådor tillåtna). För $n \geq 1$ och $k \geq 1$ gäller följande kombinatoriska samband

$$p_{\leq k}(n) = p_k(n+k).$$

Det vill säga att antalet partitioner av n i **högst** k **delar** är exakt lika med antalet partitioner av $n+k$ i **exakt** k **delar**.

Bevis. Låt vänsterledet, $p_{\leq k}(n)$, beteckna det totala antalet tillåtna fördelningar av n identiska bollar i k identiska lådor, där lådor får lämnas tomma.

Likheten mellan det totala antalet fria fördelningar i vänsterledet och antalet surjektiva fördelningar i högerledet kan påvisas genom en direkt korrespondens mellan fördelningarna. Antag att en godtycklig, men tillåten fördelning, av n identiska bollar i k identiska lådor är given. Eftersom fördelningen är fri kan ett godtyckligt antal av de k lådorna från början vara tomma. Om varje låda får en extra boll ökar det totala antalet bollar till $n+k$, detta garanterar att ingen låda är tom.

Detta ger en bijektion mellan en fri fördelning av n bollar och en surjektiv fördelning av $n+k$ bollar i k lådor (omvändbar genom att ta bort en boll per låda),

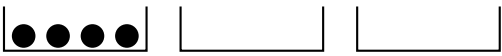
vilket ger den sökta identiteten.

$$p_{\leq k}(n) = p_k(n + k).$$

□

Exempel 4.6. Vi söker antalet sätt att partitionera $n = 4$ identiska bollar i högst $k = 3$ identiska lådor under fri fördelning. Enligt definitionen 4.4 kan vi dela upp beräkningen i summan av exakt i delar för $i = 1, 2, 3$

1 del ($i = 1$): $\lambda = (4) \implies 4$

Första fördelningen:  : $\lambda = (4) \implies 4 = 4$

2 delar ($i = 2$): $\lambda = (3, 1) \implies 3 + 1 = 4$ och $\lambda = (2, 2) \implies 2 + 2 = 4$

Andra fördelningen:  : $\lambda = (3, 1) \implies 3 + 1 = 4$

Tredje fördelningen:  : $\lambda = (2, 2) \implies 2 + 2 = 4$

3 delar ($i = 3$): $\lambda = (2, 1, 1) \implies 2 + 1 + 1 = 4$

Fjärde fördelningen:  : $\lambda = (2, 1, 1) \implies 2 + 1 + 1 = 4$

Detta ger totalt $p_{\leq 3}(4) = 1 + 2 + 1 = 4$ unika fördelningar.

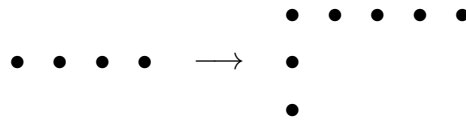
Enligt Sats 4.5 kan detta beräknas direkt genom identiteten $p_k(n + k)$, vilket i detta fall blir

$$p_{\leq 3}(4) = p_3(4 + 3) = p_3(7).$$

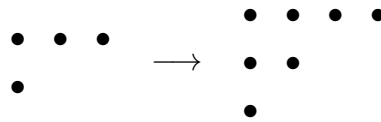
Ur 4.3 vet vi redan att $p_3(7) = 4$. Vi kan visualisera detta förhållande grafiskt genom att lägga till (eller ta bort) punkter i raderna, med $k = 3$ punkter i Ferrersdiagrammet.

Korrespondens mellan fri fördelning $p_{\leq 3}(4)$ och surjektiv fördelning $p_3(7)$ (+1 per del)

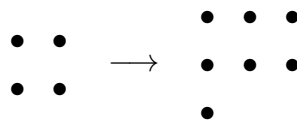
Första korrespondensen: $\lambda = (4) \longrightarrow \lambda = (5, 1, 1)$



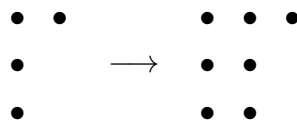
Andra korrespondensen: $\lambda = (3, 1) \longrightarrow \lambda = (4, 2, 1)$



Tredje korrespondensen: $\lambda = (2, 2) \longrightarrow \lambda = (3, 3, 1)$



Fjärde korrespondensen: $\lambda = (2, 1, 1) \longrightarrow \lambda = (3, 2, 2)$



4.3 Heltalspartition i enbart ettor

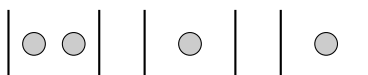
Villkor

Fördelningen av identiska bollar i identiska lådor med högst en boll per låda kan ske på två olika sätt.

Fall I: $n > k$ (Fler bollar än lådor)

Exempel 4.7. Vi har $n = 4$ identiska bollar ($\bigcirc, \bigcirc, \bigcirc, \bigcirc$) som ska fördelas i $k = 3$ identiska lådor, under injektivt villkor.

Då lådorna och bollarna är identiska spelar varken bollarnas eller lådornas identitet någon roll. Så vi börjar med att fördela en boll till varje låda. Vi kommer då att ha en boll över, som tvingas att dela låda med en annan boll.



Detta innebär att injektivitetsvillkoret brutits och vi får därmed 0 sätt att fördela.

Fall II: $n \leq k$ (Färre eller lika många bollar som lådor)

Exempel 4.8. Vi har $n = 3$ identiska bollar ($\bigcirc, \bigcirc, \bigcirc$) som ska fördelas i $k = 4$ identiska lådor, under injektivt villkor.

Eftersom vi har färre bollar än lådor, samt att allt är identiskt, spelar det ingen roll vilka lådor som används. Det enda möjliga utfallet är att tre lådor får varsin boll, och en låda lämnas tom. Detta ger heltalspartitionen i enbart ettor



Varje annat försök att dela upp bollarna resulterar i exakt samma heltalspartition på grund av lådornas och bollarnas symmetri. Det finns alltså exakt 1 unik fördelning.

4.4 Genererande funktioner för heltalspartitioner

Precis som vi tidigare använde genererande funktioner för att strukturera mängdpartitioner, kan vi tillämpa samma algebraiska verktyg på heltalspartitioner. Skillnaden här är att bollarna är identiska, vilket gör att deras individuella identitet saknar betydelse. Det enda som påverkar fördelningen är hur många bollar som hamnar i varje låda. Antalet bollar i en enskild låda blir därmed en term (en del) i den summa som bildar det totala antalet bollar n .

När vi betraktar en helt *fri fördelning* ställer vi inga krav alls, vi får använda hur många lådor vi vill och lägga hur många bollar som helst i samma låda. Som [Big02] visar skrivs den genererande funktionen för denna fria fördelning som den oändliga produkten

$$P(x) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^i} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}.$$

Varje parentes utgörs av en oändlig geometrisk serie:

$$\frac{1}{1-x^i} = (1-x^i)^{-1} = 1 + x^i + x^{2i} + x^{3i} + \dots$$

Variabeln x mäter det totala antalet bollar n , medan i representerar antalet bollar i en viss låda. I utvecklingen av serien anger termen $x^{k \cdot i}$ att k lådor vardera innehåller i bollar. Genom att justera serierna efter gällande regler får vi följande genererande funktioner, för de begränsade fallen.

Fall I: Identiska bollar i identiska lådor, surjektiv fördelning(exakt k delar)

I detta fall fördelas n identiska bollar i k identiska lådor under villkoret att ingen låda lämnas tom. Det motsvarar att dela upp heltalet n i en summa av exakt k delar. För att skapa den genererande funktionen använder vi oss av spegling i Ferrers-diagram.

Sats 4.9. Den genererande funktionen för antalet sätt att fördela n identiska bollar i exakt k identiska icke-tomma lådor ges av

$$G_k(x) = \frac{x^k}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^k)}.$$

Bevis. Om fördelningen ritas i ett Ferrers-diagram där varje rad motsvarar innehållet

i en låda, har diagrammet k rader. Genom att spegla diagrammet längs diagonalen får vi i stället ett diagram med k kolumner. Att fylla exakt k lådor är därmed samma sak som att fördela bollarna så att den största lådan innehåller exakt k bollar.

Detta villkor ställer två krav på den genererande funktionen. Eftersom ingen låda får innehålla fler än k bollar stoppar vi produkten vid $i = k$, vilket ger nämnaren $(1 - x)(1 - x^2) \cdots (1 - x^k)$. För att garantera att minst en låda faktiskt innehåller exakt k bollar multiplicerar vi hela uttrycket med x^k .

Enligt multiplikationsprincipen får vi

$$G_k(x) = x^k \cdot \frac{1}{(1 - x)(1 - x^2) \cdots (1 - x^k)} = \frac{x^k}{(1 - x)(1 - x^2) \cdots (1 - x^k)}.$$

□

Fall II: Identiska bollar i identiska lådor, injektiv fördelning (distinkta delar)

Eftersom vi har injektiv fördelning får varje låda innehålla högst en boll. Om vi inte har någon begränsning på antalet lådor motsvarar detta att ingen låda får ha samma antal bollar som en annan (förutom de tomma lådorna). Alla lådor som får bollar måste alltså innehålla helt olika (distinkta) antal bollar.

Sats 4.10. Den genererande funktionen $D(x)$ för att fördela bollar så att alla fyllda lådor får olika antal bollar ges av

$$D(x) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^i) = (1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3) \cdots$$

Bevis. Kravet på olika antal bollar innebär att vi för varje möjlig lådfyllning $i \geq 1$ (en låda med i bollar) har två val: antingen finns det ingen sådan låda, eller så finns det exakt en. För varje i ges valet av faktorn $(1 + x^i)$, där 1 motsvarar att i inte väljs och x^i att i väljs en gång. Tillämpar vi multiplikationsprincipen för alla $i = 1, 2, 3, \dots$ fås $D(x) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^i)$.

□

För att förenkla $D(x)$ använder vi den algebraiska identiteten $1 + y = \frac{1 - y^2}{1 - y}$, vilket följer direkt av konjugatregeln eftersom $(1 - y)(1 + y) = 1 - y^2$. Tillämpar vi regeln

på varje faktor i $D(x)$ får vi enligt [Big02]:

$$D(x) = \frac{1-x^2}{1-x} \cdot \frac{1-x^4}{1-x^2} \cdot \frac{1-x^6}{1-x^3} \cdots = \frac{(1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)\cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\cdots}.$$

Täljaren innehåller enbart faktorer med jämna exponenter ($1-x^2, 1-x^4, 1-x^6, \dots$). Eftersom nämnaren innehåller alla faktorer ($1-x, 1-x^2, 1-x^3, \dots$) förkortas de jämna faktorerna i täljaren bort mot motsvarande faktorer i nämnaren. Kvar i nämnaren blir endast faktorerna med udda exponenter:

$$D(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)\cdots}.$$

Detta visar att antalet sätt att dela upp ett heltal n i enbart *olika delar* är exakt lika med antalet sätt att dela upp n i enbart *udda delar*.

Referenser

- [Aig07] Martin Aigner. *A Course in Enumeration*, volume 238 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, 2007. doi: [10.1007/978-3-540-39035-0](https://doi.org/10.1007/978-3-540-39035-0).
- [Big02] Norman Biggs. *Discrete mathematics*. Oxford University Press, 2002.
- [Bru10] Richard A. Brualdi. *Introductory Combinatorics*. Prentice Hall, 5 edition, 2010.
- [BXGS23] Rikard Bøgvad, Qimh Xantcha, Håkan Granath, and Olof Sisask. Algebra i, 2023. Matematik 1, Diskret matematik.
- [Ros99] Kenneth H Rosen. *Discrete mathematics & applications*. McGraw-Hill, 1999.
- [Sta12] Richard P Stanley. *Cambridge studies in advanced mathematics enumerative combinatorics: Series number 49: Volume 1*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 2 edition, June 2012.

A Algebraiskt bevis med genererande funktioner

I detta avsnitt ges ett alternativt, algebraiskt bevis för Sats 2.9 med hjälp av teorin för genererande funktioner.

Bevis för Sats 2.9 med genererande funktioner. Låt $c_k(x)$ vara den genererande funktionen för antalet kompositioner av n identiska bollar i *exakt* k unika lådor. Eftersom varje enskild låda i måste innehålla minst en boll ($x_i \geq 1$), representeras varje enskild låda av den geometriska serien $(x^1 + x^2 + x^3 + \dots)$, där exponenten anger antalet bollar i just den lådan.

Eftersom vi har exakt k stycken unika lådor, multiplicerar vi de genererande funktionerna för varje låda med varandra. Den genererande funktionen för en fördelning i k lådor blir då:

$$c_k(x) = (x + x^2 + x^3 + \dots)^k = \left(\frac{x}{1-x}\right)^k.$$

För att finna den genererande funktionen $F(x)$ för det totala antalet sätt att fördela bollar i ett *godtyckligt* antal lådor, summerar vi över alla möjliga antal lådor $k \geq 1$:

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x}{1-x}\right)^k.$$

Detta är i sin tur en *geometrisk serie* med kvoten $\frac{x}{1-x}$. Genom att använda summaformeln för en geometrisk serie ($\sum_{k=1}^{\infty} r^k = \frac{r}{1-r}$) får vi:

$$F(x) = \frac{\frac{x}{1-x}}{1 - \frac{x}{1-x}} = \frac{\frac{x}{1-x}}{\frac{(1-x)-x}{1-x}} = \frac{x}{1-2x}.$$

Vi kan utveckla denna funktion som en potensserie:

$$F(x) = x \sum_{m=0}^{\infty} (2x)^m = \sum_{m=0}^{\infty} 2^m x^{m+1}.$$

Genom att göra variabelbytet $n = m + 1$ (vilket ger $m = n - 1$), där n representerar det totala antalet bollar, kan serien skrivas som:

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^n.$$

Koefficienten framför x^n är det totala antalet kompositioner av n i ett godtyckligt

antal delar. Detta visar algebraiskt att det totala antalet surjektiva fördelningar är 2^{n-1} . $\square$