SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

När kontinuitet inte räcker: Weierstrassfunktionen och deriverbarhetens gränser.

av

Carmen Pérez Quintana

2026 - No L8

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

När kontinuitet inte räcker: Weierstrassfunktionen och deriverbarhetens gränser.

Carmen Pérez Quintana

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Jonathan Rohleder

2026

Abstract

During the 19th century, it was widely believed that continuous functions were, for the most part, also differentiable. This view was challenged in 1872 by Karl Weierstrass through the construction of a function that is continuous everywhere but differentiable nowhere. This work investigates the relationship between continuity and differentiability through an analytical study of the Weierstrass function and a modern formulation of the function and a modern reformulation of it.

A theoretical framework for uniform convergence is established to demonstrate the function's global continuity. Subsequently, a modern formulation of the function based on a piecewise linear sawtooth function, where its difference quotient is studied to show that a finite limit is absent at every point.

The thesis highlights how this construction challenges intuitive assumptions about the behavior of functions and emphasizes the importance of mathematical rigor in real analysis.

Sammanfattning

Under 1800-talet var det en utbredd uppfattning att kontinuerliga funktioner i huvudsak också var deriverbara. Denna föreställning utmanades år 1872 av Karl Weierstrass genom konstruktionen av en funktion som är kontinuerlig överallt men ingenstans deriverbar. Syftet är att undersöka sambandet mellan kontinuitet och deriverbarhet genom en analytisk studie av Weierstrassfunktionen och en modern formulering av funktionen.

Ett teoretiskt ramverk för likformig konvergens etableras för att visa funktionens globala kontinuitet. Därefter analyseras en modern formulering av funktionen baserad på en styckvis linjär sågtandsfunktion, där dess differenskvot studeras för att visa att ett ändligt gränsvärde saknas i varje punkt.

Uppsatsen belyser hur denna konstruktion utmanar intuitiva föreställningar om funktioners beteende och understryker vikten av matematisk stringens inom reell analys.

Innehåll

1 Introduktion

Inom den matematiska analysen finns ett fundamentalt samband mellan en funktions kontinuitet och dess deriverbarhet. Ett av de första resultaten man möter är att en funktion som är deriverbar i en punkt också är kontinuerlig där. Resultatet framstår ofta som självklart, men markerar samtidigt ett första steg mot en djupare förståelse av analysens begrepp, där relationen mellan intuitiv föreställning och formell definition visar sig vara betydligt mer komplex vid en närmare analys.

Under stora delar av 1800-talet var den allmänna uppfattningen bland matematiker att sambandet nästan var ömsesidigt. Man antog att en kontinuerlig funktion, möjligen med undantag för ett fåtal isolerade punkter, också borde vara deriverbar. Denna idé var djupt rotad och återfanns i dåtidens läroböcker, där bland andra A. M. Ampère försökte visa att kontinuitet i princip garanterade existensen av en väldefinierad tangent i varje punkt [Thi03]. Kontinuerliga kurvor tolkades ofta som fysiska rörelser, och tanken på en rörelse utan en bestämd riktning framstod därför som geometriskt svår att acceptera.

Denna matematiska världsbild skakades i grunden år 1872 när Karl Weierstrass presenterade ett motexempel inför Berlins vetenskapsakademi: en funktion som var kontinuerlig överallt men inte deriverbar i någon enda punkt. Även om tänkare som Bernard Bolzano och Bernhard Riemann tidigare hade snuddat vid liknande idéer, var det Weierstrass stringenta analytiska bevis som slutgiltigt tvingade det matematiska samfundet att ompröva intuitionens roll inom analysen [Thi03]. Den fortsatta analysen utgår från den moderna version av funktionen, vars konstruktion ersätter de ursprungliga trigonometriska termerna med en styckvis linjär sågtandsfunktion. Denna metodik har sina rötter i tidigare arbeten av bland andra Teiji Takagi (1903) och Bartel van der Waerden (1930).

Mot denna bakgrund undersöks gränslandet mellan kontinuitet och deriverbarhet genom en analytisk studie av Weierstrassfunktionen. Vi inleder med att etablera de teoretiska grunderna för deriverbarhet och bevisar varför kontinuitet utgör ett nödvändigt villkor för att en funktion ska vara deriverbar. Därefter fördjupar vi oss i teorin för funktionsserier, där vi introducerar centrala begrepp som likformig konvergens och Cauchy-kriteriet för att förklara hur egenskaper bevaras vid gränsövergångar. Med dessa verktyg konstruerar vi den förenklade Weierstrassfunktionen och tillämpar Weierstrass-M-test för att visa dess globala kontinuitet. Arbetet avslutas med en detaljerad analys av funktionens icke-deriverbarhet, där vi genom att granska dess differenskvot visar hur dess fraktala arkitektur medför att ett ändligt gränsvärde saknas i varje punkt. Genom denna analys klargör vi varför kontinuitet i sig inte är tillräckligt för att garantera deriverbarhet.

2 Grundläggande samband mellan kontinuitet och deriverbarhet

För att placera Weierstrassfunktionen i en matematisk kontext är det nödvändigt att först klargöra de fundamentala begreppen kontinuitet och deriverbarhet samt relationen dem emellan. Den teoretiska framställningen i detta kapitel följer etablerade presentationer inom reell analys, i synnerhet med Rudin [Rud76] och Abbott [Abb15].

Definition 2.1 (Definition av derivata)**.** Låt f vara en reellvärd funktion definierad på ett intervall A. Vi säger att f är deriverbar i en punkt $x \in A$ om gränsvärdet för differenskvoten existerar

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \tag{1}$$

Om gränsvärdet existerar representerar det funktionens momentana förändringstakt i punkten x vilket motsvarar tangentens lutning till kurvan i $(x, f(x))$. Inom den matematiska analysen är det ett centralt resultat att en funktion måste vara kontinuerlig för att kunna vara deriverbar. Sambandet formaliseras i följande sats:

Sats 2.1. Om en funktion f är deriverbar i en punkt $x \in A$, så är f även kontinuerlig i x.

Bevis. För att visa kontinuitet i punkten x måste vi visa att $\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$, eller ekvivalent att $\lim_{h \to 0}(f(x+h) - f(x)) = 0$. Vi betraktar identiteten

$$f(x+h) - f(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot h \quad \text{där } h \neq 0.$$

Genom att tillämpa gränsvärdesregler och använda antagandet att f är deriverbar i

x erhåller vi

$$\lim_{h\to 0}(f(x+h)-f(x)) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right)\cdot \lim_{h\to 0} h = f'(x)\cdot 0 = 0.$$

Eftersom gränsvärdet av skillnaden är noll, följer det att $\lim_{h\to 0} f(x+h) = f(x)$. Alltså gäller att f är kontinuerlig i x. $\square$

Det är viktigt att betona att det omvända förhållandet inte gäller; kontinuitet är ett nödvändigt men inte tillräckligt villkor för deriverbarhet. En funktion kan vara sammanhängande men sakna en väldefinierad riktning i vissa punkter. Det klassiska exemplet är $f(x) = |x|$, som är kontinuerlig för alla $x \in \mathbb{R}$, men saknar derivata i $x = 0$ på grund av kurvans skarpa hörn.

Under början av 1800-talet trodde de flesta matematiker att sådana icke deriverbara punkter endast kunde förekomma isolerat. Weierstrassfunktionen utmanar denna intuition genom att vara kontinuerlig överallt men sakna derivata i varje punkt. Som visas i kommande kapitel konstrueras denna funktion som ett gränsvärde av en följd av partialsummor, där varje ny term lägger till allt mindre och tätare oscillationer. På så sätt gör det att kurvan aldrig planar ut lokalt, vilket förhindrar existensen av en entydig tangent i varje punkt.

Det är också värt att notera att även om en funktion är deriverbar överallt, behöver dess derivata f' inte vara kontinuerlig. Ett klassiskt exempel är funktionen $f(x) = x^2 \sin\!\left(\frac{1}{x}\right)$, vars derivata existerar i varje punkt men inte är kontinuerlig i origo. Även om en derivata kan vara diskontinuerlig, uppfyller den alltid en mellanliggande värdeegenskap, vilket beskrivs i Darboux sats.

Sats 2.2 (Darboux sats)**.** Antag att f är en reellvärd deriverbar funktion på det slutna intervallet $[a, b]$ och att $f'(a) < \lambda < f'(b)$. Då existerar en punkt $c \in (a, b)$ sådan att $f'(c) = \lambda$.

Bevis. Definiera hjälpfunktionen g på $[a, b]$ genom $g(x) = f(x) - \lambda x$. Eftersom f är deriverbar är den kontinuerlig, vilket innebär att även g är kontinuerlig på $[a, b]$. Då intervallet är kompakt antar g ett minimum enligt extremvärdessatsen.

Vi beräknar derivatan i ändpunkterna:

$$g'(a) = f'(a) - \lambda < 0 \quad \text{och} \quad g'(b) = f'(b) - \lambda > 0.$$

Eftersom $g'(a) < 0$ minskar funktionen nära a, så $g(a)$ kan inte vara ett minimum.

På samma sätt kan $g(b)$ inte vara ett minimum eftersom $g'(b) > 0$. Alltså antas det minsta värdet i en inre punkt $c \in (a, b)$. Enligt satsen om inre extrempunkter gäller då att

$$g'(c) = 0 \quad \Rightarrow \quad f'(c) = \lambda.$$

Härav följer att derivatan antar alla mellanliggande värden, vilket bevisar satsen. $\square$

En viktig konsekvens av Darboux sats är att derivatan till en deriverbar funktion inte kan hoppa plötsligt mellan olika värden. Om derivatan är diskontinuerlig i en punkt måste den istället oscillera alltmer i närheten av den punkten.

Det ger oss ett nytt perspektiv på Weierstrassfunktionen. Eftersom funktionen saknar derivata i varje punkt finns det ingen derivata som kan hoppa eller oscillera, differenskvoten når helt enkelt aldrig ett fast värde.

3 Funktionsserier, likformig konvergens och kontinuitet

För att förstå Weierstrassfunktionens egenskaper är det nödvändigt att först etablera ett teoretiskt ramverk kring konvergens av funktionsserier. Funktionen definieras som en oändlig summa av kontinuerliga funktioner, och dess egenskaper beror därför på hur denna summa konvergerar.

Den teoretiska strukturen i detta kapitel bygger på etablerade framställningar av konvergens av funktionsserier såsom hos Rudin [Rud76] och Abbott [Abb15]. Inom den matematiska analysen är många centrala exempel särskilt de som utmanar vår intuitiva uppfattning om begrepp som kontinuitet och deriverbarhet, konstruerade som oändliga serier av funktioner. Genom att studera dessa serier kan vi förstå hur egenskaper hos de enskilda funktionerna påverkar den slutgiltiga summan.

För att analysera Weierstrassfunktionen och visa varför den är kontinuerlig behöver vi därför undersöka under vilka villkor kontinuitet bevaras i en sådan summa. Det leder till begreppet likformig konvergens, som utgör en central del av den fortsatta analysen.

3.1 Funktionsserier och partialsummor

En funktionsserie skiljer sig från en vanlig numerisk serie genom att dess termer utgörs av funktioner i motsats till enskilda reella tal. Antag att vi har en följd av funktioner $\{f_n\}$ definierade på en mängd $A \subseteq \mathbb{R}$. Den oändliga serien skrivs symboliskt som

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + \dots \tag{2}$$

För att avgöra om denna serie konvergerar mot en väldefinierad gränsfunktion $S(x)$ betraktar vi dess partialsummor. En oändlig serie kan nämligen inte beräknas direkt. I stället studerar vi hur dessa ändliga delsummor beter sig när antalet termer växer. Partialsumman av ordning n är betecknad $S_n(x)$ och definieras som den ändliga summan av de n första termerna i serien

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x). \tag{3}$$

Serien sägs konvergera om följden av partialsummor $\{S_n(x)\}$ har ett gränsvärde när $n \to \infty$. Genomgående i den fortsatta analysen används därför beteckningen $\{S_n(x)\}$ för följden av partialsummor, i stället för den mer generella notationen $\{f_n(x)\}$. Det är viktigt att betona skillnaden mellan partialsumman $S_n(x)$ som är en ändlig kombination av funktioner och den slutliga summan $S(x)$ vilken representerar gränsvärdet av den oändliga processen.

Distinktionen mellan punktvis och likformig konvergens är av avgörande betydelse för huruvida $S(x)$ ärver egenskaper från sina termer. Det är nämligen endast den likformiga konvergensen som garanterar att egenskaper hos de enskilda funktionerna, såsom kontinuitet, överförs till den slutgiltiga summan $S(x)$.

3.2 Konvergensbegrepp: punktvis och likformig konvergens

Skillnaden mellan hur partialsummorna närmar sig gränsfunktionen är avgörande för att avgöra om $S(x)$ ärver egenskaper som kontinuitet från sina termer. Det finns två huvudsakliga sätt att definiera konvergens för en följd av partialsummor $\{S_n(x)\}$ definierade på en mängd $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definition 3.1 (Punktvis konvergens)**.** Följden av partialsummor $\{S_n\}$ sägs konvergera punktvis mot en funktion S på $A \subseteq \mathbb{R}$ om det för varje $x \in A$ gäller att

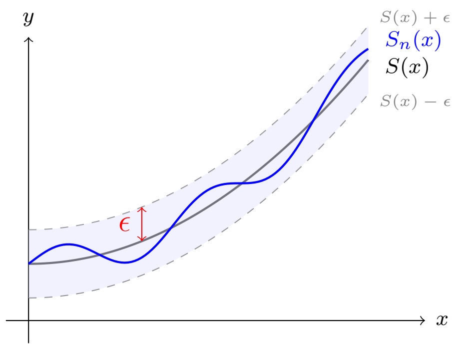
$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x).$$

Resultatet är att det för varje $\epsilon > 0$ och varje $x \in A$ existerar ett tal N (som kan bero på både ϵ och x) sådant att $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$ för alla $n \geq N$.

Definition 3.2 (Likformig konvergens)**.** Följden av partialsummor $\{S_n\}$ sägs konvergera likformigt mot S på $A \subseteq \mathbb{R}$ om det för varje $\epsilon > 0$ existerar ett tal N (som endast beror på ϵ) sådant att

$$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon \quad \text{för alla } n \geq N \text{ och alla } x \in A.$$

Skillnaden mellan dessa två begrepp är subtil men fundamentalt avgörande: vid likformig konvergens kan samma N användas för hela mängden A, vilket gör det möjligt att bevara egenskaper som kontinuitet från följdens element till gränsfunktionen. Ur ett geometriskt perspektiv innebär det att partialsummorna S_n för ett tillräckligt stort n ligger helt inom ett band med radien ϵ kring S.



Figur 1: *Visualisering av likformig konvergens. Vid likformig konvergens ligger partialsumman $S_n(x)$, om n är tillräckligt stor, helt inom ett band av radien ϵ kring gränsfunktionen $S(x)$ för alla $x \in A$ samtidigt.*

Exempel 3.1 (Punktvis men ej likformig konvergens)**.** För att belysa varför punktvis konvergens inte är tillräcklig för att bevara analytiska egenskaper betraktar vi funktionsserien $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ på mängden $A = \mathbb{R}$, där termerna ges av

$$f_n(x) = \frac{x^2}{(1 + x^2)^n}.$$

Varje enskild term f_n är en kontinuerlig funktion. Vi undersöker seriens punktvisa gränsvärde $S(x)$ genom att dela upp analysen i två fall:

1. Om $x = 0$, är varje term $f_n(0) = 0$, vilket ger partialsumman $S_n(0) = 0$ för alla n. Gränsvärdet är således $S(0) = 0$.

2. Om $x \neq 0$, betraktar vi summan $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^2 \frac{1}{(1+x^2)^n}$. Eftersom faktorn x^2 är oberoende av indexet n kan vi bryta ut den ur summan

   $$S(x) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+x^2} \right)^n .$$

   Den oändliga summan är nu en geometrisk serie på formen $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$ med kvoten $r = \frac{1}{1+x^2}$.

   Vi påminner om att en geometrisk serie konvergerar mot $\frac{1}{1-r}$ om $|r| < 1$. Eftersom $x \neq 0$ är $x^2 > 0$, vilket innebär att $0 < r < 1$. Beräkningen ger

   $$S(x) = x^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x^2}} = x^2 \cdot \frac{1}{\frac{1+x^2-1}{1+x^2}} = x^2 \cdot \frac{1+x^2}{x^2} = 1 + x^2.$$

Den sammanlagda gränsfunktionen blir därmed:

$$S(x) = \begin{cases} 0 & \text{om } x = 0, \\ 1 + x^2 & \text{om } x \neq 0. \end{cases}$$

Exemplet är mycket instruktivt. Trots att vi summerar oändligt många kontinuerliga funktioner är gränsfunktionen $S(x)$ diskontinuerlig i origo, eftersom

$$\lim_{x \to 0} S(x) = 1 \neq S(0).$$

Exemplet visar att punktvis konvergens inte är tillräckligt stark för att garantera att kontinuitet bevaras vid gränsövergången. För att istället säkerställa att seriens egenskaper överförs till gränsfunktionen behöver vi använda likformig konvergens. Härav följer att konvergensen sker lika snabbt överallt i mängden A, istället för att variera från punkt till punkt.

3.3 Cauchy-kriteriet och likformig konvergens

Innan vi kan etablera kraftfulla verktyg som Weierstrass-M-test, är det nödvändigt att introducera en metod för att avgöra om en funktionsföljd konvergerar utan att på förhand känna till dess gränsfunktion. Medan den vanliga definitionen av konvergens kräver att vi jämför partialsumman $S_n(x)$ med ett redan känt gränsvärde $S(x)$, tillåter Cauchy-kriteriet oss att istället undersöka termernas relation till varandra.

Principen är att om termerna i en följd närmar sig varandra tillräckligt mycket, och det gäller för alla punkter i mängden A samtidigt, så blir följden likformigt konvergent.

När skillnaden mellan två godtyckliga termer i följden minskar mot noll för stora värden på n och m, konvergerar följden. Tack vare de reella talens fullständighet kan vi då garantera konvergens trots att gränsvärdet är okänt på förhand.

Notera att Cauchy-kriteriet kan formuleras för en allmän följd av funktioner $\{f_n\}$. I den fortsatta analysen betraktas funktionsserien som gränsvärdet av en följd av partialsummor $\{S_n\}$, och det är genom att studera hur denna följd beter sig som vi kan förstå gränsfunktionens egenskaper.

Definition 3.3 (Likformig Cauchy-följd)**.** En följd av funktioner $\{S_n\}$ sägs vara en *likformig Cauchy-följd* på en mängd A om det för varje $\epsilon > 0$ existerar ett tal N sådant att

$$|S_n(x) - S_m(x)| < \epsilon$$

gäller för alla $n, m \geq N$ och för alla $x \in A$ samtidigt.

Genom att använda begreppet kan vi nu formulera ett av de viktigaste redskapen för att analysera konvergens utan att på förhand känna till gränsfunktionen:

Sats 3.1 (Cauchy-kriteriet för likformig konvergens)**.** En följd av funktioner $\{S_n\}$ definierad på en mängd $A \subseteq \mathbb{R}$ konvergerar likformigt på A om och endast om den är en likformig Cauchy-följd på A.

Bevis. Beviset delas upp i två delar för att visa att villkoret är både nödvändigt och tillräckligt.

Nödvändighet: Vi börjar med att visa nödvändigheten, det vill säga att varje likformigt konvergent följd är en Cauchy-följd. Antag att $\{S_n\}$ konvergerar likformigt mot en gränsfunktion S på A. För ett givet $\epsilon > 0$ kan vi finna ett N sådant att

$|S_n(x) - S(x)| < \epsilon/2$ för alla $n \geq N$ och $x \in A$. Genom triangelolikheten ser vi att för $n, m \geq N$

$$\begin{aligned} |S_n(x) - S_m(x)| &= |(S_n(x) - S(x)) + (S(x) - S_m(x))| \\ &\leq |S_n(x) - S(x)| + |S(x) - S_m(x)|. \end{aligned}$$

Eftersom båda termerna i högerledet är mindre än $\epsilon/2$, får vi

$$|S_n(x) - S_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Alltså gäller att varje likformigt konvergent följd är likformigt Cauchy.

Tillräcklighet: Vi ska nu visa att villkoret är tillräckligt, det vill säga att varje likformig Cauchy-följd konvergerar likformigt mot en gränsfunktion S. Antag att $\{S_n\}$ är likformigt Cauchy på A.

1. **Existens av gränsvärde:** För varje fixerat $x \in A$ utgör den numeriska följden $\{S_n(x)\}$ en Cauchy-följd av reella tal. Eftersom de reella talen är fullständiga (enligt fullständighetsaxiomet), måste följden konvergera mot ett tal som vi definierar som $S(x)$, vilket utgör definitionen av gränsfunktionen S.

2. **Likformighet:** Vi ska nu visa att konvergensen mot S är likformig. Låt $\epsilon > 0$ vara givet. Eftersom $\{S_n\}$ är en likformig Cauchy-följd, finns det ett N så att

$$|S_n(x) - S_m(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{för alla } n, m \geq N \text{ och alla } x \in A.$$

Om vi fixerar $n \geq N$ och låter $m \to \infty$, kommer $S_m(x)$ att gå mot $S(x)$ för varje x. Genom att ta gränsvärdet i olikheten bevaras relationen, men den kan bli svag (alltså $\leq$ istället för $<$)

$$|S_n(x) - S(x)| = \lim_{m \to \infty} |S_n(x) - S_m(x)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Eftersom N valdes baserat på Cauchy-villkoret (vilket gäller för alla $x \in A$ samtidigt) och är oberoende av x, gäller olikheten $|S_n(x) - S(x)| < \epsilon$ universellt. Alltså är $S_n \to S$ likformigt.

$\square$

3.4 Weierstrass-M-test och kontinuitet hos funktionsserier

När vi arbetar med funktionsserier av typen $\sum f_k(x)$ är Weierstrass-M-testet det mest kraftfulla verktyget för att bevisa likformig konvergens. Testet bygger på idén att om vi kan begränsa våra funktioner av en konstant M_k, och om serien $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ konvergerar, så garanteras att funktionsserien konvergerar likformigt.

Sats 3.2 (Weierstrass-M-test)**.** Låt $\{f_k\}$ vara en följd av funktioner definierade på en mängd $A \subseteq \mathbb{R}$ sådana att:

- $|f_k(x)| \leq M_k$ för alla $x \in A$ och alla $k \in \mathbb{N}$.
- $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ är konvergent.

Då konvergerar funktionsserien $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ likformigt på A.

Bevis. För att bevisa satsen vill vi använda det nyss etablerade Cauchy-kriteriet för likformig konvergens (Sats 3.1). Om vi kan visa att följden av partialsummor $\{S_n(x)\}$ är en likformig Cauchy-följd på A, så garanterar kriteriet att serien konvergerar likformigt utan att vi behöver känna till gränsfunktionen $S(x)$ på förhand.

Låt $\epsilon > 0$ vara givet. Eftersom den numeriska serien $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ är konvergent, uppfyller den Cauchy-kriteriet för numeriska serier. Det existerar därmed ett tal $N \in \mathbb{N}$ sådant att för alla $n > m \geq N$ gäller:

$$\sum_{k=m+1}^{n} M_k < \epsilon. \tag{4}$$

Vi betraktar nu skillnaden mellan två godtyckliga partialsummor $S_n(x)$ och $S_m(x)$ för ett $x \in A$. Genom att använda den generaliserade triangelolikheten och antagandet att $|f_k(x)| \leq M_k$, kan vi göra följande uppskattning:

$$|S_n(x) - S_m(x)| = \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k. \tag{5}$$

Genom att kombinera (4) och (5) ser vi att för alla $n > m \geq N$ gäller att:

$$|S_n(x) - S_m(x)| < \epsilon \quad \text{för alla } x \in A.$$

Eftersom valet av N endast beror på ϵ och är oberoende av x, uppfyller följden $\{S_n(x)\}$ definitionen för en likformig Cauchy-följd. Enligt Cauchy-kriteriet för likformig konvergens (Sats 3.1) konvergerar därmed serien likformigt på A. □

3.5 Kontinuitet hos gränsfunktioner

Denna sats är en hörnsten inom analysen då den fastställer de villkor som krävs för att kontinuitet ska bevaras vid gränsövergången för en oändlig summa. Satsen garanterar att om en serie av kontinuerliga funktioner konvergerar likformigt, kommer även gränsfunktionen att vara kontinuerlig.

Sats 3.3 (Satsen om kontinuerlig gränsfunktion)**.** Om följden av partialsummor S_n konvergerar likformigt mot S på en mängd $A \subseteq \mathbb{R}$ så är gränsfunktionen S också kontinuerlig i c.

Bevis. Låt $\epsilon > 0$ vara givet. För att visa att S är kontinuerlig i c måste vi finna ett $\delta > 0$ sådant att

$$|x - c| < \delta \implies |S(x) - S(c)| < \epsilon.$$

Vi använder oss av den klassiska $\epsilon/3$-tekniken genom att expandera uttrycket med hjälp av triangelolikheten:

$$|S(x) - S(c)| \leq \underbrace{|S(x) - S_n(x)|}_{\epsilon/3} + \underbrace{|S_n(x) - S_n(c)|}_{\epsilon/3} + \underbrace{|S_n(c) - S(c)|}_{\epsilon/3}. \tag{6}$$

Vi begränsar nu dessa delar var för sig:

1. **Likformig konvergens:** Eftersom serien konvergerar likformigt mot S på A, kan vi för ett givet $\epsilon > 0$ välja ett $n \in \mathbb{N}$ så stort att avståndet mellan partialsumman S_n och gränsfunktionen S är mindre än $\epsilon/3$ för alla punkter i A. Alltså gäller att både

   $$|S(x) - S_n(x)| < \frac{\epsilon}{3} \quad \text{och} \quad |S_n(c) - S(c)| < \frac{\epsilon}{3}$$

   Tack vare den likformiga konvergensen kan samma n användas för båda dessa uppskattningar oberoende av valet av x.

2. **Kontinuitet hos partialsumman:** Med n fixerat betraktar vi partialsumman $S_n(x)$ som kontinuerlig i punkten c. Det existerar därmed ett $\delta > 0$ sådant

att för alla $x \in A$ gäller:

$$|x - c| < \delta \implies |S_n(x) - S_n(c)| < \epsilon/3.$$

Genom att kombinera dessa tre begränsningar i den ursprungliga triangelolikheten (6) ser vi att om $|x - c| < \delta$, så gäller:

$$|S(x) - S(c)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} < \epsilon.$$

Härmed är bevisat att gränsfunktionen S är kontinuerlig i punkten c, och eftersom c valdes godtyckligt är S kontinuerlig på hela A. □

4 Konstruktion och analys av Weierstrassfunktionen

Efter att ha lagt den teoretiska grunden för likformig konvergens och dess relation till kontinuitet i föregående kapitel, kan vi nu undersöka det historiska genombrott som fundamentalt förändrade den matematiska analysen.

4.1 Historisk bakgrund

Under början av 1800-talet rådde ett paradigm inom matematiken där kontinuerliga funktioner betraktades som i huvudsak deriverbara [Thi03]. Den allmänna uppfattningen var att en funktion som varierar kontinuerligt måste vara styckvis monoton, vilket i sin tur förenade begreppen kontinuitet och deriverbarhet på ett sätt som idag betraktas som felaktigt.

En kontinuerlig kurva sågs vid denna tid som spåret efter en fysikalisk rörelse, och en rörelse har alltid en riktning. Det ansågs därför självklart att en väldefinierad tangent existerade nästan överallt. Denna intuitiva föreställning var så stark att den under lång tid betraktades som en etablerad sanning och återfanns i majoriteten av dåtidens främsta läroböcker i analys [Thi03]. Där hävdade man att derivatans diskontinuiteter endast kunde uppträda i isolerade punkter. Som Abbott [Abb15] poängterar, var det först genom rigorösa bevis och konstruktionen av oväntade funktioner som matematiker tvingades acceptera att den visuella intuitionen inte alltid räcker.

Denna övertygelse skakades i grunden den 18 juli 1872, då Karl Weierstrass inför Berlins vetenskapsakademi presenterade en funktion som var kontinuerlig överallt men inte deriverbar i någon enda punkt [Thi03], vilket fick matematiker att ifrågasätta sambandet mellan kontinuitet och deriverbarhet.

4.2 Konstruktion av den ursprungliga funktionen

Weierstrass definierade sin funktion $W(x)$ som en oändlig trigonometrisk serie

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x) \quad \text{för alla } x \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

För att kunna analysera funktionens egenskaper betraktar vi den som gränsvärdet av en följd av partialsummor $\{S_N\}$. Varje partialsumma representerar en ändlig del av serien och definieras som

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} a^n \cos(b^n \pi x).$$

Det är genom att studera hur denna följd av funktioner beter sig när N växer som vi kan förstå egenskaperna hos $W(x)$. Som vi fastställde i kapitel 3 är det just den likformiga konvergensen hos dessa partialsummor som avgör om $W(x)$ ärver egenskaper som kontinuitet från sina enskilda termer.

För att ge funktionen dess speciella egenskaper satte Weierstrass upp tre viktiga krav på parametrarna a och b:

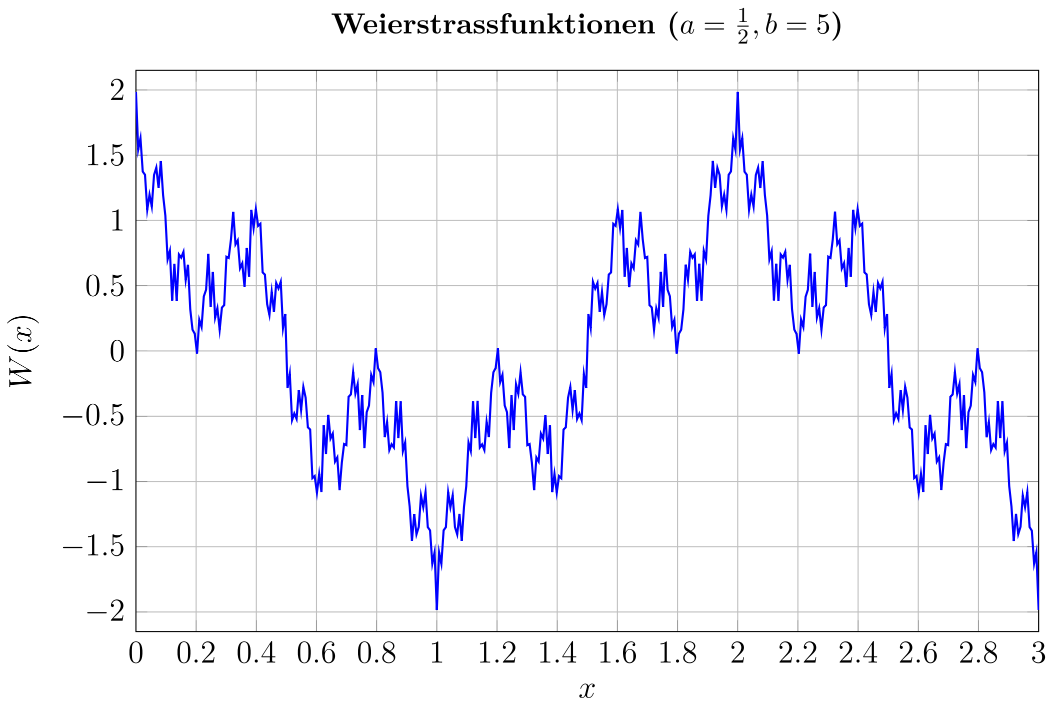
- **$0 < a < 1$:** Villkoret ser till att amplituden hos varje ny oscillation minskar tillräckligt snabbt för att garantera likformig konvergens. Det är just denna likformiga konvergens som gör att den totala summan ärver kontinuiteten från de enskilda cosinus-funktionerna enligt Sats 3.3, vilket gör $W(x)$ kontinuerlig på hela den reella axeln.
- **$b > 1$:** Ett udda heltal som styr den frekvensökning som krävs för att kurvan aldrig ska plana ut, vilket medför att en entydig tangent saknas i varje punkt.

- $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$**:** Villkoret säkerställer att frekvensökningen (b) är tillräckligt stor i förhållande till hur snabbt amplituden (a) minskar för att differenskvoten ska divergera, vilket medför att funktionen saknar derivata överallt.

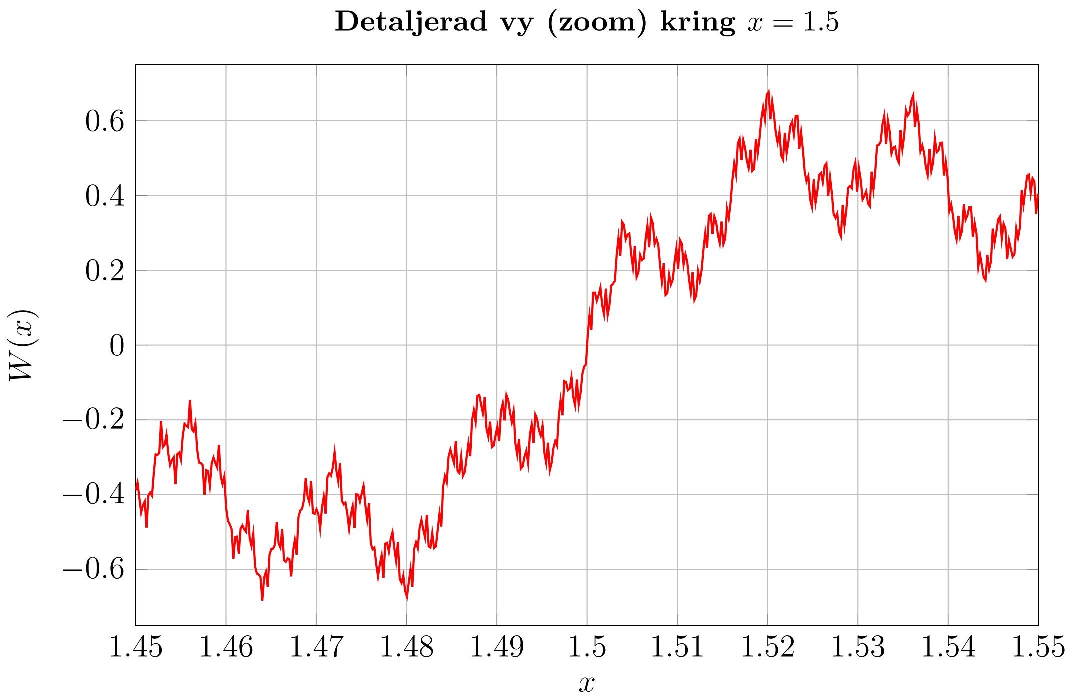
Det är värt att notera att G.H. Hardy senare, år 1916, visade att det svagare villkoret $ab \geq 1$ är tillräckligt för att funktionen ska sakna derivata överallt.

För att få en bättre förståelse för funktionens speciella egenskaper är det värdefullt att studera dess graf. Även om Weierstrass bevis var rent analytiskt, kan en visualisering fungera som en brygga mellan de matematiska formlerna och vår geometriska intuition.

Som visas i Figur 2, avslöjar en närmare granskning hur de oändliga oscillationerna skapar en fraktal struktur som finns kvar oavsett hur mycket man förstorar bilden. Det visuella stödet gör det lättare att se varför kurvan, trots att den är kontinuerlig, aldrig planar ut lokalt för att ha en väldefinierad tangent i någon punkt, vilket bekräftar att den saknar derivata.



Figur 2: *Visualisering av en partialsumma $S_6(x)$ av Weierstrassfunktionen $W(x)$ med $a = \frac{1}{2}$ och $b = 5$.*



Figur 3: *Visualisering av en detaljerad vy (zoom) kring* $x = 1.5$ *och illustrerar partialsummans fraktala natur. Oavsett skala består kurvan av täta oscillationer som förhindrar existensen av en entydig tangent. Notera att datorn i praktiken plottar en partialsumma* $S_6(x)$ *för ett tillräckligt stort* N*, inte själva gränsfunktionen* $S(x)$ *som är ingenstans deriverbar.*

4.3 Kontinuitet hos Weierstrassfunktionen

Genom att använda de teoretiska verktyg som vi utvecklade i kapitel 3 kan vi nu bevisa att Weierstrassfunktionen $W(x)$ faktiskt är en kontinuerlig funktion på hela den reella axeln. Vi betraktar därför först seriens enskilda termer

$$f_n(x) = a^n \cos(b^n \pi x).$$

Eftersom cosinus-funktionen är begränsad av $|\cos(\theta)| \leq 1$ för alla reella tal θ, kan vi göra följande uppskattning för varje enskild term

$$|f_n(x)| = |a^n \cos(b^n \pi x)| \leq a^n.$$

Om vi sätter $M_n = a^n$, ser vi att $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M_n$ är en geometrisk serie. Eftersom vi har antagit villkoret $0 < a < 1$, vet vi från teorin om serier att denna summa konvergerar mot ett fast reellt tal:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} < \infty.$$

Enligt Sats 3.2 (Weierstrass-M-test) konvergerar följden av partialsummor $\{S_N(x)\}$ likformigt mot $W(x)$ på hela $\mathbb{R}$. Eftersom varje enskild term f_n är en kontinuerlig cosinusfunktion, är varje partialsumma S_N (som en ändlig summa av kontinuerliga funktioner)också kontinuerlig.

Eftersom konvergensen är likformig och varje partialsumma S_N är kontinuerlig, följer det direkt från Sats 3.3 (Satsen om kontinuerlig gränsfunktion) att gränsfunktionen $W(x)$ måste vara kontinuerlig på hela $\mathbb{R}$.

4.4 Icke-deriverbarhet hos Weierstrassfunktionen

För att förstå varför Weierstrassfunktionen $W(x)$ inte är deriverbar i någon punkt, trots att den är kontinuerlig, måste vi granska hur gränsvärdet av dess partialsummor $S_N(x)$ beter sig. För att avgöra om funktionen $W(x)$ äger en derivata i en punkt x, måste vi granska dess differenskvot

$$\frac{W(x+h) - W(x)}{h}. \tag{8}$$

Enligt definitionen av deriverbarhet krävs det att differenskvoten (8) konvergerar mot ett ändligt reellt tal när $h \to 0$. Som illustreras i Figur 2 är så inte fallet för $W(x)$. Istället fortsätter differenskvoten att oscillera med växande amplitud. Förklaringen ligger i funktionens fraktala natur, som medför att kurvan aldrig planar ut lokalt. Oavsett förstoringsgrad kvarstår de täta oscillationerna, så att en entydig tangent inte kan existera.

Parametrarnas samspel och funktionens struktur

I konstruktionen av $W(x)$ styrs funktionens beteende av ett balanserat samspel mellan parametrarna a och b. Som tidigare visats garanterar villkoret $0 < a < 1$ att serien konvergerar likformigt, vilket gör summan kontinuerlig enligt Sats 3.2.

Problemet med deriverbarhet uppstår på grund av faktorn b, som styr hur snabbt frekvensen ökar. Varje partialsumma $S_N(x)$ är i sig en deriverbar funktion eftersom den är en ändlig summa av cosinustermer. Om vi betraktar derivatan av en sådan partialsumma får vi

$$S'_N(x) = -\pi \sum_{n=0}^{N} (ab)^n \sin(b^n \pi x).$$

Här ser vi att medan amplituden i den ursprungliga serien avtar som a^n, växer lutningen i partialsummorna med faktorn $(ab)^n$. När produkten ab är tillräckligt stor dominerar de snabba oscillationerna från termer med höga n-värden. Det medför att differenskvoten inte konvergerar mot ett ändligt reellt tal när $h \to 0$, utan istället oscillerar mellan allt större positiva och negativa värden. Som en konsekvens saknar $W(x)$ en väldefinierad derivata i varje punkt.

Reflektion kring intuition och matematisk stringens.

Den analys vi gjort av parametrarna a och b hjälper oss att förstå varför funktionen beter sig som den gör. Genom att se hur amplituden a^n minskar samtidigt som frekvensen b^n ökar, framträder en bild av hur de olika delarna i serien samverkar för att skapa en kurva som aldrig planar ut lokalt.

Härmed ges en intuitiv förklaring till varför en entydig tangent saknas i varje punkt. För ett fullständigt matematiskt bevis krävs dock att man visar att differenskvoten saknar gränsvärde då hur $h \to 0$.

Som Johanna Pejlare [Pej07] påpekar finns det en viktig skillnad mellan vad vi kan föreställa oss visuellt och vad som kan fastställas genom formella matematiska resonemang. Weierstrassfunktionen illustrerar tydligt hur denna skillnad kan utmana våra grundläggande uppfattningar om hur funktioner beter sig.

5 En modern förenkling av Weierstrass idé

Även om den ursprungliga Weierstrassfunktionen var ett analytiskt genombrott, är beviset för dess icke-deriverbarhet tekniskt krävande då det involverar trigonometriska uppskattningar. I modern litteratur, såsom hos Rudin [Rud76] och Abbott [Abb15], presenteras ofta en mer lättillgänglig version där cosinuskurvorna ersätts av en styckvis linjär *sågtandsfunktion*.

Denna konstruktion bibehåller den ursprungliga arkitekturen genom att addera oändliga lager av allt mindre och tätare oscillationer men gör beräkningarna av lutningen betydligt enklare.

5.1 Konstruktion med sågtandsfunktioner

Vi börjar med att definiera en periodisk hjälpfunktion $\phi(x)$ som utgör seriens grundelement

$$\phi(x) = |x| \quad \text{för } x \in [-1, 1],$$

och utsträcker ϕ till att vara periodisk på hela den reella axeln genom villkoret

$$\phi(x + 2) = \phi(x) \quad \text{för } x \in \mathbb{R}. \tag{9}$$

Eftersom $\phi(x) = |x|$ på intervallet $[-1, 1]$ och ϕ är periodisk, gäller att $0 \leq \phi(x) \leq 1$ för alla $x \in \mathbb{R}$. Denna basfunktion är kontinuerlig överallt, men i varje punkt där x är ett heltal har kurvan ett skarpt hörn och saknar därför en väldefinierad tangent.

Även om hjälpfunktionen $\phi(x)$ uppvisar den önskade egenskapen att sakna derivata i heltalspunkterna, är den fortfarande linjär och därmed deriverbar i alla intervall mellan dessa punkter. För att uppnå målet att skapa en funktion som saknar en entydig tangent i varje punkt på den reella axeln, räcker det alltså inte med en enstaka sågtandsfunktion.

Strategin är istället att addera oändligt många lager av $\phi(x)$, där varje ny term har en högre frekvens men en mindre amplitud. Denna kumulativa process resulterar i en tät struktur av spetsiga hörn, vilket skapar en fraktal arkitektur. Resultatet blir att kurvan, oavsett hur mycket vi förstorar den, aldrig planar ut tillräckligt för att en derivata ska kunna existera. För att formalisera denna idé definierar vi funktionen som gränsvärdet av en följd av partialsummor $\{S_N(x)\}$:

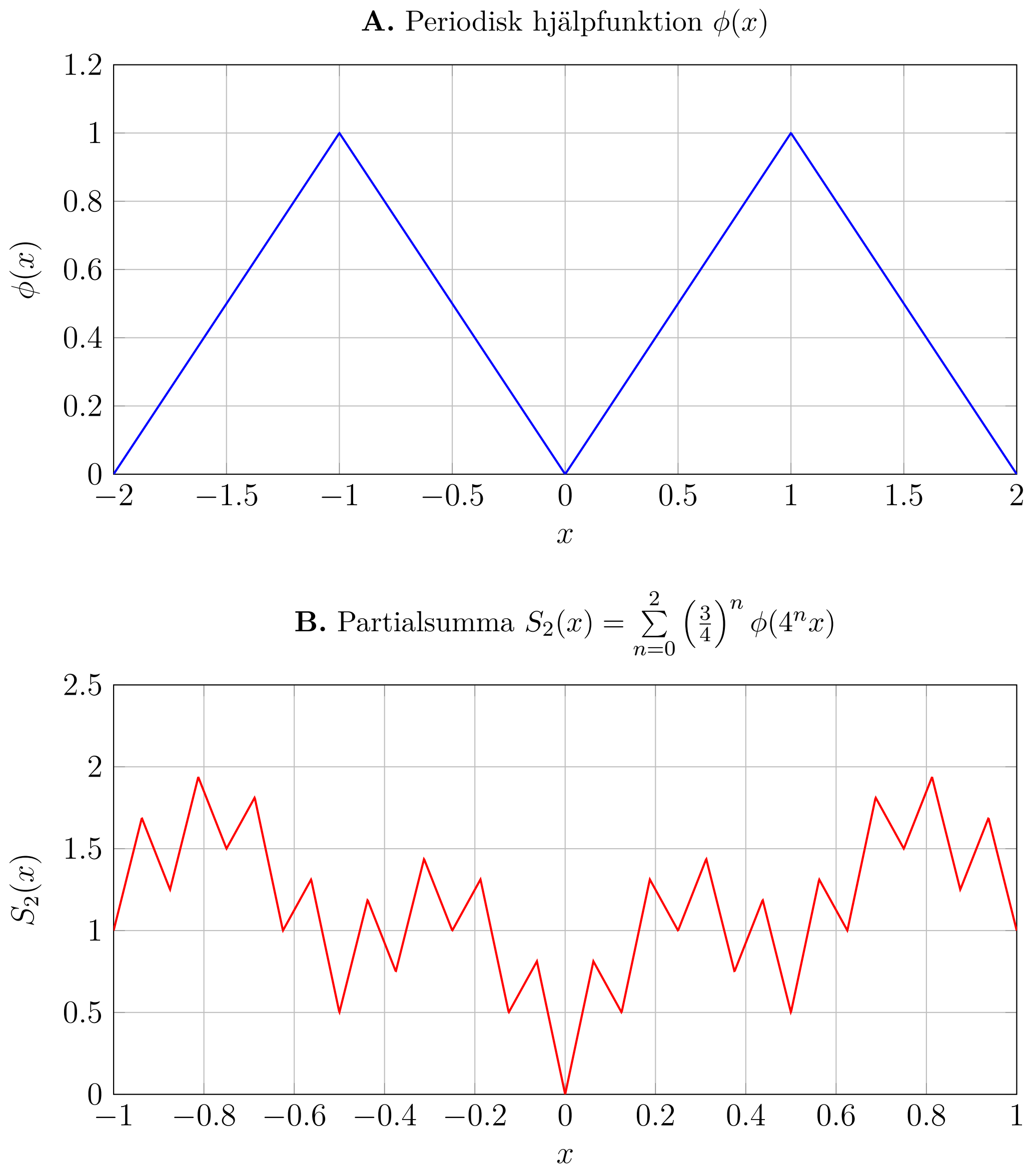
$$f(x) = \lim_{N \to \infty} S_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x). \tag{10}$$

Varje enskild partialsumma definieras som en ändlig summa av funktionens första termer:

$$S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x).$$

Här spelar parametrarna $\frac{3}{4}$ och 4 samma roller som a och b i Weierstrassfunktionen: amplituden $\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ser till att varje ny oscillation i partialsumman är mindre än den föregående, medan frekvensfaktorn 4^n ser till att oscillationerna blir successivt tätare när antalet termer ökar.

För att få en klarare bild av hur denna funktion är uppbyggd är det värdefullt att studera partialsummornas geometriska utveckling. Som förklarats i kapitel 3, är det beteendet hos följden $\{S_N\}$ som avgör gränsfunktionens egenskaper. I Figur 4 illustreras hur de första lagren i summan samverkar för att bygga upp den slutgiltiga fraktala arkitekturen. Genom tillägget av nya partialsummor skapas en struktur av ständigt ökande frekvens. Resultatet är en kurva som aldrig planar ut lokalt, vilket omöjliggör existensen av en entydig tangent trots att funktionen förblir kontinuerlig.



Figur 4: *Konstruktion av den förenklade Weierstrassfunktionen. Figur A visar den periodiska basfunktionen $\phi(x)$. Figur B visar hur bara tre termer i serien skapar en fraktalliknande struktur med täta oscillationer som i gränsvärdet gör funktionen icke-deriverbar.*

5.2 Bevis för kontinuitet

För att visa kontinuiteten med fullständig stringens tillämpar vi de teoretiska verktyg som etablerades i kapitel 3.

1. **Likformig konvergens:** Eftersom hjälpfunktionen $\phi(x)$ är begränsad av $0 \leq \phi(x) \leq 1$, kan vi för varje enskild term $g_n(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x)$ skriva:

$$|g_n(x)| = \left| \left(\frac{3}{4}\right)^n \phi(4^n x) \right| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^n.$$

Låt $M_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Serien $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ är en geometrisk serie med kvoten $\frac{3}{4}$. Eftersom kvoten är strikt mindre än 1, är serien konvergent. Eftersom begränsningen $|g_n(x)| \leq M_n$ gäller för alla $x \in \mathbb{R}$, garanterar Weierstrass-M-test (Sats 3.2) att följden av partialsummor $S_N(x)$ konvergerar likformigt mot $S(x)$ på hela den reella axeln.

2. **Bevarande av kontinuitet:** Varje enskild term g_n är en sammansättning av kontinuerliga funktioner och är därmed själv kontinuerlig. Eftersom varje partialsumma $S_N(x)$ utgör en ändlig summa av kontinuerliga funktioner, är även partialsummorna kontinuerliga. Enligt satsen om kontinuerlig gränsfunktion (Sats 3.3) måste den likformiga gränsfunktionen $S(x)$ ärva denna egenskap från följden av partialsummorna. Vi har därmed visat att $S(x)$ är kontinuerlig överallt.

5.3 Icke-deriverbarhet: analytiskt bevis

I detta avsnitt presenterar vi ett detaljerat bevis för att den förenklade Weierstrass-funktionen

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{3}{4})^n \phi(4^n x)$$

saknar derivata i varje punkt $x \in \mathbb{R}$. Vi betraktar funktionen som gränsvärdet av dess partialsummor $S_n(x)$ och undersöker differenskvoten i en godtycklig punkt x.

För att en funktion ska vara deriverbar i en punkt x krävs att kvoten

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

närmar sig ett fast reellt tal när $h \to 0$. Vi kommer att visa att gränsvärdet inte existerar i någon punkt, genom att konstruera en följd av steg $h_m \to 0$ längs vilken differenskvoten saknar ett ändligt gränsvärde. För att göra det undersöker vi hur differenskvoten beter sig för varje term i serien när $m \to \infty$.

Val av steglängd h_m: För att visa att f saknar derivata i varje punkt väljer vi en specifik sekvens av steg $h_m \to 0$. Låt $x \in \mathbb{R}$ vara godtyckligt fixerat och låt $m \in \mathbb{N}$. Vi definierar steget

$$h_m = \pm\frac{1}{2} \cdot 4^{-m},$$

där tecknet $\pm$ väljs strategiskt så att funktionen beter sig linjärt på det aktuella intervallet, vilket underlättar de beräkningar som följer. Det här valet är avgörande eftersom det garanterar att vi befinner oss på ett linjärt segment av ϕ, där lutningen är konstant ± 1, vilket möjliggör de exakta beräkningar som följer.

Analys av differenskvotens täljare:
Differenskvoten för hela serien skrivs som

$$\frac{f(x+h_m)-f(x)}{h_m} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\phi(4^n(x+h_m)) - \phi(4^n x)}{h_m}. \tag{11}$$

Vi fokuserar nu på täljaren i termerna, $\phi(4^n(x+h_m)) - \phi(4^n x)$, och delar upp analysen i tre fall baserat på relationen mellan n och m:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\cdots) = \underbrace{\sum_{n=0}^{m-1}(\cdots)}_{\mathbf{n<m}} + \underbrace{(\cdots)_{n=m}}_{\mathbf{n=m}} + \underbrace{\sum_{n=m+1}^{\infty}(\cdots)}_{\mathbf{n>m}}.$$

Vi behandlar de tre delarna var för sig.

- **För $n = m$:**

  Vi vill beräkna täljaren $\phi(4^m x + 4^m h_m) - \phi(4^m x)$. Låt $t_m = 4^m x$. Genom att sätta in $h_m = \pm\frac{1}{2} \cdot 4^{-m}$ kan vi skriva om termen som

$$\begin{aligned}\phi(4^m x + 4^m h_m) - \phi(4^m x) &= \phi\Big(t_m + 4^m \cdot \Big(\pm\frac{1}{2} \cdot 4^{-m}\Big)\Big) - \phi(t_m) \\ &= \phi\Big(t_m \pm \tfrac{1}{2}\Big) - \phi(t_m).\end{aligned}$$

Eftersom inget heltal ligger mellan t_m och $t_m \pm \frac{1}{2}$, är ϕ linjär med lutning ± 1 på intervallet. Därför gäller

$$\phi\Big(t_m \pm \tfrac{1}{2}\Big) - \phi(t_m) = \pm\tfrac{1}{2}.$$

Bidraget från termen $n = m$ till differenskvoten (11) blir därmed:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^m \cdot \frac{\pm\frac{1}{2}}{h_m} = \left(\frac{3}{4}\right)^m \cdot \frac{\pm\frac{1}{2}}{\pm\frac{1}{2}\cdot 4^{-m}} = \pm\left(\frac{3}{4}\right)^m \cdot 4^m = \pm 3^m.$$

- **För $n > m$:**

  Vi vill beräkna täljaren $\phi(4^n(x + h_m)) - \phi(4^n x)$. Genom att sätta in $h_m = \pm\frac{1}{2}\cdot 4^{-m}$ får vi

  $$4^n(x + h_m) = 4^n x \pm 4^n\left(\frac{1}{2}\cdot 4^{-m}\right) = 4^n x \pm \tfrac{1}{2}\cdot 4^{n-m}.$$

  Eftersom $n > m$ är 4^{n-m} en naturlig potens av 4, och därmed ett jämnt heltal $(4, 16, 64, \ldots)$. Det följer att $\frac{1}{2}\cdot 4^{n-m}$ är ett heltal och att steget h_m täcker ett exakt antal hela perioder av ϕ. Därför gäller $\phi(4^n x + \frac{1}{2}\cdot 4^{n-m}) = \phi(4^n x)$ för alla $x \in \mathbb{R}$ (9) och för täljaren innebär det att

  $$\phi(4^n(x + h_m)) - \phi(4^n x) = \phi(4^n x + \text{jämnt heltal}) - \phi(4^n x) = 0.$$

  Alla termer där $n > m$ bidrar alltså med noll till differenskvoten (11).

- **För $n < m$:**

  Vi vill beräkna täljaren $\phi(4^n(x + h_m)) - \phi(4^n x)$. Genom att sätta in $h_m = \pm\frac{1}{2}\cdot 4^{-m}$ får vi

  $$4^n h_m = \pm\tfrac{1}{2}\cdot 4^{n-m}.$$

  Eftersom $n < m$ är exponenten $n - m$ negativ, vilket innebär att 4^{n-m} är en bråkdel $(\frac{1}{4}, \frac{1}{16}, \ldots)$. Det maximala värdet uppnås när $n = m - 1$, vilket ger $|4^n h_m| = \frac{1}{8} < \frac{1}{2}$. Eftersom ϕ är styckvis linjär med lutning ± 1 kan höjdskillnaden aldrig vara större än steget. Därför gäller

$$|\phi(4^n(x+h_m)) - \phi(4^n x)| \leq |4^n h_m| = \frac{1}{2} \cdot 4^{n-m}.$$

Bidraget från termen n till differenskvoten (11) är därmed begränsat av

$$\begin{aligned}
\left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{|\phi(4^n(x+h_m)) - \phi(4^n x)|}{|h_m|} &\leq \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{|4^n(x+h_m) - 4^n x|}{|h_m|} \\
&= \left(\frac{3}{4}\right)^n \cdot \frac{4^n |h_m|}{|h_m|} \\
&= 3^n.
\end{aligned}$$

Det samlade bidraget från alla termer med $n < m$ är alltså begränsat av

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} \left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{\phi(4^n(x+h_m)) - \phi(4^n x)}{h_m} \right| \leq \sum_{n=0}^{m-1} 3^n = \frac{3^m - 1}{2}.$$

Slutsats. Genom att kombinera de tre fallen ser vi att att termen $\pm 3^m$ från fallet $n = m$ ger ett obegränsat bidrag, medan termerna $n > m$ försvinner helt och bidraget från $n < m$ är begränsat av $\frac{3^m-1}{2}$. Genom den omvända triangelolikheten $|X + Y| \geq |X| - |Y|$ får vi

$$\left| \frac{f(x+h_m) - f(x)}{h_m} \right| \geq \underbrace{|\pm 3^m|}_{\text{n = m}} - \underbrace{\frac{3^m - 1}{2}}_{\text{n < m}} + \underbrace{|0|}_{\text{n > m}} = \frac{3^m + 1}{2} \to \infty \quad \text{när } m \to \infty.$$

Resultatet är att differenskvoten saknar ett ändligt gränsvärde, och därmed att f inte är deriverbar i punkten x. Eftersom x valdes godtyckligt följer att f inte är deriverbar i någon punkt. Därmed illustrerar Weierstrass banbrytande resultat: att kontinuitet inte räcker för att garantera deriverbarhet.

Referenser

[Abb15] Stephen Abbott. *Understanding Analysis*. Springer, second edition, 2015. doi:10.1007/978-1-4939-2712-8.

[BP08] Kajsa Bråting and Johanna Pejlare. Visualizations in mathematics. *Erkenntnis*, 68:345–358, 2008. doi:10.1007/s10670-008-9104-3.

[Pej07] Johanna Pejlare. *On Axioms and Images in the History of Mathematics*. Phd thesis, Uppsala University, 2007.

[Rud76] Walter Rudin. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, third edition, 1976.

[Thi03] Johan Thim. Continuous nowhere differentiable functions. Master's thesis, Luleå University of Technology, 2003.