SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Geometriska konstruktioner med linjal och passare - från geometri till algebra

av

Durmus Samed Göker

2026 - No L9

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET, 106 91 STOCKHOLM

Geometriska konstruktioner med linjal och passare - från geometri till algebra

Durmus Samed Göker

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Olof Sisask

2026

Innehåll

Abstract

This thesis studies classical geometric constructions performed using only a straightedge and compass, with focus on both possible and impossible constructions. The work is grounded in the tradition of Euclidean geometry and begins by presenting theoretical framework and notation underlying constructible objects, accompanied by examples of constructions that can be carried within these constraints.

The second part of the thesis addresses constructions that have been proven impossible, with particular emphasis on three classical problems: the squaring of the circle, the trisection of an angle, and the doubling of the cube. Using tools from modern algebra, especially the theory of field extensions, the thesis explains why these constructions cannot be achieved using classical geometric methods.

By combining geometric intuition with algebraic theory, the thesis aims to clarify the distinction between possible and impossible constructions and to demonstrate how algebra provides rigorous criteria for constructibility.

Sammanfattning

Detta arbete behandlar klassiska geometriska konstruktioner utförda med endast linjal och passare, med fokus på både möjliga och omöjliga konstruktioner. Arbetet utgår från den euklidiska geometrins tradition och inleds med en presentation av den teoretiska ram och notation som ligger till grund för konstruerbara objekt, tillsammans med exempel på konstruktioner som kan utföras inom dessa begränsningar.

Den andra delen av arbetet behandlar konstruktioner som har visats vara omöjliga, med särskilt fokus på de tre klassiska problemen: cirkelns kvadratur, vinkelns tredelning och kubens fördubbling. Med hjälp av verktyg från modern algebra, särskilt teorin om kroppsutvidgningar, förklaras varför dessa konstruktioner inte kan utföras med klassiska geometriska metoder.

Genom att kombinera geometrisk intuition med algebraisk teori syftar arbetet till att tydliggöra skillnaden mellan möjliga och omöjliga konstruktioner samt att visa hur algebra ger rigorösa kriterier för konstruerbarhet.

1 Inledning

I denna uppsats behandlas klassiska geometriska konstruktioner med fokus på både möjliga och omöjliga konstruktioner utförda med linjal och passare. Särskild uppmärksamhet ägnas åt tre välkända problem inom geometrin. Kvadraturen av cirkeln, tredelning av vinkeln och fördubblingen av kuben är tre sådana problem. Dessa problem har sitt ursprung i den antika grekiska matematiken och har i över två tusen år fungerat som symboler för människans strävan att med enkla verktyg lösa komplexa geometriska uppgifter.

Med geometriska konstruktioner avses här konstruktioner som utförs enligt de regler som etablerades inom den euklidiska geometrin. Inom denna tradition finns ett stort antal konstruktioner som är möjliga att utföra, som kommer att visas i kapitel 4. Dessa möjliga konstruktioner utgör grunden för att förstå vilka begränsningar som följer av att endast använda linjal och passare. Samtidigt har det visat sig att vissa till synes enkla geometriska problem inte kan lösas med dessa verktyg.

Syftet med uppsatsen är dels att redogöra för teorin bakom möjliga linjal- och passarkonstruktioner och ge exempel på sådana konstruktioner, dels att förklara varför vissa klassiska konstruktioner är omöjliga att utföra inom samma ramverk. Vidare syftar uppsatsen till att visa hur modern algebra, i synnerhet teorin om kroppsutvidgningar, kan användas för att formellt bevisa omöjligheten hos dessa konstruktioner.

Den frågeställning som undersöks är följande: *Vilka geometriska konstruktioner är möjliga och omöjliga att utföra med linjal och passare, och hur kan algebraiska metoder användas för att avgöra detta?*

För att besvara denna fråga inleds uppsatsen med en historisk bakgrund till geometriska konstruktioner, med utgångspunkt i den euklidiska geometrin som formulerades av Euklides. Därefter introduceras teori och notationer för möjliga konstruktioner, följt av exempel på sådana konstruktioner. I den senare delen av uppsatsen behandlas teori och notationer för omöjliga konstruktioner samt de tre klassiska olösliga problemen.

2 Historisk bakgrund

Geometri är en av de äldsta vetenskaperna och geometriska kunskaper fanns redan i tidiga civilisationer såsom egyptiska, babyloniska och kinesiska. Ursprungligen bestod geometrin av regler för att lösa praktiska problem, exempelvis inom mätning och byggnadskonst. Själva ordet geometri har sitt ursprung i grekiskan och betyder landmätning, vilket speglar ämnets tidiga användningsområden.

Det var först under antiken som geometrin utvecklades till en vetenskap på deduktiva grunder. Grekiska matematiker, däribland Thales och Pythagoras, började formulera geometriska påståenden som kunde bevisas genom logiska resonemang snarare än genom enbart praktisk erfarenhet. Denna utveckling nådde sin höjdpunkt i arbetet Elementa, där Euklides sammanställde och systematiserade den då kända geometriska kunskapen.

Euklides verk publicerades omkring 300 f.Kr. och består av tretton böcker som huvudsakligen behandlar geometri, men även innehåller aritmetiska resultat. I Elementa byggs geometrin upp som en konsekvent deduktiv teori där ett antal grundläggande antaganden, så kallade axiom eller postulat, används som utgångspunkt. Dessa axiom rör primitiva begrepp såsom punkter, linjer och plan samt enkla geometriska figurer som sträckor och cirklar. Med hjälp av logiska resonemang härleds därefter egenskaper hos geometriska figurer och samband mellan dem.

Euklides metod att bygga matematiken på ett axiomatiskt system kom att få ett mycket stort inflytande. Elementa betraktades under flera år som ett ideal för hur vetenskapliga teorier bör utformas och användes som lärobok ända in på slutet av 1800-talet. Senare analyser visade att framställningen innehöll vissa brister, vilket ledde till modifieringar av teorin, bland annat av David Hilbert. Trots detta lever Euklides grundidé kvar, och den deduktiva struktur som utvecklades inom den euklidiska geometrin har blivit en förebild för hela matematikens uppbyggnad. [1]

3 Teori/notationer (För möjliga konstruktioner)

För att förstå hur geometriska konstruktioner med linjal och passare fungerar behöver man först etablera den teoretiska grunden för vad som är tillåtet och varför. Denna grund utgår från Euklides Elementa, som är en av de mest inflytelserika texterna i matematikens historia. Verket, som tidigare nämnt, består av tretton böcker och inleds med definitioner, axiom och postulat som utgör grunden för de satser och bevis som följer. Euklides mål var att bygga upp geometrin som ett logiskt system, där varje sats härleds ur tidigare fastställda resultat. Denna metod kallas den deduktiva metoden. När man idag talar om möjliga konstruktioner med linjal och passare menar man därför konstruktioner som kan utföras inom detta ramverk. Följande definitioner, axiom och postulat utgår från [4].

3.1 Linjal och passare - de tillåtna verktygen

En linjal- och passarkonstruktion bygger på användningen av två ideala verktyg:

- Linjal: kan användas för att dra en rak linje genom två givna punkter och för att förlänga en sådan linje, men får inte användas för att mäta längder.
- Passare: kan rita en cirkel med en given mittpunkt och en given radie.

Dessa verktyg motsvarar de grundläggande operationer som tillåts i den euklidiska geometrin. Med linjalen kan man dra och förlänga räta linjer, och med passaren kan man konstruera cirklar utifrån en given mittpunkt och radie.

Med möjliga konstruktioner avses här konstruktioner som kan utföras med linjal och passare enligt den euklidiska geometrins regler. Dessa verktyg utgör därför grunden för de klassiska geometriska konstruktioner som behandlas i uppsatsen.

3.2 Definitioner

I uppsatsen används endast de definitioner från Elementa som behövs för de geometriska konstruktioner som behandlas här. Det handlar om de grundläggande begreppen punkt, linje, rät vinkel och cirkel, eftersom dessa utgör grunden för konstruktioner med linjal och passare. Alla geometriska figurer som används i uppsatsen byggs upp utifrån punkter, linjer, cirklar och den räta vinkeln spelar en central roll i flera klassiska konstruktioner. Följande definitioner ur Elementa [4] är därför centrala för den fortsatta framställningen:

- 1. ”A point is that which there is no part.”
- 2. ”And a line is a length without breadth.”
- 10. ”And when a straight-line stood upon (another) straight-line makes adjacent angles (which are) equal to one another, each of the equal angles is a right-angle, and the former straight-line is called a perpendicular to that upon which it stands.”
- 15. ”A circle is a plane figure contained by a single line [which is called a circumference], (such that) all of the straight-lines radiating towards [the circumference] from one point amongst those lying inside the figure are equal to one another.”

Dessa fyra definitioner täcker de mest grundläggande objekten inom geometrin: punkten, linjen, den räta vinkeln och cirkeln. De utgör grunden för de konstruktioner som behandlas i uppsatsen. Alla geometriska figurer byggs ytterst upp av punkter och linjer, medan cirkeln är den figur som konstrueras med hjälp av passaren. Den räta vinkeln spelar dessutom en central roll i flera klassiska konstruktioner, till exempel vid konstruktion av normaler.

3.3 Axiom

Ett axiom är ett påstående som anses vara självklart och behöver därför inte bevisas. Axiomen används som logiska regler för att kunna dra slutsatser i geometriska resonemang. Följande fem axiom från Elementa [4] utgör en del av den teoretiska grund som Euklides bygger sin geometri på. I denna uppsats återges de främst som bakgrund till det euklidiska system inom vilket konstruktionerna formuleras.

1. ”Things equal to the same thing are also equal to one another.”
2. ”And if equal things are added to equal things then the wholes are equal.”
3. ”And if equal things are subtracted from equal things then the remainders are equal.”
4. ”And things coinciding with one another are equal to one another.”
5. ”And the whole [is] greater than the part.”

Syftet med axiomen är att skapa en logisk grund för jämförelser och slutsatser. De används för att motivera att två sträckor, vinklar eller figurer är lika stora, och för att garantera att slutsatser som dras i bevisen är korrekta. Till exempel kan det första axiomets logik användas när man visar att två sidor i en liksidig triangel är lika långa, eftersom båda är lika med en tredje sida.

3.4 Postulat

Medan axiomen anger logiska regler, beskriver postulaten vad som faktiskt får göras i geometrin, alltså vilka konstruktioner som är tillåtna.

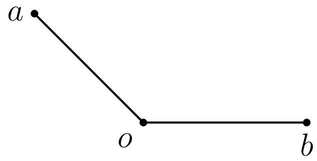
De fem postulaten i Elementa [4] lyder:

1. ”Let it have been postulated to draw a straight-line from any point to any point.”
2. ”And to produce a finite straight-line continuously in a straight-line.”
3. ”And to draw a circle with any center and radius.”
4. ”And that all right-angles are equal to one another.”
5. ”And that if a straight-line falling across two (other) straight-lines makes internal angles on the same side (of itself whose sum is) less than two right-angles, then the two (other) straight-lines, being produced to infinity, meet on that side (of the original straight-line) that the (sum of the internal angles) is less than two right-angles (and do not meet on the other side).”

De tre första postulaten är de mest centrala för konstruktioner, eftersom de direkt beskriver hur linjal och passare får användas. Man får dra raka linjer mellan punkter, förlänga linjer och rita cirklar med given mittpunkt och radie. Det fjärde postulatet fastställer att alla räta vinklar är lika stora, vilket gör det möjligt att jämföra vinklar mellan olika figurer. Det femte postulatet handlar om parallella linjer och uttrycker att Euklides geometri utgår från ett platt plan, inte ett krökt rum. När man exempelvis konstruerar en liksidig triangel på en given sträcka används postulat 1 och 3. Sådana konstruktioner kommer att tas upp mer detaljerat under avsnitt 4 om möjliga konstruktioner.

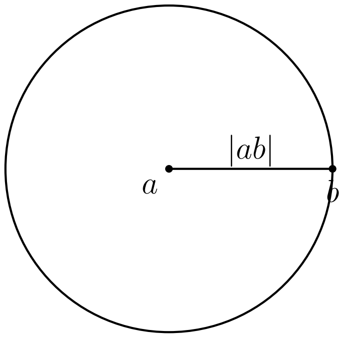
3.5 Notationer

I uppsatsen betecknas punkter med små bokstäver, till exempel a, b, c, d, e, o, p, q och s. Sträckan mellan två punkter, exempelvis a och b skrivs ab. När längden av en sträcka avses skrivs $|ab|$. Vinklar betecknas med tecknet $\angle$, till exempel $\angle aob$.



Figur 1: Illustration av vinkeln $\angle aob$, där o är vinkelspetsen.

Cirklar beskrivs i text genom sitt centrum och sin radie, till exempel ”en cirkel med centrum i a och radie $|ab|$”.



Figur 2: En cirkel med centrum i a och radie $|ab|$.

När två linjer eller cirklar skär varandra kallas deras gemensamma punkt för en skärningspunkt. Om två sträckor har samma längd skrivs detta med likhetstecken, exempelvis $|ab| = |cd|$.

4 Möjliga konstruktioner

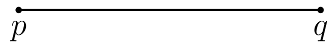
I detta avsnitt presenteras några centrala konstruktioner från Euklides Elementa. Syftet är inte att ge en fullständig framställning av den euklidiska geometrin, utan att visa några grundläggande exempel på vad som faktiskt kan konstrueras med linjal och passare och vilka geometriska resultat som används för att bevisa att konstruktionerna fungerar.

Avsnittet behandlar konstruktionen av en liksidig triangel på en given sträcka, avsättning av en given sträcka på en annan sträcka, ett jämförelseresultat för trianglar med tre par motsvarande lika långa sidor samt halvering av en given vinkel. Dessa resultat motsvarar Proposition I.1, I.3, I.8 och I.9 i Euklides Elementa [4], men numreras här som Sats 1–4.

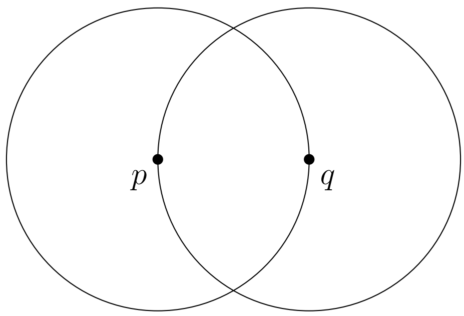
Sats 1. *"To construct an equilateral triangle on a given finite straight-line."* [4]

Med modern notation betyder detta följande: givet en sträcka pq ska man konstruera en liksidig triangel med pq som sida.

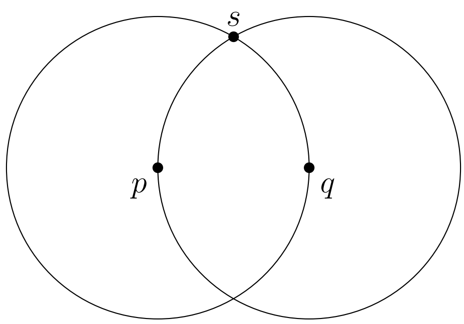
Bevis. Vi utgår från den givna ändliga sträckan pq. Målet är att konstruera en liksidig triangel med pq som sida.



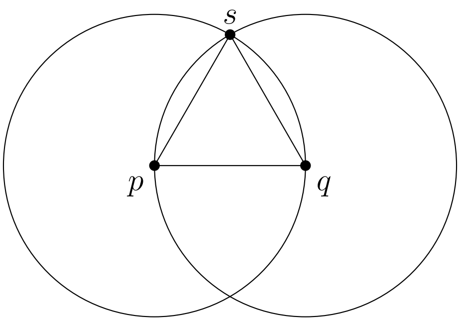
Figur 3: Den givna ändliga sträckan pq.



Vi börjar med att rita en cirkel med centrum i p som går genom q. Därefter ritar vi en cirkel med centrum i q som går genom p. Båda cirklarna har därför radie $|pq|$, och alltså är de lika stora. Dessutom ligger q på cirkeln med centrum i p, och p på cirkeln med centrum i q. Avståndet mellan punkterna p och q är alltså lika med cirklarnas radie r, det vill säga $|pq| = r$.



I den nya ritningen har en skärningspunkt s lagts till.



Den sista ritningen visar en liksidig triangel med linjer från

- p till q
- p till s
- q till s.

Eftersom s ligger på båda cirklarna gäller att $|ps| = r$ och $|qs| = r$. Dessutom är $|pq| = r$. Alltså gäller

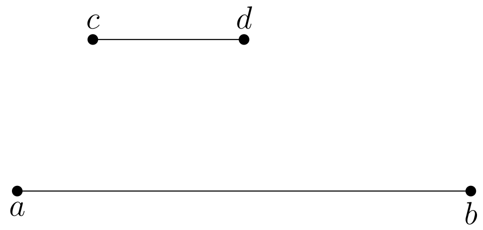
$$|pq| = |ps| = |qs|,$$

och triangeln pqs är därför liksidig. $\square$

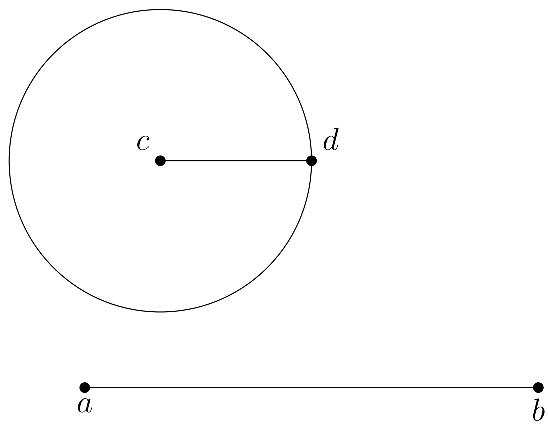
Sats 2. *”For two given unequal straight-lines, to cut off from the greater a straight-line equal to the lesser.”* [4]

Med modern notation betyder detta följande: givet två sträckor ab och cd med $|ab| > |cd|$ ska man på den längre sträckan ab markera en punkt e sådan att $|ae| = |cd|$.

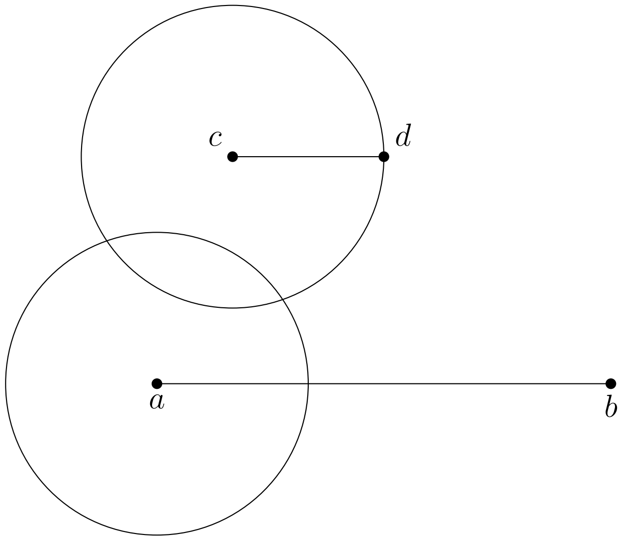
Bevis. Här har vi en längre sträcka ab och en kortare cd.



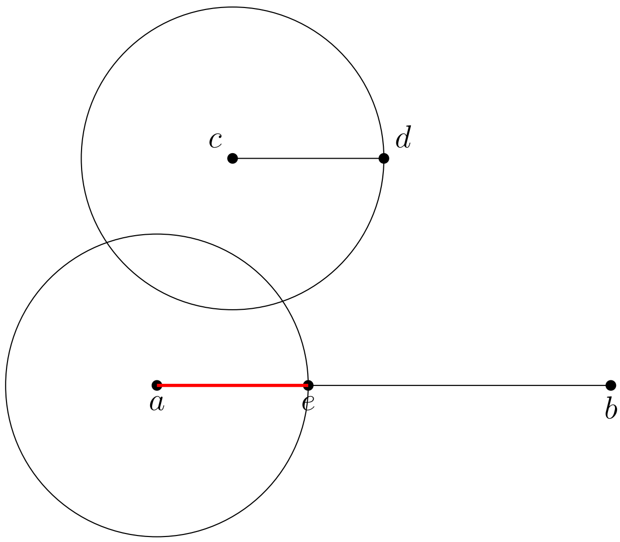
Här har vi ritat en cirkel med mittpunkt i c som sträcker sig till d. Radien av cirkeln är alltså $|cd|$.



Här har vi konstruerat en cirkel med centrum i a och med samma radie som sträckan cd. Enligt Euklides I.2 kan en cirkel med samma radie som den givna sträckan cd konstrueras med centrum i punkten a [4]. Den nya cirkeln representerar alltså alla punkter som ligger på avståndet $|cd|$ från a.



Punkten e är den punkt där cirkeln med centrum i a skär linjen ab. Eftersom e ligger på cirkeln med centrum i a och radie cd, gäller $|ae| = |cd|$.



Vi har alltså konstruerat en punkt e på den längre sträckan ab sådan att $|ae| = |cd|$. $\square$

Sats 3. *"If two triangles have two sides equal to two sides, respectively, and also have the base equal to the base, then they will also have equal the angles encompassed by the equal straight-lines."* [4]

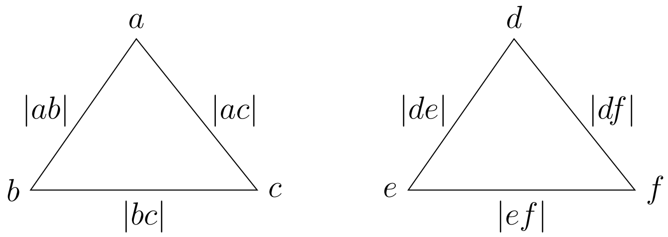
Med modern notation betyder detta följande: om två trianglar har tre par motsvarande sidor som är lika långa, så är vinklarna mellan de motsvarande lika sidorna också lika stora.

Antag att vi har två trianglar abc och def sådana att

$$|ab| = |de|, \qquad |ac| = |df|, \qquad |bc| = |ef|.$$

Då ska vi visa att

$$\angle bac = \angle edf.$$



Figur 4: Två trianglar med tre motsvarande lika sidor.

Bevis. Vi antar att trianglarna abc och def uppfyller

$$|ab| = |de|, \qquad |ac| = |df|, \qquad |bc| = |ef|.$$

Vi ska visa att vinkeln mellan sidorna ab och ac är lika stor som vinkeln mellan sidorna de och df.

Placera triangeln abc ovanpå triangeln def så att punkten b sammanfaller med punkten e, och så att sträckan bc ligger på sträckan ef. Eftersom

$$|bc| = |ef|$$

måste även punkten c sammanfalla med punkten f.

Det återstår att undersöka var punkten a hamnar. Eftersom

$$|ab| = |de|$$

och punkten b sammanfaller med punkten e, ligger punkten a på samma avstånd från e som punkten d gör. Eftersom

$$|ac| = |df|$$

och punkten c sammanfaller med punkten f, ligger punkten a dessutom på samma avstånd från f som punkten d gör. Alltså gäller

$$|ae| = |de| \quad \text{och} \quad |af| = |df|.$$

Vi använder nu följande hjälpsats, som motsvarar Proposition I.7 [4]:

Hjälpsats 1. *Det kan inte finnas två olika punkter på samma sida om en given bas, om båda punkterna har samma avstånd till basens båda ändpunkter.*

Bevis. Anta att det fanns två olika punkter a och d på samma sida om basen ef, och att

$$|ae| = |de| \quad \text{och} \quad |af| = |df|.$$

Då skulle trianglarna aef och def ha samma bas ef, ligga på samma sida om basen och ha de två övriga sidorna lika långa parvis. Detta är precis den situation som Proposition I.7 i Elementa utesluter. Alltså kan sådana två olika punkter inte finnas. □

I vårt fall ligger alltså både a och d på samma sida om basen ef, och de uppfyller samma avståndsvillkor till basens ändpunkter. Enligt hjälpsatsen måste därför punkten a sammanfalla med punkten d.

Därmed sammanfaller även sträckorna ab och ac med sträckorna de respektive df. Följaktligen sammanfaller också vinkeln mellan ab och ac med vinkeln mellan de och df. Alltså gäller

$$\angle bac = \angle edf.$$

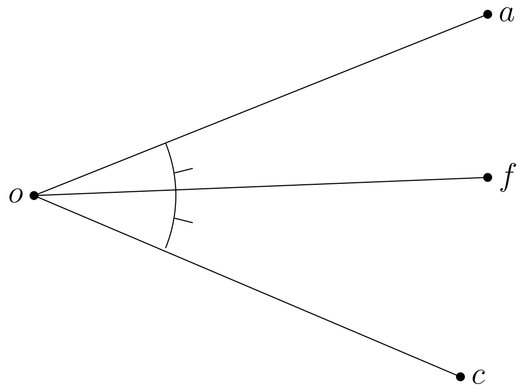
Därmed är satsen bevisad. □

Efter att ha behandlat dessa satser kan vi nu använda dessa resultat, i sats 4 på nästa sida, för att konstruera en vinkelhalverare. Sats 1 används för att konstruera en liksidig triangel, Sats 2 används för att avsätta lika långa sträckor, och Sats 3 används för att jämföra trianglar med tre par lika långa sidor.

Till skillnad från Sats 1 och Sats 2 är Sats 3 inte en konstruktion i sig, utan ett geometriskt jämförelseresultat. Den är ändå viktig eftersom den används i beviset av Sats 4 för att visa att den konstruerade strålen verkligen delar vinkeln i två lika stora delar.

Sats 4. *"To cut a given rectilinear angle in half."* [4]

Med en rätlinjig vinkel menas en vinkel som bildas av två räta strålar med gemensam ändpunkt. Satsen handlar alltså inte om en rät vinkel, utan om en godtycklig vinkel vars sidor är räta strålar. I modern notation kan satsen formuleras på följande sätt: givet en vinkel $\angle aoc$ ska man med linjal och passare konstruera en stråle från o som delar vinkeln i två lika stora delar.



Figur 5: Illustration av en stråle of som delar vinkeln $\angle aoc$ i två lika stora delar.

Bevis. Vi utgår från den givna vinkeln $\angle aoc$, där o är vinkelspetsen och strålarna oa och oc är vinkelns sidor. Målet är att bestämma en ny stråle från o som ligger mellan dessa två strålar och som delar vinkeln i två lika stora delar.

Konstruktionen börjar med att vi väljer en punkt d på strålen oa. Vi vill sedan placera en punkt e på den andra strålen, oc, på samma avstånd från o som punkten d. Det betyder att punkten e ska väljas så att

$$|od| = |oe|.$$

Detta steg är möjligt med hjälp av Sats 2 ovan, som motsvarar Proposition I.3 i Euklides Elementa [4], eftersom denna sats gör det möjligt att avsätta en given sträcka på en annan given stråle. Här avsätter vi alltså längden $|od|$ från punkten o längs strålen oc.

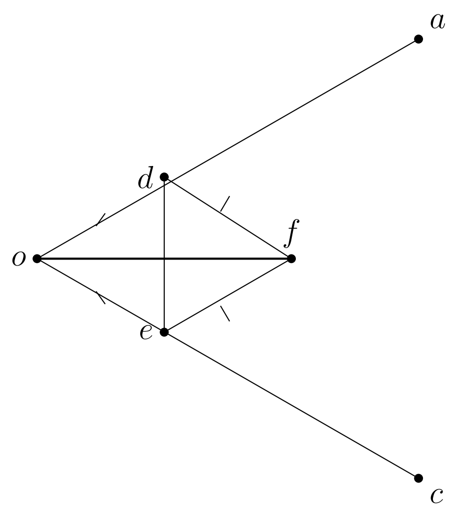
När punkterna d och e har konstruerats drar vi sträckan de. Därefter konstruerar vi en liksidig triangel med de som en av sina sidor. Detta är möjligt enligt Sats 1. Låt triangelns tredje hörn vara f. Eftersom triangeln def är liksidig gäller

$$|de| = |df| = |ef|.$$

I beviset nedan använder vi särskilt att

$$|df| = |ef|.$$

Slutligen drar vi sträckan of. Se figuren nedan:



Det återstår att visa att den konstruerade strålen verkligen halverar vinkeln. För detta jämför vi trianglarna odf och oef.

Av konstruktionen av punkten e följer att

$$|od| = |oe|.$$

Eftersom triangeln def är liksidig har vi dessutom

$$|df| = |ef|.$$

Trianglarna odf och oef har alltså tre par motsvarande sidor som är lika långa. Enligt Sats 3 ovan, som motsvarar Proposition I.8 i Euklides Elementa [4], medför detta att motsvarande vinklar i de två trianglarna är lika stora. Den vinkel vid punkten o som hör till triangeln odf är $\angle dof$, och motsvarande vinkel i triangeln oef är $\angle foe$. Därför får vi

$$\angle dof = \angle foe.$$

Detta visar att strålen of delar vinkeln $\angle doe$ i två lika stora delar. Eftersom punkten d ligger på strålen oa och punkten e ligger på strålen oc, sammanfaller vinkeln $\angle doe$ med den ursprungliga vinkeln $\angle aoc$. Därmed delar strålen of även vinkeln $\angle aoc$ i två lika stora delar.

Alltså har vi konstruerat en vinkelhalverare till den givna vinkeln, och satsen är bevisad. $\square$

De konstruktioner som behandlats här visar några grundläggande exempel på vad som kan utföras med linjal och passare. Utöver dessa kan man också visa att om två längder är konstruerbara, så är även deras summa, differens, produkt och kvot konstruerbara, liksom kvadratroten av en positiv konstruerbar längd. Dessa egenskaper kommer i nästa kapitel att formuleras algebraiskt med hjälp av begreppet konstruerbara tal.

5 Teori/notationer (För omöjliga konstruktioner)

De klassiska problemen tredelning av vinkeln, fördubbling av kuben och kvadratur av cirkeln har under lång tid sysselsatt matematiker. Trots många försök visade det sig så småningom att de inte kan lösas med enbart linjal och passare. För att förstå varför dessa problem är omöjliga räcker det inte med geometriska resonemang. Istället behöver man översätta konstruktionerna till algebra, där de kan beskrivas med hjälp av tal, kroppar och kroppsutvidgningar. [6]

I denna del presenteras den algebraiska grunden för dessa resultat. Först introduceras begreppet konstruerbara tal och sambandet mellan geometri och algebra. Därefter beskrivs vad en kropp är och hur konstruerbara tal bildar en serie av kvadratiska utvidgningar av de rationella talen. Slutligen visas hur denna teori leder till insikten att vissa konstruktioner kräver tal som inte kan uppnås genom en följd av kvadratiska rotutvidgningar, och därmed är omöjliga att konstruera med linjal och passare. Till skillnad från de möjliga konstruktionerna, som vi kan se bevisas geometriskt under avsnittet möjliga konstruktioner utifrån Euklides Elementa, kräver de omöjliga konstruktionerna att man översätter geometrin till algebra.

Från och med detta kapitel övergår arbetet till ett mer algebraiskt angreppssätt. Den teoretiska framställningen bygger i huvudsak på Nicklasson och Zickert [6], men resultaten anpassas här till uppsatsens syfte: att förklara hur algebraiska metoder kan användas för att avgöra vilka konstruktioner som är möjliga med linjal och passare.

Notationer:

I detta kapitel betecknar $\mathbb{Q}$ de rationella talen och $\mathbb{R}$ de reella talen. Övrig notation introduceras successivt i samband med att de relevanta begreppen definieras.

5.1 Från geometri till algebra

I avsnittet om de möjliga konstruktionerna arbetade vi enbart geometriskt. Vi utgick från punkter, linjer och cirklar samt Euklides definitioner, axiom och postulat för att visa hur nya punkter kunde konstrueras. För att förstå de omöjliga konstruktionerna behöver vi nu översätta dessa geometriska objekt till algebraiska begrepp.

Punkter som tal

Vi utgår från två givna punkter, nämligen origo $(0, 0)$ och punkten $(1, 0)$. Dessa punkter bestämmer ett koordinatsystem och en enhetslängd. Med hjälp av linjal och passare kan vi sedan rita linjer och cirklar utifrån redan konstruerade punkter. När sådana linjer och cirklar skär varandra får vi nya punkter. Frågan blir då vilka punkter, eller vilka koordinater, som kan erhållas på detta sätt.

När man undersöker hur dessa punkter uppstår ser man att varje nytt konstruktionssteg kan beskrivas med en ekvation:

- Linjer motsvarar linjära ekvationer (av första graden).
- Cirklar motsvarar kvadratiska ekvationer (av andra graden).
- Skärningen mellan två sådana figurer motsvarar lösningen till ett ekvationssystem.

I ett koordinatsystem kan en linje beskrivas med en ekvation av formen $ax+by+c=0$, där a, b och c är reella tal och där a och b inte båda är noll. En cirkel med centrum i (m, n) och radie r kan beskrivas med ekvationen $(x-m)^2+(y-n)^2=r^2$. Skärningspunkter mellan sådana figurer motsvarar då lösningar till ekvationssystem bestående av dessa ekvationer. [6]

När två linjer eller cirklar skär varandra bestäms deras skärningspunkter av ekvationer av första eller andra graden. Detta antyder att nya konstruerbara tal endast kan uppstå genom lösning av linjära eller kvadratiska ekvationer. I algebraisk mening motsvarar det att man utgår från tidigare konstruerade tal och därefter endast använder addition, subtraktion, multiplikation, division och kvadratrotsutdragning. Denna idé kommer att formaliseras i de följande avsnitten med hjälp av kroppar och kvadratiska kroppsutvidgningar.

5.2 Konstruerbara tal

När man arbetar med linjal och passare utgår man, som vi såg i avsnitt 5.1, från två givna punkter i planet och bygger därifrån upp ett koordinatsystem. Genom att rita linjer och cirklar och studera deras skärningspunkter kan man stegvis konstruera nya punkter. Varje sådan punkt kan beskrivas med koordinater (x, y), och därmed kan geometriska konstruktioner översättas till algebraiska frågor om vilka tal som kan erhållas. Detta leder till följande definitioner:

Definition 1. *För att beskriva konstruktionerna algebraiskt fixerar vi ett koordinatsystem och väljer punkter* $(0, 0)$ *och* $(1, 0)$ *som utgångspunkter. En punkt* (x, y) *kallas konstruerbar om den kan konstrueras med linjal och passare i ett ändligt antal steg utgående från dessa punkter.* [6]

Definition 2. *Ett reellt tal* x *kallas konstruerbart om punkten* $(x, 0)$ *är konstruerbar. Mängden av alla konstruerbara tal betecknas i det följande med* K*.* [6]

I den algebraiska teorin för linjal- och passarkonstruktioner används följande grundläggande egenskaper hos de konstruerbara talen. Om $a, b \in K$, så är även

$$a+b, \quad a-b, \quad a \cdot b \quad \text{och} \quad \frac{a}{b} \quad (b \neq 0)$$

konstruerbara. Dessutom gäller att om $a \in K$ och $a > 0$, så är även $\sqrt{a}$ konstruerbart [6].

Dessa egenskaper innebär att mängden K av konstruerbara tal är sluten under de fyra räknesätten och under kvadratrotsbildning. De explicita konstruktionerna för summa, differens, produkt, kvot och kvadratrot återges inte här, eftersom uppsatsens fokus ligger på hur dessa egenskaper används för att beskriva konstruerbara tal algebraiskt.

Eftersom mängden K är sluten under de fyra räknesätten kan man visa att den uppfyller alla villkor för att vara en kropp. Det betyder att den har samma räknelagar som de rationella talen, men den kan även innehålla irrationella tal som $\sqrt{2}$.

5.3 Kroppar

Eftersom de konstruerbara talen är slutna under addition, subtraktion, multiplikation och division är det naturligt att beskriva dem med hjälp av begreppet kropp.

Definition 3. *En delmängd F av de reella talen, som innehåller talet 1, kallas en kropp om den uppfyller:*

1. $x + y \in F$ *för alla* $x, y \in F$,
2. $x - y \in F$ *för alla* $x, y \in F$,
3. $xy \in F$ *för alla* $x, y \in F$,
4. $\frac{x}{y} \in F$ *för alla* $x, y \in F$ *där* $y \neq 0$. [6]

Detta innebär att en kropp är en mängd reella tal som är sluten under de fyra räknesätten. De rationella talen $\mathbb{Q}$ och de reella talen $\mathbb{R}$ är exempel på kroppar. I denna uppsats används ordet kropp alltid i betydelsen delkropp av de reella talen $\mathbb{R}$, eftersom de tal som studeras är reella tal som uppkommer ur geometriska längder och koordinater.

Mängden av konstruerbara tal bildar också en kropp, eftersom summan, differensen, produkten och kvoten av två konstruerbara tal återigen är konstruerbara enligt egenskaperna i avsnitt 5.2. Begreppet kropp är viktigt eftersom det ger ett algebraiskt språk för att beskriva vilka tal som kan uppstå i geometriska konstruktioner. Istället för att enbart tala om punkter och linjer kan man då undersöka hur mängden av tillgängliga tal växer när nya konstruktioner utförs.

5.4 Kroppsutvidgningar

När man konstruerar nya tal med passare och linjal utvidgas successivt mängden av tillgängliga tal. För att beskriva detta inför jag begreppet *kroppsutvidgning*.

Definition 4. *Om F är en kropp och L är en större kropp som innehåller F, säger man att L är en kroppsutvidgning av F, och man skriver $F \subseteq L$.* [6]

Detta betyder alltså att L innehåller alla tal i F samt eventuellt ytterligare tal.

Definition 5. *I det följande används notation av typen $F(\sqrt{\alpha})$ för den minsta delkroppen av $\mathbb{R}$ som innehåller både F och talet $\sqrt{\alpha}$. Med andra ord är $F(\sqrt{\alpha})$ den kropp som fås genom att tillåta de fyra räknesätten med element från F och talet $\sqrt{\alpha}$.*

Mer allmänt används notationen

$$F(\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_n})$$

för den minsta delkroppen av $\mathbb{R}$ som innehåller F och talen $\sqrt{\alpha_1}, \dots, \sqrt{\alpha_n}$.

Denna notation kommer att användas i avsnitt 5.4.1 för att beskriva kvadratiska och upprepade kvadratiska kroppsutvidgningar, i enlighet med Nicklasson och Zickerts framställning [6].

Exempel:

$$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}(\sqrt{2})$$

Här består $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ av alla tal på formen $a + b\sqrt{2}$ där $a, b \in \mathbb{Q}$. Detta är en kvadratisk utvidgning, eftersom det nya elementet $\sqrt{2}$ är roten till en andragradsekvation $x^2 - 2 = 0$.

På detta sätt kan man stegvis bygga större kroppar genom att addera nya element. För att mäta hur mycket större en kroppsutvidgning är inför man begreppet *grad*.

Definition 6. *För en ändlig kroppsutvidgning $F \subseteq L$ definieras graden av kroppsutvidgningen L/F, betecknad $[L : F]$, som dimensionen av L betraktat som vektorrum över F.* [3]

I denna uppsats används denna beteckning framför allt för att ange storleken hos kvadratiska och upprepade kvadratiska kroppsutvidgningar.

I synnerhet är detta användbart för kroppar som fås genom att lägga till en kvadratrot. Om

$$L = F(\sqrt{\alpha}) = \{x + y\sqrt{\alpha} \mid x, y \in F\},$$

där $\sqrt{\alpha} \notin F$, kan varje element i L skrivas som

$$x + y\sqrt{\alpha}, \quad x, y \in F.$$

Det betyder att 1 och $\sqrt{\alpha}$ spänner upp L som vektorrum över F. Eftersom $\sqrt{\alpha} \notin F$ är dessa två element linjärt oberoende över F. Alltså är

$$\{1, \sqrt{\alpha}\}$$

en bas för L över F. Eftersom basen har två element är graden av kroppsutvidgningen

$$[L : F] = 2.$$

Denna användning anknyter till Nicklasson och Zickerts framställning av kvadratiska och upprepade kvadratiska kroppsutvidgningar [6].

I praktiken anger detta hur många olika typer av tal som behövs för att beskriva alla element i L, med utgångspunkt i talen i F. Till exempel är

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

en kvadratisk utvidgning av $\mathbb{Q}$. Varje tal i denna kropp kan skrivas som summan av en rationell del och en del som innehåller $\sqrt{2}$. Eftersom $\sqrt{2}$ inte själv är ett rationellt tal räcker det inte med bara rationella tal för att beskriva alla element i kroppen. Man behöver därför två delar, och graden av utvidgningen är alltså

$$[\mathbb{Q}(\sqrt{2}) : \mathbb{Q}] = 2.$$

Nästa steg i resonemanget är att undersöka hur nya tal uppstår vid konstruktioner med linjal och passare.

5.4.1 Kvadratiska kroppsutvidgningar

En särskilt viktig typ av kroppsutvidgning i detta sammanhang är de kvadratiska kroppsutvidgningarna. Dessa uppstår när man adderar kvadratroten av ett element i en given kropp. Följande resultat motsvarar Nicklasson och Zickerts framställning av kvadratiska kroppsutvidgningar [6].

Sats 5. *Låt $F \subseteq \mathbb{R}$ vara en kropp och anta $\alpha \in F$, $\alpha > 0$, men att $\sqrt{\alpha} \notin F$. Då bildar mängden*

$$F(\sqrt{\alpha}) = \{x + y\sqrt{\alpha} | x, y \in F\}$$

en kroppsutvidgning av F. En sådan utvidgning kallas en kvadratisk kroppsutvidgning av F.

Bevis. Först ser vi att $F \subseteq F(\sqrt{\alpha})$, eftersom varje element $x \in F$ kan skrivas som

$$x = x + 0\sqrt{\alpha}.$$

Det återstår att kontrollera att mängden är sluten under de fyra räknesätten.

Låt

$$u = x + y\sqrt{\alpha} \quad \text{och} \quad v = z + w\sqrt{\alpha},$$

där $x, y, z, w \in F$. Då gäller

$$u + v = (x + z) + (y + w)\sqrt{\alpha}$$

och

$$u - v = (x - z) + (y - w)\sqrt{\alpha}.$$

Eftersom F är en kropp ligger $x + z$, $y + w$, $x - z$ och $y - w$ i F. Alltså ligger både $u + v$ och $u - v$ i $F(\sqrt{\alpha})$.

Vid multiplikation får vi

$$uv = (x + y\sqrt{\alpha})(z + w\sqrt{\alpha}) = (xz + yw\alpha) + (xw + yz)\sqrt{\alpha}.$$

Eftersom $\alpha \in F$ och F är sluten under addition och multiplikation ligger även detta i $F(\sqrt{\alpha})$.

Slutligen måste vi visa att inversen till ett nollskilt element också ligger i mängden. Låt

$$u = x + y\sqrt{\alpha} \neq 0.$$

Då gäller

$$\frac{1}{u} = \frac{x - y\sqrt{\alpha}}{x^2 - y^2\alpha} = \frac{x}{x^2 - y^2\alpha} - \frac{y}{x^2 - y^2\alpha}\sqrt{\alpha}.$$

Nämnaren är inte noll. Om $x^2 - y^2\alpha = 0$ och $y \neq 0$, skulle vi få

$$\alpha = \left(\frac{x}{y}\right)^2,$$

vilket skulle innebära att $\sqrt{\alpha} \in F$, i motsats till antagandet. Om $y = 0$, är nämnaren x^2, och eftersom $u \neq 0$ är även $x \neq 0$. Alltså är nämnaren nollskild.

Därmed ligger också $1/u$ i $F(\sqrt{\alpha})$. Mängden är alltså en kropp som innehåller F, och därmed en kroppsutvidgning av F. □

Kvadratiska kroppsutvidgningar kommer senare i kapitlet att knytas till linjal- och passarkonstruktioner i Sats 7, där skärningspunkter mellan linjer och cirklar analyseras algebraiskt.

Sats 6. *Låt $F \subseteq \mathbb{R}$ vara en kropp och anta att $\alpha \in F$, $\alpha > 0$, samt att $\sqrt{\alpha} \notin F$. Om*

$$L = F(\sqrt{\alpha}),$$

så gäller att

$$[L : F] = 2.$$

Bevis. Varje element i $L = F(\sqrt{\alpha})$ kan skrivas på formen

$$x + y\sqrt{\alpha}, \quad x, y \in F.$$

Detta betyder att elementen 1 och $\sqrt{\alpha}$ spänner upp L som vektorrum över F.

Vi visar också att dessa två element är linjärt oberoende över F. Antag att

$$x + y\sqrt{\alpha} = 0$$

för några $x, y \in F$. Om $y \neq 0$, får vi

$$\sqrt{\alpha} = -\frac{x}{y} \in F,$$

vilket strider mot antagandet att $\sqrt{\alpha} \notin F$. Alltså måste $y = 0$, och då följer även $x = 0$.

Därmed utgör

$$\{1, \sqrt{\alpha}\}$$

en bas för L som vektorrum över F. Eftersom denna bas har två element är dimensionen av L som vektorrum över F lika med 2. Därför är graden av kroppsutvidgningen

$$[L : F] = 2.$$

$\square$

Resonemanget anknyter till Nicklasson och Zickerts framställning av kvadratiska kroppsutvidgningar, där elementen i $K(\sqrt{\alpha})$ skrivs på formen $x + y\sqrt{\alpha}$, med $x, y \in K$ [6].

Sats 7. *Antag att alla redan konstruerade punkters koordinater ligger i en kropp $F \subseteq \mathbb{R}$. Om en ny punkt konstrueras som skärningspunkt mellan två redan konstruerade linjer eller cirklar, så ligger den nya punktens koordinater antingen i F eller i en kropp av formen $F(\sqrt{\alpha})$ för något $\alpha \in F$.*

Bevis. Vi använder att en linje kan skrivas på formen

$$ax + by = c$$

och att en cirkel kan skrivas på formen

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2.$$

Om en linje går genom två punkter vars koordinater ligger i F, kan linjens ekvation väljas så att koefficienterna ligger i F. Om punkterna är (x_0, y_0) och (x_1, y_1), med $x_1 \neq x_0$, ges linjen av

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0).$$

Eftersom F är en kropp ligger kvoten

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

i F, och därmed kan linjens koefficienter skrivas med element i F. Om $x_1 = x_0$ är linjen vertikal och har ekvationen

$$x = x_0,$$

vilket också har koefficienter i F.

På motsvarande sätt kan en cirkel som konstrueras från punkter med koordinater i F beskrivas med en ekvation vars koefficienter ligger i F. Om cirkeln har centrum (m, n) och går genom punkten (u, v), där alla dessa koordinater ligger i F, är

$$r^2 = (u - m)^2 + (v - n)^2.$$

Eftersom F är sluten under addition, subtraktion och multiplikation gäller då $r^2 \in F$. Cirkeln kan alltså beskrivas med ekvationen

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

med $m, n, r^2 \in F$.

Vi behandlar nu de möjliga fallen.

Först antar vi att den nya punkten är skärningen mellan två linjer

$$ax + by = c \quad \text{och} \quad dx + ey = f,$$

där $a, b, c, d, e, f \in F$. Att bestämma skärningspunkten innebär att lösa ett linjärt ekvationssystem. Lösningen fås genom addition, subtraktion, multiplikation och division av element i F. Eftersom F är en kropp ligger lösningens koordinater därför i F.

Antag sedan att den nya punkten är skärningen mellan en linje och en cirkel. Linjen kan parametriseras som

$$(x, y) = (x_0, y_0) + t(a, b),$$

där $x_0, y_0, a, b \in F$ och $t \in \mathbb{R}$. Om denna linje sätts in i cirkelns ekvation

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2,$$

med $m, n, r^2 \in F$, får vi

$$(x_0 + ta - m)^2 + (y_0 + tb - n)^2 = r^2.$$

Detta är en andragradsekvation i parametern t med koefficienter i F. Lösningen av en sådan ekvation kan skrivas med hjälp av de fyra räknesätten och en kvadratrot av diskriminanten. Eftersom diskriminanten ligger i F, ligger lösningen t antingen i F eller i en kropp av formen $F(\sqrt{\alpha})$ för något $\alpha \in F$. Därför ligger även

$$x = x_0 + ta \quad \text{och} \quad y = y_0 + tb$$

i samma kropp.

Slutligen antar vi att den nya punkten är skärningen mellan två cirklar

$$(x - m_1)^2 + (y - n_1)^2 = r_1^2$$

och

$$(x - m_2)^2 + (y - n_2)^2 = r_2^2,$$

där alla koefficienter ligger i F. Genom att subtrahera de två ekvationerna försvinner termerna x^2 och y^2. Kvar blir en linjär ekvation i x och y med koefficienter i F. Problemet reduceras därmed till skärningen mellan en linje och en cirkel, vilket behandlades ovan.

I samtliga fall ligger den nya punktens koordinater alltså antingen i F eller i en kropp av formen $F(\sqrt{\alpha})$ för något $\alpha \in F$. $\square$

Resonemanget sammanfattar Nicklasson och Zickerts analys av skärningspunkter mellan linjer och cirklar och hur dessa leder till kvadratiska kroppsutvidgningar [6].

5.5 Konstruerbara tal och kvadratiska utvidgningar

Som tidigare visats är mängden K av konstruerbara tal sluten under de fyra räknesätten samt kvadratrotsutdragning. I varje steg av en konstruktion utgår man från tal som redan är konstruerade och bildar nya tal genom addition, subtraktion, multiplikation, division eller kvadratrotsutdragning. På så sätt växer mängden av tillgängliga tal steg för steg, och denna process kan beskrivas som att man successivt utvidgar den kropp man arbetar i.

Sats 8. *Om ett reellt tal x är konstruerbart med linjal och passare, så finns en följd av kroppar*

$$\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n$$

sådan att $x \in K_n$, och för varje i gäller att antingen $K_i = K_{i-1}$ eller att K_i är en kvadratisk kroppsutvidgning av K_{i-1}.

Bevis. Antag att x är ett konstruerbart reellt tal. Då kan punkten $(x, 0)$ konstrueras med linjal och passare i ett ändligt antal steg, med utgångspunkt i punkterna $(0, 0)$ och $(1, 0)$.

Vi börjar med kroppen

$$K_0 = \mathbb{Q},$$

som är den grundkropp vi utgår från i den algebraiska beskrivningen av konstruktionerna. I en linjal- och passarkonstruktion uppstår varje ny punkt som en skärningspunkt mellan två redan konstruerade objekt. Dessa objekt är antingen två linjer, en linje och en cirkel eller två cirklar. Antag nu att alla punkter som hittills har konstruerats har koordinater i en kropp K_{i-1}. Enligt Sats 7 gäller då att koordinaterna för nästa konstruerade punkt antingen redan ligger i K_{i-1} eller i en kvadratisk kroppsutvidgning av K_{i-1}.

Om de nya koordinaterna redan ligger i K_{i-1} sätter vi

$$K_i = K_{i-1}.$$

Om koordinaterna inte redan ligger i K_{i-1}, så ligger de enligt Sats 7 i någon kvadratisk kroppsutvidgning av K_{i-1}. Vi betecknar denna nya kroppen med K_i.

Eftersom konstruktionen av $(x, 0)$ består av ändligt många steg får vi på detta sätt en ändlig kedja av kroppar

$$\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n$$

sådan att varje steg antingen lämnar kroppen oförändrad eller ger en kvadratisk kroppsutvidgning. Eftersom x är ett konstruerbart tal är, enligt definitionen av konstruerbara tal punkten $(x, 0)$ bland de konstruerade punkterna. Enligt konstruktionen av kroppskedjan ligger koordinaterna för varje konstruerad punkt i den sista kroppen K_n. Alltså gäller

$$x \in K_n.$$

Alltså finns en sådan följd av kroppar, och satsen är bevisad. □

Resonemanget följer Nicklasson och Zickerts beskrivning av konstruerbara tal genom en kedja av kvadratiska kroppsutvidgningar [6].

För att beskriva hur grader beter sig i en kedja av kroppsutvidgningar använder vi följande standardresultat, ofta kallat tornlagen för ändliga kroppsutvidgningar [3].

Sats 9. *Låt $F \subseteq L \subseteq M$ vara kroppar. Om L har ändlig grad över F och M har ändlig grad över L, så gäller*

$$[M : F] = [M : L][L : F].$$

Bevis. Detta är tornlagen för grader av ändliga kroppsutvidgningar. Den säger att graden från F till M kan beräknas genom att först gå från F till L och därefter från L till M.

Därför multipliceras graderna:

$$[M : F] = [M : L][L : F].$$

$\square$

Följdsats 1. *Om x är ett konstruerbart algebraiskt tal, så är graden $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$ en tvåpotens.*

Bevis. Om x är konstruerbart, så följer det av Sats 8, som bygger på Nicklasson och Zickerts beskrivning av konstruerbara tal med hjälp av kvadratiska kroppsutvidgningar [6], att det finns en följd av kroppar

$$\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq \cdots \subseteq K_n$$

sådan att $x \in K_n$, och där varje steg antingen lämnar kroppen oförändrad eller ger en kvadratisk kroppsutvidgning.

För varje i gäller därför att

$$[K_i : K_{i-1}] \in \{1, 2\}.$$

Genom att använda tornlagen för ändliga kroppsutvidgningar, se Sats 9 och [3], får man då

$$[K_n : \mathbb{Q}] = [K_n : K_{n-1}] \cdots [K_1 : K_0].$$

Eftersom varje faktor är 1 eller 2, följer att

$$[K_n : \mathbb{Q}] = 2^m$$

för något heltal $m \geq 0$.

Dessutom gäller att

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(x) \subseteq K_n.$$

Genom att använda tornlagen på denna kedja får man därför

$$[K_n : \mathbb{Q}] = [K_n : \mathbb{Q}(x)][\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}].$$

Alltså delar $[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$ talet $[K_n : \mathbb{Q}]$. Eftersom $[K_n : \mathbb{Q}]$ är en tvåpotens, måste även

$$[\mathbb{Q}(x) : \mathbb{Q}]$$

vara en tvåpotens. $\square$

Detta ger ett nödvändigt villkor för konstruerbarhet. I synnerhet kan algebraiska tal av grad 3 över $\mathbb{Q}$ inte vara konstruerbara. Detta kommer att användas i bevisen av kubens fördubbling och vinkelns tredelning. För kvadraturen av cirkeln behövs dessutom begreppet transcendenta tal, eftersom argumentet där bygger på att talet π inte är algebraiskt över $\mathbb{Q}$. Därför introduceras algebraiska och transcendenta tal i nästa avsnitt.

5.6 Algebraiska och transcendenta tal

Ett algebraiskt tal definieras som ett reellt tal som uppfyller en polynomekvation där alla koefficienter är heltal. Med andra ord finns det ett polynom med heltalskoefficienter som har talet som en rot. Irrationella tal kan i vissa fall vara algebraiska, men det gäller inte alla. Däremot är varje heltal och varje rationellt tal alltid algebraiskt. Exempelvis är $\sqrt{2}$ ett algebraiskt tal, eftersom det uppfyller ekvationen $x^2 - 2 = 0$. Talet är samtidigt irrationellt, eftersom det inte kan skrivas som en kvot mellan två heltal.

De tal som inte kan uttryckas som rötter till någon sådan polynomekvation kallas transcendenta tal. De ligger alltså utanför mängden av algebraiska tal. Några av de mest välkända exemplen på transcendenta tal är e och π. [5]

6 De tre klassiska problemen

6.1 Kubens fördubbling

Sats 10. *Med linjal och passare är det inte möjligt att, från en given kubs sidlängd, konstruera sidlängden hos en kub vars volym är dubbelt så stor som den ursprungliga kubens.*

Bevis. För att undersöka detta översätter vi först problemet från geometri till algebra. Antag att den givna kuben har sidlängd a. Då är dess volym lika med a^3. Om en ny kub ska ha dubbelt så stor volym och dess sidlängd betecknas med x, måste därför sambandet gälla:

$$x = a\sqrt[3]{2}.$$

Detta visar att problemet i grunden handlar om talet $\sqrt[3]{2}$. Eftersom längden a redan är given från början, reduceras frågan till om faktorn $\sqrt[3]{2}$ är konstruerbar. Därför kan man anta att $a = 1$. Då blir frågan: *går det att konstruera talet* $\sqrt[3]{2}$?

För att avgöra om $\sqrt[3]{2}$ är konstruerbart betraktar vi polynomet

$$p(x) = x^3 - 2.$$

Talet $\sqrt[3]{2}$ är en rot till detta polynom. Enligt satsen om rationella rötter kan en rationell rot till $p(x)$ endast vara någon av

$$\pm 1, \ \pm 2.$$

Vi kontrollerar dessa:

$$p(1) = -1, \quad p(-1) = -3, \quad p(2) = 6, \quad p(-2) = -10.$$

Ingen av dessa är alltså en rot till polynomet. Därmed har $p(x) = x^3 - 2$ ingen rationell rot.

Nu använder vi följande standardresultat: om ett tal α är rot till ett tredjegradspolynom med rationella koefficienter och polynomet saknar rationella rötter, så gäller

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3$$

[3]. Eftersom $\sqrt[3]{2}$ är rot till tredjegradspolynomet $x^3 - 2$, och eftersom detta polynom saknar rationella rötter, får vi därför

$$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) : \mathbb{Q}] = 3.$$

Enligt Följdsats 1 måste varje konstruerbart algebraiskt tal ha grad över $\mathbb{Q}$ som är en tvåpotens. Men 3 är inte en tvåpotens. Därför kan $\sqrt[3]{2}$ inte vara konstruerbart.

Vi drar därför slutsatsen att det inte är möjligt att med linjal och passare konstruera sidan i en kub vars volym är dubbelt så stor som volymen av en given kub. Alltså är kubens fördubbling omöjlig. [6] □

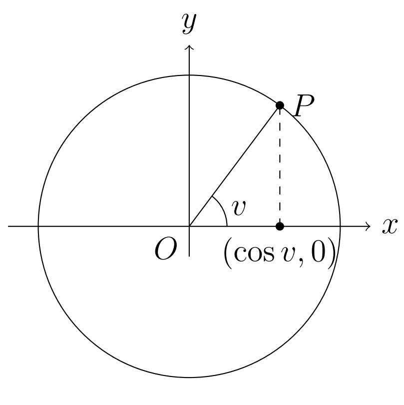
6.2 Tredelning av vinkeln

För att formulera problemet algebraiskt behöver vi först precisera vad det innebär att en vinkel är konstruerbar.

Definition 7. *En vinkel v kallas konstruerbar om det finns tre konstruerbara punkter a, b, c sådana att vinkeln $\angle abc$ är lika med v.* [6]

Följdsats 2. *En vinkel v är konstruerbar om och endast om $\cos v$ är ett konstruerbart tal.* [6]

Bevis. Antag först att $\cos v$ är konstruerbart. Då är punkten $(\cos v, 0)$ konstruerbar. Vi använder här att man med linjal och passare kan konstruera en linje genom en given punkt som är vinkelrät mot en given linje. Därför kan vi konstruera linjen genom $(\cos v, 0)$ som är vinkelrät mot x-axeln. När denna linje skär enhetscirkeln erhålls en konstruerbar punkt som bestämmer vinkeln v. Alltså är v konstruerbar. Se figur 6.



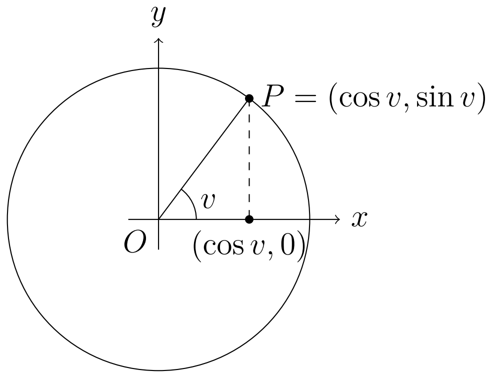
Figur 6: Om $\cos v$ är konstruerbart, kan punkten $(\cos v, 0)$ konstrueras på x-axeln. En vinkelrät linje genom denna punkt skär enhetscirkeln i en punkt P, vilket bestämmer vinkeln v.

Antag omvänt att v är konstruerbar. Då kan vinkeln flyttas till ett koordinatsystem så att dess spets ligger i origo. Låt P vara den konstruerbara punkt där vinkelns ena sida skär enhetscirkeln. Då kan vi skriva

$$P = (\cos v, \sin v).$$

Med hjälp av samma konstruktion av en vinkelrät linje som ovan kan vi konstruera linjen genom P som är vinkelrät mot x-axeln. Denna linje skär x-axeln i punkten $(\cos v, 0)$.

Alltså är punkten $(\cos v, 0)$ konstruerbar, och därmed är $\cos v$ ett konstruerbart tal. Se figur 7.



Figur 7: Om vinkeln v är konstruerbar, kan dess skärningspunkt P med enhetscirkeln konstrueras. Projektionen av P på x-axeln ger punkten $(\cos v, 0)$, vilket visar att $\cos v$ är konstruerbart.

[6] $\square$

För att visa att vinkelns tredelning är omöjlig i allmänhet räcker det att ange ett motexempel. Med detta menas att det inte finns någon linjal- och passarkonstruktion som kan tredela varje given vinkel. Detta utesluter inte att vissa särskilda vinklar kan tredelas. Exempelvis kan en rät vinkel tredelas, eftersom

$$\frac{90^\circ}{3} = 30^\circ.$$

Vinkeln 30° är konstruerbar. Först konstrueras en vinkel på 60° med hjälp av en liksidig triangel, och därefter halveras den med hjälp av Sats 4. För att visa att det inte finns någon allmän metod betraktar vi därför istället vinkeln 60°. Vi kommer att visa att denna vinkel inte kan tredelas med linjal och passare.

Sats 11. *Vinkeln 60° går inte att tredelas med hjälp av linjal och passare.*

Bevis. Om det vore möjligt att tredela vinkeln 60°, skulle det vara möjligt att konstruera vinkeln 20°. Då skulle även talet $\cos 20^\circ$ vara konstruerbart enligt följdsats 2.

Vi använder trippelvinkelformeln

$$\cos(3\theta) = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

Sätt $\theta = 20^\circ$. Eftersom $3\theta = 60^\circ$ och

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2},$$

fås

$$4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ = \frac{1}{2}.$$

Om vi sätter

$$x = \cos 20^\circ$$

och multiplicerar med 2, erhålls ekvationen

$$8x^3 - 6x - 1 = 0.$$

Vi betraktar alltså polynomet

$$p(x) = 8x^3 - 6x - 1.$$

Enligt satsen om rationella rötter kan en rationell rot endast vara någon av

$$\pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{4}, \pm\frac{1}{8}.$$

Ingen av dessa rationella tal är en rot till polynomet. Polynomet $p(x)$ har alltså ingen rationell rot.

Nu använder vi följande specialfall: om ett tal α är rot till ett tredjegradspolynom med rationella koefficienter och polynomet saknar rationella rötter, så gäller

$$[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}] = 3.$$

Eftersom $\cos 20^\circ$ är en rot till tredjegradspolynomet

$$p(x) = 8x^3 - 6x - 1$$

och detta polynom saknar rationella rötter, följer därför att

$$[\mathbb{Q}(\cos 20^\circ) : \mathbb{Q}] = 3.$$

Men varje konstruerbart algebraiskt tal måste enligt följdsats 1 ha grad som är en tvåpotens. Eftersom 3 inte är en tvåpotens följer att $\cos 20^\circ$ inte är konstruerbart. Därmed kan vinkeln 20° inte konstrueras, och alltså kan vinkeln 60° inte tredelas med linjal och passare. Alltså är vinkelns tredelning i allmänhet omöjlig. [6] □

6.3 Kvadraturen av cirkeln

Sats 12. *Det är omöjligt att med hjälp av linjal och passare konstruera en kvadrat med samma area som en given cirkel.*

Bevis. Betrakta en cirkel med radie 1. Dess area är då

$$A = \pi.$$

Om det vore möjligt att med linjal och passare konstruera en kvadrat med samma area, och om kvadratens sida betecknas med s, måste

$$s^2 = \pi.$$

Alltså skulle man behöva konstruera talet

$$s = \sqrt{\pi}.$$

Enligt Sats 8 tillhör varje konstruerbart tal en kropp som erhålls från $\mathbb{Q}$ genom en ändlig följd av kvadratiska kroppsutvidgningar. I synnerhet följer att varje konstruerbart tal är algebraiskt över $\mathbb{Q}$. Det sägs att kvadraturen av cirkeln kräver konstruktion av $\sqrt{\pi}$, och att detta är omöjligt eftersom π är transcendent [2], se avsnittet om algebraiska och transcendenta tal. Eftersom transcendenta tal inte är algebraiska, kan π inte tillhöra någon kropp som erhålls från $\mathbb{Q}$ genom ändliga kvadratiska kroppsutvidgningar. Därför kan inte π vara konstruerbart, och då kan inte heller $\sqrt{\pi}$ vara konstruerbart. Alltså är det omöjligt att med linjal och passare konstruera en kvadrat med samma area som en given cirkel. Kvadraturen av cirkeln är alltså omöjlig. □

Redogörelse för användning av AI

Under arbetet med uppsatsen har AI-baserade verktyg använts som ett stöd i vissa delar av arbetsprocessen. Verktygen har inte använts för att ersätta den egna bearbetningen av ämnet, utan som ett hjälpmedel för att förstå, formulera och strukturera innehållet på ett tydligare sätt. En viktig del av användningen har varit kopplad till förståelsen av det matematiska innehållet. Eftersom uppsatsen behandlar både klassisk euklidisk geometri och modern algebra, bland annat konstruerbara tal och kroppsutvidgningar, har AI använts för att få förklaringar av begrepp, satser och bevis som varit svåra att tolka direkt från källorna. Detta har särskilt varit aktuellt vid arbete med engelskspråkigt material, där AI har fungerat som stöd för att reda ut innebörden av vissa formuleringar och matematiska resonemang. AI har också använts i den språkliga bearbetningen av uppsatsen. Det har exempelvis handlat om att göra vissa avsnitt mer begripliga, förbättra övergångar mellan olika delar och hitta tydligare formuleringar för matematiska resonemang. I dessa fall har AI fungerat som ett stöd i redigeringsarbetet, medan det slutliga innehållet har granskats, anpassats och bearbetats av mig. Därutöver har AI använts som praktiskt stöd vid arbetet i LaTeX. Det gäller bland annat hjälp med matematiska notationer, kodstruktur och framställning av figurer i TikZ, särskilt i samband med de geometriska konstruktionerna. Sammanfattningsvis har AI använts som ett kompletterande verktyg i arbetet med uppsatsen. Ansvaret för urvalet av innehåll, tolkningen av källorna, de matematiska resonemangen och den slutliga texten ligger helt hos mig som författare.

Referenser

[1] Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet. (2006). *Euklidisk geometri.* Hämtad 11 maj 2026 från

https://utb.math.chalmers.se/Math/Grundutb/GU/LMA100/V06-2B/geom.pdf

[2] Dummit, D. S. (2020). *Classical Constructions + Splitting Fields.* Northeastern University. Algebra 1, Lecture 7. Hämtad 11 maj 2026 från

https://dummit.cos.northeastern.edu/teaching_fa20_5111/5111_lecture_07_constructions_splitting_fields.pdf

[3] Dummit, D. S. (2020). Fields and Galois Theory (part 2): Fields and Field Extensions. Northeastern University. Hämtad 11 maj 2026 från

https://dummit.cos.northeastern.edu/teaching_fa20_5111/fieldthy_2_fields_and_field_extensions_v2.20.pdf

[4] Euclid. (2008). *Euclid's Elements of Geometry.* Översatt av Richard Fitzpatrick. Hämtad 11 maj 2026 från

http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/bookI/bookI.html

[5] Filaseta, M. *Math 785 Notes 8.* University of South Carolina. Hämtad 11 maj 2026 från

http://people.math.sc.edu/filaseta/gradcourses/Math785/Math785Notes8.pdf

[6] Nicklasson, L. & Zickert, G. (2017). *Geometriska konstruktioner.* Institutionen för matematik på KTH och Stockholms universitet

https://www.math-stockholm.se/polopoly_fs/1.751434.1550156055!/komp.pdf