SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Picks Sats

av

Gülhan Sariismailoglu

2026 - No K3

Picks Sats

Gülhan Sariismailoglu

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Gregory Arone

2026

Abstract

Pick's Theorem is a classical result in geometry that provides a simple and elegant formula for calculating the area of polygons whose vertices lie on an integer lattice. Despite its elementary formulation, the theorem establishes a deep connection between geometry, combinatorics, and graph theory.

In this thesis, we present Pick's Theorem and illustrate its use through a series of concrete examples involving both regular and irregular lattice polygons. Two different proofs of the theorem are given. The first is a constructive proof based on induction and the additivity of area, while the second relies on Euler's formula for planar graphs and triangulations of lattice polygons.

Finally, we investigate a generalization of Pick's Theorem to polygons with holes. It is shown how the original formula must be modified depending on the number of holes, and how the classical version of Pick's Theorem appears as a special case. The results demonstrate that Pick's Theorem is a powerful and versatile tool within lattice geometry.

Abstrakt

Picks sats är ett klassiskt geometriskt resultat som ger en enkel formel för att beräkna arean av polygoner med hörn i ett heltalsgitter. Trots sin enkla formulering visar satsen ett tydligt samband mellan geometri, kombinatorik och grafteori.

I denna uppsats presenteras Picks sats och dess användning illustreras genom flera exempel på både regelbundna och oregelbundna gitterpolygoner. Två olika bevis för satsen ges. Det första är ett konstruktivt bevis baserat på induktion och additivitet, medan det andra bygger på Eulers formel för planära grafer och triangulering av polygoner.

Avslutningsvis undersöks en generalisering av Picks sats till polygoner med hål. Det visas hur formeln modifieras beroende på antalet hål, samt hur den ursprungliga satsen framträder som ett specialfall. Sammantaget visar resultaten hur Picks sats utgör ett kraftfullt och mångsidigt verktyg inom gittergeometri.

Förord

Jag vill härmed rikta ett varmt tack till min handledare, Gregory Arone, för hans stöd och vägledning under arbetets gång samt för förslaget på ämnet.

AI-statement

Jag har använt ChatGPT som stöd för att identifiera grammatiska fel i texten samt för vägledning kring användning av LaTeX-format och struktur, och i vissa fall för översättning.

Innehållsförteckning

1 Inledning

1.1 Bakgrund

Inom matematiken finns det många enkla men samtidigt kraftfulla samband. Ett av dessa är Picks sats, som gör det möjligt att beräkna arean av en polygon vars hörn ligger i ett heltalsgitter, det vill säga på punkter med heltalskoordinater.

Satsen publicerades första gången år 1899 av den österrikiske matematikern Georg Alexander Pick (1859–1942). Trots att satsen är mer än hundra år gammal är den relativt okänd. Picks sats fick först större uppmärksamhet år 1969, sjuttio år efter att Pick publicerat den, när den omnämndes i den polske matematikern Hugo Steinhaus (1887-1972) bok Mathematical Snapshots.

Skönheten i Picks sats ligger i dess enkelhet. Vanligtvis krävs relativt avancerade metoder för att beräkna arean av en oregelbunden polygon, men med Picks sats räcker det att räkna antalet gitterpunkter som ligger inuti polygonen samt på dess rand. Resultatet är en förvånansvärt elegant relation som binder samman geometri och kombinatorik.

I undervisningen har intresset för geometri i gitter ökat under senare år. Denna utveckling gör det extra motiverat att på nytt undersöka modeller och metoder som bygger på så kallade gitterpolygoner och på det som ofta kallas Picks plan.

1.2 Syfte och disposition

Syftet med denna uppsats är att presentera och förklara Picks sats, visa exempel på dess användning, samt diskutera dess betydelse och tillämpningar.

Uppsatsen inleds med grundläggande definitioner och begrepp som behövs för att förstå satsen. Därefter följer en stegvis genomgång av beviset, illustrerat med exempel. Avslutningsvis diskuteras generaliseringar och relaterade resultat som visar hur satsen passar in i ett större matematiskt sammanhang.

2 Grundläggande begrepp

Innan vi påbörjar formuleringen och beviset av Picks sats introducerar vi ett antal grundläggande begrepp som används i denna uppsats. Vi inför dem för att säkerställa att den efterföljande framställningen är välgrundad, eftersom vissa av begreppen kan vara relativt obekanta och kräver en exakt matematiskt formulerad innebörd.

Definition 2.1. Ett *gitter (eng. lattice)* i planet är mängden av alla punkter $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ där både x och y är heltal.

Definition 2.2. En *gitterpunkt (eng. lattice point)* i planet $\mathbb{R}^2$ är en punkt vars koordinater är heltal.

Definition 2.3. En *polygon* är en plan, sluten figur i $\mathbb{R}^2$ som består av ett ändligt antal linjesegment som möts parvis i sina ändpunkter.

Definition 2.4. En *gitterpolygon (eng. lattice polygon)* är en polygon där samtliga hörnpunkter är gitterpunkter.

Definition 2.5. En *inre gitterpunkt (eng. interior (lattice) point)* i en polygon är en gitterpunkt som ligger strikt innanför polygonens gränser, vilka bestäms av dess rand.

Definition 2.6. En *randpunkt (eng. boundary (lattice) point)* i en polygon är en gitterpunkt som ligger på någon av polygonens rand eller hörn.

Definition 2.7. En *hörnpunkt* är en punkt där två sidor i en polygon möts.

Definition 2.8. En *enkel polygon (eng. simple polygon)* är en polygon vars sidor endast möts i sina ändpunkter, inte korsar varandra och som inte har några hål. Det är ett välkänt faktum att en enkel polygon delar planet i två skilda områden: ett inre och ett yttre. Detta är ett specialfall av Jordans kurvsats. Ett elementärt bevis för Jordans kurvsats för polygoner finns i boken *What Is Mathematics?* av R. Courant och H. Robbins, Oxford University Press, 1941.

Definition 2.9. En *polygon med hål (eng. polygon with hole)* är en polygon bestående av en yttre enkel polygon och en eller flera inneslutna polygoner (hål) som inte överlappar varandra.

3 Picks sats

Det finns många sätt att beräkna arean av geometriska figurer, men Picks sats erbjuder ett elegant och enkelt verktyg att beräkna arean av en enkel gitterpolygon.

Picks sats säger att arean av en enkel polygon – vars hörn ligger på gitterpunkter i $\mathbb{Z}^2$ – är lika med antalet gitterpunkter i polygonens inre, plus hälften av antalet gitterpunkter på dess rand, minus 1. Låt oss nu formulera satsen.

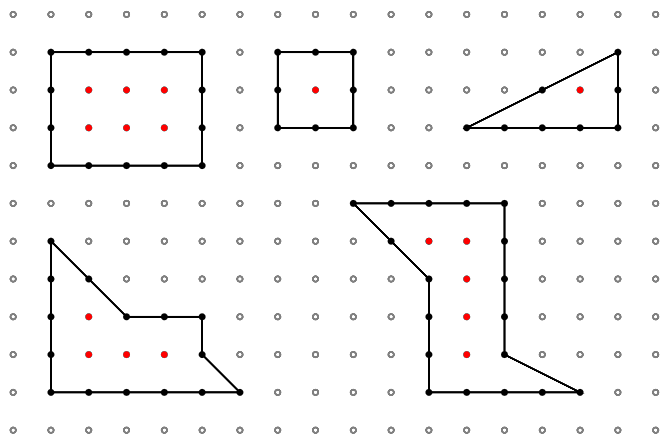
Sats 3.1. (Picks sats). Låt P vara en enkel gitterpolygon, och låt $B(P)$ vara antalet gitterpunkter på polygonens rand, och $I(P)$ antalet gitterpunkter som ligger strikt inuti polygonen. Då gäller

$$A(P) = I(P) + \frac{B(P)}{2} - 1,$$

där $A(P)$ betecknar polygonens area.

Detta innebär att man kan bestämma arean utan att dela upp polygonen i trianglar eller använda sidlängder och höjder, vilket gör metoden särskilt användbar för oregelbundna polygoner, förutsatt att polygonen är enkel.

Vi börjar med några enkla exempel och beräknar arean av olika gitterpolygoner för att tydligt illustrera hur Picks sats kan tillämpas i praktiken.



Figur 1: Exempel på olika gitterpolygoner

Arean av en fyrsidig regelbunden polygon beräknas genom att multiplicera basen med höjden. Och arean av en rätvinklig triangel beräknas genom att dela produkten av basen och höjden med 2. Vi börjar med att beräkna arean av dessa figurer med de välkända formlerna.

$$A_{rektangel} = basen \times höjden = 4 \times 3 = 12$$

$$A_{kvadrat} = basen \times höjden = 2 \times 2 = 4$$

$$A_{triangel} = \frac{basen \times höjden}{2} = \frac{4 \times 2}{2} = 4$$

Om vi nu låter I beteckna antalet inre gitterpunkter, B antalet gitterpunkter på randen och notationen $A(P)$ arean av polygonen P. Då får vi

$$I = 6, \quad B = 14 \quad \Longrightarrow \quad A_{rektangel} = I + \frac{B}{2} - 1 = 6 + \frac{14}{2} - 1 = 12$$

$$I = 1, \quad B = 8 \quad \Longrightarrow \quad A_{kvadrat} = I + \frac{B}{2} - 1 = 1 + \frac{8}{2} - 1 = 4$$

$$I = 1, \quad B = 8 \quad \Longrightarrow \quad A_{triangel} = I + \frac{B}{2} - 1 = 1 + \frac{8}{2} - 1 = 4$$

Nu ska vi försöka beräkna arean av de två oregelbundna polygonerna. Det finns inga kända areaformler för dessa figurer. Därför ska vi dela upp dem till ett godtyckligt antal rätvinkliga trianglar, kvadrater och rektanglar.

Den första oregelbundna polygonen kan delas upp till 2 rätvinkliga trianglar med måtten 2×2 respektive 1×1 enheter samt en rektangel med måttet 4×2 enheter. Då får vi arean lika med

$$A_{polygon_1} = 10.5.$$

$$I = 4, \quad B = 15 \quad \Longrightarrow \quad A_{polygon_1} = I + \frac{B}{2} - 1 = 4 + \frac{15}{2} - 1 = 10.5$$

Arean av den andra oregelbundna polygonen kan också beräknas på samma sätt. Det vill säga att 2 rätvinkliga trianglar med måtten 2×2 respektive 1×2 enheter och en rektangel med måttet 2×5 enheter. Alltså blir arean av denna polygon

$$A_{polygon_2} = 13.$$

$$I = 5, \quad B = 18 \quad \Longrightarrow \quad A_{polygon_2} = I + \frac{B}{2} - 1 = 5 + \frac{18}{2} - 1 = 13$$

Beräkningarna visar att Picks sats i samtliga exempel ger samma area som den som erhålls genom direkt geometrisk beräkning.

4 Bevis av Picks sats med induktion

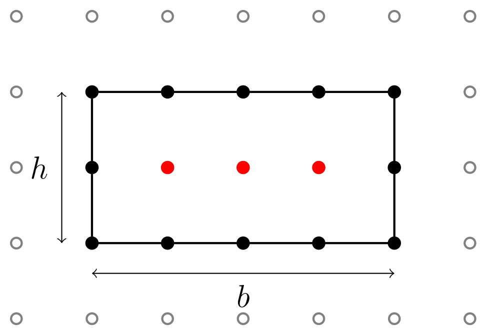
För att bevisa Picks sats börjar vi med att studera enkla fall. När vi har introducerat satsen för dessa grundläggande fall kan argumentet utvidgas till godtyckliga polygoner. Generellt kommer vi att visa att när Picks sats tillämpas på en given figur, ger den samma formel för arean som man får med de vanliga geometriska metoderna.

4.1 Picks sats för rektanglar

Vi börjar med rektanglar, där sidorna är parallella längs gitterlinjerna. Låt rektangeln ha bas b och höjd h, så att arean är

$$A = b \cdot h.$$

Anta nu att polygonen R är en godtycklig $b \times h$ rektangel, där b respektive h är antalet gitterpunkter längs basen och höjden. Randpunkter får vi genom att bestämma figurens omkrets. Antalet inre punkter bestäms genom att multiplicera basens längd minus 1 med höjdens längd minus 1, eftersom vi



Figur 2: En rektangel med bas b och höjd h

måste utesluta hörnpunkterna och bara räkna punkterna som ligger innanför rektangeln. Alltså får vi

$$I_R = (b-1)(h-1), \quad B_R = 2b + 2h.$$

Därför blir polygonens area enligt Picks sats

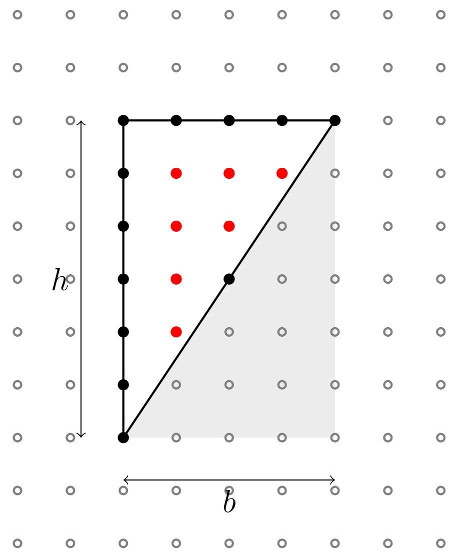
$$A(R) = I_R + \frac{B_R}{2} - 1 = (b-1)(h-1) + \frac{2b+2h}{2} - 1$$

$$= (bh - b - h + 1) + (b + h) - 1 = bh,$$

vilket stämmer med den vanliga formeln för arean av en rektangel.

4.2 Picks sats för rätvinkliga trianglar

Vi ska nu bevisa att Picks sats kan tillämpas på rätvinkliga trianglar, där de två kateterna ligger parallellt med gitterlinjerna. En rätvinklig triangel kan ses som ett specialfall av en rektangel, där vi lägger till en diagonal.



Figur 3: Rätvinklig triangel med basen b och höjden h.

Återigen vill vi hitta ett samband mellan inre punkter och randpunkter som kan visa en generaliserad formel för triangelns area. Arean av en rätvinklig triangel är produkten av dess kateter dividerat med 2, det vill säga hälften av arean av $b \times h$ - rektangeln. Därför blir arean

$$A(T) = \frac{bh}{2}.$$

Låt T vara en godtycklig rätvinklig triangel. Det är enkelt att räkna antalet gitterpunkter längs triangelns kateter, men att räkna gitterpunkter längs hypotenusan kan vara mer komplicerat, eftersom hypotenusan kan passera genom några, många, eller inga gitterpunkter.

Vi ser dock att antalet punkter på diagonalen inte påverkar slutsatsen. Låt $B_h = d$ vara antalet gitterpunkter på hypotenusan, exklusive de två hörnpunkterna och $B_k = b + h + 1$ vara antalet gitterpunkter på kateterna. Här räknas hörnpunkten vid den räta vinkeln endast en gång, eftersom den delas av båda kateterna. Antalet randpunkter för triangeln T är summan av randpunkterna längs kateterna och randpunkterna på hypotenusan. Då blir antalet randpunkter

$$B_T = B_k + B_h = b + h + 1 + d,$$

Som vi såg i tidigare avsnitt har $b \times h$ - rektangeln $(b-1)(h-1)$ inre punkter. Om vi subtraherar de d punkterna på hypotenusan delas de återstående inre punkterna jämnt mellan de två rätvinkliga trianglarna som bildats. Därför har triangeln T

$$I_T = \frac{(b-1)(h-1)-d}{2}$$

inre punkter.

Tillämpar vi Picks sats för denna rätvinkliga triangel får vi:

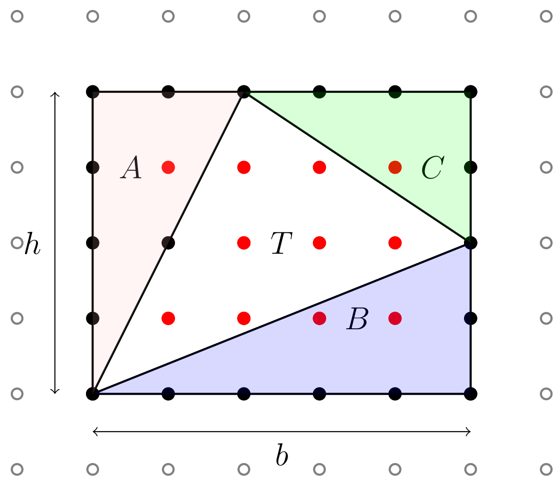
$$A(T) = I_T + \frac{B_T}{2} - 1 = \frac{(b-1)(h-1)-d}{2} + \frac{b+h+1+d}{2} - 1 = \frac{bh}{2}.$$

Detta är precis vad vi förväntade oss, och därmed kan Picks sats tillämpas på rätvinkliga trianglar.

4.3 Picks sats för godtyckliga trianglar

Vi betraktar nu godtyckliga trianglar och visar att Picks sats även gäller för godtyckliga trianglar. Eftersom vi redan vet att satsen gäller för rektanglar och rätvinkliga trianglar, kan vi utvidga resonemangen till godtyckliga trianglar.

Vi betraktar en godtycklig triangel T som kan utökas till en rektangel genom att addera några rätvinkliga trianglar. I detta fall krävs tre rätvinkliga trianglar: A, B och C.



Figur 4: En godtycklig triangel T som kan utökas till en rektangel genom att lägga till några rätvinkliga trianglar.

Låt triangeln A ha I_A inre punkter och B_A randpunkter; låt triangeln B ha I_B inre punkter och B_B randpunkter; och låt triangeln C ha I_C inre punkter och B_C randpunkter. Låt vidare rektangeln R ha I_R inre punkter och B_R randpunkter. Målet är att visa att triangelns area uppfyller

$$A(T) = I_T + \frac{B_T}{2} - 1.$$

Eftersom vi vet att Picks sats gäller för rektanglar och rätvinkliga trianglar, har vi

$$A(A) = I_A + \frac{B_A}{2} - 1, \qquad A(B) = I_B + \frac{B_B}{2} - 1, \qquad A(C) = I_C + \frac{B_C}{2} - 1, \qquad A(R) = I_R + \frac{B_R}{2} - 1.$$

Rektangelns area är summan av areorna för dess delar, alltså

$$A(R) = A(A) + A(B) + A(C) + A(T).$$

Löser vi ut $A(T)$ får vi

$$A(T) = A(R) - A(A) - A(B) - A(C).$$

Detta ger ekvationen

$$A(T) = I_R - I_A - I_B - I_C + \frac{B_R - B_A - B_B - B_C}{2} + 2. \tag{1}$$

Antag att rektangeln R är en $b \times h$ rektangel. Då är dess area $A(R) = bh$, och

$$B_R = 2b + 2h, \qquad I_R = (b-1)(h-1).$$

Eftersom rektangeln R delar sidor med trianglarna A, B och C, och eftersom alla tre sidor av triangeln T delas med dessa trianglar, får vi sambandet

$$B_R + B_T = B_A + B_B + B_C, \tag{2}$$

vilket kan skrivas om till

$$B_R = B_A + B_B + B_C - B_T. \tag{3}$$

Om vi räknar de inre punkterna i rektangeln får vi

$$I_R = I_A + I_B + I_C + I_T + (B_A + B_B + B_C - B_R) - 3. \tag{4}$$

Med andra ord utgörs rektangelns inre punkter av de inre punkterna i trianglarna A, B, C och T tillsammans med randpunkterna på triangel T, med undantag för dess tre hörn som subtraheras för att undvika dubbelräkning.

Om vi nu ersätter B_R i (4) med uttrycket från (3) erhåller vi

$$I_R = I_A + I_B + I_C + I_T + B_T - 3. \tag{5}$$

Slutligen sätter vi in uttrycken för I_R och B_R från (5) respektive (3) i ekvation (1). Efter förenkling får vi

$$A(T) = I_T + \frac{B_T}{2} - 1.$$

Detta är exakt det resultat vi önskade visa. Därmed gäller Picks sats för godtyckliga trianglar.

4.4 Picks sats för godtyckliga polygoner

Slutligen behandlar vi satsen för godtyckliga gitterpolygoner. Hittills har vi visat att Picks sats gäller för varje polygon med 3 sidor. För att slutföra beviset att Picks sats gäller för alla polygoner kommer vi nu att använda induktion på antalet sidor hos polygonen. Basfallet är $n = 3$ sidor, och vi har redan visat att Picks sats gäller för $n = 3$.

För induktionssteget antar vi att Picks sats gäller för alla polygoner med $n = 3, 4, 5, \cdots, (k-1)$ sidor. Vi måste nu visa att Picks sats gäller för polygoner med $n = k$ sidor för att slutföra induktionssteget.

Detta skulle i princip kräva en analys av ett oändligt antal fall. I stället visar vi att Picks sats är *additiv*. Detta innebär att om Picks sats gäller för två polygoner var för sig, så gäller den även för polygonen som bildas när dessa två polygoner förenas längs en gemensam diagonal.

Antag att vi har en polygon P med k sidor ($k > 3$) som kan delas upp i två mindre polygoner P_1 och P_2 med hjälp av en inre diagonal. Låt P_1 ha I_1 inre punkter och B_1 randpunkter, och låt P_2 ha I_2 inre punkter och B_2 randpunkter. Antag vidare att den gemensamma diagonalen som avgränsar P_1 och P_2 består av d gitterpunkter. Låt polygonen P ha totalt I inre punkter och B randpunkter.

Enligt Picks sats gäller

$$A(P) = A(P_1) + A(P_2) = \left(I_1 + \frac{B_1}{2} - 1\right) + \left(I_2 + \frac{B_2}{2} - 1\right).$$

Alla inre punkter i P_1 och P_2 är naturligtvis inre punkter i P. Av de d punkterna på den gemensamma diagonalen ligger två på polygonens hörnpunkt, medan de resterande $d-2$ är inre punkter i P. Alltså gäller

$$I = I_1 + I_2 + (d-2).$$

Ett liknande resonemang ger sambandet för randpunkterna. De $d-2$ inre punkterna på diagonalen har räknats dubbelt som randpunkter i P_1 respektive P_2, och dessutom räknas de två hörnpunkterna av diagonalen två gånger. Därför gäller

$$B = B_1 + B_2 - 2(d-2) - 2.$$

Om vi nu antar att Picks sats gäller för de mindre polygonerna P_1 och P_2 får vi:

$$A(P) = I + \frac{B}{2} - 1 = (I_1 + I_2 + (d-2)) + \left(\frac{B_1 + B_2 - 2(d-2) - 2}{2}\right) - 1$$

$$= (I_1 + I_2) + \left(\frac{B_1 + B_2}{2}\right) - 2 = \left(I_1 + \frac{B_1}{2} - 1\right) + \left(I_2 + \frac{B_2}{2} - 1\right)$$

$$= A(P_1) + A(P_2)$$

Alltså har vi bevisat Picks sats för den ursprungliga polygonen.

5 Bevis av Picks sats med Eulers formel

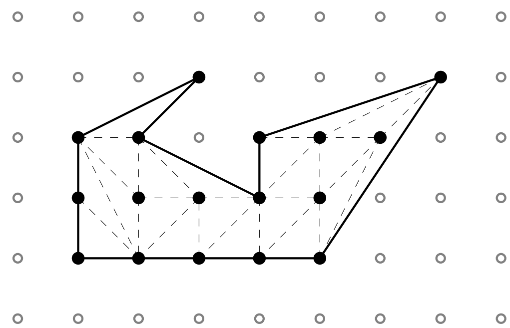
I detta avsnitt presenterar vi ett alternativt bevis av Picks sats genom att utnyttja Eulers formel för sammanhängande planära grafer.

För varje sammanhängande planär graf gäller sambandet

$$v - e + f = 2,$$

där v är antalet hörn, e antalet kanter och f antalet ytor. [2]

Varje enkel gitterpolygon kan delas upp i så kallade elementära trianglar, det vill säga trianglar vars hörn är gitterpunkter och som varken innehåller några ytterligare gitterpunkter på randen eller i sitt inre. Arean av en sådan triangel är alltid 1/2. Detta följer omedelbart från Picks sats, men eftersom vi senare använder resultatet i vårt bevis av Picks sats kan det bevisas på annat sätt; se Appendix för ett fullständigt bevis.



Figur 5: Triangulering av en enkel gitterpolygon

Vi betraktar nu en gitterpolygon P med area $A(P)$, $I(P)$ inre gitterpunkter och $B(P)$ randpunkter. Med hjälp av Eulers formel för sammanhängande planära grafer ska vi visa att

$$A(P) = I(P) + \frac{B(P)}{2} - 1.$$

Vi låter $v = I(P) + B(P)$ beteckna antalet hörn i den sammanhängande planära grafen som erhålls genom triangulering av polygonen, e antalet kanter och f antalet ytor.

Eftersom alla ytor utom den yttre utgörs av elementära trianglar, finns det $f - 1$ sådana trianglar. Varje triangel har area $\frac{1}{2}$, vilket ger

$$A(P) = \frac{1}{2}(f - 1).$$

Vi delar nu upp kanterna i två kategorier:

- e_i: inre kanter, som delas av två trianglar,
- e_b: yttre kanter, som ligger på polygonens rand.

Varje elementär triangel har tre kanter, vilket ger sambandet

$$3(f-1) = 2e_i + e_b,$$

där varje inre kant räknas två gånger medan varje yttre kant räknas en gång.

Eftersom

$$e = e_i + e_b$$

följer att

$$3(f-1) = 2e - e_b.$$

Vi använder nu Eulers formel

$$v - e + f = 2 \implies e = v + f - 2.$$

Insättning i sambandet för kanterna ger

$$3(f-1) = 2(v + f - 2) - e_b.$$

Vi utvecklar båda sidor:

$$3f - 3 = 2v + 2f - 4 - e_b.$$

Samlar termer med f på vänsterledet och övriga på högerledet:

$$3f - 2f = 2v - e_b - 4 + 3,$$

vilket ger

$$f = 2v - e_b - 1.$$

Subtraherar 1 från båda sidor:

$$f - 1 = 2v - e_b - 2.$$

Vi har tidigare konstaterat att

$$A(P) = \frac{1}{2}(f - 1).$$

Genom att sätta in uttrycket för $f - 1$ erhålls

$$A(P) = \frac{1}{2}\Big(2v - e_b - 2\Big).$$

Slutligen använder vi att $v = I(P) + B(P)$ samt att antalet yttre kanter e_b är lika med antalet randpunkter $B(P)$. Eftersom trianguleringen använder samtliga randpunkter som hörn och inga randsegment innehåller ytterligare gitterpunkter. Därmed tillhör varje randpunkt exakt en yttre kant. Detta ger

$$A(P) = \frac{1}{2}\Big(2(I(P) + B(P)) - B(P) - 2\Big).$$

Efter förenkling fås

$$A(P) = I(P) + \frac{B(P)}{2} - 1,$$

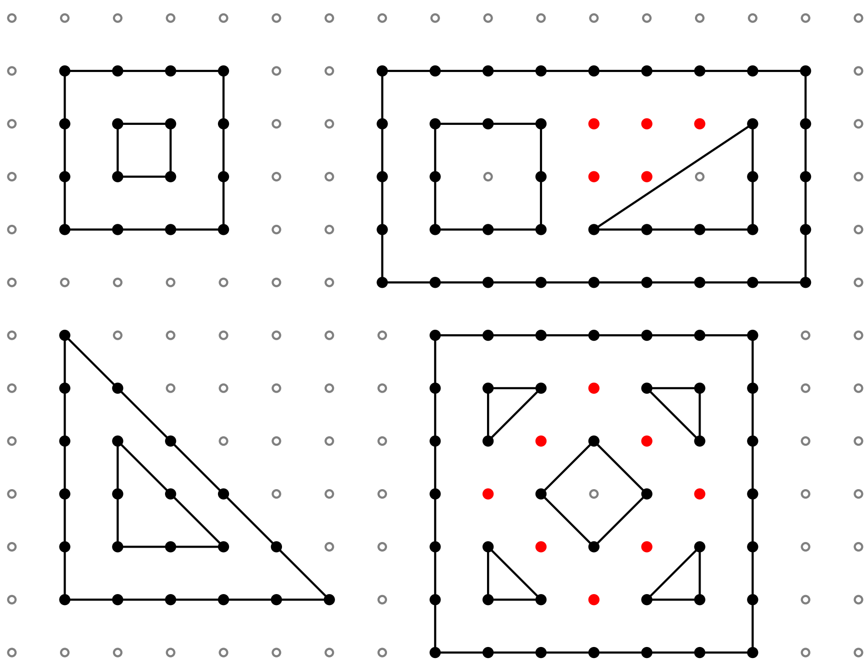
vilket är exakt Picks sats. Därmed är beviset komplett.

6 Picks sats för polygoner med hål

Vi betraktar först en enkel gitterpolygon P med I inre gitterpunkter och B randpunkter. Enligt Picks sats gäller då

$$A(P) = I + \frac{B}{2} - 1.$$

Hittills har vi endast behandlat enkla polygoner. Eftersom vi redan känner till formeln för arean av polygoner utan hål, kan vi använda den för att härleda formeln för polygoner med hål. Vi börjar med fallet med ett enda hål och utvidgar därefter resonemanget till fallet med n hål.



Figur 6: Gitterpolygoner med hål.

I figur 6 visas några exempel som illustrerar en variant av Picks sats för polygoner med hål. Samtliga exempel kan verifieras direkt med hjälp av vanliga areaformler.

1. En kvadrat där en mindre kvadrat har tagits bort:

$$A = 3^2 - 1^2 = 8.$$

2. En rektangel där en kvadrat och en triangel har tagits bort:

$$A = 8 \cdot 4 - 2^2 - \frac{3 \cdot 2}{2} = 25.$$

3. En rätvinklig triangel där en mindre rätvinklig triangel har tagits bort:

$$A = \frac{5 \cdot 5}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} = 10.5.$$

4. En kvadrat där fyra trianglar och en romb har tagits bort:

$$A = 6^2 - 4 \cdot \frac{1 \cdot 1}{2} - \frac{2 \cdot 2}{2} = 32.$$

Om Picks sats tillämpas direkt på dessa polygoner erhålls följande värden:

$$\begin{aligned}
1: \quad I = 0, \quad B = 16 \quad &\implies \quad A = 0 + \frac{16}{2} - 1 = 7,\\
2: \quad I = 5, \quad B = 38 \quad &\implies \quad A = 5 + \frac{38}{2} - 1 = 23,\\
3: \quad I = 0, \quad B = 21 \quad &\implies \quad A = 0 + \frac{21}{2} - 1 = 9.5,\\
4: \quad I = 8, \quad B = 40 \quad &\implies \quad A = 8 + \frac{40}{2} - 1 = 27.
\end{aligned}$$

Vi ser därmed att Picks sats inte gäller exakt för polygoner med hål. I fallen där det finns ett hål är felmarginalen 1, vid två hål är felet 2 och så vidare. Det visar att felmarginalen är proportionell mot antalet hål. Arean verkar därför ges av följande generaliserade formel, där n är antalet hål:

$$A = I + \frac{B}{2} + n - 1$$

6.1 Härledning av formeln för polygoner med ett hål

Antag att vi utgår från en polygon och skär ut ett hål genom att avlägsna en annan polygon som ligger helt inuti den första. Låt A_1, I_1, B_1 beteckna area, antal inre gitterpunkter respektive antal randpunkter för den ursprungliga polygonen. Låt A_2, I_2, B_2 beteckna motsvarande storheter för hålet, det vill säga polygonen som tas bort. Slutligen betecknar A, I, B arean, antalet inre punkter och antalet randpunkter för polygonen med hål, det vill säga den resulterande polygonen.

Eftersom hålet tas bort helt gäller

$$A = A_1 - A_2.$$

Alla punkter i den borttagna polygonen – både inre gitterpunkter och randpunkter – låg inuti den ursprungliga polygonen. Därför gäller sambandet

$$I_1 = I_2 + B_2 + I.$$

Det totala antalet randpunkter för polygonen med hål erhålls genom att summera antalet randpunkter på den yttre randen och antalet randpunkter på hålets rand. Alltså gäller

$$B = B_1 + B_2.$$

Picks sats för de två polygonerna ger

$$A_1 = I_1 + \frac{B_1}{2} - 1, \quad A_2 = I_2 + \frac{B_2}{2} - 1.$$

Vi beräknar nu arean:

$$\begin{aligned}
A &= A_1 - A_2 \\
&= (I_1 + \frac{B_1}{2} - 1) - (I_2 + \frac{B_2}{2} - 1) \\
&= I_2 + B_2 + I + \frac{B_1}{2} - 1 - I_2 - \frac{B_2}{2} + 1 \\
&= I + \frac{B_1}{2} + \frac{B_2}{2} = I + \frac{B_1 + B_2}{2} \\
&= I + \frac{B}{2}
\end{aligned}$$

Detta uttryck överensstämmer således med Picks sats, men konstanttermen -1 har eliminerats. Detta motsvarar fallet $n = 1$ i den generaliserade formeln.

6.2 Härledning av formeln för polygoner med n hål

Ett motsvarande resonemang kan tillämpas för polygoner med ett godtyckligt antal hål. Låt A_0 vara arean av den yttre polygonen med I_0 inre punkter och B_0 randpunkter. Antag att polygonen har n hål med areor A_i för $1 \leq i \leq n$, och med I_i och B_i inre respektive randpunkter för hål i.

Om A är arean av polygonen med hål, och I och B är dess inre respektive randpunkter, gäller:

$$A = A_0 - \sum_{i=1}^{n} A_i.$$

Eftersom

$$A_0 = I_0 + \frac{B_0}{2} - 1 \qquad \text{och} \qquad A_i = I_i + \frac{B_i}{2} - 1,$$

följer det att

$$\begin{aligned} A &= I_0 + \frac{B_0}{2} - 1 - \sum_{i=1}^{n} \left(I_i + \frac{B_i}{2} - 1 \right) \\ &= I_0 + \frac{B_0}{2} - 1 + n - \sum_{i=1}^{n} \left(I_i + \frac{B_i}{2} \right). \end{aligned}$$

Vi observerar nu att

$$I = I_0 - \sum_{i=1}^{n} (I_i + B_i), \qquad \text{och} \qquad B = B_0 + \sum_{i=1}^{n} B_i.$$

Därmed erhålls:

$$A = I + \frac{B}{2} + n - 1 = I_0 + \frac{B_0}{2} - \sum_{i=1}^{n} \left(I_i + \frac{B_i}{2} \right) + n - 1,$$

vilket är exakt det vi ville visa. Detta ger en fullständig generalisering av Picks sats till polygoner med ett godtyckligt antal hål och reduceras till den ursprungliga satsen när $n = 0$.

7 Slutsats

Picks sats är ett klassiskt men relativt lite uppmärksammat resultat inom den elementära geometrin. Trots sin enkla formulering förekommer satsen sällan i grundläggande undervisning, även om den endast bygger på diskreta strukturer i ett enhetsgitter.

Genom denna uppsats har det visats hur Picks sats möjliggör effektiva areaberäkningar för gitterpolygoner, även i fall där traditionella geometriska metoder är mindre praktiska. De två presenterade bevisen belyser satsen ur olika perspektiv: det induktiva beviset betonar dess additiva egenskaper, medan beviset baserat på Eulers formel tydliggör kopplingen till planär grafteori.

Vidare har en generalisering av Picks sats till polygoner med hål härletts, där konstanttermen i formeln beror på antalet hål. Detta visar hur topologiska egenskaper påverkar relationen mellan area och gitterpunkter.

Sammantaget illustrerar Picks sats hur enkla kombinatoriska observationer kan leda till djupgående geometriska resultat, och den framstår därmed som ett tydligt exempel på matematisk elegans och struktur.

Referenser

[1] Ahn, H. & Douglas, C. (2025): Pick's Theorem: how to calculate the area of a polygon.
https://math.mit.edu/research/highschool/primes/circle/documents/2025/Hannah-Carolena-Final.pdf

[2] Aigner, M. & Ziegler, G. M. (2010): Proofs from THE BOOK, Springer.

[3] Butler, S., Cooper, J. & Hurlbert, G. (2018): Connections in Discrete Mathematics: A Celebration of the Work of Ron Graham, Cambridge University Press.

[4] Davis, T. (2003): Pick's Theorem.
https://mathcircles.org/wpcontent/uploads/2022/03/pickTomDavis.pdf

[5] Lundman, A. & Sædén Ståhl, G. (2014): Polytoper.
https://www.kth.se/polopoly_fs/1.496004.1550154802!/Kompendium.pdf

[6] Pick, G. (1899): Geometrisches zur Zahlenlehre, Lotos - Zeitschrift fuer Naturwissenschaften - 47: 311 - 319.
https://www.zobodat.at/pdf/Lotos_47_0311-0319.pdf

[7] Raman Sundström, M. & Öhman, L. D. (2011): Two beautiful proofs of Pick's Theorem.
https://umu.divaportal.org/smash/get/diva2:376056/FULLTEXT02.pdf

A Appendix

I detta appendix visar vi att varje elementär triangel i gittret $\mathbb{Z}^2$ har area $\frac{1}{2}$.

En konvex polygon $P \subset \mathbb{R}^2$ kallas *elementär* om dess hörn tillhör $\mathbb{Z}^2$ och om P inte innehåller några andra gitterpunkter, vare sig i sitt inre eller på sin rand.

Låt

$$T = \mathrm{conv}(p_0, p_1, p_2)$$

vara en elementär triangel med hörn $p_0, p_1, p_2 \in \mathbb{Z}^2$.

Vi betraktar parallellogrammen

$$P = \mathrm{conv}\Big(p_0,\ p_1,\ p_2,\ p_1 + p_2 - p_0\Big).$$

Parallellogrammen P är symmetriskt med avseende på avbildningen

$$\sigma\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \sigma(x) = p_1 + p_2 - x.$$

Av konstruktionen gäller att $P = T \cup \sigma(T)$. Därför ligger för varje punkt $x \in P$ antingen x eller $\sigma(x)$ i T. Eftersom σ bevarar gittret $\mathbb{Z}^2$, skulle en ytterligare gitterpunkt i P ge upphov till en ytterligare gitterpunkt i T. Detta strider mot antagandet att T är elementär. Alltså är även parallellogrammen P elementärt.

Eftersom parallellogrammen P är elementärt kan dess translationer med heltalsvektorer inte överlappa varandra. Dessa translationer ger därför upphov till en tesselering av planet $\mathbb{R}^2$. Därmed utgör vektorerna

$$p_1 - p_0 \quad \text{och} \quad p_2 - p_0$$

en bas för gittret $\mathbb{Z}^2$.

För en bas i $\mathbb{Z}^2$ gäller att absolutbeloppet av determinanten är 1, vilket ger

$$\Big|\det(p_1 - p_0,\ p_2 - p_0)\Big| = 1.$$

Detta innebär att parallellogrammen P har area 1.

Eftersom triangeln T utgör exakt hälften av parallellogrammen P följer att

$$\text{area}(T) = \frac{1}{2}.$$

Vi har därmed visat att varje elementär triangel i gittret $\mathbb{Z}^2$ har area $\frac{1}{2}$, vilket avslutar beviset.