



SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Transcendent tal

av

Anders Lindberg

2026 - No L3

Transcendent tal

Anders Lindberg

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Rikard Bögvad

2026

AI-statement

AI har använts främst till kodningen i LaTeX. Den har dessutom använts i viss mån till översättning av språk som ej behärskas, men också till korrekturläsning för att finna språkliga fel. Slutligen har den hjälpt mig att precisera mina ibland oprecisa formuleringar.

Abstract

This thesis deals with transcendental numbers, focusing on their definition, historical development, and the central results that form the foundation of the theory of these numbers. The thesis begins with a presentation of algebraic and transcendental numbers, as well as fundamental concepts in set theory and Diophantine approximation, which are important building blocks for the subsequent discussion.

Next, Cantor's argument on enumerability is examined, followed by Liouville's construction of the first explicitly known transcendental numbers and Hermite's and Lindemann's proofs of the transcendence of e and π , respectively. Furthermore, the Gelfond–Schneider theorem and its significance for the development of the theory are presented. Finally, further problems and open questions in the field, such as transcendence measures and Schanuel's conjecture, are discussed, illustrating the ongoing nature of research in this area.

The aim of the thesis is to provide a comprehensive, yet detailed, introduction to the most important results and ideas concerning transcendental numbers.

I would like to express my sincere gratitude to my supervisor, Rikard Bögvald, for his constructive guidance during this work.

Sammanfattning

Denna uppsats behandlar de transcendent talen med fokus på deras definition, historiska utveckling och centrala resultat som utgör grunden för teorin om dessa tal. Uppsatsen inleds med en presentation av algebraiska och transcendent tal, samt grundläggande begrepp inom mängdteori och diofantisk approximation, vilka är viktiga byggstenar för kommande läsning.

Därefter behandlas Cantors argument om uppräknelighet, Liouvilles konstruktion av de första explicit kända transcendent talen samt Hermites och Lindemanns bevis för transcendenten hos e respektive π . Vidare presenteras Gelfond–Schneiders sats och dess betydelse för utvecklingen av teorin. Slutligen diskuteras vidare problem och öppna frågor inom området, såsom transcendentmått och Schanuel’s conjecture, vilket visar på områdets pågående karaktär.

Uppsatsen syftar till att ge en översiktlig, men ändå detaljerad, introduktion till de viktigaste resultaten och idéerna kring transcendent tal.

Jag vill rikta stort tack till min handledare Rikard Bögvad, som givit mig konstruktiv hjälp under arbetet.

Innehåll

1	Inledning	9
2	Förberedelser och bakgrund	11
2.1	Algebraiska och transcendentta tal	11
2.2	Mängdteori och uppräknelighet	13
2.3	Diofantisk approximation	15
3	Cantors argument	16
4	Liouvilles sats och konstruktiva exempel	19
5	Hermites bevis för e	23
6	Lindemann–Weierstrass och π	27
7	Gelfond och Schneider	29
7.1	Aleksandr Gelfond	29
7.2	Theodor Schneider	29
7.3	Gelfond–Schneiders sats	30
8	Vidare resultat och öppna problem	32
8.1	Transcendensmått	32
8.2	Schanuel’s Conjecture	33
8.3	Öppna frågor	33
9	Avslutande reflektioner	34

1 Inledning

Utvecklingen av talbegreppet utgör en central del av matematikens historiska och teoretiska framväxt. Från de naturliga talens elementära aritmetik, via de rationella och reella talens successiva precisering, har varje utvidgning av talområdet motiverats av behovet att beskriva och analysera allt mer komplexa matematiska strukturer. Transcendent tal intar, enligt klassiska framställningar inom området, en central position i talteorin och relaterade delar av matematiken. I sitt förord till *Transcendental Number Theory* beskriver Baker teorin som både omfattande och fruktbar, med konsekvenser för flera skilda matematiska grenar [Bak75]. Dessa tal kännetecknas av frånvaron av algebraiska beroenden och faller därmed utanför den klassiska begreppsapparatur som definieras genom polynom med heltalskoefficienter.

Ett reellt eller komplext tal betecknas som *transcendent* om det inte är en rot till något icke-trivialt polynom med heltalskoefficienter. De transcendent talen utgör således komplementet till mängden av algebraiska tal, vilka utgör lösningarna till sådana polynomekvationer och därmed är föremål för den algebraiska talteorins traditionella kategorisering. Trots att Cantor under slutet av 1800-talet visade att mängden av transcendent tal har strikt större kardinalitet än mängden av algebraiska tal, kvarstår det faktum att explicita transcendent tal är svåra att identifiera och ännu svårare att analysera på ett systematiskt sätt. Denna motsättning mellan teoretisk rikedom och konkret knapphet har i hög grad format utvecklingen av transcendentsteorin.

Studiet av transcendent tal befinner sig i skärningspunkten mellan flera av matematikens grundläggande områden. Mängdläras begrepp om kardinaliteter ger en första förståelse för transcendentens omfattning, medan algebraisk talteori tillhandahåller det strukturella ramverk inom vilket algebraiska och transcendent tal avgränsas. Därtill spelar diofantisk approximation en central roll genom att erbjuda verktyg för att skilja mellan algebraiska och transcendent tal baserat på hur väl de kan approximeras av rationella tal. Kombinationen av dessa perspektiv har lett till en rad fundamentala resultat och till en fördjupad förståelse för talens algebraiska och analytiska egenskaper.

Den formella utvecklingen av transcendent tal inleddes på 1800-talet genom Liouilles arbete, där de första explicita exemplen på transcendent tal konstruerades via noggranna approximationsargument. Senare etablerade Hermite transcendentens hos e , och genom Lindemanns generalisering kunde även transcendentens hos π fastställas, vilket i sin tur gav ett slutgiltigt negativt svar på det klassiska problemet om cirkelns kvadratur. Under 1900-talet vidareutvecklades teorin av Gelfond och Schneider, vars sats gav transcendentens hos en stor klass av exponentiella uttryck av typen a^b , där a och b uppfyller specifika algebraiska villkor. Dessa resultat utgör i dag grundpelare inom transcendentsteorin och har fått betydande konsekvenser för både talteori och komplex analys.

Syftet med denna uppsats är att ge en framställning av transcendent tal, med särskilt fokus på de klassiska definitionerna och de centrala resultat som ligger till grund för ämnesområdet. Framställningen omfattar de fundamentala begreppen, några bevis och bevisidéer samt de historiska och matematiska sammanhang i vilka Liouilles, Hermites, Lindemanns och Gelfond–Schneiders resultat tillkom. Genom

att belysa dessa centrala utvecklingslinjer avses uppsatsen undersöka de principer som styr transcendentens och visa hur dessa är intimt förbundna med matematikens generella teoribildning kring konstruktion, oändlighet och algebraiska strukturer.

2 Förberedelser och bakgrund

Det är till stor fördel att läsaren får ta del av definitioner och satser innan arbetets huvudmoment. Inledningsvis ger vi definitionen av *algebraiska tal* och därav också definitionen av transcendent tal, som följs av uppräknlighet hos algebraiska och reella tal samt diofantiska approximationer.

2.1 Algebraiska och transcendent tal

Definition 2.1. Ett *algebraiskt tal* är ett tal x som uppfyller en algebraisk ekvation, det vill säga en ekvation av formen

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

där a_0, a_1, \dots, a_n är heltal, inte alla lika med noll. Ett tal som inte är algebraiskt kallas *transcendent*.

Med andra ord så betyder det att algebraiska tal är de tal som kan beskrivas exakt genom en polynomrelation med heltalskoefficienter. Genom lemma 2.2 och dess bevis visar vi att mängden av alla algebraiska tal bildar en kropp, vilket gör att den följer en strukturell stabilitet. Om de ej skulle uppfylla en kropp skulle den förlora många naturliga räkneoperationer, vilket i sin tur kan resultera i att oavsiktligt lämna kroppen.

Lemma 2.2. *De algebraiska talen bildar en kropp $\overline{\mathbb{Q}} \subset \mathbb{C}$.*

Bevis. Vi visar att mängden av algebraiska tal är sluten under addition, multiplikation och inverser.

Antag först att α är ett algebraiskt tal, det vill säga α är en rot till ett polynom $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$. Då är $-\alpha$ en rot till polynomet $f(-x)$ och $1/\alpha$ en rot till $x^n f(1/x)$, där $n = \deg f$. Alltså är både $-\alpha$ och $1/\alpha$ algebraiska. Det återstår därför att visa att summan och produkten av två algebraiska tal är algebraiska.

Antag nu att α och β är algebraiska tal, och låt m respektive n vara deras grader. Betrakta vektorrummet

$$V = \langle \alpha^i \beta^j : 0 \leq i < m, 0 \leq j < n \rangle$$

över \mathbb{Q} . Detta vektorrum är ändligtdimensionellt och skilt från noll.

Vi observerar nu att multiplikation med α respektive β avbildar V i sig självt, det vill säga

$$\alpha V \subset V \quad \text{och} \quad \beta V \subset V.$$

Därmed gäller även

$$(\alpha + \beta)V \subset V \quad \text{och} \quad (\alpha\beta)V \subset V.$$

Vi visar nu att detta innebär att $\alpha + \beta$ och $\alpha\beta$ är algebraiska. Låt $x \in \mathbb{C}$ vara ett tal sådant att $xV \subset V$. Välj en bas e_1, \dots, e_k för V . Multiplikation med x definierar då en linjär avbildning på V , så det finns rationella tal a_{ij} sådana att

$$xe_i = a_{i1}e_1 + \dots + a_{ik}e_k \quad \text{för } i = 1, \dots, k.$$

Låt $A = (a_{ij})$ vara den tillhörande matrisen. Då är x ett egenvärde till A och uppfyller därför den karakteristiska ekvationen

$$\det(xI - A) = 0.$$

Detta är ett polynom med koefficienter i \mathbb{Q} , vilket visar att x är algebraiskt.

Eftersom både $\alpha + \beta$ och $\alpha\beta$ uppfyller villkoret $xV \subset V$, följer att de är algebraiska. Därmed är de algebraiska talen slutna under addition, multiplikation och inverser och bildar således en kropp. \square

Korollarium 2.3. *Mängden av alla algebraiska tal*

$$\overline{\mathbb{Q}} = \{\alpha \in \mathbb{C} : \text{det finns } f \in \mathbb{Z}[x] \setminus \{0\} \text{ med } f(\alpha) = 0\}$$

är en kropp.

Bevis. Låt α och β vara algebraiska tal. Per definition finns icke-triviala polynom

$$P(x) \in \mathbb{Z}[x] \quad \text{och} \quad Q(x) \in \mathbb{Z}[x]$$

sådana att $P(\alpha) = 0$ och $Q(\beta) = 0$. Betrakta nu kroppen $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$, den minsta delkroppen av \mathbb{C} som innehåller \mathbb{Q} samt α och β . Denna kropp är en ändlig algebraisk utvidgning av \mathbb{Q} , och varje element i en sådan utvidgning är algebraiskt över \mathbb{Q} , som bevisas i lemma 2.2.

Eftersom $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$ och (om $\beta \neq 0$) α/β alla ligger i kroppen $\mathbb{Q}(\alpha, \beta)$ följer att dessa är algebraiska. Vi har därmed visat att mängden av algebraiska tal är sluten under addition, multiplikation och (för $\beta \neq 0$) inversion.

Mängden av algebraiska tal innehåller dessutom 0 och 1 (båda är rötter till polynom med heltalskoefficienter), vilket innebär att mängden bildar en ring. Eftersom även varje icke-noll element har en invers inom mängden bildar mängden till och med en kropp[DF03]. \square

Exempel 2.4 (Rationella tal). Alla rationella tal är algebraiska. Om $x = \frac{a}{b}$ är rationellt, uppfyller det ekvationen

$$bx - a = 0,$$

och därmed är x algebraiskt av grad 1.

Detta visar att alla rationella tal har en mycket enkel algebraisk struktur, att de alltid är lösningar till ett polynom av grad 1. Man kan därför betrakta rationella tal som de 'enklaste' algebraiska talen.

Exempel 2.5 (Kvadratiske rötter). Exempel på algebraiska tal är alla kvadratiske rötter. Till exempel uppfyller

$$i = \sqrt{-1}$$

ekvationen

$$x^2 + 1 = 0,$$

och är därmed algebraiskt av grad 2.

Exempel 2.6. Vi visar att $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ är algebraiskt.

Betrakta

$$\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}.$$

Kvadrera båda sidor:

$$\alpha^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}.$$

Flytta över termen med $\sqrt{6}$:

$$\alpha^2 - 5 = 2\sqrt{6} \implies (\alpha^2 - 5)^2 = 24.$$

Förenkla:

$$\alpha^4 - 10\alpha^2 + 25 = 24 \implies \alpha^4 - 10\alpha^2 + 1 = 0.$$

Alltså är α en rot till det icke-triviala polynomet

$$x^4 - 10x^2 + 1 \in \mathbb{Z}[x],$$

och därmed algebraiskt över \mathbb{Q} .

Dessa har högre komplexitet men är likväl algebraiska, vilket ger oss möjligheten att studera dess karaktär med algebraiska metoder.

Definition 2.7 (Grad av ett algebraiskt tal). Om ett algebraiskt tal x uppfyller ett polynom av grad n , men inget polynom av lägre grad, säger man att x är av *grad* n .

Rationella tal är således av grad 1, medan kvadratiska rötter är av grad 2.

Anmärkning 2.8 (Euklidiska tal). Ett *euklidiskt tal* är ett tal som motsvarar en längd som kan konstrueras med linjal och passare från en given enhetslängd. Alla rationella tal och alla reella kvadratiska rötter är exempel på sådana tal. Varje euklidiskt tal är algebraiskt.

Anmärkning 2.9 (Flera polynom). Ett algebraiskt tal kan uppfylla flera algebraiska ekvationer av olika grader. Exempelvis uppfyller

$$x = \frac{1}{2}$$

ekvationerna

$$x^2 - \frac{1}{4} = 0, \quad x^4 - \frac{1}{16} = 0, \dots$$

Vi ser att ett algebraiskt tal inte är begränsat till ett enda polynom. Det polynom med lägst grad bestämmer talets grad. Vi kommer nedan undersöka uppräknliga och överuppräknliga mängder och vad som skiljer dem åt.

2.2 Mängdteori och uppräknlighet

Det är viktigt att förstå skillnaden mellan olika typer av oändliga mängder när man studerar talens egenskaper.

Anmärkning 2.13 (Storlekar av oändlighet). Begreppet överuppräknlighet visar att oändlighet kan ha olika storlekar. Som tidigare visat är mängden av rationella tal, \mathbb{Q} , oändlig men *uppräknlig*, under tiden som mängden av reella tal, \mathbb{R} , är *överuppräknlig*.

Intuitivt kan man tänka sig att rationella tal kan listas ett i taget i en sekvens, medan reella tal täcker hela tallinjen så tätt att ingen sådan lista kan omfatta alla.

Ett viktigt resultat (som bevisas i avsnitt 3) är Cantors diagonala argument, som visar att \mathbb{R} är överuppräknlig. Ett liknande resonemang visar även att intervallet $[0, 1]$ och mängden av alla funktioner från \mathbb{N} till $\{0, 1\}$ är överuppräknliga.

Avslutningsvis kan noteras att en delmängd av en uppräknlig mängd alltid är ändlig eller uppräknlig, men delmängder av en överuppräknlig mängd kan vara både uppräknliga och överuppräknliga.

2.3 Diofantisk approximation

Diofantisk approximation handlar om hur väl reella tal kan approximeras med rationella tal. Denna approximation är relevant för de transcendent talen då Liouville visade att de algebraiska talen kan approximeras endast till en viss noggrannhet med rationella tal. Detta resulterade senare i konstruktionen av Liouilles tal som beskrivs närmare i sats 4.2.

Definition 2.14 (Diofantisk approximation). Givet ett reellt tal x , söker man rationella tal $\frac{p}{q}$ som ligger så nära x som möjligt, ofta med begränsning på nämnaren q , så att

$$\left| x - \frac{p}{q} \right|$$

är mycket liten.

Exempel 2.15 (π och approximation). Tal som π kan approximeras med rationella tal, till exempel

$$\frac{22}{7},$$

vilket är en relativt exakt approximation för många praktiska beräkningar. Diofantisk approximation används för att analysera egenskaper hos reella tal och förstå hur "komplicerade" vissa tal är när det gäller deras representation med rationella tal.

3 Cantors argument

Georg Cantor (1845–1918) var en tysk matematiker vars arbete kom att förändra synen på oändligheten inom matematiken. Han föddes i Sankt Petersburg, där hans far, Georg Waldemar Cantor, var en framgångsrik köpman med danskt ursprung, och hans mor, Maria Anna Böhm, var ryska och mycket musikaliskt begåvad. Cantor själv visade tidigt både konstnärliga och matematiska talanger. Familjen flyttade till Tyskland när Cantor var elva år gammal, där han senare studerade i bland annat Zürich, Berlin och Göttingen. Vid universitetet i Berlin fick han intryck av flera framstående matematiker såsom Weierstrass, Kummer och Kronecker.

Efter sin doktorexamen 1867 började Cantor undervisa vid universitetet i Halle, där hans forskningsintresse gradvis försköts från talteori till analys. Genom sitt arbete med trigonometriska serier började han utveckla idéer om kontinuitet och mängder av punkter på tallinjen, vilket skulle utvecklas till idéer som senare skulle leda honom till grunden för mängdteorin.

År 1873 publicerade Cantor sitt första banbrytande resultat: han visade att de rationella och algebraiska talen är *uppräknliga*. Men när han försökte göra samma sak för de reella talen upptäckte han att det inte var möjligt. I en artikel från 1874 kunde han bevisa att mängden av reella tal är *överuppräknlig*. Detta var första gången som matematiken tydligt skilde mellan olika *storlekar* av oändlighet.

Cantors resultat hade dessutom en djup koppling till transcendent tal. Eftersom de algebraiska talen är uppräknliga, medan de reella talen är överuppräknliga, måste nästan alla reella tal vara transcendent. Därmed kunde Cantor, drygt 20 år efter Liouvilles första exempel, visa att transcendent tal inte bara existerar utan utgör den dominerande delen av tallinjen.[OR25c]. Och vi ska nu gå igenom dessa två upptäckter, samt dess bevis inspirerat av Hardy och Wright [HW75]

Sats 3.1. *Mängden av algebraiska tal är uppräknlig.*

Bevis. Först påminner vi om definitionen: ett *algebraiskt tal* är ett komplext tal som är en rot till ett icke-nollpolynom med heltalskoefficienter, alltså ett polynom av formen

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

där $n \in \mathbb{N}$ och $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, inte alla noll.

Kommentar: Här kopplar vi ihop varje algebraiskt tal med något polynom som det uppfyller.

För att räkna upp alla algebraiska tal börjar vi med att räkna upp alla möjliga polynom. Vi kan ordna polynomen på ett systematiskt sätt, till exempel först efter graden n och därefter efter summan av absoluta värden av koefficienterna:

$$S(a_0, \dots, a_n) = |a_0| + |a_1| + \dots + |a_n|.$$

Kommentar: Detta är ett trick för att göra mängden av polynom uppräknlig. Varje par (n, S) ger bara ett ändligt antal polynom, så vi kan stapla dem och räkna upp dem ett efter ett.

Eftersom varje par (n, S) ger en ändlig mängd polynom, blir mängden av alla polynom med heltalskoefficienter en *uppräknelig union av ändliga mängder*.

Kommentar: Varje mängd i unionen är ändlig, så elementen i varje enskild mängd kan listas. Låt $\{A_1, A_2, A_3, \dots\}$ vara en uppräknelig sekvens av dessa ändliga mängder. Då kan vi ordna elementen i unionen $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ i en sekvens (a_1, a_2, a_3, \dots) genom att t.ex. använda Cantors diagonalmetod:

$$a_1 \in A_1, \quad a_2 \in A_2, \quad a_3 \in A_1 \setminus \{a_1\}, \quad a_4 \in A_3, \quad a_5 \in A_2 \setminus \{a_2\}, \dots$$

På detta sätt besöks alla element i unionen exakt en gång, vilket visar att unionen är uppräknelig. Detta är ett standardresultat inom mängdteori: en uppräknelig union av ändliga mängder är uppräknelig.

Varje icke-nollpolynom av grad n har högst n komplexa rötter, alltså är mängden rötter till ett givet polynom *ändlig*.

Kommentar: Här använder vi grundläggande algebra, alltså att varje polynom har finit antal rötter.

Därför kan vi representera mängden av alla algebraiska tal som en union av mängder av rötter, där unionens index (mängden av polynom) är uppräknelig och varje delmängd (rötterna till ett polynom) är ändlig.

Slutsatsen följer: en uppräknelig union av ändliga mängder är uppräknelig.

Alltså är mängden av algebraiska tal uppräknelig.

Kommentar: Detta visar att vi i princip kan lista alla algebraiska tal ett efter ett, trots att det finns oändligt många av dem. □

Sats 3.2. *Intervall* $(0, 1)$ *är icke-uppräkneligt (och därmed är mängden av reella tal icke-uppräknelig).*

Bevis. Antag motsatsen: att alla tal i $(0, 1)$ kan räknas upp.

Vi antar alltså att det finns en sekvens som listar alla tal i intervallet:

$$x_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13} \dots, \quad x_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23} \dots, \quad x_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33} \dots, \dots$$

där varje $a_{ij} \in \{0, 1, \dots, 9\}$ och vi undviker representationer som slutar med oändligt många 9:or, så att varje tal har en unik decimalrepresentation, exempelvis $0.9999\dots = 1$. Vi visar att $0.999\dots = 1$ med ett enkelt algebraiskt argument.

Antag att

$$x = 0.999\dots$$

Multiplitera båda sidor med 10:

$$10x = 9.999\dots$$

Subtrahera nu ekvationen $x = 0.999\dots$ från denna:

$$10x - x = 9.999\dots - 0.999\dots$$

Vänsterledet blir $9x$ och i högerledet tar de oändliga decimalerna ut varandra:

$$9x = 9.$$

Dela båda sidor med 9:

$$x = 1.$$

Alltså är

$$0.999\dots = 1.$$

Kommentar: Vi har nu "listat" alla reella tal i $(0, 1)$ i en teoretisk sekvens. Nästa steg visar att denna lista aldrig kan vara fullständig.

Vi konstruerar nu ett nytt tal

$$y = 0.b_1b_2b_3\dots$$

så att det skiljer sig från varje x_n i den n -te decimalen. Definiera

$$b_n = \begin{cases} a_{nn} + 1 & \text{om } a_{nn} \in \{0, 1, \dots, 7\}, \\ 0 & \text{om } a_{nn} \in \{8, 9\}. \end{cases}$$

Kommentar: Detta är den centrala idén i Cantors diagonalargument: genom att ändra varje diagonal-siffra (siffran a_{nn}) får vi ett nytt tal y som inte finns med i listan.

På detta sätt skiljer sig y från x_n i den n -te decimalen, för varje n . Alltså kan y inte vara lika med något av x_1, x_2, \dots , vilket motsäger antagandet att sekvensen innehåller alla tal i $(0, 1)$.

Slutsats: Antagandet leder till en motsägelse, så intervallet $(0, 1)$ är icke-uppräknligt. Därmed är också mängden av reella tal icke-uppräknligt. \square

Korollarium 3.3. *Mängden av transcendent tal (reella tal som inte är algebraiska) är icke-uppräknligt; i synnerhet finns det faktiskt oändligt många transcendent tal.*

Bevis. Från första satsen är mängden algebraiska tal uppräknligt. Från andra satsen är mängden reella tal icke-uppräknligt. En uppräknligt mängd kan inte vara hela den icke-uppräknliga mängden av reella tal, så komplementet (de reella talen som inte är algebraiska) måste vara icke-uppräknligt. Därmed finns transcendent tal i överflöd. \square

Vi vill undersöka hur väl α kan approximeras av rationella tal. Antag därför att $\frac{p}{q}$ är en rationell approximation, där p och q är heltal med $q > 0$ och $\frac{p}{q} \neq \alpha$.

Eftersom α är en rot till f gäller

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = a_0 \left(\frac{p}{q}\right)^d + a_1 \left(\frac{p}{q}\right)^{d-1} + \cdots + a_d.$$

Om vi multiplicerar båda sidor med q^d får vi

$$q^d f\left(\frac{p}{q}\right) = a_0 p^d + a_1 p^{d-1} q + \cdots + a_d q^d.$$

Alla termer på höger sida är heltal eftersom a_i , p och q är heltal. Om $\frac{p}{q}$ inte är en rot är detta heltal inte noll, vilket ger oss en omedelbar nedre gräns.

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geq \frac{1}{q^d}.$$

Anmärkning 4.2. Observera att ett rationellt tal $p/q \neq \alpha$ aldrig kan vara en rot till f .

Eftersom f är minimalpolynomet till α gäller följande: anta för motsägelse att $f(p/q) = 0$ för något rationellt tal $p/q \neq \alpha$. Enligt faktorsatsen skulle då $x - p/q$ vara en faktor till $f(x)$, så att

$$f(x) = (x - p/q) g(x)$$

för något polynom $g(x)$ med rationella koefficienter. Detta ger att

$$0 = f(\alpha) = (\alpha - p/q) g(\alpha),$$

och eftersom $\alpha \neq p/q$ följer att $g(\alpha) = 0$. Då skulle g vara ett polynom av lägre grad än f som har α som rot, vilket motsäger att f är minimalpolynomet. Alltså är $f(p/q) \neq 0$ för alla rationella $p/q \neq \alpha$. För f 's värde i $q^d f(p/q)$ följer att

$$|q^d f(p/q)| \geq 1.$$

Detta visar att polynomet inte kan bli för litet för rationella tal som inte är roten.

Å andra sidan, eftersom f är kontinuerligt deriverbart, kan vi enligt medelvärdesatsen skriva

$$f\left(\frac{p}{q}\right) - f(\alpha) = f'(\xi) \left(\frac{p}{q} - \alpha\right)$$

för något ξ mellan $\frac{p}{q}$ och α . Eftersom $f(\alpha) = 0$ får vi

$$\left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = |f'(\xi)| \cdot \left|\frac{p}{q} - \alpha\right|.$$

Derivatan f' är ett polynom och därmed kontinuerlig. Eftersom ξ ligger i ett begränsat intervall runt α finns det en konstant $M > 0$ sådan att $|f'(\xi)| \leq M$. Kombinerar vi detta med den tidigare nedre gränsen får vi

$$\frac{1}{q^d} \leq \left|f\left(\frac{p}{q}\right)\right| = |f'(\xi)| \cdot \left|\frac{p}{q} - \alpha\right| \leq M \left|\frac{p}{q} - \alpha\right|.$$

Slutligen ger detta

$$\left| \frac{p}{q} - \alpha \right| \geq \frac{1}{Mq^d} = \frac{C(\alpha)}{q^d},$$

där vi definierar $C(\alpha) := 1/M > 0$. Detta visar att ingen rationell approximation kan vara bättre än $O(1/q^d)$, och därmed kan ett algebraiskt irrationellt tal inte approximeras för bra av rationella tal. Vi noterar dessutom att $f'(\alpha) \neq 0$. Detta följer av att f är minimalpolynomet till α och därmed irreducibelt över \mathbb{Q} . Om $f'(\alpha) = 0$ skulle α vara en dubbelrot till f , vilket innebär att f och f' har en gemensam faktor. Då vore f reducerbart, i motsättning till minimalitetsegenskapen. Eftersom $f'(\alpha) \neq 0$ och f' är kontinuerlig finns därför ett intervall runt α där $|f'(x)|$ är skilt från noll och i synnerhet begränsat både ovanifrån och nedifrån av positiva konstanter.

□

Sats 4.3 (Liouvilles tal är transcendent). *Betrakta talet*

$$L = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!} = 0.11000100000000000000000010\dots$$

Då är L ett *transcendental*.

Bevis. Vi börjar med att betrakta partialsummorna

$$L_n = \sum_{k=1}^n 10^{-k!}.$$

Varje L_n är ett rationellt tal, eftersom det är en ändlig summa av bråk med nämnare $10^{k!}$. Nämnaren kan därför väljas som

$$q_n = 10^{n!},$$

så att vi kan skriva $L_n = \frac{p_n}{q_n}$ för något heltal p_n .

Nu undersöker vi hur väl L_n approximerar L :

$$0 < L - L_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} 10^{-k!}.$$

Eftersom varje term i summan är mindre än den första termen $10^{-(n+1)!}$ multiplicerad med summan av en geometrisk serie, får vi en enkel övre gräns:

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} 10^{-k!} < 2 \cdot 10^{-(n+1)!}.$$

Därmed gäller

$$0 < L - \frac{p_n}{q_n} < \frac{2}{10^{(n+1)!}} = \frac{2}{q_n^{n+1}}.$$

Detta visar att L kan approximeras av rationella tal $\frac{p_n}{q_n}$ med en exponent $n+1$ som kan göras godtyckligt stor genom att välja n tillräckligt stor. Med andra ord, för varje heltal N finns det rationella approximationer med

$$\left| L - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^N},$$

för någon konstant C .

Liouvilles sats (Sats 4.1) säger däremot att inget algebraiskt tal av ändlig grad d kan ha rationella approximationer som uppfyller

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{C}{q^{d+\epsilon}}$$

för någon $\epsilon > 0$ och oändligt många rationella p/q . Eftersom L uppfyller en sådan stark approximations-egenskap för alla N , kan det inte vara algebraiskt.

Vi drar slutsatsen att L måste vara transcendent. □

5 Hermites bevis för e

Charles Hermite föddes 1822 i Dieuse, Frankrike, som det sjätte av sju barn till Ferdinand Hermite och Madeleine Lallemand. Han hade en medfödd defekt i höger fot vilket gjorde det svårt för honom att röra sig, men hans livsglädje och intresse för matematik kompenserade detta tidigt. Hermite studerade vid Collège de Nancy och senare i Paris vid Collège Henri och Collège Louis-le-Grand, där han redan som ung publicerade resultat inom differentialekvationer och algebra.

Hermite fortsatte sina studier vid École Polytechnique, där han undervisades av Joseph Catalan. Trots vissa hinder på grund av sin fysiska funktionsnedsättning lyckades han fortsätta sin akademiska bana och blev snart känd som en lovande forskare. Han utvecklade tidigt arbete inom theta-funktioner och Fourier-serier, vilket inspirerade Joseph Liouville i hans banbrytande arbete om transcendent tal 1844.

År 1847 tog Hermite sin examen och året därpå blev han repetitör och antagningsexaminer vid École Polytechnique. Han bidrog också till forskning inom talteori, algebra, ortogonala polynom och elliptiska funktioner. 1848 visade Hermite att dubbelt periodiska funktioner kan representeras som kvoter av periodiska hela funktioner, och han utvecklade vidare metoder inom resideteorin. Han gjorde även viktiga bidrag till teorin om kvadratiske former och invarianta transformationer.

Hermite valdes 1856 in i Académie des Sciences, samma år som han drabbades av smittkoppor och påverkades starkt av sin lärare Cauchy, vilket ledde till att han vände sig till katolicismen. Mellan 1858 och 1862 bevisade Hermite viktiga resultat inom algebra och talteori. År 1873 publicerade han det första beviset för att talet e är transcendent, ett arbete som senare inspirerade Lindemann att visa att π också är transcendent.

Hermite undervisade vid École Polytechnique och senare vid Sorbonne, där han blev professor 1869 och stannade till sin pensionering 1897. Han är idag känd för sina bidrag inom analys, differentialekvationer, interpolation, elliptiska funktioner och polynom som bär hans namn, såsom *Hermitepolynom*, *Hermites differentialekvation* och Hermitiska matriser. Hans arbete inspirerade bland annat Poincaré och Mittag-Leffler, och han var känd för sin entusiasm, pedagogiska skicklighet och djupa engagemang för matematikens idévärld[OR25b].

Sats 5.1. *Talet e är transcendent [Bak75].*

Bevis. Vi börjar med att definiera ett hjälp-polynom och en integral som kommer att spela huvudrollen i beviset. Låt $f(x)$ vara ett godtyckligt reellt polynom av grad m , och definiera

$$\ell(t) = \int_0^t e^{t-u} f(u) du,$$

där t är ett godtyckligt komplext tal och integralen tas längs linjen från 0 till t . *Kommentar:* Här introducerar vi $\ell(t)$, en funktion som kopplar ihop f och exponenten e^t och som vi kan manipulera med partiell integration. Observera att integranden kan skrivas som

$$e^{t-u} = e^t e^{-u}.$$

Eftersom e^t är konstant med avseende på u är en primitiv funktion till e^{t-u}

$$\int e^{t-u} du = -e^{t-u}.$$

Första och andra steget i partiell integration ger

$$\ell(t) = e^t f(0) - f(t) + \int_0^t e^{t-u} f'(u) du.$$

$$\ell(t) = e^t (f(0) + f'(0)) - (f(t) + f'(t)) - \int_0^t e^{t-u} f''(u) du.$$

Kommentar: Detta visar mönstret tydligt: varje partiell integration genererar en term vid början ($f^{(j)}(0)$) multiplicerad med e^t , en term vid slutet ($-f^{(j)}(t)$) och en ny integral med högre derivata.

Genom upprepad partiell integration (tills derivatan blir noll) erhålls därför den kompakta representationen

$$\ell(t) = e^t \sum_{j=0}^m f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m f^{(j)}(t).$$

Kommentar: Eftersom f har grad m blir $f^{(m+1)} \equiv 0$, vilket gör att upprepningen slutar naturligt.

För att kunna uppskatta storleken på $\ell(t)$ inför vi polynomet $\tilde{f}(x)$ som erhålls från f genom att ersätta varje koefficient med sitt absolutbelopp. Då får vi en enkel övre gräns:

$$|\ell(t)| \leq \int_0^{|t|} e^{|t|-u} \tilde{f}(u) du \leq |t| e^{|t|} \tilde{f}(|t|).$$

Eftersom vi senare endast kommer att betrakta värden $t \in \{0, 1, \dots, n\}$ är $|t|$ begränsat av en konstant oberoende av p . För vårt val

$$f(x) = x^{p-1}(x-1)^p \cdots (x-n)^p$$

gäller därför den grova uppskattningen

$$\tilde{f}(|t|) \leq |t|^{p-1} \prod_{k=1}^n |t-k|^p \leq n^{(n+1)p},$$

där vi använt att $||t| - k| \leq n$ för alla $k = 0, 1, \dots, n$.

Det följer att

$$|\ell(t)| \leq |t| e^{|t|} \tilde{f}(|t|) \leq C_1 C_2^p,$$

för vissa konstanter $C_1 > 0$ och $C_2 > 1$ som endast beror på n men inte på p . I synnerhet erhålls för

$$J = \sum_{k=0}^n q_k \ell(k)$$

att

$$|J| \leq C^p$$

för någon konstant $C > 1$ oberoende av p .

Nu antar vi för motsägelse att e är algebraiskt. Då finns heltal q_0, \dots, q_n , med $q_0 \neq 0$, sådana att

$$q_0 + q_1 e + \cdots + q_n e^n = 0.$$

Vi jämför nu övre och nedre uppskattningar av

$$J = \sum_{k=0}^n q_k \ell(k),$$

där vi väljer

$$f(x) = x^{p-1}(x-1)^p \cdots (x-n)^p,$$

och p är ett stort primtal.

Vårt val

$$f(x) = x^{p-1}(x-1)^p \cdots (x-n)^p,$$

som har hög multiplicitet vid varje heltal $k \in \{0, 1, \dots, n\}$. Mer precist gäller följande två observationer:

1. För varje $k > 0$ innehåller faktorn $(x-k)^p$ i f . Därav följer att

$$f^{(j)}(k) = 0 \quad \text{för } j = 0, 1, \dots, p-1,$$

eftersom derivering av högst $p-1$ gånger lämnar kvar en faktor $(x-k)$, som utvärderas i $x=k$.

2. För $k=0$ ger faktorn x^{p-1} att

$$f^{(j)}(0) = 0 \quad \text{för } j = 0, 1, \dots, p-2,$$

medan

$$f^{(p-1)}(0) = (p-1)!(-1)^{np}(n!)^p$$

är det explicita icke-nollvärde.

Sätter vi $m = (n+1)p - 1$ och använder representationen av $\ell(t)$ ovan tillsammans med ekvationen för e , får vi

$$J = \sum_{k=0}^n q_k \left(e^k \sum_{j=0}^m f^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^m f^{(j)}(k) \right) = \left(\sum_{k=0}^n q_k e^k \right) \left(\sum_{j=0}^m f^{(j)}(0) \right) - \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n q_k f^{(j)}(k).$$

Eftersom vi antagit att

$$\sum_{k=0}^n q_k e^k = q_0 + q_1 e + \cdots + q_n e^n = 0,$$

försvinner första termen och vi får

$$J = - \sum_{j=0}^m \sum_{k=0}^n q_k f^{(j)}(k).$$

Kommentar: Här är det avgörande steget, valet av $f(x)$ och primtalet p gör att nästan alla termer i summan blir delbara med $p!$, vilket ger ett starkt "nedre" värde på $|J|$.

Man observerar nu att $f^{(j)}(k) = 0$ om $j < p$. Man skiljer på fallen $k = 0$ och $k \geq 1$. För $k = 1, \dots, n$ gäller att

$$f^{(j)}(k) = 0 \quad \text{för alla } j < p,$$

medan för $k = 0$ gäller

$$f^{(j)}(0) = 0 \quad \text{för alla } j < p - 1,$$

och

$$f^{(p-1)}(0) = (p-1)!(-1)^{np}(n!)^p.$$

Alla övriga termer i summan

$$J = - \sum_{j=0}^{p-1} \sum_{k=0}^n q_k f^{(j)}(k)$$

är alltså delbara med $p!$, och därför får vi

$$J \equiv -q_0 f^{(p-1)}(0) \pmod{p!}.$$

Eftersom $p > n$ är detta inte delbart med $p!$ och slutsatsen blir

$$J \neq 0.$$

samt om $j < p - 1$ och $k = 0$. För alla andra par (j, k) utom just $(j, k) = (p - 1, 0)$ är $f^{(j)}(k)$ ett heltal delbart med $p!$. Dessutom gäller

$$f^{(p-1)}(0) = (p-1)!(-1)^{np}(n!)^p,$$

vilket är delbart med $(p-1)!$ men ej med $p!$ om $p > n$. Därmed följer att om också $p > |q_0|$, så blir J ett icke-nolligt heltal delbart med $(p-1)!$, och alltså

$$|J| \geq (p-1)!.$$

Å andra sidan får man av den uppskattningen $|f(k)| \leq C_1^i$, där $i = 1 \dots n$ samt summuttrycket för J att

$$|J| \leq |q_1| |\ell(1)| + \dots + |q_n| |\ell(n)| \leq C^p$$

för någon konstant C oberoende av p .

Dessa två uppskattningar är inkompatibla eftersom $(p-1)!$ växer mycket snabbare än C^p när $p \rightarrow \infty$. Detta motsäger antagandet att e är algebraiskt, och alltså är e transcendent. □

6 Lindemann–Weierstrass och π

Efter Hermites bevis för att e är transcendent dröjde det inte länge innan nästa stora framsteg kom. Ferdinand von Lindemann (1852–1939) lyckades år 1882 generalisera Hermites metod och därigenom bevisa att även talet π är transcendent. Hans resultat, senare formaliserat och utvidgat av Karl Weierstrass, och kallas i dag *Lindemann–Weierstrass-satsen*.

Satsen är ett av de mest centrala resultaten inom teorin om transcendent tal och knyter samman analys och algebra. I sin fullständiga form behandlar den inte bara e^α för ett enda algebraiskt α , utan även linjärkombinationer av exponentialer med algebraiska exponenter.

Sats 6.1 (Lindemann–Weierstrass, förenklad form). *Antag att α är ett nollsjilt algebraiskt tal. Då är e^α transcendent.*

Hermites metod bestod i att konstruera polynom och integraler som ledde till en motsägelse om e antogs vara algebraiskt. Lindemann utvidgade denna idé till att omfatta exponentialer av alla algebraiska tal. Det centrala i beviset är att om man antar att en viss linjärkombination av sådana exponentialer vore noll, kan man konstruera ett nytt polynom vars integralvärden inte kan vara både heltal och tillräckligt små, vilket leder till en motsägelse, precis som i Hermites resonemang.

Ur denna sats följer som en omedelbar konsekvens att π är transcendent, eftersom den annars skulle bryta mot Eulers identitet [Niv56].

Korollarium 6.2. *Talet π är transcendent.*

Bevis. Vi antar att Lindemann–Weierstrass-satsen gäller.

Från Eulers formel vet vi att

$$e^{i\pi} + 1 = 0,$$

vilket ger

$$e^{i\pi} = -1.$$

Här är $i\pi$ produkten av det icke-noll algebraiska talet i och det reella talet π . Eftersom $e^{i\pi}$ enligt satsen är transcendent (om $i\pi$ vore algebraiskt och icke-noll) får vi en motsägelse om π vore algebraiskt.

Mer precist: om π vore algebraiskt, så vore även $i\pi$ algebraiskt. Då skulle Lindemann–Weierstrass satsen säga att $e^{i\pi}$ är transcendent. Men $e^{i\pi} = -1$ är rationellt (och alltså algebraiskt). Detta är en motsägelse.

Alltså måste π vara transcendent. □

Detta resultat löste ett av de äldsta problemen i matematikhistorien *cirkelns kvadratur*. Sedan antiken hade man försökt konstruera, med endast linjal och passare, en kvadrat med samma area som en given cirkel. Eftersom konstruktioner med dessa verktyg endast kan ge algebraiska tal, och eftersom π ingår i uttrycket för cirkelns area ($A = \pi r^2$), visar Lindemanns sats att en sådan konstruktion är omöjlig.

Lindemanns arbete markerar därmed slutpunkten för en lång utveckling från Liouvilles första konstruktioner till Hermites bevis för e och vidare till en allmän

teori för exponentialfunktionens transcendent. Samtidigt öppnade det dörren för ännu djupare resultat, såsom Gelfond–Schneider-satsen på 1900-talet, som ytterligare generaliserade Lindemanns idéer till potensuttryck av typen a^b där både a och b är algebraiska.

7 Gelfond och Schneider

Efter Lindemanns bevis för transcendenten av π fortsatte studiet av transcendent tal att utvecklas under 1900-talet. Ett viktigt steg togs genom lösningen av det sjunde av David Hilberts berömda problem, som formulerades år 1900. Problemet löd i korthet: visa att a^b är transcendent när a är ett algebraiskt tal (skilt från 0 och 1) och b är ett irrationellt algebraiskt tal. Detta kom att lösas oberoende av varandra av två unga matematiker, Aleksandr Gelfond och Theodor Schneider, år 1934. Resultatet kallas idag *Gelfond–Schneiders sats* och utgör ett av de centrala resultaten i transcendentsteorin. Inledningsvis kommer lite bakgrundsinformation om dessa två pionjärer.

7.1 Aleksandr Gelfond

Aleksandr Osipovitj Gelfond (1906–1968) var en rysk matematiker vars arbete lade grunden för stora delar av den moderna transcendentsteorin. Han studerade vid Moskvauniversitetet från 1924 och arbetade under handledning av Aleksandr Khinchin och Vjatjeslav Stepanov. Redan under slutet av 1920-talet publicerade han flera betydande arbeten, bland annat *Transcendental numbers* (1929), där han formulerade idéer som senare skulle leda till lösningen av Hilberts sjunde problem.

År 1930 besökte Gelfond Tyskland och studerade i Berlin och Göttingen, där han kom i kontakt med David Hilbert, Carl Siegel och Edmund Landau. Efter återkomsten till Moskva verkade han som professor vid Moskvauniversitetet och vid den Ryska Vetenskapsakademien.

År 1934 publicerade Gelfond beviset på sin sats i artikeln *Sur le septième problème de D. Hilbert*, där han visade att a^b är transcendent när a och b uppfyller villkoren ovan. Denna sats löste Hilberts sjunde problem och blev en milstolpe inom talteorin. Förutom sitt arbete med transcendent tal bidrog Gelfond även till analys, approximationsteori och funktionsteori, samt författade flera inflytelserika läroböcker, bland annat *transcendent och algebraiska tal* (1952)[OR25a].

7.2 Theodor Schneider

Theodor Schneider (1911–1988) föddes i Frankfurt am Main, där han först övervägde en karriär som konsertpianist innan han bestämde sig för att studera matematik vid universitetet i Frankfurt. Bland hans lärare fanns framstående matematiker som Max Dehn, Ernst Hellinger och framför allt Carl Siegel, under vars ledning Schneider började arbeta med transcendentsteori.

Inspirerad av Siegels föreläsningar om transcendent tal tog Schneider sig an Hilberts sjunde problem. Oberoende av Gelfond lyckades han 1934 bevisa samma resultat, vilket han publicerade i artikeln *Transzendenzuntersuchungen periodischer Funktionen*. Denna prestation utgjorde kärnan i hans doktorsavhandling samma år.

Efter svåra år under nazitiden, då många av hans kollegor tvingades lämna Tyskland, fortsatte Schneider sin akademiska bana. Han blev professor vid universitetet i Erlangen och Freiburg, och var under flera år direktör för det berömda Oberwolfachinstitutet. År 1957 publicerade han monografin *Einführung in die*

transzendenten Zahlen, som sammanfattade och vidareutvecklade hans resultat inom transcendensteorin[OR25e].

7.3 Gelfond–Schneiders sats

Sats 7.1 (Gelfond–Schneider, 1934). *Om a och b är algebraiska tal, med $a \neq 0, 1$ och b irrationellt, så är a^b transcendent.*

Satsen var en naturlig fortsättning på Lindemann–Weierstrass-satsen och utvidgade förståelsen av exponentiella uttryck med algebraiska baser och exponenter. Den bekräftade också Hilberts förutsägelse om att sådana tal borde vara transcendent, och utgjorde därmed en av de mest betydande framgångarna inom 1900-talets talteori. Ett särskilt illustrativt exempel på Gelfond–Schneiders sats är talet $2^{\sqrt{2}}$. Här är basen 2 ett algebraiskt tal (eftersom det är en lösning till ekvationen $x - 2 = 0$), medan exponenten $\sqrt{2}$ också är algebraiskt, men samtidigt irrationell, då den uppfyller polynomekvationen $x^2 - 2 = 0$.

Enligt Gelfond–Schneider måste därför talet

$$2^{\sqrt{2}}$$

vara ett *transcendent tal*. Detta exempel är inte bara pedagogiskt tacksamt utan även av historisk betydelse: det var just detta uttryck som David Hilbert själv lyfte fram i sin berömda föreläsning år 1900, när han presenterade det som senare kom att kallas Hilberts sjunde problem. Hilbert pekade särskilt ut transcendenten hos uttryck av typen a^b där *båda* talen är algebraiska, men exponenten är *irrationell*, som en central och olöst fråga.

Att bevisa transcendenten hos $2^{\sqrt{2}}$ blev därför en nyckelkomponent i lösningen av problemet. När Gelfond och senare Schneider under 1930-talet presenterade sina oberoende bevis innebar det ett genombrott: ett av Hilberts mest gåtfulla problem hade fått en elegant och kraftfull lösning.

Det som gör resultatet så slående är att uttryck som $2^{\sqrt{2}}$ ser förhållandevis enkla och naturliga ut, i tydlig kontrast till tidigare transcendent tal som Liouville först konstruerade, vilka ofta hade en mycket artificiell struktur. Gelfond–Schneiders sats visar att även till synes vardagliga kombinationer av algebraiska tal kan leda ut ur den algebraiska talvärlden och skapa nya tal som är transcendent.

Ett annat klassiskt exempel är

$$e^{\pi},$$

som via identiteten $e^{\pi} = (-1)^{-i}$ passar in i satsens ramverk eftersom -1 är algebraiskt och i är algebraiskt men irrationellt över de rationella talen. Även detta tal måste därför vara transcendent. Det ikoniska uttrycket e^{π} , ofta kallat *Gelfonds konstant*, är idag ett av de mest kända konkreta transcendent talen.

Gelfond–Schneiders sats kan också ses som en elegant fortsättning på idéer som redan fanns i Lindemanns bevis för π :s transcendent (1882). Lindemann visade där att om α är ett icke-noll algebraiskt tal, så är e^{α} transcendent, vilket bland annat ledde till det berömda resultatet att π är transcendent eftersom $e^{i\pi} = -1$. Gelfond och Schneider generaliserade på ett slående sätt dessa idéer till exponenter som

själva är algebraiska men irrationella, och öppnade därmed dörren till en hel klass av tidigare oanträffade transcendentresultat.

Tillsammans utgör dessa resultat en av de mest eleganta berättelserna i modern talteori: från Hilberts formulering av ett problem vars lösning verkade ligga bortom dåtidens metoder, till upptäckten att mycket enkla och naturliga uttryck skyler djup matematisk komplexitet, och slutligen till de kraftfulla metoder som idag fortfarande utgör grunden för transcendent- och approximationsteorin [Niv56].

8 Vidare resultat och öppna problem

Trots att existensen av transcendent tal kan betraktas som väl etablerad sedan 1800-talet, kvarstår en rad djupgående frågor kring deras aritmetiska egenskaper och relationer. Efter de klassiska resultaten av Hermite, Lindemann, Gelfond och Schneider utvecklades teorin i riktning mot att *kvantifiera* transcendenten hos vissa tal. Ett område som kom att kallas studiet av *transcendensmått*. Samtidigt har frågan om ett algebraiskt oberoende mellan välkända konstanter, såsom e och π , förblivit ett av de mest centrala och olösta problemen inom modern talteori.

8.1 Transcendensmått

Liouvilles sats från 1844 utgjorde den första konstruktionen av explicita transcendent tal, men den gav också upphov till ett nytt begrepp: möjligheten att mäta *hur nära* ett tal kan approximeras av rationella tal. Om α är ett reellt tal definierar man dess *approximationsgrad* genom olikheter av typen

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^\mu},$$

där μ anger hur snabbt approximationen kan förbättras med växande $q \in \mathbb{N}$. Liouvilles resultat visar att om α är algebraisk av grad $d \geq 2$, så finns en konstant $C(\alpha) > 0$ sådan att

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| > \frac{C(\alpha)}{q^d}$$

gäller för alla rationella p/q . Därmed följer att tal som kan approximeras "för väl" av rationella måste vara transcendent. Liouvilles konstruktion av talet

$$L = \sum_{n=1}^{\infty} 10^{-n!}$$

utgör ett klassiskt exempel på ett tal med oändlig approximationsgrad, vilket därmed är transcendentens prototyp.

Under 1900-talet förfinades dessa resultat väsentligt. Genom *Thue–Siegel–Roth-satsen* visades att för varje algebraiskt irrationellt tal α och för varje $\varepsilon > 0$ finns endast ändligt många rationella tal p/q som uppfyller

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^{2+\varepsilon}}.$$

Detta innebär att exponenten 2 är optimal, och markerar en dramatisk skärpning av Liouvilles ursprungliga uppskattning. Roths sats räknas som ett av de mest eleganta resultaten inom modern diofantisk approximation och för vilket han tilldelades Fieldsmedaljen 1958.

Vidare utvidgade *Alan Baker* under 1960-talet teorin till att omfatta linjära former i logaritmer av algebraiska tal. Hans arbete ledde till effektiva uppskattningar av transcendensmått för ett brett spektrum av uttryck och resulterade i det som idag kallas *Bakers sats*. Dessa resultat har haft djupgående konsekvenser för diofantiska ekvationer och för teorin om algebraiskt oberoende. Baker erhöll Fieldsmedaljen 1970 för dessa framsteg [ORnda, ORndb].

8.2 Schanuel's Conjecture

Ett av de mest inflytelserika och fortfarande olösta problemen inom transcendent- och oberoendeteori är *Schanuel's Conjecture*. Låt z_1, \dots, z_n vara komplexa tal som är linjärt oberoende över de rationella talen \mathbb{Q} . Hypotesen hävdar att mängden

$$\{z_1, \dots, z_n, e^{z_1}, \dots, e^{z_n}\}$$

innehåller minst n element som är algebraiskt oberoende över \mathbb{Q} .

Om denna konjektur vore sann skulle ett stort antal öppna problem lösas omedelbart. Exempelvis skulle både $e + \pi$ och $e\pi$ visa sig vara transcendent, liksom en mängd andra uttryck som idag undandrar sig klassifikation. Schanuel's Conjecture betraktas därför som en *meta-sats* inom transcendentsteorin: den förenar de kända resultaten för exponentiella funktioner under ett gemensamt ramverk och antyder en djupt liggande struktur i talens algebraiska beroendeförhållanden.

8.3 Öppna frågor

Trots de stora framstegen under det senaste århundradet återstår flera fundamentala frågor obesvarade. Det är exempelvis, som nämnt ovan, fortfarande okänt huruvida summan $e + \pi$ eller produkten $e\pi$ är transcendent, eller ens om de är algebraiskt oberoende. Inte heller är det känt om π^e är transcendent, även om Gelfond–Schneider-satsen implicerar transcendenten hos $\pi^{\sqrt{2}}$.

Ett annat öppet område gäller systematiska metoder för att uppskatta transcendentmått för mer allmänna klasser av tal, samt möjligheten att formulera en effektiv version av Roths sats. Dessa problem ligger nära forskningsfronten inom diofantisk approximation och algebraisk oberoendeteori, där analytiska och geometriska metoder, såsom Arakelovs geometri och \mathfrak{o} -minimala strukturer, under de senaste decennierna tillfört nya perspektiv.

Sammanfattningsvis visar dessa vidare resultat och öppna frågor att transcendent tal inte endast utgör ett avslutat kapitel i talteorins historia, utan ett område där gränsen mellan det kända och det okända fortsätter att förskjutas. I mötet mellan klassiska bevis och moderna konjekturer framträder transcendentsteorin som ett av de mest dynamiska och filosofiskt laddade fälten inom den moderna matematiken.

9 Avslutande reflektioner

Utvecklingen av transcendensteorin, från Cantors oändlighetshierarkier till de moderna konjekturen om det algebraiska oberoendet, illustrerar ett av de mest djupgående dragen i matematiken: spänningen mellan det konstruerbara och det principiellt ogripbara. Genom arbeten av Liouville, Hermite, Lindemann, Gelfond och Baker har gränsen för vad som kan bevisas successivt förskjutits, men samtidigt framstår nya frågor, såsom Schanuel's Conjecture, som påminnelser om att talens värld ännu döljer mycket.

De transcendent talen utgör därmed inte en avslutad kategori, utan snarare ett perspektiv på matematisk kunskap: de markerar gränsen mellan det kända och det möjliga. Denna gräns, som ständigt flyttas genom logikens och analysens samspel, bär på samma idé som inspirerade Cantor: att oändligheten inte är en gräns, utan en struktur.

Referenser

- [Bak75] Alan Baker. *Transcendental Number Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1975.
- [DF03] David S. Dummit and Richard M. Foote. *Abstract Algebra*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ, 3rd edition, 2003.
- [HW75] Godfrey Harold Hardy and Edward Maitland Wright. *An Introduction to the Theory of Numbers*. Oxford University Press, Oxford, 4th edition, 1975.
- [Niv56] Ivan Niven. *Irrational Numbers*. Number 11 in Carus Mathematical Monographs. The Mathematical Association of America, Washington, D.C., 1956. Distributed by John Wiley and Sons, Inc.
- [OR25a] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. Alexander gelfond (1906–1968) - biography, 2025. MacTutor History of Mathematics, University of St Andrews. URL: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gelfond/>.
- [OR25b] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. Charles hermite (1822–1901) - biography, 2025. MacTutor History of Mathematics, University of St Andrews. URL: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hermite/>.
- [OR25c] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. Georg cantor (1845–1918) - biography, 2025. MacTutor History of Mathematics, University of St Andrews. URL: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cantor/>.
- [OR25d] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. Joseph liouville (1809–1882) - biography, 2025. MacTutor History of Mathematics, University of St Andrews. URL: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Liouville/>.
- [OR25e] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. Theodor schneider (1904–1980) - biography, 2025. MacTutor History of Mathematics, University of St Andrews. URL: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Schneider/>.
- [ORnda] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. Alan baker. MacTutor History of Mathematics Archive, n.d. University of St Andrews, Scotland. URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Baker_Alan/.
- [ORndb] John J. O'Connor and Edmund F. Robertson. Klaus roth. MacTutor History of Mathematics Archive, n.d. University of St Andrews, Scotland. URL: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Roth_Klaus/.