SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

Polynom av grad 3 och 4

Klassiska lösningsmetoder och deras betydelse

av

Felix Nordgren Odhner

2026 - No L5

Polynom av grad 3 och 4

Klassiska lösningsmetoder och deras betydelse

Felix Nordgren Odhner

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Sofia Tirabassi

2026

AI-statement

AI-baserade verktyg har använts som stöd under arbetet med denna uppsats. Användningen har bland annat bestått i idégenerering i ett tidigt skede, där förslag på möjliga ämnen diskuterades. Ett av dessa överensstämde med en egen idé som uppkommit under verksamhetsförlagd utbildning och låg till grund för ämnesvalet.

AI har även använts för att generera exempel på matematiska problem i syfte att identifiera lämpliga polynom som illustrerar olika fall. Dessa exempel har därefter analyserats och bearbetats av författaren.

Slutligen har AI använts som ett pedagogiskt stöd, bland annat vid översättning och omformulering av text från litteratur, samt för att förbättra tydlighet och struktur i redan färdigskriven text.

Slutligen har AI använts som ett pedagogiskt stöd för att skapa en grundläggande förståelse för Galois-teori, ett område som författaren inte tidigare studerat. Denna användning har skett parallellt med och som komplement till den litteratur som refereras i arbetet.

Samtliga matematiska resonemang, bevis, tolkningar och slutsatser i uppsatsen är författarens egna, och inget innehåll har inkluderats utan kritisk granskning och självständig bearbetning.

Abstract

This thesis examines classical solution methods for third- and fourth-degree polynomial equations, developed by Cardano and Ferrari in the sixteenth century. Using modern algebraic notation, these methods are derived step by step and framed in terms of polynomial rings, symmetric polynomials, and Viète's relations.

The work emphasizes the underlying algebraic structure of the methods, showing how specific substitutions systematically eliminate terms and reduce the equations to simpler forms. In particular, Cardano's solution of the depressed cubic is shown to form the foundation of Ferrari's method for solving quartic equations via a cubic resolvent.

Finally, the thesis discusses the theoretical limitations of these classical approaches. Results by Ruffini, Abel, and Galois demonstrate that no general formula exists for polynomial equations of degree five or higher, as the symmetries of their roots cannot, in general, be resolved using radicals [Jan10]. The thesis thus illustrates both the historical development of algebraic solution methods and the structural reasons for their limitations.

Sammanfattning

Detta arbete behandlar klassiska metoder för att lösa polynom av tredje och fjärde graden, utvecklade av Cardano respektive Ferrari under 1500-talet. Med hjälp av modern algebraisk notation härleds deras formler stegvis och förankras i begrepp som polynomringar, symmetriska polynom och Viètes relationer.

Genom att visa hur varje substitution systematiskt eliminerar specifika termer tydliggörs den underliggande strukturen hos polynom av lägre grad. Arbetet visar hur Cardanos metod för kubiska polynom också utgör grunden för Ferraris lösning av fjärdegradspolynom, där en kubisk resolvent löses med just Cardanos formel.

Avslutningsvis diskuteras den teoretiska gräns som dessa klassiska metoder når. Genom arbeten av Ruffini, Abel och Galois är det känt att det inte finns någon generell formel för polynom av femte graden eller högre, eftersom symmetrierna i dessa polynom inte är lösbara enbart med rotutdrag [Jan10]. Därmed illustrerar arbetet både den historiska utvecklingen och den teoretiska förklaringen till varför algebran måste gå bortom formelbaserade lösningar.

Innehåll

1 Inledning

Lösningen av andragradsekvationer har varit känd sedan antiken, men utvecklingen av explicita metoder för tredje och fjärde graden utgjorde ett av de stora genombrotten i algebrans historia. Under 1500-talet lyckades del Ferro, Tartaglia, Cardano och Ferrari härleda slutna formler för kubiska och kvartiska polynom, och lade därmed grunden för den moderna ekvationslösningens struktur.

Syftet med denna uppsats är att med moderna algebraiska verktyg såsom polynomringar, symmetriska polynom och Viètes relationer återskapa och tydliggöra dessa klassiska metoder. Fokus ligger inte enbart på de färdiga formlerna, utan på de algebraiska idéer som gör härledningarna möjliga: substitutioner som eliminerar termer, reduktion till sänkta polynom samt användning av symmetrier mellan rötterna. Den presentation som ges följer i stora drag den struktur som Janson använder i sin framställning av polynomteori [Jan10].

En central observation i arbetet är att Cardanos lösning av den sänkta kubiken även utgör ett fundament i Ferraris metod för den fjärde graden: Ferrari konstruerar en kubisk resolvent som löses med just Cardanos formel. På så vis framträder en tydlig kedja av algebraiska idéer, där varje steg bygger vidare på tidigare struktur.

Genomgången avslutas med en diskussion av varför motsvarande metod inte kan fortsätta till femte graden. Som belyst i Jansons introduktion till Galoisteori [Jan10], samt i klassiska resultat av Ruffini, Abel och Galois, saknas en generell lösningsformel för polynom av grad fem eller högre. Den bakomliggande orsaken är att symmetrierna mellan rötterna, vilka uttrycks som polynomets Galoisgrupp, i allmänhet inte är lösbara med rotutdrag. Detta markerar gränsen mellan klassisk problemlösning och modern algebra.

2 Förberedande teori

2.1 Polynom, ringar och kroppar

För att kunna tala om polynom behöver man först specificera var koefficienterna hör hemma. Alla polynom är inte ”av samma typ” - deras egenskaper beror på vilken algebraisk struktur koefficienterna tillhör. I detta arbete arbetar vi över en *kropp med karaktäristik* 0, till exempel de reella eller komplexa talen. Det innebär att alla vanliga räkneoperationer fungerar och att man kan dividera med heltal som 2, 3, 4 etc. Definitionerna av ring, kropp och polynomring följer den framställning som ges i Dummit och Foote [DF04].

Definition 2.1 (Kommutativ ring med enhet)**.** En *kommutativ ring med enhet* är en mängd R med två operationer $+$ och $\cdot$ sådana att:

i) $(R, +)$ är en abelsk grupp (addition är associativ, kommutativ och varje element har en additiv invers),

ii) multiplikationen är kommutativ och associativ: $ab = ba$, $(ab)c = a(bc)$,

iii) distributiva lagen gäller: $a(b + c) = ab + ac$,

iv) det finns ett multiplikativt identitetselement $1 \in R$ sådant att $1 \cdot a = a$ för alla $a \in R$.

Definition 2.2 (Kropp)**.** En *kropp* är en kommutativ ring K där varje icke-noll element har en multiplikativ invers, dvs. för alla $a \neq 0$ finns a^{-1} med $aa^{-1} = 1$.

Exempel 2.3. De rationella, reella och komplexa talen, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ och $\mathbb{C}$, är exempel på kroppar. De hela talen $\mathbb{Z}$ är däremot bara en ring, eftersom inte alla element har en invers (t.ex. saknar 2 en invers i $\mathbb{Z}$).

Definition 2.4 (Karaktäristik)**.** En kropps *karaktäristik* är det minsta positiva heltal n sådant att $n \cdot 1 = 0$. Om inget sådant n finns säger man att kroppen har *karaktäristik 0*. I detta arbete antar vi att alla kroppar har karaktäristik 0 (t.ex. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$).

Anmärkning 2.5. Som kontrast kan noteras att kroppen $\mathbb{Z}_p$, där p är ett primtal, har *karaktäristik* p, eftersom $p \cdot 1 = 0$ i $\mathbb{Z}_p$. Detta visar att antagandet om *karaktäristik 0* utesluter kroppar av ändlig karaktäristik.

Definition 2.6 (Polynomring)**.** Låt K vara en kropp. Mängden av alla formella uttryck

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in K,$$

med vanlig addition och multiplikation, bildar en *polynomring* $K[x]$. Addition och multiplikation är definierade koefficientvis, vilket gör $K[x]$ till en kommutativ ring med enhet.

Polynomringar över kroppar behandlas utförligt i [DF04], där deras algebraiska struktur och grundläggande egenskaper etableras.

Bevisidé. Eftersom addition och multiplikation av koefficienter sker i kroppen K, som redan är kommutativ, följer kommutativitet och distributivitet direkt. Det konstanta polynomet 1 fungerar som multiplikativ enhet. Därmed är $K[x]$ en kommutativ ring med enhet. □

Definition 2.7 (Moniskt polynom)**.** Ett polynom sägs vara *moniskt* om koefficienten framför den högsta potensen är 1. Till exempel är $x^3 - 4x^2 + 2x - 5$ moniskt, medan $2x^3 + x + 1$ inte är det.

Definition 2.8 (Polynomring i flera variabler)**.** Låt K vara en kropp. Polynomringen i n variabler över K definieras induktivt genom

$$K[x_1, \ldots, x_n] := K[x_1, \ldots x_{n-1}][x_n].$$

Eftersom K är kommutativ med enhet är även $K[x_1, \ldots, x_n]$ en kommutativ ring med enhet.

Definition 2.9 (Symmetriskt polynom)**.** Ett polynom $f(x_1, \ldots, x_n) \in K[x_1, \ldots, x_n]$ sägs vara *symmetriskt* om det inte förändras vid permutationer av variablerna, det vill säga

$$f(x_{\pi(1)}, \ldots, x_{\pi(n)}) = f(x_1, \ldots, x_n)$$

för alla permutationer $\pi \in S_n$.

Anmärkning 2.10. I resten av arbetet antar vi att alla polynom tillhör $K[x]$ med K en kropp av karaktäristik 0. Det gör att vi alltid kan utföra de divisioner som krävs i Cardanos och Ferraris metoder.

2.2 Elementärsymmetriska polynom och Viètes relationer

Definition 2.11 (Elementärsymmetriska polynom)**.** Låt $x_1, x_2, \dots, x_n$ vara variabler. De *elementärsymmetriska polynomen* $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ definieras av

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \\
\sigma_2 &= \sum_{1 \le i < j \le n} x_i x_j, \\
&\vdots \\
\sigma_n &= x_1 x_2 \cdots x_n.
\end{aligned}$$

Det vill säga: σ_k är summan av alla produkter av k distinkta variabler valda ur $x_1, \dots, x_n$.

Sats 2.12 (Viètes formler)**.** *För*

$$P(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n$$

gäller

$$\sigma_k(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = (-1)^k a_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Anmärkning 2.13. För ett moniskt polynom $P(x)$ med rötter $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, kan man skriva

$$\begin{aligned}
P(x) &= (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n) \\
&= x^n - \sigma_1(\alpha_1, \dots, \alpha_n) x^{n-1} + \sigma_2(\alpha_1, \dots, \alpha_n) x^{n-2} - \cdots + (-1)^n \sigma_n(\alpha_1, \dots, \alpha_n),
\end{aligned}$$

vilket visar att polynomets koefficienter är de elementärsymmetriska polynomen i rötterna, upp till tecken.

Bevis. Betrakta produkten

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \cdots (x - \alpha_n).$$

När denna multipliceras ut bildas varje term genom att man, ur varje parentes, väljer antingen faktorn x eller faktorn $-\alpha_i$. För att få fram termen framför x^{n-k}

måste man välja x ur exakt $n-k$ parenteser och $-\alpha_i$ ur de återstående k. Varje sådant val av k rötter ger upphov till produkten

$$(-\alpha_{i_1})(-\alpha_{i_2})\cdots(-\alpha_{i_k}) = (-1)^k \alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_k}.$$

När alla möjliga val av k olika rötter summeras erhålls exakt det elementärsymmetriska polynomet

$$\sigma_k(\alpha_1,\dots,\alpha_n) = \sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n} \alpha_{i_1}\cdots\alpha_{i_k}.$$

Därmed blir koefficienten framför x^{n-k} lika med $(-1)^k\sigma_k$. Eftersom det utvecklade polynomet samtidigt skrivs på formen

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n,$$

kan vi identifiera koefficienterna och får

$$a_k = (-1)^k\sigma_k,$$

vilket ger påståendet. □

Exempel 2.14 (Grad 2 och 3). **Grad 2:** Låt polynomet vara

$$x^2 + bx + c = 0$$

med rötterna α_1 och α_2. Faktorisering ger

$$x^2 + bx + c = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2) = x^2 - (\alpha_1+\alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2.$$

Genom att jämföra med koefficienterna får vi Viètes formler:

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -b, \qquad \alpha_1\alpha_2 = c.$$

Grad 3: Låt polynomet vara

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

med rötterna $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Faktorisering ger

$$x^3 + bx^2 + cx + d = (x - \alpha_1)(x - \alpha_2)(x - \alpha_3).$$

Om vi multiplicerar stegvis får vi

$$(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) = x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2,$$

och sedan

$$(x^2 - (\alpha_1 + \alpha_2)x + \alpha_1\alpha_2)(x - \alpha_3) = x^3 - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)x^2 + (\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3)x - \alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

Genom att jämföra koefficienterna med $x^3 + bx^2 + cx + d$ får vi Viètes formler:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = -b, \quad \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3 = c, \quad \alpha_1\alpha_2\alpha_3 = -d.$$

Anmärkning 2.15. I mer generell form skrivs Viètes formler ofta för ett polynom

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \cdots,$$

vilket leder till uttryck som $-b/a$, c/a etc. I denna framställning utgår vi i stället från *moniska* polynom, där den ledande koefficienten är 1.

Anmärkning 2.16. Denna formulering i termer av elementärsymmetriska polynom är central i de klassiska lösningsmetoderna för polynom av grad tre och fyra. Som Janson betonar möjliggör detta att uttryck som uppstår i Cardanos och Ferraris metoder kan skrivas helt i koefficienterna, trots att de i grunden beror på relationerna mellan rötterna [Jan10].

2.3 Diskriminanten

I detta avsnitt definieras diskriminanten med hjälp av rötterna till ett polynom, och därefter härleds explicita formler för andragrads- och sänkta kubiska polynom. Eftersom diskriminanten är ett symmetriskt polynom i rötterna kan den uttryckas i koefficienterna med hjälp av Viètes relationer från föregående avsnitt.

Definition 2.17 (Diskriminant)**.** Låt

$$P(x) = a_n(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n)$$

vara ett polynom med rötterna $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ i en kropp av karaktäristik 0. *Diskriminanten* definieras som

$$\Delta(P) = a_n^{2n-2} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2.$$

Anmärkning 2.18. Produkten är noll om och endast om två rötter sammanfaller. Diskriminanten är därför ett mått på hur ”åtskilda” rötterna är. När koefficienterna ligger i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ ger tecknet på Δ dessutom information om antalet reella rötter.

Anmärkning 2.19. I resten av detta avsnitt förutsätter vi att polynomet har koefficienter i $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ för att kunna tala om antalet reella respektive komplexa rötter. I allmänna kroppar har diskriminanten inte samma geometriska tolkning.

2.3.1 Andragradspolynomet

Sats 2.20 (Diskriminanten för andragradspolynom)**.** *Låt $P(x) = ax^2 + bx + c$ ha rötterna α_1 och α_2. Då gäller*

$$\Delta(P) = b^2 - 4ac$$

Bevis. Vi börjar med definitionen av diskriminanten för ett andragradspolynom

$$P(x) = ax^2 + bx + c,$$

med rötterna α_1 och α_2. Enligt definitionen är diskriminanten

$$\Delta(P) = a^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2.$$

Målet är att uttrycka detta i termer av koefficienterna a, b och c. För detta använder vi Viètes formler, som för ett andragradspolynom ger

$$\alpha_1 + \alpha_2 = -\frac{b}{a}, \qquad \alpha_1\alpha_2 = \frac{c}{a}.$$

För att få skillnaden mellan rötterna i kvadrat observerar vi att

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = (\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 4\alpha_1\alpha_2.$$

Detta följer direkt från identiteten $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$, som gäller för alla tal x och y.

Vi sätter nu in Viètes formler:

$$(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2}.$$

Slutligen multiplicerar vi med a^2 enligt definitionen av $\Delta(P)$:

$$\Delta(P) = a^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = a^2 \cdot \frac{b^2 - 4ac}{a^2} = b^2 - 4ac.$$

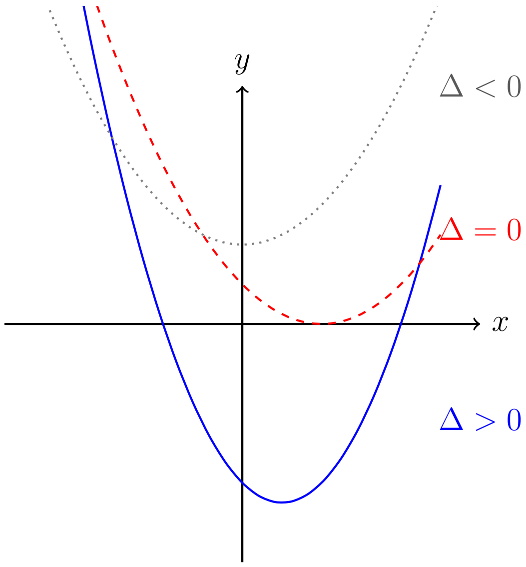
Därmed har vi visat att diskriminanten för ett andragradspolynom uttryckt i koefficienterna blir

$$\Delta(P) = b^2 - 4ac,$$

vilket är den klassiska formeln. □

Anmärkning 2.21 (Tecknets betydelse för rötterna).

- $\Delta > 0$: Två distinkta reella rötter. Parabeln skär x-axeln i två punkter.
- $\Delta = 0$: En dubbelrot. Parabeln tangerar x-axeln.
- $\Delta < 0$: Två komplexa konjugerade rötter. Parabeln ligger helt ovanför eller under x-axeln.



Figur 1: Parabler för olika tecken på diskriminanten.

2.3.2 Den sänkta kubiken

Definition 2.22 (Sänkt kubik)**.** En sänkt kubik är ett polynom av formen

$$P(x) = x^3 + px + q.$$

Sats 2.23 (Diskriminanten för sänkt kubik)**.** *För* $P(x) = x^3 + px + q$ *gäller*

$$\Delta(P) = -4p^3 - 27q^2.$$

Anmärkning 2.24. I litteraturen förekommer två närbesläktade uttryck som båda benämns diskriminant för den sänkta kubiken

$$x^3 + px + q = 0.$$

I den algebraiska teorin definieras diskriminant som

$$\Delta(P) = -4p^3 - 27q^2,$$

vilket härleds direkt ur definitionen

$$\Delta(P) = a_n^{2n-2} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

och uttrycks i koefficienterna med hjälp av Viètes relationer.

I samband med Cardanos lösningsmetod uppträder däremot hjälputtrycket

$$\Delta_{\mathrm{C}} = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3,$$

vilket avgör vilken typ av mellanled som uppträder i lösningsformeln. Dessa två storheter är proportionella enligt sambandet

$$\Delta(P) = -108\,\Delta_{\mathrm{C}},$$

och innehåller därmed samma information om rötternas struktur. Skillnaden ligger i teckenkonventionen: $\Delta_{\mathrm{C}} < 0$ motsvarar tre reella rötter, medan $\Delta_{\mathrm{C}} > 0$ motsvarar en reell och två komplexa konjugerade rötter.

Bevis. Betrakta den sänkta kubiken

$$P(x) = x^3 + px + q,$$

med rötterna $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Enligt definitionen är diskriminanten

$$\Delta(P) = \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2 = (\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1 - \alpha_3)^2 (\alpha_2 - \alpha_3)^2.$$

Vi uttrycker detta i termer av de elementärsymmetriska polynomen

$$\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \qquad \sigma_2 = \alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3, \qquad \sigma_3 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3.$$

För ett allmänt moniskt kubiskt polynom

$$x^3 - \sigma_1 x^2 + \sigma_2 x - \sigma_3$$

ges diskriminanten av identiteten

$$\Delta = -4\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2 + \sigma_1^2\sigma_2^2 - 4\sigma_1^3\sigma_3 + 18\sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

För den sänkta kubiken saknas termen i x^2, vilket innebär $\sigma_1 = \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 = 0$ (ty koefficienten framför x^2 är noll). Därmed reduceras uttrycket till

$$\Delta = -4\sigma_2^3 - 27\sigma_3^2.$$

Enligt Viètes formler gäller här

$$\sigma_2 = p, \qquad \sigma_3 = -q.$$

Insättning ger

$$\Delta = -4p^3 - 27(-q)^2 = -4p^3 - 27q^2.$$

Därmed har vi uttryckt diskriminanten för den sänkta kubiken fullständigt i termer av koefficienterna p och q. □

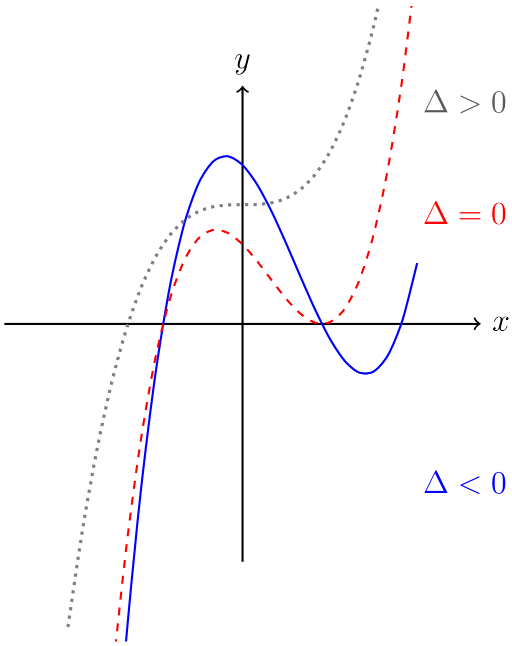
Slutligen kan vi tolka diskriminanten geometriskt: eftersom den är ett kvadrerat avstånd mellan rötterna gäller

Anmärkning 2.25 (Tecknets betydelse för rötterna).

- $\Delta < 0$: Tre distinkta reella rötter. Polynomet skär x-axeln i tre punkter.
- $\Delta = 0$: Minst två sammanfallande rötter. Polynomet har en dubbel- eller trippelrot.
- $\Delta > 0$: En reell rot och två komplexa konjugerande rötter. Endast en skärning med x-axeln.

Denna klassifiering av rötternas natur via diskriminantens tecken följer den standardanalys som ges i den klassiska teorin för kubiska polynom och presenteras utförligt hos Janson [Jan10].

Detta ger samma information om rötternas natur som för andragradspolynomet, men med en något mer komplex struktur.



Figur 2: Kubiska grafer för olika tecken på diskriminanten.

2.3.3 Kvartiken

Definition 2.26 (Sänkt kvartik)**.** En sänkt kvartik är ett polynom av formen

$$P(x) = x^4 + px^2 + qx + r.$$

Sats 2.27 (Diskriminanten för sänkt kvartik)**.** *Diskriminanten för* $P(x) = x^4 + px^2 + qx + r$ *ges av*

$$\Delta = 256r^3 - 128p^2r^2 + 144pq^2r - 27q^4 + 16p^4r - 4p^3q^2.$$

Bevisidé. Diskriminanten för ett polynom definieras som

$$\Delta(P) = a_n^{2n-2} \prod_{i<j} (\alpha_i - \alpha_j)^2,$$

där $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ är rötterna till $P(x)$. För en sänkt kvartik

$$P(x) = x^4 + px^2 + qx + r$$

är Δ ett symmetriskt polynom i rötterna.

En möjlig strategi är att skriva Δ i termer av de elementärsymmetriska polynomen $\sigma_1 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$, $\sigma_2 = \sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j$, $\sigma_3 = \sum_{i<j<k} \alpha_i\alpha_j\alpha_k$ och $\sigma_4 = \alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4$. För en sänkt kvartik gäller $\sigma_1 = 0$, $\sigma_2 = p$, $\sigma_3 = -q$ och $\sigma_4 = r$.

Diskriminanten kan då uttryckas med hjälp av kända algebraiska identiteter som relaterar $\Delta(P) = a_n^{2n-2} \prod_{i<j}(\alpha_i - \alpha_j)^2$ till dessa symmetriska polynom. Genom systematisk expansion och insättning av $\sigma_1 = 0$ reduceras uttrycket till

$$\Delta = 256r^3 - 128p^2r^2 + 144pq^2r - 27q^4 + 16p^4r - 4p^3q^2.$$

Det fullständiga algebraiska beviset är mycket omfattande och involverar expansion av produkter av skillnader mellan rötterna, men principen är densamma som för andragrad och kubik: diskriminanten är ett symmetriskt polynom i rötterna som kan uttryckas i koefficienterna via Viète. □

Anmärkning 2.28. Uttrycket är betydligt mer omfattande än i de lägre graderna, men principen är densamma: $\Delta = 0$ innebär att två rötter sammanfaller, och tecknet på Δ avgör antalet reella rötter när koefficienterna är reella.

2.4 Från Viète till Cardano

Vi såg i föregående avsnitt att koefficienterna i ett polynom hänger ihop med rötternas summor och produkter genom Viètes formler. Detta samband är centralt eftersom det gör det möjligt att genom en lämplig *substitution* eliminera vissa termer och därmed förenkla ekvationen.

I det kubiska fallet är målet att ta bort andragradstermen bx^2 för att erhålla en så kallad *sänkt kubik*. Eftersom alla beräkningar sker i en kropp K av karaktäristik 0 är de algebraiska operationerna tillåtna, särskilt division med $3a$. Detta är viktigt - i andra karaktäristiker skulle metoden inte fungera på samma sätt.

Vi använder därför substitutionen

$$x = y - \frac{b}{3a},$$

vilken enligt Viètes struktur motsvarar att flytta polynomet så att rötternas medelvärde (summan av rötterna delat på 3) blir 0. Det leder till den så kallade *sänkta kubiken*, som är grunden för Cardanos metod.

3 Grad 3 - Cardanos metod

3.1 Förberedande steg och reduktion till sänkt kubik

Vi arbetar över en kropp K med karaktäristik 0 (t.ex. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$). Enligt Viètes relationer vet vi att andragradstermen i ett kubiskt polynom är proportionell mot summan av rötterna. Att ta bort termen bx^2 motsvarar alltså att förskjuta variabeln så att summan av rötterna blir noll.

Utgångspunkten är den allmänna kubiska ekvationen

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \qquad a \neq 0.$$

För att göra polynomet enklare delar vi båda leden med a:

$$x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a} = 0.$$

Geometriskt kan man tolka detta som att vi vill *flytta grafen horisontellt* så att inflexionspunkten hamnar på y-axeln. För att hitta inflexionspunktens x-koordinat beräknar vi andraderivatan:

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^3 + \frac{b}{a}x^2 + \frac{c}{a}x + \frac{d}{a}, \\
f'(x) &= 3x^2 + 2\frac{b}{a}x + \frac{c}{a}, \\
f''(x) &= 6x + 2\frac{b}{a}.
\end{aligned}$$

Sätt $f''(x) = 0$ för att finna inflexionspunkten:

$$6x + 2\frac{b}{a} = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{3a}.$$

Vi inför därför substitutionen
$$x = y - \frac{b}{3a},$$
vilket motsvarar att flytta grafen så att inflexionspunkten hamnar vid $y = 0$.

Efter insättning och förenkling (jfr. [Jan10]) fås den *sänkta kubiken*:

$$y^3 + py + q = 0,$$

där
$$p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2}, \qquad q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$
Denna form saknar andragradsterm, vilket gör den enklare att analysera.

Parametrarna p och q har tydliga geometriska tolkningar:

- q anger inflexionspunktens höjd (vertikal förskjutning),
- p beskriver lutningen kring inflexionspunkten: negativt p ger en typisk berg-och-dalbaneform med tre nollställen, positivt p ger endast ett.

Antalet reella rötter kan bestämmas genom Cardanos hjälputtryck

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3.$$

vilket är proportionellt mot den algebraiska diskriminanten som diskuterades i avsnitt 2.3.2,
$$\Delta = -4p^3 - 27q^2,$$

med motsatt tecken.

Detta kan förstås geometriskt: när $|\frac{q}{2}|$ överstiger inflexionspunktens vertikala avstånd till extrempunkterna (som beror på p), korsar grafen x-axeln bara en gång. När avstånden är lika fås en dubbelrot, och när $|\frac{q}{2}|$ är mindre finns tre skärningar med x-axeln. Detta samband, uttryckt som ovanstående villkor på Δ, är centralt i förståelsen av kubiska ekvationer.

3.2 Sats och bevis

Sats 3.1 (Cardanos formel)**.** *Den sänkta kubiken*

$$y^3 + py + q = 0$$

har lösningen

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}.$$

Bevis av Cardanos formel. Idén baseras på *kubkomplettering*. Vi antar att lösningen kan skrivas som summan av två termer:

$$y = u + v.$$

Vi utvecklar kuben:

$$(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v).$$

Detta sätter vi in i ekvationen $y^3 + py + q = 0$:

$$(u^3 + v^3) + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = 0,$$

vilket kan skrivas som

$$(u^3 + v^3) + (3uv + p)(u+v) + q = 0.$$

För att förenkla kräver vi att termen framför $(u+v)$ ska försvinna:

$$3uv + p = 0 \quad \Rightarrow \quad uv = -\frac{p}{3}.$$

Då återstår

$$u^3 + v^3 = -q.$$

Vi har nu två relationer:

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q, \\ u^3v^3 = (uv)^3 = \left(-\frac{p}{3}\right)^3 = -\frac{p^3}{27}. \end{cases}$$

Vi sätter $z = v^3$. Då är $u^3 = -q - z$, och insättning ger:

$$u^3v^3 = (-q - z)z = -\frac{p^3}{27}.$$

Detta ger en andragradsekvation i z:

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Denna löser vi med den kvadratiska formeln:

$$z = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Eftersom $z = v^3$ får vi

$$v^3 = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Den motsvarande för u^3 (om vi sätter $z = u^3$) är den andra roten:

$$u^3 = -\frac{q}{2} \mp \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Därmed är

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}, \quad v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

och lösningen $y = u + v$ följer. $\square$

Eftersom varje kubikrot har tre grenar, kan vi multiplicera u och v med de komplexa kubikrötterna till 1, $\omega = e^{2\pi i/3}$ och $\omega^2 = e^{4\pi i/3}$, vilket ger de tre olika rötterna till den kubiska ekvationen:

$$\begin{aligned} y_1 &= u + v, \\ y_2 &= \omega u + \omega^2 v, \\ y_3 &= \omega^2 u + \omega v. \end{aligned}$$

Anmärkning 3.2 (Casus irreducibilis). För en sänkt kubik $y^3 + py + q = 0$ med reella koefficienter gäller att om diskriminanten

$$\Delta = -4p^3 - 27q^2 < 0$$

så har ekvationen tre distinkta reella rötter.

I detta fall uppstår det klassiska *casus irreducibilis*: Cardanos formel ger rötterna som summor av komplexa kubikrötter,

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

även om den resulterande summan y är reell. Detta historiskt viktiga fenomen ledde till introduktionen av komplexa tal som nödvändiga mellanled för att hitta reella lösningar. Som Janson framhåller är detta inte ett tekniskt misslyckande utan en strukturell egenskap hos kubiska polynom med tre reella rötter: även reella lösningar kräver komplexa mellanled [Jan10].

3.3 Exempel

Exempel 3.3 (Osänkt kubik med tre reella rötter). Lös $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$.

Vi identifierar koefficienterna $b = 3$, $c = 0$, $d = -1$. För att reducera till en sänkt kubik använder vi sustitutionen

$$x = y - \frac{b}{3} = y - 1,$$

vilket eliminerar y^2-termen.

Insättning ger

$$x^3 + 3x^2 - 1 = (y-1)^3 + 3(y-1)^2 - 1 = y^3 - 3y + 1,$$

alltså den sänkta kubiken

$$y^3 + py + q = 0, \qquad p = -3,\ q = 1.$$

Diskriminanten blir

$$\Delta = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{1}{4} + (-1)^3 = -\frac{3}{4} < 0,$$

vilket innebär att alla tre rötter är reella (casus irreducibilis).

Vi antar lösningen $y = u + v$, där $u^3 + v^3 = -q = -1$ och $uv = -\frac{p}{3} = 1$. Vi sätter $v^3 = z$, vilket ger $u^3 = -1 - z$. Då gäller

$$u^3 v^3 = (-1 - z)z = 1 \quad \Rightarrow \quad z^2 + z + 1 = 0.$$

Lösningarna till denna andragradsekvation är

$$z = v^3 = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

Därmed får vi

$$u^3 = -1 - v^3 = \frac{-1 \mp i\sqrt{3}}{2}$$

För att ta kubikrötterna skriver vi dessa i polär form:

$$v^3 = e^{i2\pi/3}, \quad u^3 = e^{-i2\pi/3}.$$

En kubikrot erhålls då genom att dela argumentet med 3, vilket ger

$$v = e^{i2\pi/9}, \qquad u = e^{-i2\pi/9}.$$

Därmed fås

$$y_1 = u + v = e^{i2\pi/9} + e^{-i2\pi/9} = 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right),$$

där vi använt Eulerformeln $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2\cos\theta$.

De två övriga rötterna erhålls genom att multiplicera u och v med de komplexa kubikrötterna till 1, $\omega = e^{2\pi i/3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ och $\omega^2 = e^{4\pi i/3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$:

$$y_2 = \omega u + \omega^2 v, \qquad y_3 = \omega^2 u + \omega v.$$

Slutligen går vi tillbaka till x med $x = y - 1$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2\cos\left(\frac{2\pi}{9}\right) - 1, \\ x_2 &= 2\cos\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}\right) - 1, \\ x_3 &= 2\cos\left(\frac{2\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}\right) - 1. \end{aligned}$$

Exempel 3.4 (Reella rötter och dubbelrot). Lös $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Här är $p = -3$, $q = 2$, så

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 1 - 1 = 0.$$

Detta betyder att ekvationen har två reella rötter, varav en dubbel.

Cardanos formel ger

$$\begin{aligned} x &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \\ x &= \sqrt[3]{-\frac{2}{2} + \sqrt{\frac{2^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{2}{2} - \sqrt{\frac{2^2}{4} + \frac{(-3)^3}{27}}} \\ x &= \sqrt[3]{-1+0} + \sqrt[3]{-1-0} \\ x &= 2\sqrt[3]{-1}. \end{aligned}$$

Eftersom diskriminanten är noll sammanfaller kubikrötterna i Cardanos formel, därav kan vi inte ta de komplexa rötterna till $2\sqrt[3]{-1}$. Detta på grund av att $uv = -\frac{p}{3}$ ska gälla.

Vi erhåller alltså

$$x = 2(-1) = -2.$$

För att hitta övriga rötter dividerar vi med $(x+2)$:

$$x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x^2 - 2x + 1) = (x+2)(x-1)^2.$$

Alltså

$$x = -2, \quad x = 1 \text{ (dubbelrot)}.$$

Exempel 3.5 (En reell och två komplexa rötter). Lös $x^3 - 3x + 4 = 0$.

Här är $p = -3$, $q = 4$, vilket ger

$$\Delta = \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = 4 - 1 = 3 > 0.$$

Alltså endast en reell rot. Cardanos formel ger

$$x = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{3}} + \sqrt[3]{-2 - \sqrt{3}}.$$

De två övriga rötterna erhålls genom att utnyttja att varje kubikrot har tre grenar.

Vi sätter

$$u = \sqrt[3]{-2 + \sqrt{3}}, \qquad v = \sqrt[3]{-2 - \sqrt{3}}.$$

Eftersom

$$u^3 v^3 = (-2 + \sqrt{3})(-2 - \sqrt{3}) = 1$$

gäller $uv = 1$. Låt $\omega = e^{2\pi i/3}$ vara en komplex kubikrot till 1. De tre lösningarna ges då av

$$\begin{aligned} x_1 &= u + v, \\ x_2 &= \omega u + \omega^2 v, \\ x_3 &= \omega^2 u + \omega v. \end{aligned}$$

Här är x_1 den reella roten, medan x_2 och x_3 bildar ett komplext konjugatpar.

Anmärkning 3.6. Cardanos metod illustrerar hur Viètes samband mellan koefficienter och rötter kan användas för att reducera ett polynom till en enklare form. Den sänkta kubiken saknar andragradsterm, vilket gör att lösningen kan hittas genom att införa två nya termer vars kuber balanserar ekvationen. I nästa avsnitt följer vi samma idé för fjärdegradsekvationer: Ferrari reducerade den till en kubisk *resolvent*, som i sin tur löses med just Cardanos metod.

4 Grad 4 - Ferraris metod

4.1 Från Cardano till Ferrari

Ferrari, som arbetade tillsammans med Cardano, utgick från samma grundläggande idé: att reducera en ekvation av högre grad till en ekvation lägre grad genom smarta substitutioner. Janson framhåller att Ferraris metod bör ses som en direkt vidareutveckling av Cardanos, där lösningen av fjärdegradsekvationen reduceras till en kubisk resolvent som kan behandlas med redan etablerade metoder [Jan10]. Precis som Cardano arbetade han i en kropp K med karaktäristik 0, vilket gör det möjligt att dela med tal som 2, 3 och 4 utan problem.

Vi betraktar fjärdegradsekvationen

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0.$$

och observerar att man först kan eliminera kubiktermen genom substitutionen

$$x = y - \frac{b}{4a}.$$

Detta skifte motsvarar en ”förflyttning av grafen” horisontellt, så att symmetrin centreras kring y-axeln. Efter denna substitution, och efter förenkling av termerna, erhålls den *sänkta kvartiken*

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0,$$

där

$$p = \frac{c}{a} - \frac{3b^2}{8a^2}, \quad q = \frac{d}{a} - \frac{bc}{2a^2} + \frac{b^3}{8a^3}, \quad r = \frac{e}{a} - \frac{bd}{4a^2} + \frac{b^2c}{16a^3} - \frac{3b^4}{256a^4}.$$

Syftet är nu att genom en smart konstruktion skriva ekvationen som en *perfekt kvadrat* och därefter lösa den.

4.2 Sats och bevis

Sats 4.1 (Ferraris formel)**.** *Varje sänkt fjärdegradsekvation*

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0$$

kan lösas med radikaler genom att först bestämma en lösning z till den kubiska resolventen

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0.$$

Med denna lösning kan fjärdegradsekvationen reduceras till två andragradsekvationer vars lösningar ger de fyra rötterna till den ursprungliga ekvationen.

Bevis. Utgångspunkten är den sänkta kvartiken

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0.$$

Vi flyttar över de lägre termerna:

$$y^4 + py^2 = -qy - r.$$

För att kunna skriva vänsterledet som en kvadrat kompletterar vi med p^2:

$$y^4 + 2py^2 + p^2 = py^2 - qy - r + p^2.$$

Vänsterledet kan då skrivas som en perfekt kvadrat:

$$(y^2 + p)^2 = py^2 - qy - r + p^2.$$

Ferraris idé är nu att försöka göra även högerledet till en perfekt kvadrat i y. För detta inför vi en ny parameter z och adderar uttrycket

$$2z(y^2 + p) + z^2$$

på båda sidor av ekvationen. Vänsterledet blir då

$$(y^2 + p)^2 + 2z(y^2 + p) + z^2 = (y^2 + p + z)^2.$$

Högerledet utvecklas till

$$py^2 - qy - r + p^2 + 2z(y^2 + p) + z^2 = (p + 2z)y^2 - qy + (2pz + z^2 - r + p^2).$$

Ekvationen kan alltså skrivas som

$$(y^2 + p + z)^2 = (p + 2z)y^2 - qy + (2pz + z^2 - r + p^2).$$

Högerledet är ett andragradspolynom i y. För att högerledet ska vara kvadraten av ett linjärt uttryck i y krävs och räcker det att det har en dubbelrot, vilket är ekvivalent med att dess diskirminant är noll. Detta krav ger ett villkor på parametern z, med

$$A = p + 2z, \quad B = -q, \quad C = 2pz + z^2 - r + p^2$$

får vi diskriminantvillkoret

$$\Delta = B^2 - 4AC = (-q)^2 - 4(p + 2z)(2pz + z^2 - r + p^2) = 0.$$

Efter utveckling och insamling av termer erhålls den kubiska ekvationen

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0.$$

Denna ekvation kallas den *kubiska resolventen* till den ursprungliga kvartiken. Resolventen uttrycker exakt det villkor på z som krävs för att högerledet ska bli en perfekt kvadrat och där med möjliggöra en faktorisering av kvartiken. Som diskuteras hos Janson följer denna konstruktion systematiskt av krav på symmetriska polynom i rötterna[Jan10].

Antag nu att z är en reell lösning till resolventen. Vi återgår då till ekvationen

$$(y^2 + p + z)^2 = (p + 2z)y^2 - qy + (2pz + z^2 - r + p^2),$$

och noterar att högerledet, för detta val av z, är kvadraten av ett linjärt uttryck i

y. Det finns alltså reella tal A, B sådana att

$$(p + 2z)y^2 - qy + (2pz + z^2 - r + p^2) = (Ay + B)^2,$$

med

$$A = \sqrt{p + 2z}, \qquad B = -\frac{q}{2A}.$$

Ekvationen kan då skrivas som

$$(y^2 + p + z)^2 = (Ay + B)^2.$$

Genom att ta kvadratroten på båda sidor (med båda tecknen) får vi

$$y^2 + p + z = \pm(Ay + B).$$

Detta ger två andragradsekvationer:

$$y^2 - Ay + (p + z - B) = 0, \qquad y^2 + Ay + (p + z + B) = 0.$$

Därmed är den ursprungliga fjärdegradsekvationen faktoriserad i två andragradspolynom, som båda kan lösas med den kvadratiska formeln. □

Anmärkning 4.2. Hjälpvariabeln z väljs så att högerledet blir en perfekt kvadrat. Den kubiska resolventen som uppstår kan lösas med *Cardanos metod*. Ferraris metod är därför ett naturligt nästa steg i den historiska utvecklingen: lösningen av den fjärde graden reduceras till lösningen av den tredje.

4.3 Exempel

Exempel 4.3 (Osänkt kvartisk med fyra reella rötter (hela Ferraris metod)). Lös ekvationen

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - \frac{17}{8} = 0.$$

Vi identifierar koefficienterna

$$a = 1, \quad b = 4, \quad c = 4, \quad d = -1, \quad e = -\frac{17}{8}.$$

För att reducera till en sänkt kvartisk använder vi substitutionen

$$x = y - \frac{b}{4a} = y - \frac{4}{4} = y - 1,$$

vilket eliminerar tredjegradstermen. Insättning ger

$$\begin{aligned} x^4 + 4x^3 + 4x^2 - x - \frac{17}{8} &= (y-1)^4 + 4(y-1)^3 + 4(y-1)^2 - (y-1) - \frac{17}{8} \\ &= y^4 - 2y^2 - y - \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Alltså erhålls den sänkta kvartiken

$$y^4 + py^2 + qy + r = 0, \qquad p = -2,\ q = -1,\ r = -\frac{1}{8}.$$

Enligt Ferraris metod (se föregående bevis) bestäms först den kubiska resolventen

$$z^3 + 2pz^2 + (p^2 - 4r)z - q^2 = 0,$$

vilket i detta fall ger

$$z^3 - 4z^2 + \frac{9}{2}z - 1 = 0.$$

För att lösa resolventen använder vi Cardanos metod. Vi reducerar först till sänkt kubik genom substitutionen

$$z = u - \frac{b}{3a} = u + \frac{4}{3}.$$

Insättning ger

$$u^3 - \frac{5}{6}u + \frac{7}{27} = 0.$$

Vi identifierar

$$P = -\frac{5}{6}, \qquad Q = \frac{7}{27}.$$

Diskriminanten ges av

$$\Delta = \left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P}{3}\right)^3 = \left(\frac{7}{54}\right)^2 + \left(-\frac{5}{18}\right)^3 = -\frac{1}{216} < 0.$$

Resolventen har alltså tre reella lösningar.

Enligt Cardanos formel fås

$$u = \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-\frac{Q}{2} - \sqrt{\Delta}} = \sqrt[3]{-\frac{7}{54} + \sqrt{-\frac{1}{216}}} + \sqrt[3]{-\frac{7}{54} - \sqrt{-\frac{1}{216}}}.$$

Dessa uttryck förenklas till

$$u = \frac{2}{3},$$

och därmed

$$z = u + \frac{4}{3} = \frac{2}{3} + \frac{4}{3} = 2.$$

Eftersom

$$p + 2z = -2 + 4 = 2 > 0$$

kan Ferraris faktorisering genomföras. Vi sätter

$$A = \sqrt{p + 2z} = \sqrt{2}, \qquad B = -\frac{q}{2A} = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

Då gäller

$$(y^2 + p + z)^2 = (Ay + B)^2,$$

det vill säga

$$(y^2)^2 = (\sqrt{2}y + \frac{1}{2\sqrt{2}})^2.$$

Vi tar kvadratroten ur och får

$$y^2 = \pm(\sqrt{2}y + \frac{1}{2\sqrt{2}}).$$

Detta leder till två andragradsekvationer:

$$y^2 - \sqrt{2}y - \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0, \qquad y^2 + \sqrt{2}y + \frac{1}{2\sqrt{2}} = 0.$$

Dessa ger lösningarna

$$y = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 + \sqrt{2}}}{2}, \qquad y = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}.$$

Slutligen återgår vi till $x = y - 1$ och erhåller

$$x = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} - 1, \qquad x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} - 1.$$

Vi har alltså fyra reella rötter.

Anmärkning 4.4. Här löste vi kubiken med Cardanos metod av pedagogiska skäl, men vi hade enkelt kunnat pröva heltal och observera att

$$z^3 - 4z^2 + \frac{9}{2}z - 1 = 0$$

har roten $z = 2$ och välja den eftersom den ger positiva $p + 2z$ för nästa steg.

Exempel 4.5 (Sänkt kvartisk med två reella och två komplexa rötter)*.* Lös ekvationen

$$y^4 - 2y^2 - y + \frac{1}{6} = 0.$$

Här är

$$p = -2, \quad q = -1, \quad r = \frac{1}{6}.$$

Ferraris resolvent blir således

$$z^3 - 4z^2 + \frac{10}{3}z - 1 = 0.$$

För att undvika bråktal multiplicerar vi med 3 och erhåller

$$3z^3 - 12z^2 + 10z - 3 = 0,$$

och ser att $z = 3$ är en rot.

Vi kontrollerar villkoret

$$p + 2z = -2 + 6 > 0.$$

Därav kan vi sätta

$$A = \sqrt{p+2z} = 2, \quad B = -\frac{q}{2A} = \frac{1}{4}$$

och faktorisera enligt

$$(y^2 + p + z)^2 = (Ay + B)^2.$$

Det vill säga

$$(y^2 + 1)^2 = (2y + \frac{1}{4})^2,$$

vilket ger de två andragradsekvationerna

$$y^2 - 2y + \frac{3}{4} = 0, \qquad y^2 + 2y + \frac{5}{4} = 0.$$

Dessa har lösningarna

$$y = \frac{2 \pm 1}{2}, \qquad y = -1 \pm \frac{i}{2}.$$

Vi har alltså två reella rötter och ett komplext konjugatpar.

Anmärkning 4.6. I detta exempel startade vi på en redan sänkt kvartik (därav benämner vi variabeln y) och identifierade en positiv rot till resolventen utan Cardanos metod. Se exempel 4.3 för fullständig metod.

Exempel 4.7 (Dubbelrötter (bikvadratisk)). Lös ekvationen

$$x^4 + 4x^3 + 4x^2 = 0.$$

Vi sänker kvartiken genom substitutionen

$$x = y - 1,$$

och erhåller

$$y^4 - 2y^2 + 1 = 0,$$

där

$$p = -2, \quad q = 0, \quad r = 1.$$

Observera att vi har en bikvadratisk ekvation efter sänkning och rötterna hittar vi egentligen enkelt via substitution, men jag följer metoden av pedagogiska skäl.

Eftersom $q = 0$ har vi resolventen

$$0 - 4(-2 + 2z)(-4z + z^2 - 1 + 4) = 0,$$

alltså

$$2z - 2 = 0,$$

eller

$$z^2 - 4z + 3 = 0.$$

Dessa har lösningarna $z = 1$ och $z = 3$. Vi väljer $z = 3$ som ger $A > 0$.

Ferrari-faktorisering ger nu

$$A = \sqrt{-2 + 6} = \sqrt{4}, \qquad B = -\frac{0}{2\sqrt{4}} = 0.$$

Vi har därav

$$(y^2 + 1)^2 = (\sqrt{4}y)^2,$$

och efter kvadratrotsdragning erhåller vi andragradsekvationerna

$$y^2 + 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y + 1)^2 = 0, \qquad y^2 - 2y + 1 = 0 \Leftrightarrow (y - 1)^2 = 0.$$

Dessa har dubbelrötterna $y = -1$ respektive $y = 1$ och återgången till x ger dubbelrötterna $x = -2$ respektive $x = 0$.

4.4 Sammanfattning

Ferraris metod bygger på samma princip som Cardanos:

- eliminera den näst högsta graden genom substitution,
- komplettera kvadraten i flera steg, reducera till en lägre ekvation som kan lösas exakt.

Det utgör därmed den sista i raden av klassiska formler för polynom av låg grad. Därefter visade Ruffini, Abel och Galois att ingen allmän formel med rotutdrag existerar för femte graden och högre [Jan10].

5 Ingen generell formel för grad ≥ 5

Efter Cardano och Ferrari försökte flera matematiker under 1500- och 1600-talen finna en motsvarande generell lösningsmetod för femtegradsekvationer. För kubiska och kvartiska ekvationer hade man sett att det var möjligt att, genom lämpliga substitutioner och algebraiska manipulationer, reducera polynomet till successiva rotutdrag. Det var därför naturligt att hoppas på en liknande strategi även för högre gradtal.

Trots omfattande försök visade det sig dock omöjligt att konstruera en sådan metod för allmänna femtegradspolynom. År 1799 hävdade Ruffini att någon generell lösningsformel med enbart elementära operationer och rotutdrag inte kan existera. Hans argument var ofullständigt, men idén vidareutvecklades och Abel gav år 1824 ett fullständigt och rigoröst bevis för att en sådan formel är omöjlig. Detta resultat är idag känt som *Abel-Ruffinis sats*.

Den djupare förklaringen till detta fenomen gavs kort därefter av Galois. Som beskrivs i [Jan10] kopplade Galois lösbarheten av ett polynom till strukturen hos dess *Galoisgrupp*, det vill säga gruppen av permutationer av rötterna som bevarar alla algebraiska relationer mellan dem. För vissa femtegradspolynom är denna grupp den fullständiga symmetriska gruppen S_5.

Den avgörande observationen är att gruppen S_5 inte är *lösbar*. Detta innebär att rötterna inte kan konstrueras genom en följd av kroppsutvidgningar som motsvarar successiva rotudrag. Med andra ord finns det ingen formel, analog med Cardanos eller Ferraris, som uttrycker rötterna till ett godtyckligt femtegradspolynom med hjälp av endast elementära operationer och radikaler.

Därmed finns ingen generell lösningsformel för polynom av grad fem eller högre. Detta resultat markerar en viktig vändpunkt i matematikens historia, där fokus förskjuts från explicita beräkningsmetoder till strukturella och abstrakta samband. Abels och Galois arbeten lade därmed grunden för den moderna algebra som utvecklades under 1800-talet.

Denna gräns för formelbaserade lösningar kan förstås fullt ut först genom Galoisteorin, där sambandet mellan polynomets symmetrier och dess lösbarhet via radikaler analyseras systematiskt [DF04].

5.1 Intuitiv tolkning av Galois idé

Galoisteori kan i detta sammanhang förstås som ett sätt att studera hur rötterna till ett polynom ”hänger ihop” snarare än att beräkna dem explicit. I stället för att försöka skriva ner rötterna undersöker man vilka symmetrier som finns mellan dem.

För ett givet polynom kan man betrakta alla sätt att permutera rötterna utan att de algebraiska relationerna mellan dem förändras. Dessa permutationer bildar en struktur som kallas polynomets Galoisgrupp. Ju större och mer komplex denna grupp är, desto mer komplicerat är samspelet mellan rötterna.

Att en ekvation är *lösbar med radikaler* betyder att dess rötter kan konstrueras stegvis genom att upprepade gånger använda de fyra räknesätten och ta kvadratrötter, kubikrötter och högre rotudrag. Varje sådant steg motsvarar i Galoisteori att symmetrierna mellan rötterna förenklas successivt. Denna tolkning av lösbarhet som en successiv reduktion av symmetrier följer den intuitiva framställning av Galoisteori som ges av Mertens [Mer21].

För ekvationer av grad högst fyra är Galoisgruppen alltid tillräckligt enkel för att kunna brytas ned i sådana steg. För vissa femtegradspolynom är därmed Galoisgruppen den fullständiga symmetriska gruppen S_5, vilket innebär att *alla* permutationer av de fem rötterna är möjliga. Denna grupp är för komplex för att kunna reduceras stegvis på det sätt som rotutdrag kräver, och man säger därför att S_5 inte är lösbar.

Konsekvensen är att det inte finns någon generell metod som, med hjälp av enbart elementära operationer och radikaler, kan återskapa alla rötter till ett godtyckligt femtegradspolynom. Begränsningen ligger alltså inte i beräkningstekniken, utan i polynomets inre algebraiska struktur [Mer21, DF04].

6 Slutsatser

Syftet med detta arbete har varit att med moderna algebraiska begrepp analysera de klassiska lösningsmetoderna för polynom av tredje och fjärde graden. Genom att formulera Cardanos och Ferraris metoder med hjälp av polynomringar, Viètes relationer och symmetriska polynom har de bakomliggande algebraiska idéerna tydliggjorts, snarare än att enbart presentera slutliga formler.

En gemensam slutsats för båda metoderna är att de bygger på systematiska substitutioner som reducerar polynomets form. I det kubiska fallet leder detta till den sänkta kubiken, där andragradstermen elimineras och ekvationen kan lösas genom kubkomplettering. För fjärdegradspolynom används en liknande strategi: efter eliminering av tredjegradstermen konstrueras en kubisk resolvent, vars lösning möjliggör faktorisering av kvartiken i två andragradsekvationer. Ferraris metod kan därmed ses som en direkt vidareutveckling av Cardanos.

Arbetet visar också hur diskriminanten fungerar som ett sammanhållande verktyg i analysen av rötterna. För både kubiska och kvartiska polynom ger diskriminanten information om multipla rötter och om fördelningen mellan reella och komplexa lösningar. Att diskriminanten kan uttryckas i koefficienterna via symmetriska polynom illustrerar på ett konkret sätt sambandet mellan rötternas inbördes relationer och polynomets algebraiska form.

Avslutningsvis har arbetet placerats i ett bredare matematiskt sammanhang genom diskussionen om varför motsvarande lösningsmetoder inte kan generaliseras till polynom av grad fem eller högre. Resultaten av Ruffini, Abel och Galois visar att begränsningen inte beror på brist på tekniska beräkningsmetoder, utan på polynomets struktur. I detta perspektiv framstår Cardanos och Ferraris formler som de sista generella lösningarna med radikaler, samtidigt som de motiverar övergången till mer abstrakta teorier inom algebran.

Sammanfattningsvis ger arbetet en sammanhängande bild av hur klassiska lösningsmetoder för låga gradtal kan förstås och motiveras med modern algebra. Fokus har legat på metodernas struktur, deras inbördes samband och deras matematiska begränsningar, snarare än på beräkningsdetaljer.

Referenser

[DF04] David S. Dummit and Richard M. Foote. Abstract algebra. https://rksmvv.ac.in/wp-content/uploads/2021/04/David_S_Dummit_Richard_M_Foote_Abstract_Algeb_230928_225848.pdf, 2004.

[Jan10] Svante Janson. Roots of polynomials of degrees 3 and 4. https://www2.math.uu.se/~svantejs/papers/sjN7.pdf, 2010. Uppsala universitet. Refererar till Cardano, Ferrari m.fl.

[Mer21] Michael H. Mertens. Galois theory lecture notes. https://www.math.rwth-aachen.de/~Michael.Mertens/GaloisTheory.pdf, 2021. Spring 2021, priv.-Doz. Dr. Michael H. Mertens.