



# SJÄLVSTÄNDIGA ARBETEN I MATEMATIK

MATEMATISKA INSTITUTIONEN, STOCKHOLMS UNIVERSITET

## Sturm-Liouville-teorin

av

**Jessica Ramström**

2025 - No L6



# Sturm-Liouville-teorin

Jessica Ramström

---

Självständigt arbete i matematik 15 högskolepoäng, grundnivå

Handledare: Pavel Kurasov

2025



## **AI-Statement**

I detta arbete har AI använts som stöd i arbetsprocessen. ChatGPT har använts för hjälp med LaTeX-formatering och som bollplank vid utformningen av vissa avsnitt. ChatGPT kan t.ex. ha fått läsa igenom ett avsnitt och komma med förbättringsförslag gällande syntax. Vid användning av AI har ett kritiskt förhållningssätt tillämpats.

## **Abstract**

This thesis presents the fundamentals of Sturm–Liouville theory, which provides a framework for a class of second-order differential equations. Properties of the solutions of these equations, known as eigenfunctions, are discussed and proved. In particular, the orthogonality of eigenfunctions and Sturm’s comparison theorem are established. Furthermore, a method for solving Sturm–Liouville problems is described and illustrated with a concrete example. Finally, the influence of boundary conditions on the eigenvalues and the associated eigenfunctions is examined.

## **Sammanfattning**

I denna uppsats beskrivs grunderna i Sturm-Liouville-teorin. Teorin utgör ett ramverk för en viss typ av andragradens differentialekvationer. Egenskaper för ekvationernas lösningar, egenfunktionerna, redogörs för och bevisas. Mer specifikt bevisas egenfunktionernas ortogonalitet samt Sturms jämförelsesats. Vidare beskrivs en lösningsmetod för Sturm-Liouville-problem vilket illustreras med ett konkret exempel. Slutligen undersöks randvillkorens påverkan på egenvärdena och de tillhörande egenfunktionerna.

## Förord

Jag vill rikta ett stort tack till min handledare, Pavel Kurasov, för hans tid, engagemang och värdefulla vägledning under uppsatsens genomförande.

Jag vill även tacka min sambo, Oskar, för hans oavbrutna uppmuntran och stöd under mina studier. Slutligen vill jag tacka min dotter, Nora, som både satte arbetet på paus och gav mig motivationen till att slutföra det.



# Innehåll

<b>1</b>	<b>Introduktion</b>	<b>11</b>
<b>2</b>	<b>Översikt av Sturm-Liouville-teorin</b>	<b>12</b>
2.1	Egenvärdena är reella . . . . .	13
2.2	Egenvärdena går mot $+\infty$ . . . . .	13
2.3	Egenfunktionerna har $(n - 1)$ rötter . . . . .	13
2.4	Egenfunktionerna kan väljas reellvärda . . . . .	14
2.5	Egenfunktionerna är ortogonala . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Varför krävs det att <math>p(x) &gt; 0</math>?</b>	<b>15</b>
<b>4</b>	<b>Egenfunktionernas ortogonalitet</b>	<b>16</b>
<b>5</b>	<b>Sturms jämförelsesats</b>	<b>18</b>
<b>6</b>	<b>Exempel: Fallet <math>p(x) = r(x) = 1</math>, <math>q(x) = 0</math></b>	<b>20</b>
6.1	Beräkning av $y_n$ och $\lambda_n$ . . . . .	20
6.2	Illustrationer av fallet . . . . .	22
<b>7</b>	<b>Randvillkorens påverkan på <math>y_n</math> och <math>\lambda_n</math></b>	<b>24</b>
7.1	När $p = r = 1$ och $q = 0$ : . . . . .	24
7.1.1	Dirichlet-villkor: . . . . .	24
7.1.2	Neumann-villkor: . . . . .	25
7.1.3	Blandade villkor: . . . . .	25
7.2	När $p$ , $q$ och $r$ antar andra värden: . . . . .	26
<b>8</b>	<b>Diskussion och slutsats</b>	<b>28</b>
	<b>Referenser</b>	<b>29</b>



# 1 Introduktion

Differentialekvationer spelar en central roll inom stora delar av vetenskapen. De används för att beskriva hur system förändras över tid och rum, och utgör ett grundläggande verktyg för att formulera matematiska modeller av verkligheten. Detta sammanfattas träffande av Simmons och Krantz:

Många naturlagar – inom fysiken, kemin, biologin, ingenjörsvetenskaperna och astronomin – uttrycks naturligast på differentialekvationernas språk. Differentialekvationer är med andra ord naturens uttryckssätt. [SK11, s. 1]

Att lösa en differentialekvation innebär att bestämma en eller flera *funktioner*. Det är således ett nytt paradig från de algebraiska ekvationerna, där ett eller flera *tal* bestäms.

En teori för studiet av differentialekvationer är Sturm–Liouville-teorin. Den är uppkallad efter Jacques Charles François Sturm (1803–1855) och Joseph Liouville (1809–1882), två framstående matematiker. Teorin bidrar med ett ramverk för att lösa en speciell typ av differentialekvationer. Kärnan i teorin är Sturm–Liouville-problemen, där egenfunktioner och egenvärden används för att beskriva fysiska system. Genom att kombinera avancerad matematik med praktisk tillämpbarhet skapar teorin en bro mellan teori och verklighet.

I denna uppsats kommer vi att utforska de matematiska grunderna i Sturm–Liouville-teorin och söka nå en djupare förståelse för Sturm–Liouville-problem. Mer konkret kommer vi i denna uppsats att

1. översiktligt beskriva teorin,
2. förklara varför det krävs att  $p(x) > 0$ ,
3. visa att egenfunktionerna är ortogonala,
4. presentera och bevisa Sturms jämförelsesats,
5. betrakta fallet  $p(x) = r(x) = 1$ ,  $q(x) = 0$ ,
6. undersöka hur randvillkor påverkar egenfunktioner och egenvärden.

## 2 Översikt av Sturm-Liouville-teorin

Generellt handlar Sturm-Liouville-teorin om att lösa en differentialekvation på formen

$$-\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = \lambda r(x)y, \quad (1)$$

där:

- $y$  är den okända funktionen vi söker, kallad *egenfunktion*,
- $\lambda$  är en konstant, kallad *egenvärde*,
- $p(x), q(x), r(x)$  är kända kontinuerliga reellvärda funktioner som definieras på ett specifikt intervall  $[a, b]$ . Ekvationen (1) kan lösas explicit om dessa funktioner är konstanta.
- $p(x) > 0$  och  $r(x) > 0$  för alla  $x$  i intervallet.  $r(x)$  kallas ofta viktfunktion eller densitetsfunktion.

Ekvation (1) kallas Sturm-Liouville-ekvation. I litteraturen kan tecknet framför andraderivatan och  $\lambda$  variera. Vi har valt denna teckenkonvention eftersom den medför att  $\lambda_n$  bildar en växande följd som går mot  $+\infty$  när  $n \rightarrow \infty$ , vilket är standard i många tillämpningar.

Ekvationen (1) tillsammans med randvillkor i ändpunkterna av intervallet  $[a, b]$  bildar ett Sturm-Liouville-problem (SLP). Randvillkoren har formen:

$$\begin{cases} k_1 y'(a) + k_2 y(a) = 0, \\ k_3 y'(b) + k_4 y(b) = 0, \end{cases}$$

där  $k_1, k_2, k_3, k_4$  är reella konstanter.

Målet med ett givet SLP är

- att hitta egenvärdena,  $\lambda_n$ , som ger en icke-trivial lösning till problemet,
- att för varje  $\lambda_n$  hitta den motsvarande egenfunktionen  $y = y_n(x)$ .

Av Sturm-Liouville-teorin följer ett antal viktiga egenskaper hos lösningarna, nämligen:

- att egenvärdena är reella,
- att egenvärdena går mot  $\infty$ ,
- att egenfunktionerna har  $(n - 1)$  nollställen,
- att egenfunktionerna kan väljas reellvärda,
- att egenfunktionerna är ortogonala.

Detta ska vi gå igenom nedan.

## 2.1 Egenvärdena är reella

Vi börjar med att visa att egenvärdena är reella. För läsbarhetens skull övergår vi till primnotation. Om vi multiplicerar ekvation (1) med  $\bar{y}$  och integrerar får vi

$$- \int_a^b \left( (py')' \bar{y} + q|y|^2 \right) dx = \lambda \int_a^b r|y|^2 dx.$$

vilket efter partiell integration blir

$$\left[ p y' \bar{y} \right]_a^b + \int_a^b \left( p|y'|^2 + q|y|^2 \right) dx = \lambda \int_a^b r|y|^2 dx.$$

Första termen blir

$$p(b)y'(b)\bar{y}(b) - p(a)y'(a)\bar{y}(a) = p(b) \left( -\frac{k_4}{k_3} \right) |y(b)|^2 - p(a) \left( -\frac{k_2}{k_1} \right) |y(a)|^2,$$

vilken är reell. De återstående termerna i vänsterledet är reella samtidigt som  $\int r|y|^2 dx$  är reell och skild från noll. Därmed följer att egenvärdet  $\lambda$  är reellt.

## 2.2 Egenvärdena går mot $+\infty$

Vi antar att  $q > 0$ . Då existerar det oändligt många positiva egenvärden  $\lambda_n$  sådana att  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \lambda_{n+1} < \dots$ . Dessutom,  $\lambda_n \rightarrow +\infty$  när  $n \rightarrow \infty$ . [AA15, s. 190]

## 2.3 Egenfunktionerna har $(n - 1)$ rötter

Varje egenvärde  $\lambda_n$  har en egenfunktion  $y_n$  med exakt  $(n - 1)$  rötter. Detta innebär exempelvis för ett SLP med Dirichlet randvillkor (se avsnitt 7) på intervallet  $(a, b)$  att  $y_1$  har noll rötter,  $y_2$  har en rot,  $y_3$  har två rötter, och så vidare.

## 2.4 Egenfunktionerna kan väljas reellvärda

Till varje egenvärde finns en egenfunktion  $y(x)$  som kan väljas reell. Vi kan konstruera en reell egenfunktion

$$y_{\text{reell}}(x) = \frac{y(x) + \overline{y(x)}}{2}.$$

Att den är reell följer av att summan av ett komplext tal och dess komplexkonjugat alltid är reell.

Om  $y_{\text{reell}}(x)$  är identiskt noll kan vi istället använda

$$y_{\text{imaginär}}(x) = \frac{y(x) - \overline{y(x)}}{2i}.$$

Båda dessa funktioner är reella och uppfyller samma randvillkor som  $y(x)$ . Därmed kan vi alltid välja egenfunktioner som är reella.

## 2.5 Egenfunktionerna är ortogonala

Om  $y_i$  och  $y_j$  är egenfunktioner till ett SLP som svarar mot till de olika egenvärdena  $\lambda_i$  och  $\lambda_j$  (där  $\lambda_i \neq \lambda_j$ ), så är egenfunktionerna ortogonala med avseende på viktfunktionen  $r(x)$  på intervallet  $[a, b]$ . Det innebär att:

$$\int_a^b r(x) y_i(x) y_j(x) dx = 0, \quad \text{för } i \neq j.$$

I avsnitt 4 bevisar vi detta.

### 3 Varför krävs det att $p(x) > 0$ ?

I Sturm-Liouville-teorin krävs det att  $p(x) > 0$ . En anledning till detta kommer vi att diskutera nedan.

Vi antar att vi redan har en känd, icke-trivial lösning,  $u(x)$ , till Sturm-Liouville-ekvationen. Vi vet från teorin om andragsrads linjära ODE:er att det alltid finns två linjärt oberoende lösningar. För att finna den andra lösningen kan vi använda oss av den så kallade "variation of constants"-formeln:

$$v(x) = u(x) \int \frac{1}{p(t) u(t)^2} dt,$$

där

- $u(x)$  är den första (kända) lösningen till differentialekvationen,
- $v(x)$  är den andra lösningen som vi konstruerar med hjälp av  $u(x)$ .

Om  $p(t) = 0$  blir nämnaren i integranden noll, vilket innebär att den andra lösningen kommer att få singularitet. Att en funktion får singularitet innebär att dess värde vid en viss punkt blir oändligt eller odefinierat. Kravet  $p(x) > 0$  säkerställer därmed att integranden inte blir oändlig, att lösningen  $v(x)$  är definierad och att ekvationen har två kontinuerliga lösningar.

I ett SLP måste dessutom randvillkoren kunna tillämpas på de lösningar som tillåts. Om en lösning är obegränsad på intervallet är randvillkoren inte längre meningsfulla, eftersom funktionens värden eller derivator då inte är väldefinierade. Detta är ytterligare en anledning till att Sturm-Liouville-teorin kräver att  $p(x) > 0$ .

## 4 Egenfunktionernas ortogonalitet

Som nämnt i avsnitt 2.5 är egenfunktionerna  $y_i, y_j$  till ett givet SLP ortogonala. Detta ska vi visa nedan.

Vi börjar med att stoppa in dessa funktioner i vår ursprungliga Sturm-Liouville-ekvation (1) och får

$$-(py'_i)' + qy_i - \lambda_i r y_i = 0, \quad (2)$$

$$-(py'_j)' + qy_j - \lambda_j r y_j = 0. \quad (3)$$

Vi multiplicerar ekvation (2) med  $y_j$  och ekvation (3) med  $(-y_i)$  samt adderar dessa och förenklar. Det ger oss

$$-y_j(py'_i)' + y_i(py'_j)' + (\lambda_j - \lambda_i)r y_i y_j = 0.$$

Vi flyttar över derivatatermerna till högerledet,

$$(\lambda_j - \lambda_i)r y_i y_j = y_j(py'_i)' - y_i(py'_j)',$$

och integrerar från  $a$  till  $b$

$$(\lambda_j - \lambda_i) \int_a^b r y_i y_j dx = \int_a^b ((py'_i)' y_j - (py'_j)' y_i) dx.$$

Med partiell integration i högerledet får vi

$$[py'_i y_j]_a^b - \int_a^b py'_i y'_j dx - [py'_j y_i]_a^b + \int_a^b py'_j y'_i dx,$$

vilket efter förenkling ger oss ekvationen

$$(\lambda_j - \lambda_i) \int_a^b r y_i y_j dx = [y_i p y'_j]_a^b - [y_j p y'_i]_a^b.$$

Vi stoppar in gränsvärdena och får högerledet

$$p(b) [y'_i(b)y_j(b) - y'_j(b)y_i(b)] - p(a) [y'_i(a)y_j(a) - y'_j(a)y_i(a)]. \quad (4)$$

Låt oss med  $W(x)$  beteckna Wronskis determinant

$$W(x) = y_j(x)y'_i(x) - y_i(x)y'_j(x),$$

vilket gör att vår ekvation slutligen kan skrivas som

$$(\lambda_j - \lambda_i) \int_a^b r(x) y_i y_j dx = p(b)W(b) - p(a)W(a).$$

Nu vill vi visa att ortogonaliteten håller. Vi vet sedan avsnitt 3 att  $p(x) > 0$ . För att  $y_i, y_j$  ska vara lösningar till ett SLP måste de uppfylla randvillkoren:

$$k_1 y_i'(a) + k_2 y_i(a) = 0 \text{ och } k_1 y_j'(a) + k_2 y_j(a) = 0,$$

$$k_3 y_i'(b) + k_4 y_i(b) = 0 \text{ och } k_3 y_j'(b) + k_4 y_j(b) = 0.$$

Vi noterar att om  $k_1 = 0, k_2 \neq 0 \implies y(a) = 0$  samt om  $k_3 = 0, k_4 \neq 0 \implies y(b) = 0$ . När  $y_n = 0$  blir  $W(x) = 0$  och således blir integralen noll och ortogonaliteten håller.

Antar vi istället att  $k_1, k_3 \neq 0$  kan randvillkoren skrivas

$$y_i'(a) = \frac{-k_2}{k_1} y_i(a) \text{ och } y_j'(a) = \frac{-k_2}{k_1} y_j(a),$$

$$y_i'(b) = \frac{-k_4}{k_3} y_i(b) \text{ och } y_j'(b) = \frac{-k_4}{k_3} y_j(b),$$

vilka instoppade i (4) ger oss högerledet

$$p(b) \left[ y_i(b) \frac{-k_4}{k_3} y_j(b) - y_j(b) \frac{-k_4}{k_3} y_i(b) \right] + p(a) \left[ y_j(a) \frac{-k_2}{k_1} y_i(a) - y_i(a) \frac{-k_2}{k_1} y_j(a) \right].$$

Vi ser då att termerna inom hakparenteserna tar ut varandra och blir 0 vilket leder till att  $HL = 0$ . Därmed är  $\int_a^b r(x) y_i y_j dx = 0$  ty  $\lambda_i \neq \lambda_j$ . Egenfunktionerna  $y_i$  och  $y_j$  är således ortogonala med avseende på viktfunktionen  $r(x)$ . □

Att integralen  $\int_a^b r(x) y_i y_j dx$  blir noll kan förstås intuitivt som att kurvans area av egenfunktionernas produkt "tar ut varandra". Det är således lika stor area under som över x-axeln. I avsnitt 6.2 illustreras detta.

## 5 Sturms jämförelsesats

En användbar sats inom Sturm-Liouville-teorin är Sturms jämförelsesats, vilken vi kommer att redogöra för samt bevisa i detta avsnitt. Med hjälp av satsen kan vi jämföra oscillationsbeteenden mellan lösningar till olika differentialekvationer.

**Sturms jämförelsesats:** Anta att  $q$  och  $\tilde{q}$  är positiva funktioner där  $q < \tilde{q}$ . Låt  $y$  vara en icke-trivial lösning till differentialekvationen

$$-y'' + q \cdot y = 0$$

och låt  $\tilde{y}$  vara en icke-trivial lösning till differentialekvationen

$$-\tilde{y}'' + \tilde{q} \cdot \tilde{y} = 0.$$

Då är  $y$  noll minst en gång mellan två på varandra följande nollställen till  $\tilde{y}$ .

**Bevis:** Låt  $a$  och  $b$  vara två på varandra följande nollställen till  $\tilde{y}$ . Inget nollställe finns mellan dem. Vi försöker hitta en självmotsägelse och antar att  $y$  inte är noll på det öppna intervallet  $(a, b)$ . Vi kan anta att både  $y$  och  $\tilde{y}$  är positiva på  $(a, b)$  (multiplicera annars funktionen med  $-1$ ). Observera att detta innebär att  $\tilde{y}'(a) \geq 0$  och  $\tilde{y}'(b) \leq 0$ . Då är ett uttryck som liknar Wronskis determinant med  $y$  och  $\tilde{y}$ :

$$W(x) = y(x) \cdot \tilde{y}'(x) - \tilde{y}(x) \cdot y'(x)$$

och

$$\begin{aligned} W'(x) &= y\tilde{y}'' - \tilde{y}y'', \\ &= y(\tilde{q}\tilde{y}) - \tilde{y}(qy), \\ &= (\tilde{q} - q)y\tilde{y} > 0, \end{aligned}$$

eftersom  $q < \tilde{q}$  enligt hypotesen. Integrering av den sista likheten ger att

$$W(b) - W(a) > 0 \text{ eller } W(b) > W(a). \quad (5)$$

Eftersom  $\tilde{y}$  är noll förenklas Wronskis determinant till  $y \cdot \tilde{y}'$  i  $a$  och  $b$ . Därmed är

$$W(a) = y(a)\tilde{y}'(a) \geq 0 \text{ och } W(b) = y(b)\tilde{y}'(b) \leq 0$$

vilket står i direkt motsats till ekvation (5). Motsägelsen visar att antagandet var fel — alltså måste  $y$  ha minst ett nollställe i  $(a, b)$ .  $\square$

## 6 Exempel: Fallet $p(x) = r(x) = 1$ , $q(x) = 0$

Vi betraktar fallet då  $p(x) = r(x) = 1$  och  $q(x) = 0$  med randvillkoren  $y(0) = y(1) = 0$  på intervallet  $[0, 1]$ . Vårt SLP blir därmed

$$\begin{cases} -y'' - \lambda y = 0, & 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

I praktiken kan detta problem liknas med en gitarrsträng med längden 1 som sitter fast i båda ändar. Lösningarna vi får kommer att motsvara strängens svängningsmönster vid olika frekvenser, även kallat en *harmonisk svängningsrörelse*.

### 6.1 Beräkning av $y_n$ och $\lambda_n$

Som **första steg** antar vi en lösning på formen:

$$\begin{cases} y = e^{rx}, \\ y' = r e^{rx}, \\ y'' = r^2 e^{rx}, \end{cases}$$

där  $r$  är en konstant som ska bestämmas. När vi sätter in detta i vår ekvation  $-y'' - \lambda y = 0$  får vi

$$\begin{aligned} -r^2 e^{rx} - \lambda e^{rx} &= 0, \\ r^2 e^{rx} + \lambda e^{rx} &= 0, \\ e^{rx}(r^2 + \lambda) &= 0, \\ r^2 + \lambda &= 0. \end{aligned}$$

Vårt **andra steg** blir att bestämma den generella lösningen till den karakteristiska ekvationen  $r^2 + \lambda = 0$ , vilket är

$$r = \pm i\sqrt{\lambda}.$$

Eftersom  $r$  är komplex, ty  $\lambda > 0$ , kan den generella lösningen skrivas som

$$y(x) = A \cos(\sqrt{\lambda}x) + B \sin(\sqrt{\lambda}x),$$

där  $A$  och  $B$  är reella konstanter.

När vi funnit vår generella lösning, är det **tredje steget** att tillämpa randvillkoren.

Vi börjar med  $y(0) = 0$ :

När  $x = 0$  blir lösningen

$$y(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = 0.$$

Ty  $\cos 0 = 1$  måste  $A = 0$ . Därför reduceras lösningen till

$$y(x) = B \sin(\sqrt{\lambda}x).$$

Vi går vidare till det andra randvillkoret  $y(1) = 0$ :

När  $x = 1$ , blir lösningen

$$y(1) = B \sin(\sqrt{\lambda} \cdot 1) = 0.$$

För att detta ska gälla krävs

$$\sin(\sqrt{\lambda}) = 0,$$

vilket sker när

$$\sqrt{\lambda} = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

där  $n$  är ett positivt heltal (eftersom  $n = 0$  ger den triviala lösningen  $y(x) = 0$ , och negativa  $n$  ej tillför något nytt ty  $\sin x$  är en udda funktion).

Som **fjärde steg** räknar vi ut egenvärdena  $\lambda_n$ . Från  $\sqrt{\lambda_n} = n\pi$  får vi

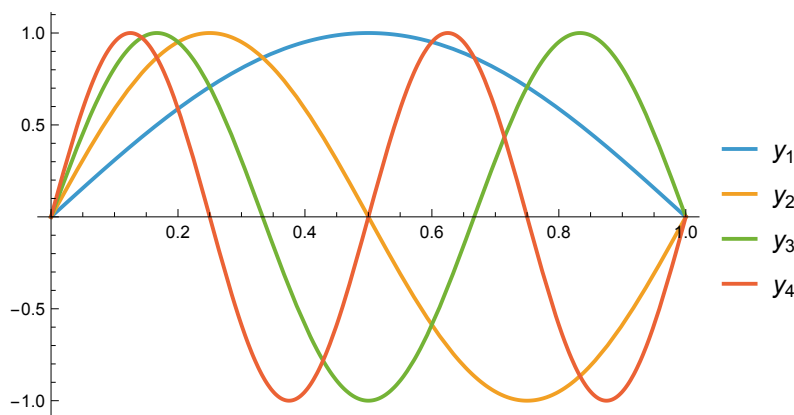
$$\lambda_n = (n\pi)^2, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

och därmed blir egenfunktionerna

$$y_n(x) = B \sin(n\pi x).$$

## 6.2 Illustrationer av fallet

Vi använder nu lösningarna från avsnitt 6.1 för att illustrera några av de egenskaper som diskuterats tidigare. I alla figurer sätts  $B = 1$ .



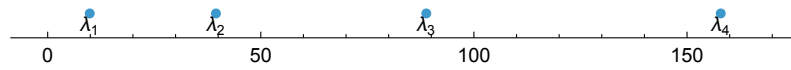
Figur 1: De fyra första egenfunktionerna.

Figur 1 visar de fyra första egenfunktionerna som löser vårt SLP. Här ser vi tydligt en av egenskaperna vi nämnde i avsnitt 2.3, nämligen att egenfunktion  $y_n$  har  $(n-1)$  rötter på  $(0, 1)$ .

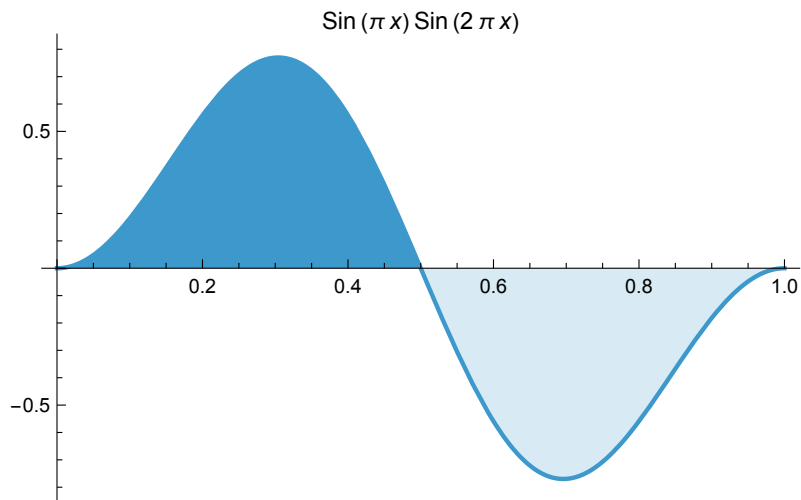
Notera att vi i början av avsnitt 6 nämnde att lösningarna, som vi nu vet är  $y_n(x) = B \sin n\pi x$ , motsvarar gitarrsträngens svängningsmönster vid olika frekvenser. Det visar sig att vid vissa frekvenser står vissa punkter på gitarrsträngen stilla, medan andra vibrerar med maximal amplitud. Det kallas för en *stående våg*. Punkterna där strängen står stilla (där kurvorna skär  $x$ -axeln) kallas *noder* medan punkterna med maximal svängning kallas *bukar*. I figur 1 ser vi en ögonblicksbild av de fyra första stående vågorna, representerade av varsin egenfunktion. Vidare avgör  $\lambda_n$  hur snabbt  $y_n$  oscillerar. Ju större  $\lambda_n$ , desto fler nollställen och därmed fler noder och bukar. Amplituden avgörs av  $B$ .

Vårt SLP uppstår när vi löser den så kallade vågekvationen, en partiell differentialekvation, genom variabelseparation. Vågekvationen beskriver vågors utbredning i exempelvis ljudvågor, elektromagnetiska vågor och vibrationer i en sträng.

Figur 2 visar vårt SLP:s fyra första egenvärden, där  $\lambda_1 = \pi^2$ ,  $\lambda_2 = (2\pi)^2$ ,  $\lambda_3 = (3\pi)^2$  och  $\lambda_4 = (4\pi)^2$ . Vi ser både att de är reella och att vi kan ordna egenvärdena längs den naturliga tallinjen, där  $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \lambda_4$ , som vi nämnde i avsnitt 2.2.



Figur 2: De fyra första egenvärdena.



Figur 3:  $\int_0^1 r(x)y_1y_2 dx = 0$

Egenfunktionernas ortogonalitet, som vi både nämnde i avsnitt 2.5 och bevisade i avsnitt 4, illustreras i figur 3. Multiplicerar vi de två första egenfunktionerna,  $y_1$  och  $y_2$ , med viktfunktionen  $r(x) = 1$  får vi ovan kurva. Vi ser att areorna över respektive under kurvan tar ut varandra och blir noll.

## 7 Randvillkorens påverkan på $y_n$ och $\lambda_n$

Det finns några typiska randvillkor för Sturm-Liouville-problem. Två stycken som är vanligt förekommande är Dirichlet-villkor och Neumann-villkor. Dirichlet-villkor specificerar funktionens värde vid randen av intervallet, medan Neumann-villkor specificerar värdet på funktionens derivata vid randen av intervallet. Vanligtvis sätts dessa enligt:

- Dirichlets randvillkor:  $y(a) = y(b) = 0$ ,
- Neumann randvillkor:  $y'(a) = y'(b) = 0$ ,

på ett intervall  $[a, b]$ . När vi sätter dessa till 0 enligt ovan kallas villkoren för homogena.

Vi ska nu undersöka hur olika randvillkor påverkar egenfunktioner och egenvärden. Vi kommer först att utgå från förutbestämda värden på  $p, q$  och  $r$ , för att sedan gå vidare till fallet där  $p, q$  och  $r$  fortfarande är konstanta men inte längre givna.

### 7.1 När $p = r = 1$ och $q = 0$ :

För nedan gäller  $p = r = 1$  och  $q = 0$  och intervallet  $[0, L]$ .

#### 7.1.1 Dirichlet-villkor:

Med Dirichlet-villkor blir vårt SLP

$$\begin{cases} -y'' - \lambda y = 0, & 0 < x < L, \\ y(0) = 0, \\ y(L) = 0. \end{cases}$$

För att lösa problemet använder vi de **fyra stegen** som vi visade i avsnitt 6.1. Lösningarna blir sinusformade. Vi kan notera att problemet är likadant som i avsnitt 6, bortsett från att vårt intervall i detta fall är  $[0, L]$ .

Egenvärdena är

$$\lambda_n^{\text{DD}} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,$$

med tillhörande egenfunktioner

$$y_n(x) = B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

där  $n = 1, 2, 3, \dots$

### 7.1.2 Neumann-villkor:

Med Neumann-villkor blir vårt SLP

$$\begin{cases} -y'' - \lambda y = 0, & 0 < x < L, \\ y'(0) = 0, \\ y'(L) = 0. \end{cases}$$

Genom att räkna enligt de fyra stegen från avsnitt 6.1 finner vi att lösningarna blir cosinusformade.

Egenvärdena är

$$\lambda_n^{\text{NN}} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2,$$

med tillhörande egenfunktioner

$$y_n(x) = A \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

där  $n = 0, 1, 2, \dots$

### 7.1.3 Blandade villkor:

Vi kan även ha Dirichlet-villkor i ena änden och Neumann-villkor i andra änden. Vårt SLP blir då

$$\begin{cases} -y'' - \lambda y = 0, & 0 < x < L, \\ y(0) = 0, \\ y'(L) = 0. \end{cases}$$

Vi använder de fyra stegen och får resultatet att egenvärdena blir

$$\lambda_n^{\text{DN}} = \left(\frac{\pi/2 + n\pi}{L}\right)^2,$$

med tillhörande egenfunktioner

$$y(x) = B \sin\left(\frac{\pi/2 + n\pi x}{L}\right),$$

där  $n = 1, 2, 3, \dots$ .

## 7.2 När $p$ , $q$ och $r$ antar andra värden:

I fallen ovan antogs  $p = r = 1$  och  $q = 0$ . Vi ska nu undersöka vad som händer med lösningarna när koefficienterna är fortsatt konstanta men antar andra värden än 1 och 0. I ett sådant fall blir differentialekvationen

$$-py'' + qy = \mu r y,$$

på intervallet  $[0, L]$ . För tydlighets skull låter vi egenvärdet i ekvationen betecknas med  $\mu$ .

Genom att lösa ut  $-y''$  fås

$$-y'' = \frac{\mu r - q}{p} y.$$

För att förenkla uttrycket inför vi parametern

$$k^2 = \frac{\mu r - q}{p},$$

så att differentialekvationen kan skrivas på formen

$$-y'' - k^2 y = 0.$$

Denna ekvation har den generella lösningen

$$y(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx).$$

De tillåtna värdena på  $k$  bestäms av randvillkoren.

Vid Dirichlet-villkor fås

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

och vid Neumann-villkor fås

$$k = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Vi kan nu bryta ut  $\mu$  ur

$$\frac{\mu r - q}{p} = \frac{n^2 \pi^2}{L^2},$$

och få

$$\mu = \frac{q}{r} + \frac{p n^2 \pi^2}{r L^2},$$

vilket är vårt egenvärde  $\lambda_n$ .

De tillhörande egenfunktioner är

$$y_n(x) = \begin{cases} B \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & n = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{Dirichlet}), \\ A \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right), & n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{Neumann}). \end{cases}$$

Notera att egenfunktionerna är desamma som i standardfallet  $p = r = 1$  och  $q = 0$ . Det är enbart egenvärdena som förändras.

## 8 Diskussion och slutsats

I denna uppsats har vi undersökt grunderna i Sturm-Liouville-teorin utifrån antagandet att koefficienterna  $p, q$  och  $r$  är konstanta. Med det antagandet kan vi nå en grundläggande förståelse för hur Sturm-Liouville-problem fungerar och kan lösas. Som vi nämnde i början av uppsatsen innebär konstanta koefficienter att Sturm-Liouville-problemen kan lösas explicit. Däremot är det värt att nämna att det finns fall då differentialekvationer inte har konstanta koefficienter, men ändå är explicit lösbara.

Exempelvis är de så kallade Hermitepolynomen lösningar till en Sturm-Liouville-ekvation med icke-konstanta koefficienter. Hermitepolynomen löser en differentialekvation som kan skrivas enligt  $-(e^{-x^2} y_n')' = 2ne^{-x^2} y_n$  på Sturm-Liouville-form. Vi ser att koefficienterna är funktioner av  $x$ . Trots detta är ekvationen explicit lösbar. Även Laguerrepolytom och Jacobipolytom är exempel på lösningar till differentialekvationer med icke-konstanta koefficienter. Samtliga tre nämnda polynom är så kallade ortogonala polynom.

I praktiska tillämpningar förekommer ofta icke-konstanta koefficienter där lösningarna inte går att bestämma explicit. Teorin utgör då ett användbart ramverk även i de fall då explicita lösningar saknas. Kunskap om egenfunktionernas och egenvärdenas egenskaper, tillsammans med Sturms jämförelsesats, ger möjlighet att analysera och lösa mer generella Sturm-Liouville-problem.

## Referenser

- [AA15] Shair Ahmad and Antonio Ambrosetti. *A Textbook on Ordinary Differential Equations*. Springer, 2015.
- [For] Formelsamlingen. Harmonisk svängningsrörelse. <https://www.formelsamlingen.se/alla-amnen/fysik/mekanik/harmonisk-svangningsrorelse>. Hämtad: 2025-12-22.
- [Hil69] Einar Hille. *Lectures on Ordinary Differential Equations*. Addison-Wesley Publishing Company, 1969.
- [SK11] George F. Simmons and Steven G. Krantz. *Differentialekvationer: med historik*. Liber, first edition, 2011.
- [SS12] Gunnar Sparr and Annika Sparr. *Kontinuerliga system*. Studentlitteratur, 2:8 edition, 2012.
- [Tes12] Gerard Teschl. *Ordinary Differential Equations and Dynamical Systems*. the American Mathematical Society, 2012. URL: <https://www.mat.univie.ac.at/gerald/ftp/book-ode/ode.pdf>.
- [Wik] Wikipedia. Hermitepolynom. <https://sv.wikipedia.org/wiki/Hermitepolynom>. Hämtad: 2026-01-23.