STOCKHOLMS UNIVERSITET
Matematiska institutionen
MM2002 Matematik för naturvetenskaper I
Examinator: Jonathan Rohleder

Tentamensskrivning
2023-01-19

Tillåtna hjälpmedel: inga. Samtliga svar måste motiveras. 15 poäng ger säkert minst betyget E.

---

1. **(2+3 p.)** (a) Bestäm derivatan till $f(x) = xe^{\sqrt{x^3}}$; förenkla så långt som möjligt.

   (b) Betrakta funktionen $g(x) = \frac{1}{\sqrt{(x+2)(x+4)}}$, där $0 < x < 2$. Beräkna volymen av den kropp, som uppstår, när grafen till g roteras runt x-axeln

2. **(5 p.)** För varje $a \in \mathbb{R}$ bestäm antalet lösningar till det linjära ekvationssystemet $AX = B$, där $X \in \mathbb{R}^3$,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a-1 \\ -2a-6 & a+4 & 2a+6 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \qquad \text{och} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. **(2+3 p.)** Beräkna följande gränsvärden eller visa att de inte existerar:

$$\lim_{x\to+\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\cos(x), \qquad \lim_{x\to-1}\left(\frac{x^2-5x-2}{x^3-x^2-x+1} - \frac{1}{x+1}\right).$$

4. **(2+3+1 p.)** Betrakta funktionen $f(x) = \frac{x^2-4}{x+3}$, där $x \neq -3$.

   (a) Finn alla lokala minimi- och maximipunkter till f.

   (b) Beräkna funktionens nollställen och undersök gränsvärdesbeteendet av f vid $\pm\infty$ samt vid $x = -3$.

   (c) Rita grafen av f. (Tips: $\sqrt{5} \approx 2,24$.)

5. **(3+1 p.)** I en regelbunden sexhörning betecknas hörnen A, B, C, D, E, F (i ordning moturs). Vektorerna $\vec{e}_1 = \overline{AB}$ och $\vec{e}_2 = \overline{AF}$ utgör tillsammans en bas i planet, och detsamma gäller för vektorerna $\vec{f}_1 = \overline{AC}$ och $\vec{f}_2 = \overline{AD}$.

   (a) Uttryck vektorerna $\vec{f}_1, \vec{f}_2$ i basen $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

   (b) Om vektorn $\vec{u}$ har koordinater $(2, -2)$ i basen $(\vec{f}_1, \vec{f}_2)$, vilka koordinater har då $\vec{u}$ i basen $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$?

6. **(3+2 p.)**

   (a) Bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet $yy' + \frac{1}{x^2} = 0$, $y(1) = -4$.

   (b) Beräkna den allmänna lösningen till differentialekvationen $y'' + 5y' - 14y = 0$.

Tentamensåterlämning annonseras på kurshemsidan.

Lycka till!