MATEMATISKA INSTITUTIONEN
STOCKHOLMS UNIVERSITET
Avd. Matematik
Examinator: Rikard Bøgvad

Lösningar till tentamensskrivning i
Matematik II, Analys B , 7,5 hp
25 augusti 2021

1. a) Vi använder variabelbyte $\bar{x} = 2x + By + 33z,\ \bar{y} = y + 21z,\ \bar{z} = 4z$ som är ekvivalent med $z = \bar{z}/4,\ y = \bar{y} - 21\bar{z}/4,\ x = \bar{x}/2 - B/2(\bar{y} - 21\bar{z}/4) - 33\bar{z}/8 = \bar{x}/2 - B\bar{y}/2 + (21B - 33)\bar{z}/8$. Då gäller att

$$\mathcal{I} := \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-(2x+By+33z)^2}}{(1+(y+21z)^2)(1+(4z)^2)} dxdydz = \iiint_{\mathbb{R}^3} \frac{|J| \cdot -e^{\bar{x}^2}}{(1+\bar{y}^2)(1+\bar{z}^2)} d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z}$$

där J är funktionaldeterminanten av variabelbytet. Den ges av

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial x}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial y}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial z}{\partial \bar{x}} & \frac{\partial z}{\partial \bar{y}} & \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{B}{2} & \frac{21B-33}{8} \\ 0 & 1 & -\frac{21}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{8}.$$

Vidare får man

$$\mathcal{I} = \frac{1}{8} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{1+y^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{dz}{1+z^2}.$$

Notera att $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ och $\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{1+y^2} = \pi$. Detta ger

$$\mathcal{I} = \frac{\pi^{5/2}}{8}.$$

b) Variabelbytet $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) = \sigma(x, y, z)$ har en funktionaldeterminant J. Denna är en konstant skild från 0, eftersom σ är en lineär bijektiv transformation. Om K_n är en uttömmande följd av slutna delmängder till $\mathbb{R}^3$, så är (p g a bijektiviteten) också $\sigma(K_n)$ en uttömmande följd. Alltså är

$$\lim_{n\to\infty} \int\int\int_{K_n} f(\sigma(x, y, z)) dxdydz = \lim_{n\to\infty} \int\int\int_{\sigma(K_n)} f((\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}))|J| d\bar{x}d\bar{y}d\bar{z},$$

från vilket vi ser att de två generaliserade integralerna i uppgiften konvergerar(eller divergerar) samtidigt.

2. a) Ja, randen av området $u^2 + v^2 \leq 1$ är enhetscirkeln, som ju är parametriserad t ex av $t \mapsto (\cos t, \sin t),\ t \in [0, 2\pi]$. Enhetscirkelnavbildas ju på randen av Y, så en uppenbar parametrisering är $t \mapsto \mathbf{r}(t) := (\cos t, \sin t, \cos t),\ t \in [0, 2\pi]$.

b) Med parametriseringen från a) är $\mathbf{r}'(t) := (-\sin t, \cos t, -\sin t)$ och alltså är

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int_0^{2\pi} (\cos t - (B+1)\sin t) dt = 0.$$

Alternativt kunde man ha använt Stokes sats: eftersom $\mathbf{F}$ är konstant så är $\mathbf{rotF} = 0$ och då är

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{dr} = \int\int_Y \mathbf{rotF} \cdot N dS = 0.$$

c) Genom att titta på parametriseringen av ytan ser man att ytan ligger i planet $x = z$, och alltså är planets normal $(1, 0, -1)$ också en normal till ytan. Den har längden $1/\sqrt{2}$ och alltså är en enhetsnormal till Y $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$.

d) Enligt teorin är arean av Y given av integralen

$$\int\int_D |\mathbf{s}'_\mathbf{u} \times \mathbf{s}'_\mathbf{v}| du dv = \int\int_D \sqrt{2} du dv = \sqrt{2}\pi,$$

där D är cirkelskivan $u^2 + y^2 \leq 1$ (som har area π) och $\mathbf{s}$ är den givna parametriseringen av ytan.

3. a) Vi behöver bestämma real- och imaginärdelarna av $f(z)$. Man får

$$f(z) = z^3 = (x+iy)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3 i = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$$

vilken ger $\Re_f = x^3 - 3xy^2$ och $\Im_f = 3x^2y - y^2 3$. Cauchy-Riemanns ekvationer ges av $\frac{\partial \Re_f}{\partial x} = \frac{\partial \Im_f}{\partial y}$ och $\frac{\partial \Re_f}{\partial y} = -\frac{\partial \Im_f}{\partial x}$. Med hjälp av substitution är det lätt att kontrollera att dessa gäller.

b) Eftersom $f(z)$ är ett polynom i z för att få dess potensutveckling kring $z = 1$ borde man endast byta variabel till $z = u + 1$ vilket ger

$$f(z) = z^3 = (1+u)^3 = 1 + 3u + 3u^2 + u^3.$$

Sista uttrycket är potensutveckligen kring $z = 1$.

c) Vi behöver beräkna $\int_\gamma z^3 dz$ där γ är en rätt sträcka som sammanbinder origo med $1+i$. Eftersom z^3 är analytisk och saknar singulariteter får man

$$\int_\gamma z^3 dz = \frac{z^4}{4}\Big|_0^{1+i} = \frac{(1+i)^4}{4} = -1.$$

d) Eftersom $f(z)$ är analytisk och utan singulariteter kommer integralen har samma värde för alla kurvor som sammanbinder 0 och $1+i$.

e) För att beräkna integralen använder vi residykalkylen och får

$$\int_C \frac{B+2}{z^2-3z+2} dz = \int_C \frac{B+2}{(z-1)(z-2)} dz = 2\pi i \cdot \mathrm{Res} \frac{B+2}{z^2-3z+2}\Big|_{z=1} = 2\pi i \lim_{z\to 1} \frac{(B+2)(z-1)}{(z-1)(z-2)} = -2\pi i(B+2).$$

4. a) Konvergensradie av en potensserie $\sum a_n z^n$ kan beräknas som $R = \lim_{n\to\infty} |\frac{a_n}{a_{n+1}}|$. I vårt fall får man

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{17}}{(n+1)^{17}} = 1.$$

b) För all $|z| < 0,5$ kan serien uppskattas uppåt med t.ex $\sum_{n=1}^{\infty} n^{17} \cdot (0,9)^n$ vilket medför likformig konvergens.

c) Att följden $f_n(x)$ konvergerar likformigt till $f(x)$ på $\mathbb{R}$ innebär att för varje $\epsilon > 0$ finns det n_ϵ så att $|f_N(x) - f(x)| < \epsilon$ för alla $x \in \mathbb{R}$ och $N \geq n_\epsilon$. Speciellt får man att följden $f_n(x)$ också är begränsad. För $\epsilon = 1$ och $N \geq n_1$ att

$$|f_N(x) - f(x)| < 1 \implies |f_n(x)| \leq |f_N(x) - f(x)| + |f(x)| \leq M + 1,$$

för alla x.
Betrakta nu följden $((n+1)/n)f_n(x)$ och skillnaden

$$|((n+1)/n)f_n(x) - f(x)| = |(f_n(x) - f(x)) + f_n(x)/n| \leq |(f_n(x) - f(x))| + |f_n(x)/n| \leq |(f_n(x) - f(x))| + M/n.$$

Givet $\epsilon > 0$ kan man välja $n_{\epsilon/2}$ så att för alla $N \geq m_\epsilon$ gäller att $|f_N(x) - f(x)| < \epsilon/2$ samt $|M/n| < \epsilon/2$. Med hjälp av triangelolikheten fås då

$$|((n+1)/n)f_n(x) - f(x)| \leq |f_N(x) - f(x)| + M/n \leq \epsilon.$$

Alltså konvergerar $((n+1)/n)f_n(x)$ likformigt mot $f(x)$.

5. a) Parametrisera ellipsen med $x = \cos\theta,\ y = (1/4)\sin\theta$. Då blir kurvintegralen

$$\int_C ydx + Bxdy = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4}\sin\theta(-\sin\theta) + B\cos\theta(\frac{1}{4}\cos\theta)d\theta.$$

En primitiv funktion till $-\frac{1}{4}(\sin^2\theta - B\cos^2\theta)$ fås genom att ersätta $\sin^2\theta$ med $1-\cos^2\theta$ och utnyttja formeln för $\cos 2\theta$. Resultatet blir att den sista integralen är

$$[\frac{B-1}{8}\theta + (\frac{B+1}{16})\sin 2\theta]_0^{2\pi} = [\frac{B-1}{8}\theta]_0^{2\pi} = \frac{B-1}{4}\pi$$

(den första likheten eftersom $\sin 2\theta$är periodisk).

b) Antag att vi har en parametrisering $(x(t), y(t))$av kurvan. Då är $(x(t))^2 + 16(y(t))^2 = 1$ och om vi deriverar detta får vi att

$$2x'(t)x(t) + 2\cdot 16y'(t)y(t) = 0,$$

vilket kan tolkas som att skalärprodukten mellan tangentvektorn $(x'(t), y'(t))$ (i punkten $(x(t), y(t))$ på C) och $v(t) = (x(t), 16y(t))$ är 0. Alltså är $v = (x, 16y)$ en normalvektor till kurvan i punkten (x, y)(nu kan vi ju glömma parametriseringen). En enhetsnormal är då $N = \frac{1}{\sqrt{x^2+(16y)^2}}(x, 16y)$.

c) Ett nödvändigt villkor för att differentialformen ska vara exakt är att $\frac{\partial y}{\partial y} = \frac{\partial Bx}{\partial x}$, eller att $1 = B$. Detta villkor är också tillräckligt eftersom differentialformen är definierad i ett enkelt sammanhämgande område, nämligen $\mathbb{R}^2$. Svaret är alltså, precis när $B = 1$.(Alternativt kan man försöka hitta potentialen med integration—det löser också kvickt problemet, med samma resultat, förstås.)

d) Konsultera boken.

6. a) Y är en sfär, så en normal i punkten (x, y, z) ärt ex $v = (x, y, z)$. Alternativt kan man använda sfärens ekvation som i uppgift 5b) ovan. Sen normaliserar vi v(genom att dela med $\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{2}$ på ytan), ger den rätt riktning(genom att multiplicera med -1), och får som resultat att $N = -\frac{1}{\sqrt{2}}(x, y, z)$ är den önskade enhetsnormalen.

b) Vi kan använda Gauss sats: $div\mathbf{F}(x, y, z) = 2 + 2z + 3z^2$, och alltså är den sökta integralen lika med integralen $\int\int\int_K (2 + 2z + 3z^2)dxdydz$. Nu är $\int\int\int_K 2dxdydz = 2\cdot\frac{4}{3}\pi(\sqrt{2})^3 = \frac{16\sqrt{2}\pi}{3}$, och av symmetriskäl är $\int\int\int_K 2zdxdydz = 0$. Återstår att beräkna

$$\int\int\int_K 3z^2dxdydz = 6\int_0^{\sqrt{2}}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}(r\cos\phi)^2r^2\sin\phi drd\theta d\phi = 6\int_0^{\sqrt{2}} r^4dr\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi/2}(\cos\phi)^2\sin\phi d\phi$$

(för den första likheten var vi utnyttjat att integralen är dubbelt så stor som integralen över övre halvklotet—det förenklar räkningen något). Den första integralen i produkten är $\frac{4}{5}\sqrt{2}$, den andra är 2π och den tredje är $1/3$. Alltså är hela integralen $\frac{48}{15}\pi\sqrt{2}$, och tillsammans med integralen nyss får vi alltså svaret att den sökta ytintegralen har värdet $128\sqrt{2}\pi/15$.

c) Konsultera boken.