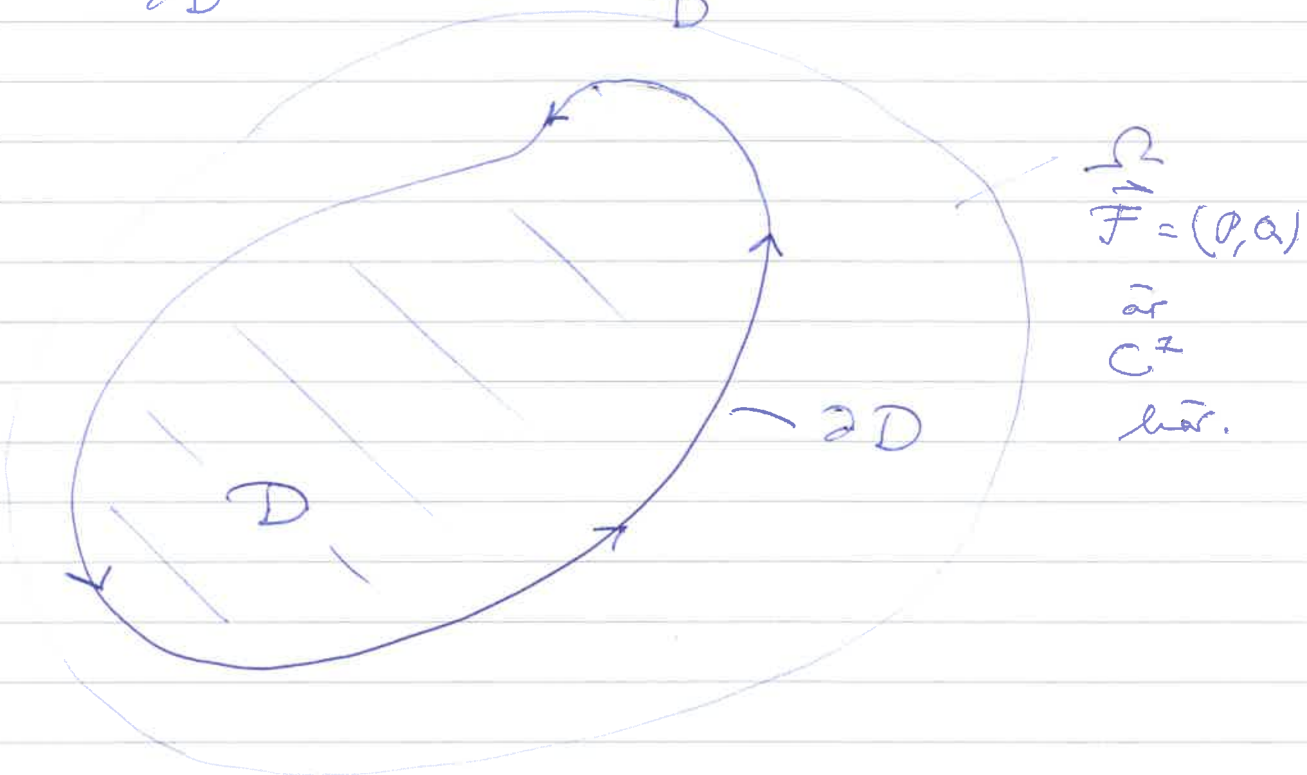
Sats (Greens formel)

Antag $\vec{F} = (P, Q)$ där $P, Q \in C^1(\Omega)$ och Ω är öppen mängd i $\mathbb{R}^2$.

Antag D kompakt delmängd till Ω med rand ∂D som består av en (eller flera) C^1-kurvor med positiv orientering.

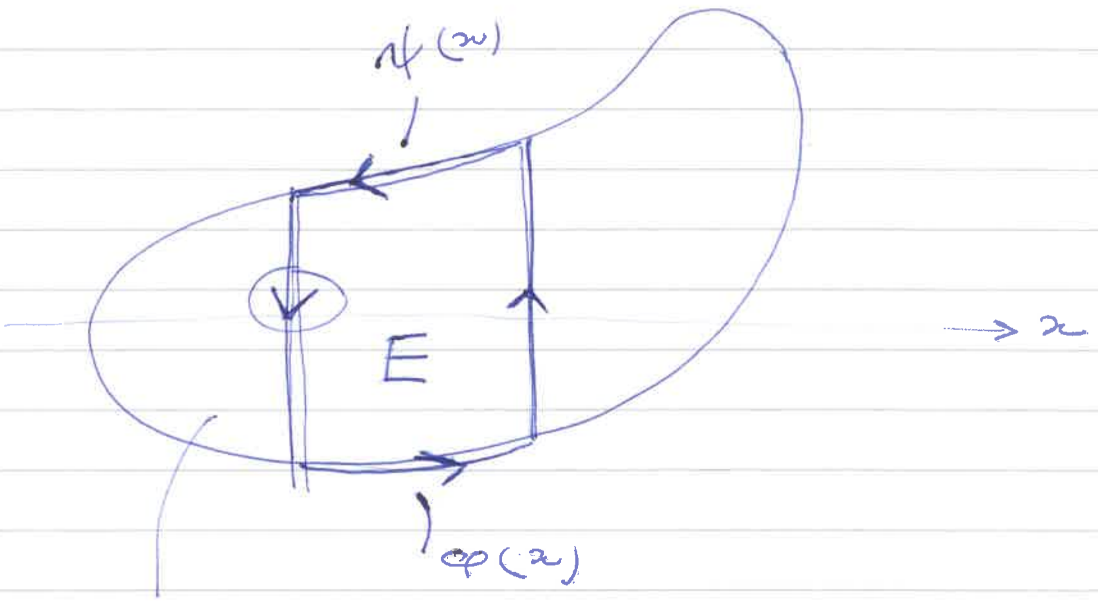
Då gäller

$$\int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy.$$



Bevis: Dela upp D i områden av typen

$$E = \{(x,y) : \varphi(x) \leq y \leq \psi(x),\ a \leq x \leq b\}.$$



Genomför argument på varje E, ~~sätt~~ sedan ihop.

Vill visa

$$\int_{\partial E} P\,dx = \iint_{E} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy,$$

obs!

gör sedan motsvarande för Q fast med uppdelning i y.

Gå från dubbelintegralen:

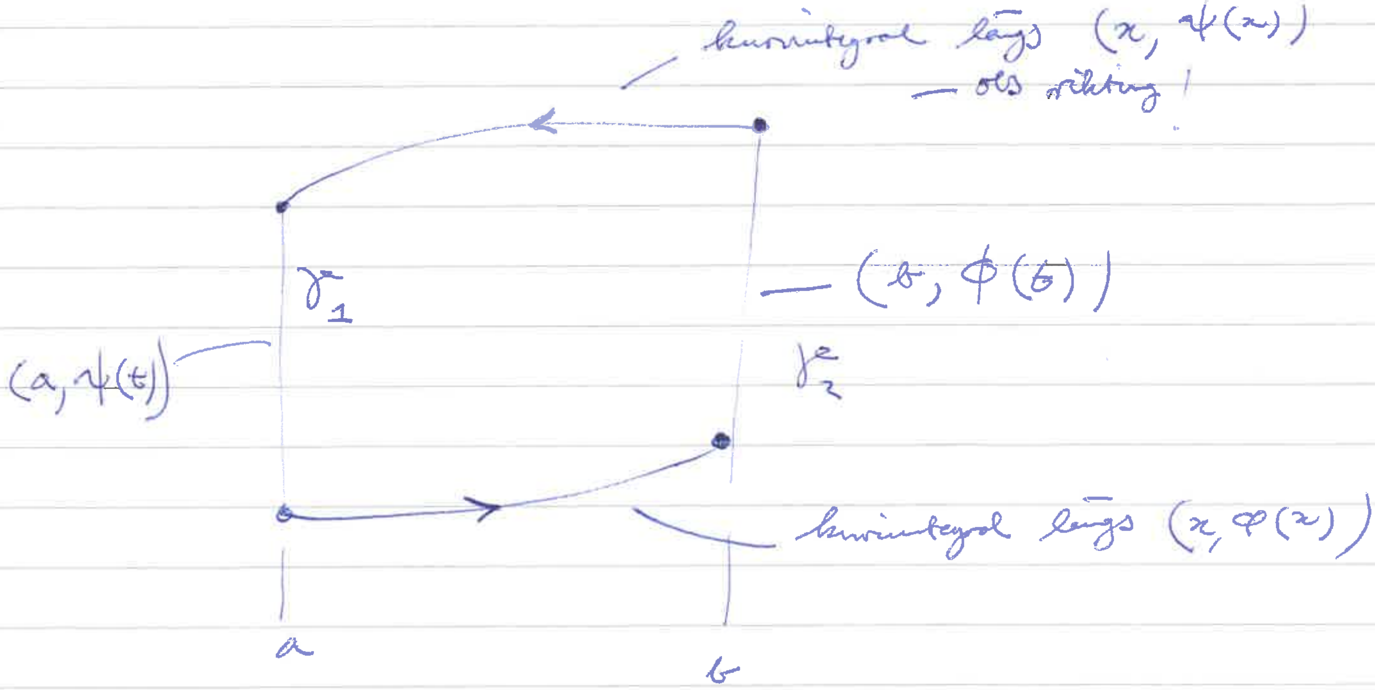
$$\iint_E -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{x=a}^{b} \left\{ \int_{y=\varphi(x)}^{\psi(x)} -\frac{\partial P}{\partial y}\,dy \right\} dx$$

$$= \{ \text{analysens huvudsats} \}$$

$$= \int_{x=a}^{b} \Big[-P(x,y) \Big]_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dx$$

$$= \int_a^b +P(x,\varphi(x))\,dx$$

$$+ \int_a^b -P(x,\psi(x))\,dx$$



Vi får inga bidrag längs de vertikala linjerna,

ty
$$\int_{\gamma_{1,2}} P\,dx = \int P(a,\phi(t)) \cdot 0 \cdot dt = 0.$$

Således:

$$\iint_E -\frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

$$= \int_a^b P(x,\varphi(x))\,dx$$

$$+ \int_a^b -P(x,\psi(x))\,dx$$

$$= \int_a^b P(x,\varphi(x))\,dx - \int_a^b P(x,\psi(x))\,dx$$

$$+ 0 + 0$$

$$= \int_{\partial E} P\,dx.$$

▷ Sätt ihop allt för att få

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial D} P\,dx + Q\,dy.$$

$\boxtimes$