Exempel: Beräkna flödet av vektorfältet

$$\vec{u} = (x, 0, z)$$

ut genom ytan $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$

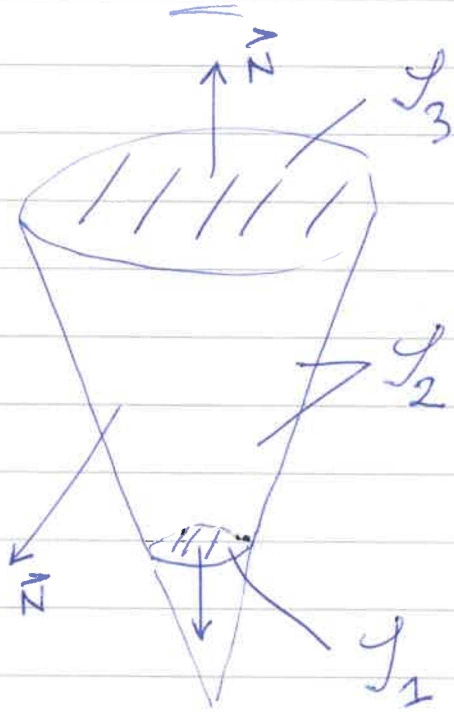
där

$$S_1 = \{(x, y, 1) : x^2 + y^2 \le 1\}$$

$$S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 0, \ 1 \le z \le 2\}$$

och $S_3 = \{(x, y, 2) : x^2 + y^2 \le 4\}$.

Skiss



Vi räknar först ut flödet genom S_1.

En utåtriktad normal ges av $\vec{N} = (0, 0, -1)$.

Nu fås

$$\vec{u} \cdot \vec{N} = (x, 0, 3) \cdot (0, 0, -1) = -3$$

och på S_1 har vi därmed $\vec{u} \cdot \vec{N} = -1$.

Således fås

$$\iint_{S_1} \vec{u} \cdot \vec{N} \, dS = \iint_{\{x^2+y^2 \leq 1\}} (-1) \, dx dy = \underline{\underline{-\pi}}.$$

Ytan S_3 har en utåtriktad normal

$$\vec{N} = (0, 0, 1)$$

vilket ger $\vec{u} \cdot \vec{N} = (x, 0, z) \cdot (0, 0, 1)$

$$= z = \{z = 2 \text{ på } S_3\} = 2.$$

Alltså har vi

$$\iint_{S_3} \vec{u} \cdot \vec{N} \, dS = \iint_{\{x^2+y^2 \leq 4\}} 2 \, dx dy$$

$$= 2 \cdot 4\pi = \underline{\underline{8\pi}}.$$

A.S.

S_2 är svårare. Vi kan skriva S_2 som parameteryta

$$\{(x, y, +\sqrt{x^2+y^2}) : 1 \le x^2+y^2 \le 4\}$$

vilket i polära koordinater blir

$$\{(r\cos\theta, r\sin\theta, r) : 1 \le r \le 2, 0 \le \theta \le 2\pi\}.$$

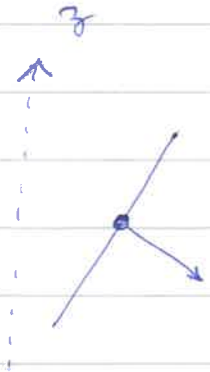
Detta ger insatt i $\vec{u}$

$$\vec{u} = (r\cos\theta, 0, r).$$

Skriv (då vi redan använt r)

$$\vec{\rho} = (r\cos\theta, r\sin\theta, r)$$

och beräkna



$$\vec{\rho}\,'_r = (\cos\theta, \sin\theta, 1)$$

$$\vec{\rho}\,'_\theta = (-r\sin\theta, r\cos\theta, 0).$$

Vi får nu en normal genom ~~att~~ att beräkna

$$\vec{\rho}\,'_r \times \vec{\rho}_\theta = \dots = r(\cos\theta, \sin\theta, -1)$$

Sista komponenten är negativ, så vi får utåtriktad normal.

A.J.

Vi har

$$\vec{u} \cdot \vec{N} = \vec{u} \cdot (\vec{\rho}\,'_r \times \vec{\rho}\,'_\theta)$$

$$= (r\cos\theta, 0, r) \cdot (r\cos\theta, r\sin\theta, -r)$$

$$= r^2\cos^2\theta - r^2$$

$$= r^2(\cos^2\theta - 1)$$

$$= -r^2\sin^2\theta.$$

Vi erhåller då

$$\iint_{S_2} \vec{u} \cdot \vec{N}\, dS = \int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=1}^{2} -r^2 dr\right)\sin^2\theta\, d\theta$$

$$= -\pi \cdot \left(\frac{8}{3} - \frac{1}{3}\right) = -\frac{7\pi}{3}.$$

Till sist får vi

$$\iint_{S} \vec{u} \cdot \vec{N}\, dS = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3}$$

$$= -\pi - \frac{7\pi}{3} + 8\pi = \underline{\underline{\frac{14\pi}{3}}}.$$

Med Gauss sats:

Vi har

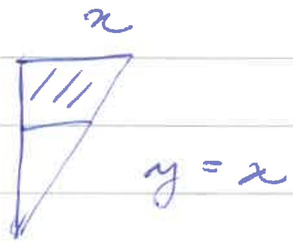
$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial u_3}{\partial z}$$

$$= 1 + 0 + 1 = 2$$

$$\therefore \iiint_K \operatorname{div} \vec{u} \, dx\,dy\,dz = \iiint_K 2 \, dx\,dy\,dz$$

$$= 2 \operatorname{vol} K,$$

där K är en stympad kon.



$$\pi \frac{x^3}{3}$$

$$2 \cdot \operatorname{vol} K = 2 \cdot \left\{ \pi \frac{8}{3} - \pi \frac{1}{3} \right\} = \underline{\underline{\frac{14\pi}{3}}}.$$